UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO
Facultad de Ciencias Exactas Físico-Química y Naturales

Tesis para acceder al título de
Magister en Matemática Aplicada

CONTROLES ÓPTIMOS SIMULTÁNEOS EN PROBLEMAS PARABÓLICOS CON CONDICIONES DE FRONTERA MIXTAS

Lic. Carolina María Bollo

DIRECTORA: Dra. Claudia M. Gariboldi

CODIRECTOR: Dr. Domingo A. Tarzia

Río Cuarto, 9 de Diciembre de 2019

Dedicada con amor a mi
pequeña gran luchadora Julia.

Índice general

Agradecimiento

Quiero agradecer a todas las personas que me han acompañado, brindándome apoyo y cariño durante todos estos años.

En primer lugar agradezco a mi familia, en especial a mi esposo Diego y mi madre Evelina por estar siempre a mi lado brindándome su amor, contención y apoyo incondicional.

En segundo lugar agradezco a mi directora Dra. Claudia Gariboldi por su dedicación, paciencia y esfuerzo, por escucharme y guiarme, por ser un ejemplo de desarrollo profesional, y por estimularme siempre a continuar mi formación.

También agradezco al Dr. Domingo Tarzia por su predisposición para codirigirme.

Finalmente, y no por ello menos importante, agradezco a todos los compañeros y docentes que tuve durante el cursado de la Maestría en Matemática Aplicada que dictó el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas Físico-Química y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto ya que hicieron que sea posible disfrutar del trabajo y del estudio, y que gracias a muchos de ellos pude llegar a esta instancia en mi vida.

Con todo cariño, Carolina.

Resumen

Esta tesis consiste en el estudio teórico de problemas de control óptimo vinculados a sistemas evolutivos de conducción del calor con condiciones de frontera mixtas en un dominio multidimensional acotado Ω. La misma se desarrolla en cuatro capítulos, los cuales se detallan a continuación. En el capítulo 1, se dan definiciones y resultados preliminares, que son necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos. En el capítulo 2, se formula un problema de control óptimo *frontera* sobre el flujo de calor ligado a un sistema evolutivo P con condiciones de frontera mixtas (Dirichlet-Neumann) y una familia de problemas de control óptimo *frontera* relacionados a problemas evolutivos P_α con condiciones de frontera mixtas (Robin-Neumann), donde α es el coeficiente de transferencia del calor definido sobre una porción de la frontera. Se demuestra existencia y unicidad de los controles óptimos $\overline{q}$ y $\overline{q}_\alpha$ (para cada $\alpha > 0$), respectivamente, se dan las condiciones de optimalidad de primer orden y se prueba que los controles óptimos $\overline{q}_\alpha$, los estados del sistema $u_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ y estados adjuntos $p_{\alpha\overline{q}_\alpha}$, convergen fuertemente a $\overline{q}$, $u_{\overline{q}}$ y $p_{\overline{q}}$ respectivamente, cuando $\alpha \to \infty$, en adecuados espacios de Sobolev. En el capítulo 3, al igual que en el anterior, se consideran los problemas P y P_α (para cada $\alpha > 0$) y se formulan problemas de control óptimo simultáneo *distribuido-frontera*, donde la variable de control es el vector (g, q) con g la energía interna del sistema y q el flujo de calor. Se demuestra existencia y unicidad del control óptimo simultáneo $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ para el problema P y $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ para el problema P_α, para cada $\alpha > 0$, se dan condiciones de optimalidad y se prueban resultados de convergencia similares a los del capítulo 2. En el capítulo 4, se obtienen estimaciones entre las soluciones de los problemas de control óptimo simultáneo *distribuido-frontera* trabajados en el capítulo 3 con las soluciones de los problemas de control óptimo *frontera* considerados en el capítulo 2 y los problemas de control óptimo *distribuido* estudiados en [10].

Summary

This thesis consist in the theoretical study of the optimal control problem in relation to the non-stationary heat conduction system with mixed boundary condition in a multidimensional bounded domain Ω. This is developed in four chapters, which are detailed as follows. In chapter 1, we give definitions and preliminary results, which are necessary for the development of the following chapters. In chapter 2, we formulate a *boundary* optimal control problem on the heat flux associated with a non-stationary system P with mixed boundary conditions (Dirichlet-Neumann) and a family of *boundary* optimal control problems in relation to non-stationary systems P_α with mixed boundary conditions (Robin-Neumann), where α is the heat transfer coefficient defined on a portion of the boundary. We prove existence and uniqueness of the optimal controls $\overline{q}$ and $\overline{q}_\alpha$ (for each $\alpha > 0$), respectively, we give the first order optimality condition and we prove that the optimal controls $\overline{q}_\alpha$, the system states $u_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ and adjoint states $p_{\alpha\overline{q}_\alpha}$, are strongly convergent to $\overline{q}$, $u_{\overline{q}}$ and $p_{\overline{q}}$ respectively, when $\alpha \to \infty$, in suitable Sobolev spaces. In chapter 3, similarly to the above, we consider the problems P and P_α (for each $\alpha > 0$) and we formulate simultaneous *distributed-boundary* optimal control problems, where the control variable is the vector (g, q) with g the internal energy of the system and q the heat flux. We prove existence and uniqueness of the simultaneous optimal control $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ for the problem P and $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ for the problem P_α, for each $\alpha > 0$, we give the optimality condition and we prove similar convergence results to chapter 2. In chapter 4, we obtain estimates beetwen the solutions of the simultaneous *distributed-boundary* optimal control problems worked in chapter 3 with the solutions of the *boundary* optimal control problems considered in chapter 2 and the *distributed* optimal control problems studied in [10].

Introducción

En el presente trabajo de tesis se estudian, desde un punto de vista teórico, problemas de control óptimo vinculados a sistemas evolutivos de conducción del calor. Más precisamente, se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera Γ es regular y consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ y $med(\Gamma_2) > 0$. Se denota con $med(\Gamma_i)$, para $i = 1, 2$, la medida Hausdorff $(n-1)-$dimensional de Γ y sea $[0, T]$ un intervalo de tiempo, para algún $T > 0$.

Se presentan los siguientes problemas evolutivos de conducción del calor P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad u\Big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{2}$$

donde u es la temperatura en $\Omega \times (0, T)$, g es la energía interna del sistema en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura en la zona externa de Γ_1 para (2), $v_b = b$ en Γ_1, q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia del calor sobre Γ_1, que satisfacen los siguientes supuestos:

$$g \in \mathcal{H} := L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad q \in \mathcal{Q} := L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \quad \text{y} \quad b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Sea X un espacio de Banach, se denota por $L^p(0, T; X)$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, al espacio de funciones medibles y tal que $y : [0, T] \to X$. Por simplicidad, generalmente, se usa $L^p(X)$ en lugar de $L^p(0, T; X)$.

Las formulaciones variacionales de los problemas parabólicos (1) y (2), vienen dadas por:

$$\begin{cases} u - v_b \in L^2(V_0), \qquad u(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u} \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}(t), v \rangle + a(u(t), v) = L(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u \in L^2(V), \qquad u(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u} \in L^2(V') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}(t), v \rangle + a_\alpha(u(t), v) = L_\alpha(t, v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad entre un espacio funcional (V ó V_0) y su espacio dual (V' ó V_0') y

$$\begin{gathered} V := H^1(\Omega); \qquad V_0 := \{v \in V : \, v\big|_{\Gamma_1} = 0\}; \qquad Q := L^2(\Gamma_2); \quad H := L^2(\Omega); \\ (g, h)_H = \int_\Omega gh \, dx; \quad (q, \eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta \, d\gamma; \\ a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v dx; \quad a_\alpha(u, v) := a(u, v) + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} uv d\gamma; \\ L(t, v) := (g(t), v)_H - (q(t), v)_Q; \quad L_\alpha(t, v) := \, L(t, v) + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} bv d\gamma. \end{gathered} \tag{5}$$

Se considera $\mathcal{H} := L^2(H)$, con norma $||.||_{\mathcal{H}}$ y producto interno $(g, h)_{\mathcal{H}} = \int\limits_0^T (g(t), h(t))_H dt$, y el espacio $\mathcal{Q} := L^2(Q)$, con norma $||.||_{\mathcal{Q}}$ y producto interno $(q, \eta)_{\mathcal{Q}} = \int\limits_0^T (q(t), \eta(t))_Q dt$.
Se formulan los siguientes problemas de control óptimo frontera sobre el flujo de calor q, [9, 17]:

$$\text{hallar} \quad \overline{q} \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_1(\overline{q}) = \min_{q \in \mathcal{Q}} J_1(q), \tag{6}$$

$$\text{hallar} \quad \overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) = \min_{q \in \mathcal{Q}} J_{1\alpha}(q), \tag{7}$$

con los funcionales costo $J_1 : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{1\alpha} : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ definidos por:

$$J_1(q) := \frac{1}{2} \|u_q - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_{\mathcal{Q}}^2 \qquad \text{y} \qquad J_{1\alpha}(q) := \frac{1}{2} \|u_{\alpha q} - z_d\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_{\mathcal{Q}}^2$$

donde u_q y $u_{\alpha q}$ denotan las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente cuando se considera g un dato fijo y q como variable de control, $z_d \in \mathcal{H}$ es un elemento dado y M_2 es una constante positiva.
Por otro lado, se formulan los siguientes problemas de control óptimo simultáneo distribuido -frontera sobre la energía interna g y el flujo de calor q, [17]:

$$\text{hallar} \quad (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_2(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) = \min_{g \in \mathcal{H}, q \in \mathcal{Q}} J_2(g, q), \tag{8}$$

$$\text{hallar} \quad (\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) = \min_{g \in \mathcal{H}, q \in \mathcal{Q}} J_{2\alpha}(g, q), \tag{9}$$

donde los funcionales costo $J_2 : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{2\alpha} : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ están dados por:

$$J_2(g,q) := \frac{1}{2}||u_{gq} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}$$

$$J_{2\alpha}(g,q) := \frac{1}{2}||u_{\alpha gq} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}},$$

con u_{gq} y $u_{\alpha gq}$ las únicas soluciones de los problemas (3) y (4) respectivamente cuando se toma a g y q como variables de control, $z_d \in \mathcal{H}$ dado y M_1, M_2 constantes positivas.

El estudio de los problemas de control óptimo vinculados a sistemas de conducción del calor, tal como los planteados anteriormente, está motivado por el desarrollo que se describe a continuación.

En [12, 13], el autor estudia un problema estacionario de conducción del calor P con condiciones mixtas, tal como las dadas en (1) y en adición, considera una familia de problemas estacionarios de conducción del calor P_α para cada $\alpha > 0$, con condiciones de frontera como en (2). En [14], se prueba convergencia de las soluciones de la familia de problemas P_α a la solución del problema P, cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito. Posteriormente, en [6], los autores propusieron problemas de control óptimo distribuido sobre la fuente de energía relacionados a los problemas estacionarios de conducción del calor estudiados en [12, 13, 14] y probaron resultados de existencia y unicidad de solución de los mismos. Además, motivados por los resultados de convergencia obtenidos en [14], realizaron un estudio del comportamiento asintótico de los controles óptimos, de los estados del sistema y estados adjuntos, cuando α tiende a infinito. Luego, en [7], los mismos autores estudiaron problemas de control óptimo frontera sobre el flujo de calor q, probaron existencia y unicidad, e indagaron sobre el comportamiento asintótico de las soluciones óptimas cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito. Resultados similares fueron obtenidos por los mismos autores en [8] para problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera sobre la energía interna g y el flujo de calor q en problemas estacionarios. En [10], resultados de convergencia fueron probados para problemas de conducción del calor no estacionarios en relación a problemas de control óptimo distribuido sobre la energía interna g. En [1] y [2], se estudiaron problemas de control óptimo sobre la fuente g y el flujo q respectivamente, para inecuaciones variacionales parabólicas de segunda especie.

El objetivo principal de esta tesis es obtener resultados similares a los expuestos en [8] para problemas de conducción del calor no estacionarios.

El presente trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primer capítulo, se construye un marco teórico adecuado para estudiar las ecuaciones variacionales parabólicas y los problemas de control óptimo, introduciendo algunas definiciones y resultados de los espacios de Sobolev.

En el segundo capítulo, se presenta una familia de problemas de control óptimo donde la variable de control es el flujo de calor q para problemas de conducción del calor no estacionarios. Se prueba en primer lugar, existencia y unicidad de los controles óptimos. En segundo lugar, se da una condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema. Además, se muestra convergencia fuerte, en los espacios funcionales adecuados, de los controles óptimos, los estados del sistema y los estados adjuntos vinculados a los problemas P_α al correspondiente control óptimo, estado del sistema y estado adjunto del problema P, cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito.

En el tercer capítulo, se formulan problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera para problemas de conducción del calor no estacionarios, y se obtienen resultados similares a los descriptos en el capítulo 2.

En el cuarto capítulo, se consideran los problemas de control óptimo frontera (escalares) desarrollados en el capítulo 2, los problemas de control óptimo distribuido (escalares) estudiados en [10] y los problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera (vectoriales) trabajados en el capítulo 3 y se obtienen estimaciones entre las componentes de las soluciones de los problemas de control óptimo vectoriales y las soluciones de los problemas de control óptimo escalares. Además, se da una caracterización de la solución del problema de control óptimo simultáneo usando teoremas de punto fijo.

Finalmente, en el apéndice se exponen algunos resultados teóricos, que si bien no son propios de la teoría de control, son necesarios para demostrar resultados de la misma.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta material preliminar sobre espacios de Sobolev el cual será utilizado posteriormente. Se resumen definiciones y resultados sobre espacios de funciones evolutivos y se da un resultado de existencia y unicidad para un determinado problema de valor inicial. Los resultados se presentan sin pruebas ya que las mismas se pueden encontrar en las referencias.

1.1. Introducción a los espacios de Sobolev

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$. Se denota $C_c^\infty(\Omega)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, con soporte compacto en Ω.

Definición 1.1.1. (Derivada débil) Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, y sea β un multiíndice. Se dice que v es la β-derivada parcial débil de u, y se escribe

$$D^\beta u = v,$$

siempre que

$$\int_\Omega u D^\beta \varphi dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega v \varphi dx$$

para toda función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lema 1.1.2. (Unicidad de la derivada débil) Una β-derivada parcial débil de u, si existe, se define de forma única hasta un conjunto de medida cero.

Demostración. Ver [4]. $\square$

Definición 1.1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1, ..., n \right\}.$$

Se denota por $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ representa la derivada débil de u respecto de x_i.

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{L^p(\Omega)}$$

o de la norma equivalente

$$\left(||u||_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{n} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particular,

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(||u||_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(||u||_{L^2(\Omega)}^2 + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición 1.1.4. $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Demostración. Ver [3]. $\square$

Definición 1.1.5. Sea $1 \leqslant p < \infty$. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Se denota $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Se puede demostrar que las funciones de $W_0^{1,p}(\Omega)$ son las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω la cual se denota con Γ.

Observación 1.1.6. Dado que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, entonces $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma inducida por $H^1(\Omega)$. Del Teorema 1.1.9, se tiene que el espacio $H_0^1(\Omega)$ esta dotado de la norma

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

Se denota con $H^{-1}(\Omega)$ el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.1.7. (Espacios de Sobolev como espacios de funciones) Para cada $1 \leqslant p \leqslant \infty$, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [4]. □

Proposición 1.1.8. (Fórmula de Green) Si $u \in H^1(\Omega)$ con $\Delta u \in L^2(\Omega)$ y $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$ entonces

$$\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma.$$

Demostración. Ver [15]. □

La desigualdad de Poincaré es una consecuencia de la teoría de los espacios de Sobolev, llamada así por el matemático francés Henri Poincaré.

Teorema 1.1.9. (Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Existe una constante C (dependiente de Ω y de p) tal que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leqslant C||\nabla u||_{L^p(\Omega),} \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{para } 1 \leqslant p < \infty.$$

Demostración. Ver [4]. □

Teorema 1.1.10. (Trazas p=2) Sea Ω acotado en $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) y con frontera regular, entonces existe un operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ tal que

i) $\gamma_0(v) = v\big|_\Gamma$.

ii) γ_0 es lineal y continuo, esto es existe $c > 0$ tal que

$$||\gamma_0(v)||_{L^2(\Gamma)} \leqslant c||v||_{H^1(\Omega)}.$$

Se define $Im(\gamma_0) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Demostración. Ver [4]. □

En lo que sigue se introducen otro tipo de espacios de Sobolev, los cuales están compuestos por funciones que mapean el tiempo en espacios de Banach. Estos espacios resultan escenciales para trabajar con soluciones débiles de ecuaciones diferenciales lineales parabólicas. Para un tratamiento detallado de los mismos, se puede consultar [4, 18] y para aplicaciones ver [11].

1.2. Espacios Funcionales Evolutivos

Definición 1.2.1. Sea X un espacio de Banach y $0 < T < \infty$.

a) El espacio $C^m(0,T;X)$ con $m = 0, 1, ...$ consiste en todas las funciones continuas $u : [0,T] \to X$ que tienen derivada continua hasta el orden m en $[0,T]$ y verifican

$$||u||_{C^m(0,T;X)} = \sum_{i=0}^{m} \max_{0\leq t\leq T} \|u^{(i)}(t)\|_X < \infty. \tag{1.1}$$

b) $L^p(0,T;X)$ es el espacio de funciones medibles u tal que $u : [0,T] \to X$ definidas por $u(t)(x) = u(t,x)$ que verifican:

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \qquad \text{si} \quad p \in [1, +\infty), \tag{1.2}$$

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||u(t)||_X < +\infty, \qquad \text{si} \quad p = +\infty.$$

Generalmente, se usa $L^p(X)$ en lugar de $L^p(0,T;X)$.

Proposición 1.2.2. Sea $m = 0, 1, ...$ y $1 \leqslant p < \infty$. Si X es un espacio de Banach, entonces:

a) $C^m(0,T;X)$ con la norma (1.1) es un espacio de Banach.

b) $L^p(0,T;X)$ con la norma (1.2) es un espacio de Banach.

c) $C(0,T;X)$ es denso en $L^p(0,T;X)$, y la inclusión $C(0,T;X) \subseteq L^p(0,T;X)$ es continua.

d) Si X es un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)_X$, entonces $L^2(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

e) Si X es un espacio de Banach separable entonces $L^p(0,T;X)$ también es separable.

f) Si la inclusión $X \subseteq Y$ es continua, entonces la inclusión

$$L^r(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;Y) \qquad 1 \leqslant q \leqslant r \leqslant \infty,$$

es también continua.

Demostración. Ver [18]. $\square$

Definición 1.2.3. Sea $u \in L^1(0,T;X)$. Se dice que $v \in L^1(0,T;X)$ es la derivada débil de u, y se escribe $\dot{u} = v$, siempre que

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \varphi(t)v(t)dt$$

para toda función test escalar $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$.

1.3. El espacio dual de $L^p(0,T;X)$

Las demostraciones de los resultados que se dan a continuación se pueden ver en [18].

Proposición 1.3.1. (Desigualdad de Hölder) Sea X un espacio de Banach, entonces para todo $u \in L^p(0,T;X)$ y $v \in L^q(0,T;X')$ con $1 < p < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$ se cumple

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t)\rangle_{X',X}|dt \leqslant \left(\int_0^T ||v(t)||_{X'}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 1.3.2. Sea X un espacio de Banach reflexivo y separable, y sean $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Entonces se tiene:

a) A cada función $v \in L^q(0,T;X')$ le corresponde un único funcional $\overline{v} \in L^p(0,T;X)'$ tal que

$$\langle \overline{v}, u\rangle_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X',X} dt. \tag{1.3}$$

b) A cada $\overline{v} \in L^p(0,T;X)'$ le corresponde un único $v \in L^q(0,T;X')$ que verifica (1.3). Además, se cumple

$$||\overline{v}||_{L^p(0,T;X)'} = ||v||_{L^q(0,T;X')}.$$

c) El espacio $L^p(0,T;X)$ es un espacio de Banach reflexivo y separable.

Proposición 1.3.3. Sea X un espacio de Banach reflexivo y separable. Entonces el espacio $L^1(0,T;X)$ es separable y

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X').$$

Más precisamente, existe un mapeo lineal y biyectivo $\overline{v} \mapsto v$ de $L^1(0,T;X)'$ en $L^\infty(0,T;X')$ con

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_X \qquad \forall u \in L^1(0,T;X)$$

y $||\overline{v}|| = ||v||_{L^\infty(0,T;X')}$.

Observación 1.3.4. (Primera identificación) Por lo anterior se puede identificar el espacio de Banach $L^p(0,T;X)'$ con $L^q(0,T;X')$, y por lo tanto se escribe

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X').$$

Proposición 1.3.5. Sea X un espacio de Banach reflexivo y separable, y sean $p,q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, y $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

a) Si $u \in L^p(0,T;X)$, entonces

$$\left\langle v, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_{X',X} = \int_0^t \langle v, u(s) \rangle_{X',X} ds \qquad \forall v \in X'.$$

b) Si $u \in L^p(0,T;X')$, entonces

$$\left\langle \int_0^t u(s)ds, v \right\rangle_{X',X} = \int_0^t \langle u(s), v \rangle_{X',X} ds \qquad \forall v \in X.$$

c) Si $u_n \to u$ en $L^p(0,T;X)$ cuando $n \to \infty$ entonces

$$\int_0^t u_n(s)ds \to \int_0^t u(s)ds \quad \text{en} \quad X \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

d) Si $u_n \to u$ en $L^p(0,T;X)$ y $v_n \rightharpoonup v$ en $L^q(0,T;X')$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X} ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X} ds \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

e) Si $u_n \rightharpoonup u$ en $L^p(0,T;X)$ y $v_n \to v$ en $L^q(0,T;X')$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_{X',X} ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_{X',X} ds \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Lema 1.3.6. (Lema Variacional) Sea X un espacio de Banach. Si $u \in L^1(0,T;X)$ y

$$\int_0^T \varphi(t)u(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,T).$$

Entonces $u = 0$ en $L^1(0,T;X)$, es decir, $u(t) = 0$ en c.t.p de $(0,T)$.

Demostración. Ver [18]. □

Proposición 1.3.7. Si $u_k \rightharpoonup u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $\dot{u}_k \rightharpoonup v$ en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ entonces $v = \dot{u}$.

Demostración. Para la prueba, ver [4]. □

1.4. Triple inclusión

Definición 1.4.1. (Triple inclusión continua) Dados los espacios funcionales Y y Z, se define la siguiente relación de triple inclusión continua

$$Y \subseteq Z \subseteq Y'$$

donde:

i) Y es un espacio de Banach real reflexivo y separable.

ii) Z es un espacio de Hilbert real separable.

iii) La inclusión $Y \subseteq Z$ es continua, es decir, existe una constante $c > 0$ tal que

$$||v||_Z \leqslant c||v||_Y \qquad \forall v \in Y,$$

y el espacio Y es denso en Z.

Proposición 1.4.2. Sea la triple inclusión $Y \subseteq Z \subseteq Y'$. Se tiene:

i) A cada $h \in Z$ le corresponde un funcional lineal continuo $\overline{h} : Y \to \mathbb{R}$, donde $\langle \overline{h}, v \rangle_Y = (h, v)_Z$.

ii) El mapeo $h \mapsto \overline{h}$ de Z en Y' es lineal, inyectivo y continuo.

Demostración. Para la prueba ver [18]. □

Observación 1.4.3. (Segunda identificación) Por la proposición anterior, se puede identificar $\overline{h}$ con h. En este sentido,

$$Z \subseteq Y'.$$

1.5. Espacio de Sobolev $W^{1,p}(0, T; Y, Z)$

Definición 1.5.1. Sea Y un espacio de Banach real, $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. El espacio de Sobolev evolutivo $W^{1,p}(0, T; Y, Z)$ viene dado por

$$W^{1,p}(0, T; Y, Z) = \{u \in L^p(0, T; Y) : \dot{u} \in L^q(0, T; Y')\}$$

donde $\dot{u}$ es la derivada débil.

Proposición 1.5.2. Sean los espacios Y y Z que forman una triple inclusión continua, y sean $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, y $0 < T < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) El espacio de Sobolev $W^{1,p}(0, T; Y, Z)$ es un espacio de Banach real con la norma

$$||u||_{W^{1,p}(0,T;Y,Z)} = ||u||_{L^p(0,T;Y)} + ||\dot{u}||_{L^q(0,T;Y')}.$$

ii) La inclusión

$$W^{1,p}(0,T;Y,Z) \subseteq C(0,T;Z)$$

es continua, más precisamente, si $u \in W^{1,p}(0,T;Y,Z)$, entonces existe una función continua unívocamente determinada $u_1 : [0,T] \to Z$ la cual coincide con u en casi todo punto $t \in [0,T]$. Por ello, no se hace distinción entre u y u_1. Además, en este sentido, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} ||u(t)||_Z \leqslant c||u||_{W^{1,p}(0,T;Y,Z)}.$$

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 1.5.3. (Integración por partes) Para todo $u, v \in W^{1,p}(0,T;Y,Z)$ y t, s arbitrarios tal que $s \leqslant t \leqslant T$, la siguiente fórmula de integración por partes generalizada es válida:

$$(u(t), v(t))_Z - (u(s), v(s))_Z = \int_s^t \left(\langle \dot{u}(\tau), v(\tau)\rangle_{Y',Y} + \langle \dot{v}(\tau), u(\tau)\rangle_{Y',Y}\right) d\tau,$$

donde $u(t)$, $v(t)$, $u(s)$ y $v(s)$ son los valores de las funciones continuas $u, v : [0,T] \to Z$ en el sentido de la Proposición 1.5.2.

Demostración. Ver [18]. □

Observación 1.5.4. En la Proposición 1.5.2, las funciones de $W^{1,p}(0,T;Y,Z)$ no son continuas con respecto al espacio Y, pero si lo son con respecto al espacio Z.

1.6. Existencia y unicidad de soluciones débiles

Sean los espacios Y, Z y una forma bilineal $a : Y \times Y \to \mathbb{R}$. En esta sección se estudia el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v)_Z + a(u(t), v) = \langle r(t), v\rangle_Y \quad \forall v \in Y, \quad \text{en casi todo punto } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \in Z, \\ u \in W^{1,2}(0,T;Y,Z). \end{cases} \tag{1.4}$$

Se consideran las siguientes hipótesis:

H_1) $Y \subseteq Z \subseteq Y'$ forman una triple inclusión continua con $dimY = \infty$. Los espacios Y y Z son espacios de Hilbert reales.

H_2) La forma bilineal $a : Y \times Y \to \mathbb{R}$ es acotada, esto es, existe $\kappa > 0$ tal que $|a(y,z)| \leqslant \kappa ||y||_Y ||z||_Z$ para todo $y, z \in Y$, y es coerciva, es decir, existe $\lambda > 0$ tal que $a(y,y) \geqslant \lambda ||y||_Y^2$ para todo $y \in Y$.
Además, la condición inicial $u_0 \in Z$ y $r \in L^2(0,T;Y')$.

H_3) Existe un conjunto de funciones $\{w_1, w_2, ...\}$ que forman una base de Y y $\{u_{n0}\}$ es una sucesión en Z tal que

$$u_{n0} \to u_0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

donde $u_{n0} \in \ span\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.6.1. Si se satisfacen las hipótesis H_1), H_2) y H_3), entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) **(Existencia y unicidad)** La ecuación original (1.4) tiene única solución u.

2) **(Dependencia continua de los datos)** El mapeo $(u_0, r) \mapsto u$ es lineal y continuo de $Z \times L^2(0,T;Y')$ en $W^{1,2}(0,T;Y,Z)$, es decir, existe una constante $D > 0$ tal que

$$||u||_{W^{1,2}(0,T;Y,Z)} \leqslant D(||u_0||_Z + ||r||_{L^2(0,T;Y')}),$$

para todo $u_0 \in Z$ y $r \in L^2(0,T;Y')$.

Demostración. Ver [18]. □

Observación 1.6.2. La hipótesis H_2) del Teorema 1.6.1 pide que la forma bilineal a sea coerciva. Se puede demostrar que es suficiente pedir que se cumple la desigualdad de Gárdin, la cual establece

$$a(u,u) \geqslant c||u||_Y^2 - d||u||_Z^2 \qquad \forall u \in Y,$$

donde $c > 0$ y $d \geqslant 0$ son constantes.

Capítulo 2

Control Óptimo Frontera sobre el Flujo de Calor

En este capítulo, se presenta una familia de problemas de control óptimo donde la variable de control es el flujo de calor q para problemas de conducción del calor no estacionarios. Se prueba existencia y unicidad de los controles óptimos y se da una condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema. Además, se muestra que los controles óptimos, los estados del sistema y los estados adjuntos vinculados a los problemas P_α convergen fuertemente al correspondiente control óptimo, estado del sistema y estado adjunto del problema P, cuando $\alpha \to \infty$, en adecuados espacios de Sobolev.

2.1. Planteo del Problema

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera Γ es regular y consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ y $med(\Gamma_2) > 0$. Además, se tiene un intervalo de tiempo $[0, T]$ para algún $T > 0$.
Se consideran los siguientes problemas de conducción del calor evolutivos P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$), respectivamente con condiciones de frontera mixta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad u\Big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b. \tag{2.2}$$

Los datos $g \in \mathcal{H}$, $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ y v_b son fijos y satisfacen la condición de compatibilidad $v_b = b$ sobre Γ_1, mientras que $q \in \mathcal{Q}$ se considera como variable de control.

A continuación se encuentra la formulación variacional para el problema P, para ello se multiplica a ambos lados de $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g$ por una función test y se integra.

Sea $v \in V_0$, entonces

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \Delta u(t) \right) v dx = \int_\Omega g(t) v dx.$$

Por la Proposición 1.1.8 (Fórmula de Green), se obtiene

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla u(t) \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u(t)}{\partial n} v d\gamma = \int_\Omega g(t) v dx,$$

y por lo tanto

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla u(t) \nabla v dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial n} v d\gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u(t)}{\partial n} v d\gamma = \int_\Omega g(t) v dx.$$

Dado que $-\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q$ y que $v \in V_0$, se tiene

$$\int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla u(t) \nabla v dx = \int_\Omega g(t) v dx - \int_{\Gamma_2} q(t) v d\gamma. \tag{2.3}$$

Observación 2.1.1. De la definición de producto escalar en H y Q la expresión (2.3) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right)_H = -(\nabla u(t), \nabla v)_H + (g(t), v)_H - (q(t), v)_Q \qquad \forall v \in V_0.$$

Utilizando la Proposición A.3.3 del Apéndice (desigualdad de Cauchy-Schwarz), se tiene

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right)_H \right| &\leqslant |(\nabla u(t), \nabla v)_H| + |(g(t), v)_H| + |(q(t), v)_Q| \\ &\leqslant ||\nabla u(t)||_H ||\nabla v||_H + ||g(t)||_H ||v||_H + ||q(t)||_Q ||v||_Q \\ &\leqslant ||u(t)||_{V_0} ||v||_{V_0} + D_1 ||g(t)||_H ||v||_{V_0} + D_2 ||q(t)||_Q ||v||_{V_0} \qquad \forall v \in V_0, \end{aligned}$$

donde D_1 es la constante que surge de aplicar el Teorema 1.1.9 (Desigualdad de Poincaré) y D_2 representa la constante que se obtiene de utilizar el Teorema de trazas 1.1.10 y la equivalencia entre las normas de V y V_0 .

Luego, tomando supremo sobre $v \in V_0$, con $||v||_{V_0} \leqslant 1$, se tiene

$$\left|\left| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|\right|_{V_0'} \leqslant ||u(t)||_{V_0} + D_1 ||g(t)||_H + D_2 ||q(t)||_Q,$$

donde $||\omega||_{V_0'} = \sup\{(\omega,\varphi)_H : \varphi \in V_0, ||\varphi||_{V_0} \leqslant 1\}$.
De esta estimación se tiene que $\frac{\partial u(t)}{\partial t} \in V_0'$ para todo tiempo $0 \leqslant t \leqslant T$, en este caso se escribirá $\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \dot{u}(t)$. Así, el primer término de (2.3) puede ser expresado como $\langle \dot{u}(t), v\rangle_{V_0',V_0}$.

Además, como $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ entonces, por el teorema de trazas, existe $v_b \in V$ tal que $v_b\big|_{\Gamma_1} = b$. Así, una solución débil para el problema P es una función

$$u \in K := \big\{v \in L^2(V) : v - v_b \in L^2(V_0)\big\} \quad \text{con} \quad \dot{u} \in L^2(V_0')$$

que verifique (2.3). Por Teorema 1.6.1 esta solución débil existe y es única.

Nota 2.1.2. A los fines de simplificar la notación, en este trabajo se representará con D_i a diferentes constantes.

En lo que sigue, se encuentra la formulación variacional para el problema P_α. Para ello, al igual que antes, si se multiplica a ambos lados de $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g$ por una función test $v \in V$, se integra y utiliza la fórmula de Green, se obtiene

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int\limits_\Omega \nabla u(t) \nabla v dx - \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial n} v d\gamma - \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u(t)}{\partial n} v d\gamma = \int\limits_\Omega g(t) v dx.$$

Dado que $-\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q$ y que $-\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b)$, se tiene

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + \int\limits_\Omega \nabla u(t) \nabla v dx + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} u(t) v d\gamma = \int\limits_\Omega g(t) v dx - \int\limits_{\Gamma_2} q(t) v d\gamma + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} b v d\gamma.$$

Luego, una solución débil de P_α es una función $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ que verifica la última ecuación. Por Teorema 1.6.1 se sabe que dicha solución existe y es única.
Por lo tanto, si se denota con u_q y $u_{\alpha q}$ las soluciones débiles de (2.1) y (2.2) respectivamente, se tienen los siguientes problemas variacionales

$$\begin{cases} u_q - v_b \in L^2(V_0), \qquad u_q(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_q \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_q(t), v\rangle_{V_0',V_0} + a(u_q(t),v) = L_q(t,v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} u_{\alpha q} \in L^2(V), \qquad u_{\alpha q}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_{\alpha q} \in L^2(V') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_{\alpha q}(t), v\rangle_{V',V} + a_\alpha(u_{\alpha q}(t),v) = L_{\alpha q}(t,v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde los funcionales L_q, $L_{\alpha q}$ y las formas bilineales a, a_α están definidos en (5).

En trabajos previos, tales como [15], se han estudiado las propiedades de continuidad, simetría y coercividad de las formas bilineales $a(\cdot,\cdot)$ y $a_\alpha(\cdot,\cdot)$ en los espacios V_0 y V, respectivamente.

Se debe observar que un elemento $u \in L^2(0,T;V)$ con $\dot{u} \in L^2(0,T;V')$, por Proposición 1.5.2, puede ser considerado como una función continua de $[0,T]$ en H. Esto aclara el significado de la condición inicial en $t=0$ (de igual manera reemplazando V por V_0).

Sobre el espacio $\mathcal{Q}$ se consideran los funcionales costo no negativos J_1 y $J_{1\alpha}$ dados por las expresiones

$$J_1(q) := \frac{1}{2}||u_q - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}, \tag{2.6}$$

$$J_{1\alpha}(q) := \frac{1}{2}||u_{\alpha q} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}, \tag{2.7}$$

donde z_d es un elemento asignado a priori que pertenece a $\mathcal{H}$ y M_2 es una constante positiva. Además, se consideran los siguientes problemas de control óptimo frontera (evolutivos) formulados en la introducción:

$$\text{hallar} \quad \overline{q} \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_1(\overline{q}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_1(q), \tag{2.8}$$

$$\text{hallar} \quad \overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_{1\alpha}(q). \tag{2.9}$$

2.2. Problema P y su correspondiente Problema de Control Óptimo Frontera

En esta sección se demuestra que el funcional J_1 es coercivo y diferenciable Gâteaux en $\mathcal{Q}$. También se muestra la existencia y unicidad del control óptimo frontera $\overline{q}$ para el problema (2.8) y se da una condición de optimalidad correspondiente al problema de frontera libre en términos del control óptimo $\overline{q}$ y el estado adjunto del sistema óptimo $p_{\overline{q}}$. Para ello, es necesario introducir las aplicaciones C_1, Π_1 y $\mathcal{L}_1$ que se definen a continuación. Sea $C_1 : \mathcal{Q} \to L^2(V_0)$ la aplicación dada por la expresión $C_1(q) = u_q - u_0$, donde u_0 es la solución del problema variacional (2.4) para $q=0$, cuya ecuación variacional viene dada por

$$(\dot{u}_0(t), v)_H + a(u_0(t), v) = \int_\Omega g(t) v dx, \ \ \forall v \in V_0, \ \ u_0 \in K,$$

y sean $\Pi_1 : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_1 : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\Pi_1(q, \eta) = (C_1(q), C_1(\eta))_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta)_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q, \eta \in \mathcal{Q},$$

$$\mathcal{L}_1(q) = (C_1(q), z_d - u_0)_{\mathcal{H}} \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

Siguiendo [9], se prueba el siguiente resultado.

Lema 2.2.1.

i) C_1 es una aplicación lineal y continua.

ii) Π_1 es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en $\mathcal{Q}$, esto es,

$$\Pi_1(q, q) \geqslant M_2 ||q||^2_{\mathcal{Q}}, \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

iii) $\mathcal{L}_1$ es lineal y continua en $\mathcal{Q}$.

iv) J_1 se puede escribir como $J_1(q) = \frac{1}{2}\Pi_1(q, q) - \mathcal{L}_1(q) + \frac{1}{2}||u_0 - z_d||^2_{\mathcal{H}}, \quad \forall q \in \mathcal{Q}$.

v) J_1 es un funcional coercivo sobre $\mathcal{Q}$, esto es

$$\begin{aligned} &(1-t)J_1(q_2) + tJ_1(q_1) - J_1((1-t)q_2 + tq_1) \\ &= \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{q_2} - u_{q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\ &\geqslant \frac{M_2 t(1-t)}{2}||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q_1, q_2 \in \mathcal{Q}, \qquad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

vi) Existe un único control óptimo $\overline{q} \in \mathcal{Q}$ tal que $J_1(\overline{q}) = \min\limits_{q \in \mathcal{Q}} J_1(q)$.

Demostración.

i) La aplicación $C_1(q) = u_q - u_0$ es lineal ya que, para $\delta, \beta \in \mathbb{R}$ y $q, \eta \in \mathcal{Q}$, se tiene que $u_{\delta q + \beta \eta} - u_0 = \delta(u_q - u_0) + \beta(u_\eta - u_0)$, es decir,

$$C_1(\delta q + \beta \eta) = \delta C_1(q) + \beta C_1(\eta).$$

A continuación se probará que la aplicación C_1 es continua. En efecto, de la ecuación variacional (2.4) para u_q y u_0 se tiene que,

$$(\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), v)_H + a(u_q(t) - u_0(t), v) = -(q(t), v)_Q \qquad \forall v \in V_0. \tag{2.10}$$

Tomando $v = u_q(t) - u_0(t)$[1], se logra

$$\begin{aligned} &(\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), u_q(t) - u_0(t))_H + a(u_q(t) - u_0(t), u_q(t) - u_0(t)) \\ &= -(q(t), u_q(t) - u_0(t))_Q. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Además, por la regla de derivada de un producto se obtiene

$$\begin{aligned} (\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), u_q(t) - u_0(t))_H &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(u_q(t) - u_0(t))(u_q(t) - u_0(t))dx \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(u_q(t) - u_0(t))^2 dx - \int_\Omega (u_q(t) - u_0(t))\frac{d}{dt}(u_q(t) - u_0(t))dx \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(u_q(t) - u_0(t))^2 dx - (\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), u_q(t) - u_0(t))_H\,. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 2\,(\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), u_q(t) - u_0(t))_H &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(u_q(t) - u_0(t))^2 dx \\ = \frac{d}{dt}\int_\Omega (u_q(t) - u_0(t))^2 dx &= \frac{d}{dt}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2. \end{aligned}$$

De esta forma se logra

$$(\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), u_q(t) - u_0(t))_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2. \tag{2.12}$$

Ahora, dado que a es una forma bilineal y coerciva en V_0, esto es,

$$\text{existe } \lambda_0 > 0 \text{ tal que } a(v, v) \geqslant \lambda_0||\nabla v||_H^2, \quad \forall v \in V_0,$$

de (2.11), (2.12), utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición A.3.2 del Apéndice (desigualdad de Cauchy con ε) para $\varepsilon = \lambda_0$, se prueba que existe una

[1] $u_q(t) - u_0(t) \in V_0$ pues $u_q(t)\big|_{\Gamma_1} = b$ y $u_0(t)\big|_{\Gamma_1} = b$, entonces $(u_q(t) - u_0(t))\big|_{\Gamma_1} = 0$.

constante $D_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2 + \lambda_0||\nabla(u_q(t) - u_0(t))||_H^2 \\
&\leqslant -\int\limits_{\Gamma_2} q(t)\,(u_q(t) - u_0(t))\,d\gamma \\
&\leqslant \left|(q(t), u_q(t) - u_0(t))_Q\right| \\
&\leqslant ||q(t)||_Q||u_q(t) - u_0(t)||_Q \\
&\leqslant ||q(t)||_Q D_1||u_q(t) - u_0(t)||_{V_0} \\
&\leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_0}||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_0}{2}||\nabla(u_q(t) - u_0(t))||_H^2,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde la constante D_1 surge de aplicar el teorema de trazas y la equivalencia entre las normas de V y V_0.

De aquí se pueden deducir algunas estimaciones:

1) Se tiene que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_q(t)-u_0(t)||_H^2+\frac{\lambda_0}{2}||\nabla(u_q(t)-u_0(t))||_H^2 \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_0}||q(t)||_Q^2$, entonces integrando sobre el intervalo $[0,T]$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2 dt + \frac{\lambda_0}{2}\int_0^T ||\nabla(u_q(t) - u_0(t))||_H^2 dt \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_0}\int_0^T ||q(t)||_Q^2 dt.$$

Así,

$$\frac{1}{2}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2\Big|_0^T + \frac{\lambda_0}{2}\int_0^T ||\nabla C_1(q)(t)||_H^2 dt \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_0}\int_0^T ||q(t)||_Q^2 dt.$$

Teniendo en cuenta que $u_q(0) - u_0(0) = 0$, se tiene

$$\frac{1}{2}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2\Big|_0^T = \frac{1}{2}||u_q(T) - u_0(T)||_H^2 \geqslant 0.$$

Luego, $\frac{\lambda_0}{2}\int_0^T ||\nabla C_1(q)(t)||_H^2 dt \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_0}\int_0^T ||q(t)||_Q^2 dt$, es decir,

$$||\nabla C_1(q)||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{D_1}{\lambda_0}\,||q||_{\mathcal{Q}}. \tag{2.14}$$

2) Dado que $\lambda_0||\nabla(u_q(t) - u_0(t))||_H^2 \geqslant 0$, de (2.13) se obtiene

$$\frac{d}{dt}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2 \leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}||q(t)||_Q^2 + \lambda_0||\nabla(u_q(t) - u_0(t))||_H^2.$$

Integrando entre 0 y s, para $0 \leqslant s \leqslant T$ y teniendo en cuenta que $C_1(q)(0) = 0$, se logra

$$\begin{aligned}
||C_1(q)(s)||_H^2 &= \int_0^s \frac{d}{dt}||u_q(t) - u_0(t)||_H^2 dt \\
&\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}\int_0^s ||q(t)||_Q^2 dt + \lambda_0 \int_0^s ||\nabla(u_q(t) - u_0(t))||_H^2 dt \\
&\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}\int_0^T ||q(t)||_Q^2 dt + \lambda_0 \int_0^T ||\nabla(C_1(q)(t))||_H^2 dt \\
&= \frac{D_1^2}{\lambda_0}||q||_{\mathcal{Q}}^2 + \lambda_0 ||\nabla C_1(q)||_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall s \in [0, T].
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad obtenida en (2.14) se tiene

$$||C_1(q)(s)||_H^2 \leqslant \frac{2D_1^2}{\lambda_0}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \qquad \forall s \in [0, T].$$

Tomando supremo para $0 \leqslant s \leqslant T$ se consigue

$$||C_1(q)||_{L^\infty(H)} = \sup_{0\leqslant s\leqslant T} ||C_1(q)(s)||_H \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda_0}} D_1 \, ||q||_{\mathcal{Q}}.$$

3) De la igualdad (2.10) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{d}{dt} C_1(q)(t), v \right)_H \right| &= | \, (\dot{u}_q(t) - \dot{u}_0(t), v)_H \, | \\
&\leqslant |(q(t), v)_Q| + |a(u_q(t) - u_0(t), v)| \\
&\leqslant ||q(t)||_Q ||v||_Q + |a(C_1(q)(t), v)| \\
&\leqslant ||q(t)||_Q D_2 ||v||_{V_0} + ||C_1(q)(t)||_{V_0} ||v||_{V_0},
\end{aligned}$$

donde D_2 es una constante que surge de aplicar el teorema de trazas y equivalencia entre las normas definidas en V y V_0.

Así, tomando supremo sobre $\{v \in V_0$ tal que $||v||_{V_0} \leqslant 1\}$, se logra

$$\left|\left| \frac{d}{dt} C_1(q)(t) \right|\right|_{V_0'} = \sup_{||v||_{V_0}\leqslant 1} \left| \left(\frac{d}{dt} C_1(q)(t), v \right)_H \right| \leqslant D_2 ||q(t)||_Q + ||C_1(q)(t)||_{V_0}.$$

Luego, usando la Proposición A.3.1 del Apéndice (Desigualdad de Cauchy), se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|\left| \frac{d}{dt} C_1(q)(t) \right|\right|_{V_0'}^2 \leqslant (D_2 ||q(t)||_Q + ||C_1(q)(t)||_{V_0})^2 \\
&= D_2^2 ||q(t)||_Q^2 + 2D_2 ||q(t)||_Q ||C_1(q)(t)||_{V_0} + ||C_1(q)(t)||_{V_0}^2 \\
&\leqslant 2D_2^2 ||q(t)||_Q^2 + 2||C_1(q)(t)||_{V_0}^2.
\end{aligned}$$

Integrando entre 0 y T la expresión anterior, de (2.14) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_1(q)(t)\right|\right|^2_{V_0'} dt &\leqslant 2D_2^2||q||^2_{\mathcal{Q}} + 2\int_0^T ||C_1(q)(t)||^2_{V_0} dt\\ &= 2D_2^2||q||^2_{\mathcal{Q}} + 2\int_0^T ||\nabla C_1(q)(t)||^2_H dt\\ &= 2D_2^2||q||^2_{\mathcal{Q}} + 2||\nabla C_1(q)||^2_{\mathcal{H}}\\ &\leqslant 2D_2^2||q||^2_{\mathcal{Q}} + \frac{2D_1^2}{\lambda_0^2}||q||^2_{\mathcal{Q}}.\end{aligned}$$

Así, se logra

$$\left|\left|\frac{d}{dt}C_1(q)\right|\right|_{L^2(V_0')} \leqslant \sqrt{2D_2^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_0^2}}\ ||q||_{\mathcal{Q}}.$$

De esta manera, el operador C_1 tal que

$$C_1 : \mathcal{Q} \to \{v \in L^2(V_0) \cap L^\infty(H) :\ \dot{v} \in L^2(V_0')\}$$

resulta continuo.

ii) De la linealidad de la aplicación C_1 y de los productos internos definidos en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{Q}$ se deduce que Π_1 es una forma bilineal, y de la simetría de estos productos internos se sigue la simetría de Π_1.

Además la aplicación Π_1 resulta continua. En efecto, de (2.14) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned}|\Pi_1(q,\eta)| &\leqslant |(C_1(q), C_1(\eta))_{\mathcal{H}}| + M_2|(q,\eta)_{\mathcal{Q}}|\\ &\leqslant ||C_1(q)||_{\mathcal{H}}||C_1(\eta)||_{\mathcal{H}} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}}\\ &\leqslant D_3^2||\nabla C_1(q)||_{\mathcal{H}}||\nabla C_1(\eta)||_{\mathcal{H}} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}}\\ &\leqslant \left(\frac{D_3^2 D_1^2}{{\lambda_0}^2} + M_2\right)||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q,\eta \in \mathcal{Q},\end{aligned}$$

donde D_3 es la constante que surge de aplicar la desiguladad de Poincaré.

Por último, la aplicación Π_1 es coerciva en $\mathcal{Q}$, ya que

$$\begin{aligned}\Pi_1(q,q) &= (C_1(q), C_1(q))_{\mathcal{H}} + M_2(q,q)_{\mathcal{Q}}\\ &= (u_q - u_0, u_q - u_0)_{\mathcal{H}} + M_2(q,q)_{\mathcal{Q}}\\ &= ||u_q - u_0||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q||^2_{\mathcal{Q}} \geqslant M_2||q||^2_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.\end{aligned}$$

iii) Por la linealidad de la aplicación C_1 y del producto interno en $\mathcal{H}$ se tiene que $\mathcal{L}_1$ es lineal en $\mathcal{Q}$.

Por otro lado, $\mathcal{L}_1$ es continua en $\mathcal{Q}$, puesto que de (2.14) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue

$$|\mathcal{L}_1(q)| \leqslant ||C_1(q)||_{\mathcal{H}}||z_d - u_0||_{\mathcal{H}} \leqslant D_3||\nabla C_1(q)||_{\mathcal{H}}||z_d - u_0||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{D_3 D_1}{\lambda_0}||z_d - u_0||_{\mathcal{H}}\,||q||_{\mathcal{Q}},$$

donde D_3 es la constante de Poincaré, mencionada anteriormente.

iv) De la definición de Π_1, $\mathcal{L}_1$ y por (2.6), J_1 se puede escribir como

$$\begin{aligned}
J_1(q) &= \frac{1}{2}||u_q - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\\
&= \frac{1}{2}||u_q - u_0 + u_0 - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\\
&= \frac{1}{2}||u_q - u_0||^2_{\mathcal{H}} - (u_q - u_0, z_d - u_0)_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||z_d - u_0||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\\
&= \frac{1}{2}\left(C_1(q), C_1(q)\right)_{\mathcal{H}} - \left(C_1(q), z_d - u_0\right)_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||z_d - u_0||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\\
&= \frac{1}{2}\Pi_1(q,q) - \mathcal{L}_1(q) + \frac{1}{2}||u_0 - z_d||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

v) J_1 es un funcional coercivo sobre $\mathcal{Q}$, ya que para todo q_1, $q_2 \in \mathcal{Q}$ y $t \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
&(1-t)J_1(q_2) + tJ_1(q_1) - J_1\left((1-t)q_2 + tq_1\right)\\
=& \frac{1}{2}(1-t)||u_{q_2} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}t||u_{q_1} - z_d||^2_{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}||u_{(1-t)q_2+tq_1} - z_d||^2_{\mathcal{H}}\\
&+ (1-t)\frac{M_2}{2}||q_2||^2_{\mathcal{Q}} + t\frac{M_2}{2}||q_1||^2_{\mathcal{Q}} - \frac{M_2}{2}||(1-t)q_2 + tq_1||^2_{\mathcal{Q}}\\
=& \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{q_2} - u_{q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right]\\
\geqslant& \frac{M_2 t(1-t)}{2}||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

vi) Existe un único control óptimo $\overline{q} \in \mathcal{Q}$ tal que $J_1(\overline{q}) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_1(q)$. En efecto, dado que Π_1 es una forma bilineal, continua y coerciva sobre $\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}$, $\mathcal{L}_1$ es una forma lineal y continua sobre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}$ es un conjunto convexo, cerrado y no vacío, por Lema A.2.10 del Apéndice se tiene que existe un único elemento de $\mathcal{Q}$ que minimiza el siguiente funcional

$$J(q) = \frac{1}{2}\Pi_1(q,q) - \mathcal{L}_1(q).$$

Y por lo tanto, como $\frac{1}{2}||u_0 - z_d||^2_{\mathcal{H}}$ es constante, se tiene que

$$J_1(q) = \frac{1}{2}\Pi_1(q,q) - \mathcal{L}_1(q) + \frac{1}{2}||u_0 - z_d||^2_{\mathcal{H}}$$

tiene un mínimo, al cual se lo denota con $\overline{q}$.

□

Se define el estado adjunto p_q correspondiente al problema (2.1) para cada $q \in \mathcal{Q}$, como la única solución del siguiente problema parabólico mixto

$$-\frac{\partial p_q}{\partial t} - \Delta p_q = u_q - z_d \quad \text{en } \Omega \qquad p_q\Big|_{\Gamma_1} = 0 \qquad \frac{\partial p_q}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_2} = 0 \qquad p_q(T) = 0.$$

Para determinar la formulación variacional de este problema, se multiplica a ambos lados de $-\frac{\partial p_q}{\partial t} - \Delta p_q = u_q - z_d$ por una función test $v \in V_0$ y se integra. Así se obtiene

$$-\int_\Omega \frac{\partial p_q(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla p_q(t) \nabla v dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p_q(t)}{\partial n} v d\gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p_q(t)}{\partial n} v d\gamma = \int_\Omega (u_q(t) - z_d(t)) v dx.$$

Dado que $\frac{\partial p_q}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = 0$ y que $v \in V_0$, se obtiene

$$-\int_\Omega \frac{\partial p_q(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla p_q(t) \nabla v dx = \int_\Omega (u_q(t) - z_d(t)) v dx.$$

Por lo tanto se tiene el siguiente problema variacional

$$\begin{cases} p_q \in L^2(V_0), \qquad p_q(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_q \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad -\langle \dot{p}_q(t), v\rangle_{V_0',V_0} + a(p_q(t), v) = (u_q(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{2.15}$$

el cual tiene una única solución $p_q \in L^2(V_0)$.

Lema 2.2.2.

i) El estado adjunto p_q satisface la siguiente igualdad

$$(C_1(\eta), u_q - z_d)_{\mathcal{H}} = -(\eta, p_q)_{\mathcal{Q}}.$$

ii) El funcional J_1 es diferenciable Gâteaux [2] y J_1' viene dado por

$$\begin{aligned} \langle J_1'(q), \eta - q\rangle &= (u_\eta - u_q, u_q - z_d)_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} \\ &= \Pi_1(q, \eta - q) - \mathcal{L}_1(\eta - q), \qquad \forall q, \eta \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

[2] Se dice que J_1 es diferenciable Gâteaux si y solo si $\forall u \in V$ existe el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{J_1(u + hv) - J_1(u)}{h} = \langle J_1'(u), v\rangle.$$

iii) La derivada Gâteaux de J_1 puede escribirse como

$$J_1'(q) = M_2 q - p_q, \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

iv) La condición de optimalidad para el problema (2.8) viene dada por

$$J_1'(q) = 0 \text{ en } \mathcal{Q}, \quad \text{ esto es, } \quad -p_{\overline{q}} + M_2 \overline{q} = 0 \text{ en } \quad \mathcal{Q}.$$

Demostración.

i) Si en la ecuación variacional (2.15) se toma $v = C_1(\eta)(t) \in V_0$ y se integra entre 0 y T, se logra

$$-\int_0^T (\dot{p}_q(t), C_1(\eta)(t))_H \, dt + \int_0^T a(p_q(t), C_1(\eta)(t))dt = \int_0^T (u_q(t) - z_d(t), C_1(\eta)(t))_H dt,$$

es decir,

$$-(\dot{p}_q, C_1(\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a(p_q(t), C_1(\eta)(t))dt = (u_q - z_d, C_1(\eta))_{\mathcal{H}}. \tag{2.16}$$

Por otro lado, si en la ecuación variacional (2.4) se reemplaza $v = p_q(t)$ para $q = 0$ y para $q = \eta$ se tiene

$$(\dot{u}_\eta(t) - \dot{u}_0(t), p_q(t))_H + a(u_\eta(t) - u_0(t), p_q(t)) = -\int_{\Gamma_2} \eta(t) p_q(t) d\gamma.$$

Integrando sobre el intervalo $[0, T]$, se obtiene

$$(\dot{u}_\eta - \dot{u}_0, p_q)_{\mathcal{H}} + \int_0^T a(C_1(\eta)(t), p_q(t))dt = -(\eta, p_q)_{\mathcal{Q}}. \tag{2.17}$$

Entonces, de (2.16), (2.17) y por la simetría de la forma bilineal a se sigue

$$\begin{aligned}
&(u_q - z_d, C_1(\eta))_{\mathcal{H}} \\
&= -(\dot{p}_q, C_1(\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a(p_q(t), C_1(\eta)(t))dt \\
&= -(\dot{p}_q, C_1(\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a(C_1(\eta)(t), p_q(t))dt \\
&= -(\dot{p}_q, C_1(\eta))_{\mathcal{H}} - (\dot{u}_\eta - \dot{u}_0, p_q)_{\mathcal{H}} - (\eta, p_q)_{\mathcal{Q}} \\
&= -(\dot{p}_q, C_1(\eta))_{\mathcal{H}} - \left(\frac{d}{dt} C_1(\eta), p_q\right)_{\mathcal{H}} - (\eta, p_q)_{\mathcal{Q}} \\
&= -\int_0^T \left[(\dot{p}_q(t), C_1(\eta)(t))_H + \left(\frac{d}{dt} C_1(\eta)(t), p_q(t)\right)_H \right] dt - (\eta, p_q)_{\mathcal{Q}} \\
&= -\int_0^T \frac{d}{dt} (p_q(t), C_1(\eta)(t))_H \, dt - (\eta, p_q)_{\mathcal{Q}} = -(\eta, p_q)_{\mathcal{Q}},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce utilizando que $p_q(T) = 0$ y $C_1(\eta)(0) = 0$, y por lo tanto

$$-\int_0^T \frac{d}{dt}\left(p_q(t), C_1(\eta)(t)\right)_H dt = -\left(p_q(t), C_1(\eta)(t)\right)_H \Big|_0^T = 0.$$

ii) Sean q, $\eta \in \mathcal{Q}$ y $h > 0$, entonces por la definición de J_1 y propiedades de producto interno se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[J_1\left(q + h(\eta - q)\right) - J_1(q)\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}||u_{q+h(\eta-q)} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q + h(\eta - q)||^2_{\mathcal{Q}}\right] + \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}||u_q - z_d||^2_{\mathcal{H}} - \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\
&= \frac{h}{2}(u_\eta - u_q, u_\eta - u_q)_{\mathcal{H}} + (u_q - z_d, u_\eta - u_q)_{\mathcal{H}} + \frac{M_2 h}{2}(\eta - q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0^+$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle J_1'(q), \eta - q\rangle &= (u_q - z_d, u_\eta - u_q)_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} \\
&= (u_q - u_0 + u_0 - z_d, C_1(\eta - q))_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} \\
&= (C_1(q) + u_0 - z_d, C_1(\eta - q))_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} \\
&= (C_1(q), C_1(\eta - q))_{\mathcal{H}} - (z_d - u_0, C_1(\eta - q))_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} \\
&= \Pi_1(q, \eta - q) - \mathcal{L}_1(\eta - q) \qquad\qquad \forall\, q, \eta \in \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

iii) De los incisos anteriores, se sigue

$$\begin{aligned}
\langle J_1'(q), \eta\rangle &= \Pi_1(q, \eta) - \mathcal{L}_1(\eta) \\
&= (C_1(q), C_1(\eta))_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta)_{\mathcal{Q}} - (C_1(\eta), z_d - u_0)_{\mathcal{H}} \\
&= (C_1(\eta), u_q - z_d)_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta)_{\mathcal{Q}} \\
&= -(\eta, p_q)_{\mathcal{Q}} + M_2(q, \eta)_{\mathcal{Q}} \\
&= (M_2 q - p_q, \eta)_{\mathcal{Q}} \qquad\qquad \forall \eta \in \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

Luego, $\forall q \in \mathcal{Q}$, $J_1'(q) = M_2 q - p_q$.

iv) La condición de optimalidad para el problema (2.8) está dada por $J_1'(\overline{q}) = 0$, y por el inciso anterior esto equivale a pedir $-p_{\overline{q}} + M_2\overline{q} = 0$.

En efecto, se sabe que $J_1(\overline{q}) \leqslant J_1(q) \quad \forall q \in \mathcal{Q}$, en particular vale para $\overline{q} + hq$ con

$h > 0$, entonces

$$\begin{aligned} J_1(\overline{q}) \leqslant J_1(\overline{q}+hq) &\Rightarrow \ \frac{J_1(\overline{q}+hq)-J_1(\overline{q})}{h} \geqslant 0 \\ &\Rightarrow \ \langle J_1'(\overline{q}), q\rangle \geqslant 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dado que $-q \in \mathcal{Q}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle J_1'(\overline{q}), -q\rangle \geqslant 0 &\Rightarrow \ \Pi_1(\overline{q}, -q) - \mathcal{L}_1(-q) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow \ -\left(\Pi_1(\overline{q}, q) - \mathcal{L}_1(q)\right) \geqslant 0 \\ &\Rightarrow \ \Pi_1(\overline{q}, q) - \mathcal{L}_1(q) \leqslant 0 \\ &\Rightarrow \langle J_1'(\overline{q}), q\rangle \leqslant 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

De (2.18) y (2.19) se sigue que $\langle J_1'(\overline{q}), q\rangle = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}$, y por lo tanto $J_1'(\overline{q}) = 0$.

□

2.3. Problema P_α y su correspondiente Problema de Control Óptimo Frontera

Al igual que en la sección anterior, en lo que sigue se muestra que el funcional $J_{1\alpha}$ es coercivo y diferenciable Gâteaux en $\mathcal{Q}$, también se prueba existencia y unicidad de los controles óptimos frontera $\overline{q}_\alpha$ para el problema (2.9) y se da la condición de optimalidad en términos del control óptimo $\overline{q}_\alpha$ y el estado adjunto del sistema óptimo $p_{\overline{q}_\alpha}$.
Sea $C_{1\alpha} : \mathcal{Q} \to L^2(V)$ la aplicación definida por

$$C_{1\alpha}(q) = u_{\alpha q} - u_{\alpha 0},$$

donde $u_{\alpha 0}$ es la solución del problema variacional (2.5) para $q = 0$, cuya ecuación variacional viene dada por

$$\langle \dot{u}_{\alpha 0}(t), v\rangle + a_\alpha(u_{\alpha 0}(t), v) = \int_\Omega g(t) v dx + \alpha \int_{\Gamma_1} b v d\gamma, \ \ \forall v \in V, \ \ \dot{u}_{\alpha 0} \in L^2(V').$$

Sean $\Pi_{1\alpha} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_{1\alpha} : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ dados por las siguientes expresiones

$$\Pi_{1\alpha}(q, \eta) = (C_{1\alpha}(q), C_{1\alpha}(\eta))_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta)_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q, \eta \in \mathcal{Q},$$

$$\mathcal{L}_{1\alpha}(q) = (C_{1\alpha}(q), z_d - u_{\alpha 0})_{\mathcal{H}} \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

En forma similar al Lema 2.2.1, se enuncia el siguiente resultado en el que se prueban propiedades de las aplicaciones $C_{1\alpha}$, $\Pi_{1\alpha}$ y $\mathcal{L}_{1\alpha}$, se muestra la coercividad del funcional $J_{1\alpha}$ y se demuestra la existencia y unicidad del control óptimo.

Lema 2.3.1.

i) $C_{1\alpha}$ es una aplicación lineal y continua.

ii) $\Pi_{1\alpha}$ es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en $\mathcal{Q}$, esto es,

$$\Pi_{1\alpha}(q,q) \geqslant M_2 ||q||^2_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

iii) $\mathcal{L}_{1\alpha}$ es lineal y continua en $\mathcal{Q}$.

iv) $J_{1\alpha}$ se puede escribir como

$$J_{1\alpha}(q) = \frac{1}{2}\Pi_{1\alpha}(q,q) - \mathcal{L}_{1\alpha}(q) + \frac{1}{2}||u_{\alpha 0} - z_d||^2_{\mathcal{H}}, \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

v) $J_{1\alpha}$ es un funcional coercivo sobre $\mathcal{Q}$, esto es

$$\begin{aligned} &(1-t)J_{1\alpha}(q_2) + tJ_{1\alpha}(q_1) - J_{1\alpha}((1-t)q_2 + tq_1) \\ =\ & \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{\alpha q_2} - u_{\alpha q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\ \geqslant\ & \frac{M_2 t(1-t)}{2}||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q_1, q_2 \in \mathcal{Q},\ \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

vi) Existe un único control óptimo $\overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q}$ tal que $J_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) = \min\limits_{q \in \mathcal{Q}} J_{1\alpha}(q)$.

Demostración.

i) De manera similar que para la aplicación C_1 de la sección anterior, la aplicación $C_{1\alpha}$ resulta lineal.

Para demostrar que $C_{1\alpha}$ es continua se utiliza que

$$(\dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_{\alpha 0}(t), v)_H + a_\alpha(u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t), v) = -(q(t), v)_Q \quad \forall v \in V. \tag{2.20}$$

Tomando $v = u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t) \in V$, se logra

$$\begin{aligned}&(\dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_{\alpha 0}(t), u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t))_H + a_\alpha(u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t), u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t))\\ &= -\left(q(t), u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)\right)_Q .\end{aligned}$$

Luego, dado que $(\dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_{\alpha 0}(t), u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t))_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2$, y que a_α es una forma bilineal coerciva en V, esto es, existe $\lambda_\alpha = \lambda_1 \min\{1, \alpha\} > 0$ tal que

$$a_\alpha(v, v) \geqslant \lambda_\alpha ||v||_V^2 \quad \forall v \in V,$$

donde λ_1 es la constante de coercividad de la forma bilineal a_1, se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2 + \lambda_\alpha ||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V^2 \leqslant -\left(q(t), u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)\right)_Q .$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon_\alpha = \lambda_\alpha$, se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2 + \lambda_\alpha ||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V^2\\ &\leqslant \left| \left(q(t), u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)\right)_Q \right|\\ &\leqslant ||q(t)||_Q ||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_Q \qquad (2.21)\\ &\leqslant D_1 ||q(t)||_Q ||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V\\ &\leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V^2,\end{aligned}$$

donde D_1 es la constante que surge de aplicar el teorema de trazas.

De lo anterior se siguen las siguientes estimaciones:

1)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V^2 \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2.$$

Integrando entre 0 y T se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2 dt + \frac{\lambda_\alpha}{2}\int_0^T ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V^2 dt \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2.$$

Luego, puesto que $\frac{1}{2}||u_{\alpha q}(t) - u_{0\alpha}(t)||_H^2\Big|_0^T$ es una constante no negativa y que $||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H \leqslant ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V$, resulta

$$\frac{\lambda_\alpha}{2}\int_0^T ||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H^2 dt \leqslant \frac{D_1^2}{2\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2,$$

entonces

$$||\nabla C_{1\alpha}(q)||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{D_1}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}. \tag{2.22}$$

Para $\alpha > 1$, se tiene que $\min\{1, \alpha\} = 1$ y en este caso la desigualdad anterior resulta independiente de α:

$$||\nabla C_{1\alpha}(q)||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{D_1}{\lambda_1}||q||_{\mathcal{Q}}. \tag{2.23}$$

Obsevar que, si no se usa que $||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H \leqslant ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V$, la desigualdad (2.22) podría escribirse como

$$||C_{1\alpha}(q)||_{L^2(V)} \leqslant \frac{D_1}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}. \tag{2.24}$$

2) De (2.21) se tiene que

$$\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2 \leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2 + \lambda_\alpha ||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V^2.$$

Integrando entre 0 y s, para $0 \leqslant s \leqslant T$, se logra

$$\begin{aligned} ||C_{1\alpha}(q)(t)||_H^2 \Big|_0^s &= \int_0^s \frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_H^2 dt \\ &\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}\int_0^s ||q(t)||_Q^2 dt + \lambda_\alpha \int_0^s ||u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t)||_V^2 dt \\ &\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2 + \lambda_\alpha ||u_{\alpha q} - u_{\alpha 0}||_{L^2(V)}^2. \end{aligned}$$

Luego, de (2.24), se sigue

$$||C_{1\alpha}(q)(s)||_H^2 \leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2 + \lambda_\alpha ||C_{1\alpha}(q)||_{L^2(V)}^2 \leqslant \frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \qquad \forall s \in [0, T].$$

Entonces, tomando supremo para $0 \leqslant s \leqslant T$, se obtiene

$$||C_{1\alpha}(q)||_{L^\infty(H)} \leqslant \sqrt{\frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha}}\,||q||_{\mathcal{Q}}.$$

Cuando $\alpha > 1$, se tiene nuevamente una desigualdad independiente de α :

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} ||C_{1\alpha}(q)(t)||_H \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}} D_1\,||q||_{\mathcal{Q}}. \tag{2.25}$$

3) De la igualdad (2.20) para $v \in V_0$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t), v \right)_H \right| &= |\,(\dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_{\alpha 0}(t), v)_H\,| \\ \leqslant \left|\,(q(t), v)_Q\,\right| &+ \left| a_\alpha(u_{\alpha q}(t) - u_{\alpha 0}(t), v) \right| \\ \leqslant D_2 ||q(t)||_Q ||v||_{V_0} &+ ||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H ||\nabla v||_H, \end{aligned}$$

donde D_2 es una constante que surge de aplicar el teorema de trazas y equivalencia entre las normas de V y V_0.

Notar que en lo anterior se ha utilizado que $\int\limits_{\Gamma_1} C_{1\alpha}(q)(t) v d\gamma = 0$, ya que $v \in V_0$.
Luego, tomando supremo sobre $\{v \in V_0$ tal que $||v||_{V_0} \leqslant 1\}$, se logra

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V_0'}^2 &\leqslant \left(D_2 ||q(t)||_Q + ||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H \right)^2 \\ &\leqslant 2D_2^2 ||q(t)||_Q^2 + 2||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H^2. \end{aligned}$$

Integrando entre 0 y T y de (2.22) se deduce

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V_0'}^2 dt &\leqslant 2D_2^2 ||q||_{\mathcal{Q}}^2 + 2||\nabla C_{1\alpha}(q)||_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leqslant 2D_2^2 ||q||_{\mathcal{Q}}^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha^2} ||q||_{\mathcal{Q}}^2. \end{aligned}$$

Así, se logra

$$\left[\int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V_0'}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2D_2^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha^2}}\, ||q||_{\mathcal{Q}},$$

y cuando $\alpha > 1$, se tiene

$$\left[\int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V_0'}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2D_2^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_1^2}}\, ||q||_{\mathcal{Q}}. \qquad (2.26)$$

Observar que, si $v \in V$, la estimación que se obtiene depende del parámetro α, aún cuando $\alpha > 1$. En efecto, al igual que antes, de la igualdad (2.20) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se deduce

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t), v \right)_H \right| \\
&\leqslant |(q(t), v)_Q| + \left| a(C_{1\alpha}(q)(t), v) \right| + \alpha \left| \int_{\Gamma_1} C_{1\alpha}(q)(t) v d\gamma \right| \\
&\leqslant ||q(t)||_Q ||v||_Q + ||\nabla C_{1\alpha}(q)(t)||_H ||\nabla v||_H + \alpha ||C_{1\alpha}(q)(t)||_{L^2(\Gamma_1)} ||v||_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leqslant D_3 ||q(t)||_Q ||v||_V + ||C_{1\alpha}(q)(t)||_{V_0} ||v||_V + \alpha D_4^2 ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V ||v||_V,
\end{aligned}$$

donde D_3 y D_4 son constantes que surgen de aplicar el teorema de trazas sobre Γ_2 y Γ_1 respectivamente.

Tomando supremo sobre $\{v \in V$ tal que $||v||_V \leqslant 1\}$, se logra

$$\left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V'} \leqslant D_3 ||q(t)||_Q + \left(1 + \alpha D_4^2\right) ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V,$$

y por lo tanto

$$\left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V'}^2 \leqslant 2D_3^2 ||q(t)||_Q^2 + 2\left(1 + \alpha D_4^2\right)^2 ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V^2.$$

Integrando entre 0 y T y utilizando (2.24) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V'}^2 dt &\leqslant 2D_3^2 ||q||_{\mathcal{Q}}^2 + 2\left(1 + \alpha D_4^2\right)^2 ||C_{1\alpha}(q)||_{L^2(V)}^2 \\
&\leqslant 2D_3^2 ||q||_{\mathcal{Q}}^2 + \frac{2D_1^2 \left(1 + \alpha D_4^2\right)^2}{\lambda_\alpha^2} ||q||_{\mathcal{Q}}^2,
\end{aligned}$$

y así

$$\left[\int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V'}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2D_3^2 + \frac{2D_1^2 \left(1 + \alpha D_4^2\right)^2}{\lambda_\alpha^2}} ||q||_{\mathcal{Q}}.$$

Cuando $\alpha > 1$ resulta la siguiente desigualdad

$$\left[\int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q)(t) \right|\right|_{V'}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2D_3^2 + \frac{2D_1^2 \left(1 + \alpha D_4^2\right)^2}{\lambda_1^2}} ||q||_{\mathcal{Q}}, \tag{2.27}$$

la cual sigue dependiendo de α.

De esta manera, el operador

$$C_{1\alpha} : \mathcal{Q} \to \{v \in L^2(V) \cap L^\infty(H) : \dot{v} \in L^2(V')\}$$

resulta continuo.

ii) La aplicación $\Pi_{1\alpha}$ es continua, esto se sigue de (2.24) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|\Pi_{1\alpha}(q,\eta)| &= |(C_{1\alpha}(q), C_{1\alpha}(\eta))_{\mathcal{H}} + M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}}| \\
&\leqslant ||C_{1\alpha}(q)||_{\mathcal{H}}||C_{1\alpha}(\eta)||_{\mathcal{H}} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \\
&\leqslant ||C_{1\alpha}(q)||_{L^2(V)}||C_{1\alpha}(\eta)||_{L^2(V)} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \\
&\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha^2}||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \\
&= \left(\frac{D_1^2}{\lambda_\alpha^2} + M_2\right)||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \qquad \forall (q,\eta) \in \mathcal{Q}\times\mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

Además, $\Pi_{1\alpha}$ es coerciva en $\mathcal{Q}$, ya que

$$\begin{aligned}
\Pi_{1\alpha}(q,q) &= (C_{1\alpha}(q), C_{1\alpha}(q))_{\mathcal{H}} + M_2(q,q)_{\mathcal{Q}} \\
&= (u_{\alpha q} - u_{\alpha 0}, u_{\alpha q} - u_{\alpha 0})_{\mathcal{H}} + M_2(q,q)_{\mathcal{Q}} \\
&= ||u_{\alpha q} - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}}^2 + M_2||q||_{\mathcal{Q}}^2 \geqslant M_2||q||_{\mathcal{Q}}^2 \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

iii) $\mathcal{L}_{1\alpha}$ es continua sobre $\mathcal{Q}$, pues de (2.24) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_{1\alpha}(q)| &= |(C_{1\alpha}(q), z_d - u_{\alpha 0})_{\mathcal{H}}| \leqslant ||C_{1\alpha}(q)||_{\mathcal{H}}||z_d - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant ||C_{1\alpha}(q)||_{L^2(V)}||z_d - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant \frac{D_1}{\lambda_\alpha}||z_d - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}}\,||q||_{\mathcal{Q}} \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

iv) Por la definición de $\Pi_{1\alpha}$ y $\mathcal{L}_{1\alpha}$ y por (2.7), $J_{1\alpha}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
J_{1\alpha}(q) &= \frac{1}{2}||u_{\alpha q} - z_d||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \\
&= \frac{1}{2}||u_{\alpha q} - u_{\alpha 0} + u_{\alpha 0} - z_d||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2}||q||_{Q}^2 \\
&= \frac{1}{2}||u_{\alpha q} - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}}^2 - (u_{\alpha q} - u_{\alpha 0}, z_d - u_{\alpha 0})_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||z_d - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(C_{1\alpha}(q), C_{1\alpha}(q)\right)_{\mathcal{H}} - (C_{1\alpha}(q), z_d - u_{\alpha 0})_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||z_d - u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\Pi_{1\alpha}(q,q) - \mathcal{L}_{1\alpha}(q) + \frac{1}{2}||u_{\alpha 0} - z_d||_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

v) $J_{1\alpha}$ es un funcional coercivo sobre $\mathcal{Q}$. La demostración es análoga a la realizada para el funcional J_1.

vi) Existe un único control óptimo $\overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q}$ tal que $J_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) = \min_{q\in\mathcal{Q}} J_{1\alpha}(q)$. Esto se sigue del Lema A.2.10 del Apéndice, pues dado que $\Pi_{1\alpha}$ es una forma bilineal, continua y coerciva sobre $\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}$ y $\mathcal{L}_{1\alpha}$ es lineal y continua sobre $\mathcal{Q}$, dicho resultado garantiza existencia y unicidad del mínimo para el siguiente funcional

$$J(q) = \frac{1}{2}\Pi_{1\alpha}(q,q) - \mathcal{L}_{1\alpha}(q),$$

y teniendo en cuenta que $\frac{1}{2}||u_{\alpha 0} - z_d||^2_{\mathcal{H}}$ es independiente de q, se logra que $J_{1\alpha}(q)$ tiene un mínimo, al cual se lo denota con $\overline{q}_\alpha$.

$\square$

Se define el estado adjunto $p_{\alpha q}$ correspondiente a (2.2) para cada $q \in \mathcal{Q}$, como la única solución del siguiente problema parabólico mixto

$$-\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial t} - \Delta p_{\alpha q} = u_{\alpha q} - z_d \quad \text{en } \Omega \qquad -\left.\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = \alpha p_{\alpha q} \qquad \left.\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0 \qquad p_{\alpha q}(T) = 0.$$

Para determinar la formulación variacional de este problema, se multiplica a ambos lados de $-\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial t} - \Delta p_{\alpha q} = u_{\alpha q} - z_d$ por una función test $v \in V$ y se integra

$$-\int_\Omega \frac{\partial p_{\alpha q}(t)}{\partial t} v dx - \int_\Omega \Delta p_{\alpha q}(t) v dx = \int_\Omega (u_{\alpha q}(t) - z_d(t)) v dx.$$

Por la fórmula de Green se tiene

$$-\int_\Omega \frac{\partial p_{\alpha q}(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla p_{\alpha q}(t) \nabla v dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p_{\alpha q}(t)}{\partial n} v d\gamma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p_{\alpha q}(t)}{\partial n} v d\gamma = \int_\Omega (u_{\alpha q}(t) - z_d(t)) v dx,$$

y puesto que $\left.\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0$ y $-\left.\frac{\partial p_{\alpha q}}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = \alpha p_{\alpha q}$, se logra

$$-\int_\Omega \frac{\partial p_{\alpha q}(t)}{\partial t} v dx + \int_\Omega \nabla p_{\alpha q}(t) \nabla v dx + \alpha \int_{\Gamma_1} p_{\alpha q}(t) v d\gamma = \int_\Omega (u_{\alpha q}(t) - z_d(t)) v dx.$$

Así, se tiene el siguiente problema variacional

$$\begin{cases} p_{\alpha q} \in L^2(V), \qquad p_{\alpha q}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_{\alpha q} \in L^2(V') \\ \text{tal que} \quad -\langle \dot{p}_{\alpha q}(t), v\rangle_{V',V} + a_\alpha(p_{\alpha q}(t), v) = (u_{\alpha q}(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{2.28}$$

el cual tiene una única solución $p_{\alpha q} \in L^2(V)$.

Lema 2.3.2.

i) El estado adjunto $p_{\alpha q}$ satisface la siguiente igualdad

$$(C_{1\alpha}(\eta), u_{\alpha q} - z_d)_{\mathcal{H}} = -(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}.$$

ii) El funcional $J_{1\alpha}$ es diferenciable Gâteaux y $J'_{1\alpha}$ viene dado por

$$\begin{aligned}\langle J'_{1\alpha}(q), \eta - q\rangle &= (u_{\eta_\alpha} - u_{\alpha q}, u_{\alpha q} - z_d)_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta - q)_{\mathcal{Q}} \\ &= \Pi_{1\alpha}(q, \eta - q) - \mathcal{L}_{1\alpha}(\eta - q), \qquad \forall q, \eta \in \mathcal{Q}.\end{aligned}$$

iii) La derivada Gâteaux de $J_{1\alpha}$ puede escribirse como

$$J'_{1\alpha}(q) = M_2 q - p_{\alpha q}, \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

iv) La condición de optimalidad para el problema (2.9) viene dada por

$$J'_{1\alpha}(q) = 0 \text{ en } \mathcal{Q}, \quad \text{ esto es,} \quad - p_{\alpha \overline{q}_\alpha} + M_2 \overline{q}_\alpha = 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}.$$

Demostración.

i) Este resultado se sigue de los problemas variacionales (2.5) y (2.28). Más precisamente, si en (2.28) se elige $v = C_{1\alpha}(\eta)(t)$ y se integra entre 0 y T, se logra

$$-(\dot{p}_{\alpha q}, C_{1\alpha}(\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a_\alpha(p_{\alpha q}(t), C_{1\alpha}(\eta)(t))dt = (u_{\alpha q} - z_d, C_{1\alpha}(\eta))_{\mathcal{H}}. \tag{2.29}$$

Por otro lado, si en (2.5) se toma $v = p_{\alpha q}(t)$ para $q = 0$ y para $q = \eta$ se tiene

$$(\dot{u}_{\alpha\eta}(t) - \dot{u}_{\alpha 0}(t), p_{\alpha q}(t))_H + a_\alpha(u_{\alpha\eta}(t) - u_{\alpha 0}(t), p_{\alpha q}(t)) = -\int_{\Gamma_2} \eta(t) p_{\alpha q}(t) d\gamma.$$

Luego, integrando entre 0 y T, se obtiene

$$(\dot{u}_{\alpha\eta} - \dot{u}_{\alpha 0}, p_{\alpha q})_{\mathcal{H}} + \int_0^T a_\alpha(C_{1\alpha}(\eta)(t), p_{\alpha q}(t))dt = -(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}. \tag{2.30}$$

Entonces, de (2.29), (2.30), utilizando la simetría de la forma bilineal a_α y dado que $p_{\alpha q}(T)=0$ y $C_{1\alpha}(\eta)(0)=0$, se sigue

$$
\begin{aligned}
&(u_{\alpha q}-z_d, C_{1\alpha}(\eta))_{\mathcal{H}}\\
&=-\left(\dot{p}_{\alpha q}, C_{1\alpha}(\eta)\right)_{\mathcal{H}}+\int_0^T a_\alpha(p_{\alpha q}(t), C_{1\alpha}(\eta)(t))dt\\
&=-\left(\dot{p}_{\alpha q}, C_{1\alpha}(\eta)\right)_{\mathcal{H}}+\int_0^T a_\alpha(C_{1\alpha}(\eta)(t), p_{\alpha q}(t))dt\\
&=-\left(\dot{p}_{\alpha q}, C_{1\alpha}(\eta)\right)_{\mathcal{H}}-(\dot{u}_{\alpha\eta}-\dot{u}_{\alpha 0}, p_{\alpha q})_{\mathcal{H}}-(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}\\
&=-\left(\dot{p}_{\alpha q}, C_{1\alpha}(\eta)\right)_{\mathcal{H}}-\left(\frac{d}{dt}C_{1\alpha}(\eta), p_{\alpha q}\right)_{\mathcal{H}}-(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}\\
&=-\int_0^T\left[\left(\dot{p}_{\alpha q}(t), C_{1\alpha}(\eta)(t)\right)_H+\left(\frac{d}{dt}C_{1\alpha}(\eta)(t), p_{\alpha q}(t)\right)_H\right]dt-(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}\\
&=-\int_0^T\frac{d}{dt}\left(p_{\alpha q}(t), C_{1\alpha}(\eta)(t)\right)_H dt-(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}\\
&=-(\eta, p_{\alpha q})_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}
$$

ii) Sea $h>0$, de la definición de $J_{1\alpha}$ se tiene: $\forall q,\ \eta\in\mathcal{Q}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[J_{1\alpha}\left(q+h(\eta-q)\right)-J_{1\alpha}(q)\right]\\
&=\frac{h}{2}(u_{\alpha\eta}-u_{\alpha q}, u_{\alpha\eta}-u_{\alpha q})_{\mathcal{H}}+(u_{\alpha q}-z_d, u_{\alpha\eta}-u_{\alpha q})_{\mathcal{H}}\\
&\quad+\frac{M_2 h}{2}(\eta-q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando $h\to 0^+$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\langle J_{1\alpha}'(q),\eta-q\rangle&=(u_{\alpha q}-z_d, u_{\alpha\eta}-u_{\alpha q})_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}\\
&=(u_{\alpha q}-u_{\alpha 0}+u_{\alpha 0}-z_d, C_{1\alpha}(\eta-q))_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}\\
&=(C_{1\alpha}(q), C_{1\alpha}(\eta-q))_{\mathcal{H}}-(z_d-u_{\alpha 0}, C_{1\alpha}(\eta-q))_{\mathcal{H}}+M(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}\\
&=\Pi_{1\alpha}(q,\eta-q)-\mathcal{L}_{1\alpha}(\eta-q).
\end{aligned}
$$

iii) De lo anterior, se deduce

$$
\begin{aligned}
\langle J_{1\alpha}'(q),\eta\rangle&=\Pi_{1\alpha}(q,\eta)-\mathcal{L}_{1\alpha}(\eta)\\
&=(C_{1\alpha}(\eta), u_{\alpha q}-z_d)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}}\\
&=(M_2 q-p_{\alpha q},\eta)_{\mathcal{Q}}\qquad\qquad \forall\eta\in\mathcal{Q}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$J'_{1\alpha}(q) = M_2 q - p_{\alpha q} \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

iv) Como en el Lema 2.2.1, se tiene que $\langle J'_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha), q\rangle = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}$ y por lo tanto $J'_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) = 0$. Luego, por el inciso anterior, la condición de optimalidad viene dada por

$$M_2\overline{q}_\alpha - p_{\alpha\overline{q}_\alpha} = 0, \qquad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

$\square$

A continuación, se complementa esta sección dando algunas estimaciones para la aplicación afín $q \mapsto u_{\alpha q}$. Para ello se considera la siguiente observación.

Observación 2.3.3. Tomando $u = v = C_{1\alpha}(q)(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant T$, en la expresión $a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} uv d\gamma$, se obtiene

$$\begin{aligned} a_\alpha(C_{1\alpha}(q)(t), C_{1\alpha}(q)(t)) &= a(C_{1\alpha}(q)(t), C_{1\alpha}(q)(t)) + \alpha \int\limits_{\Gamma_1} C_{1\alpha}(q)(t)\ C_{1\alpha}(q)(t) d\gamma \\ &= ||C_{1\alpha}(q)(t)||^2_{V_0} + \alpha ||C_{1\alpha}(q)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Dado que a_α es continua en V, existe una constante $D_5 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha ||C_{1\alpha}(q)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} &\leqslant |a_\alpha(C_{1\alpha}(q)(t), C_{1\alpha}(q)(t))| \\ &\leqslant D_5 ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V ||C_{1\alpha}(q)(t)||_V \\ &= D_5 ||C_{1\alpha}(q)(t)||^2_V. \end{aligned}$$

Integrando entre 0 y T y por (2.24) para $\alpha > 1$, se obtiene la estimación

$$\alpha \int\limits_0^T ||C_{1\alpha}(q)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt \leqslant D_5 ||C_{1\alpha}(q)||^2_{L^2(V)} \leqslant D_5 \frac{D_1}{\lambda_1} ||q||_{\mathcal{Q}} ||C_{1\alpha}(q)||_{L^2(V)}, \tag{2.31}$$

la cual será utilizada en el siguiente lema.

Lema 2.3.4. Se tienen las siguientes estimaciones para $\alpha > 1$:

1) $||\nabla u_{\alpha q_1} - \nabla u_{\alpha q_2}||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{D_1}{\lambda_1} ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}$,

2) $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} ||u_{\alpha q_1}(t) - u_{\alpha q_2}(t)||_H \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}} D_1\, ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}$,

3) $||\dot{u}_{\alpha q_1} - \dot{u}_{\alpha q_2}||_{L^2(V_0')} \leqslant \sqrt{2D_2^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_1^2}}\ ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}$,

4) $||\dot{u}_{\alpha q_1} - \dot{u}_{\alpha q_2}||_{L^2(V')} \leqslant \sqrt{2D_3^2 + \frac{2D_1^2(1+\alpha D_4^2)}{\lambda_1^2}}\ ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}$,

5) $||u_{\alpha q_1} - u_{\alpha q_2}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant \sqrt{\frac{D_5}{\alpha}\frac{D_1}{\lambda_1}}\ ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}$.

Demostración.

1) Utilizando la linealidad de $C_{1\alpha}$ y la estimación (4.7) para $\alpha > 1$, se deduce

$$\begin{aligned}
||\nabla u_{\alpha q_1} - \nabla u_{\alpha q_2}||_{\mathcal{H}} &= ||\nabla(u_{\alpha q_1} - u_{0\alpha}) - \nabla(u_{\alpha q_2} - u_{0\alpha})||_{\mathcal{H}} \\
&= ||\nabla C_{1\alpha}(q_1) - \nabla C_{1\alpha}(q_2)||_{\mathcal{H}} \\
&= ||\nabla C_{1\alpha}(q_1 - q_2)||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{D_1}{\lambda_1}||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

2) De la linealidad de $C_{1\alpha}$ y la estimación (4.8) para $\alpha > 1$, se logra

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||u_{\alpha q_1}(t) - u_{\alpha q_2}(t)||_H &= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||(u_{\alpha q_1}(t) - u_{0\alpha}(t)) - (u_{\alpha q_2}(t) - u_{0\alpha}(t))||_H \\
&= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||C_{1\alpha}(q_1)(t) - C_{1\alpha}(q_2)(t)||_H \\
&= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||C_{1\alpha}(q_1 - q_2)(t)||_H \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}} D_1||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

3) De la estimación (4.9) para $\alpha > 1$ y por la linealidad de la aplicación $C_{1\alpha}$ y de la derivada, se tiene

$$\begin{aligned}
||\dot{u}_{\alpha q_1} - \dot{u}_{\alpha q_2}||_{L^2(V_0')} &= \left[\int_0^T ||(\dot{u}_{\alpha q_1}(t) - \dot{u}_{0\alpha}(t)) - (\dot{u}_{\alpha q_2}(t) - \dot{u}_{0\alpha}(t))||_{V_0'}^2 dt\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_{1\alpha}(q_1)(t) - \frac{d}{dt}C_{1\alpha}(q_2)(t)\right|\right|_{V_0'}^2 dt\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_{1\alpha}(q_1 - q_2)(t)\right|\right|_{V_0'}^2 dt\right]^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{2D_2^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_1^2}}||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

4) De la estimación (4.10) para $\alpha > 1$, se consigue

$$||\dot{u}_{\alpha q_1} - \dot{u}_{\alpha q_2}||_{L^2(V')} = \left[\int_0^T ||(\dot{u}_{\alpha q_1}(t) - \dot{u}_{0\alpha}(t)) - (\dot{u}_{\alpha q_2}(t) - \dot{u}_{0\alpha}(t))||^2_{V'} dt \right]^{1/2}$$
$$= \left[\int_0^T \left|\left| \frac{d}{dt} C_{1\alpha}(q_1 - q_2)(t) \right|\right|^2_{V'} dt \right]^{1/2}$$
$$\leqslant \sqrt{2D_3^2 + \frac{2D_1^2(1+\alpha D_4^2)}{\lambda_1^2}} ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}.$$

5) De (2.31) y (2.24) para $\alpha > 1$, se obtiene

$$||u_{\alpha q_1} - u_{\alpha q_2}||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))} = \int_0^T ||(u_{\alpha q_1}(t) - u_{0\alpha}(t)) - (u_{\alpha q_2}(t) - u_{0\alpha}(t))||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt$$
$$= \int_0^T ||C_{1\alpha}(q_1 - q_2)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt$$
$$\leqslant \frac{D_5 D_1}{\alpha \lambda_1} ||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}} ||C_{1\alpha}(q_1 - q_2)||_{L^2(V)}$$
$$\leqslant \frac{D_5 D_1^2}{\alpha \lambda_1^2} ||q_1 - q_2||^2_{\mathcal{Q}}.$$

□

Observación 2.3.5. Para el mapeo del estado adjunto $q \mapsto p_{\alpha q}$ se obtienen estimaciones análogas reemplazando $u_{q_i \alpha}$ por $p_{q_i \alpha}$, para $i = 1, 2$.

2.4. Estimaciones Asintóticas

Con el objetivo de estudiar el comportamiento asintótico, cuando α tiende a $+\infty$, de los estados del sistema, los estados adjuntos y los controles óptimos, se obtendrán estimaciones para $u_{\alpha q}$, $\dot{u}_{\alpha q}$, $p_{\alpha q}$ y $\dot{p}_{\alpha q}$ para $\alpha > 1$ y q fijo.

Proposición 2.4.1. Para q fijo, si $u_{\alpha q}$ es la única solución del problema (2.5), se tiene la siguiente estimación:

$$||\dot{u}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} + ||u_{\alpha q}||_{L^\infty(H)} + ||u_{\alpha q}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha - 1)} ||u_{\alpha q} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant E_1, \qquad (2.32)$$

para todo $\alpha > 1$, donde la constante E_1 depende de las normas $||\dot{u}_q||_{L^2(V_0')}$, $||\dot{u}_q||_{L^2(V')}$, $||\nabla u_q||_{\mathcal{H}}$, $||u_q||_{L^2(V)}$, $||u_q||_{L^\infty(H)}$, $||g||_{\mathcal{H}}$, $||q||_{\mathcal{Q}}$ y de la constante de coercividad λ_1 de la forma bilineal a_1.

Demostración. Si se toma $v = u_{\alpha q}(t) - u_q(t) \in V$ en la ecuación variacional (2.5), se logra

$$\langle \dot{u}_{\alpha q}(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + a_\alpha(u_{\alpha q}(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) = L_{\alpha q}(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)).$$

Sumando a ambos miembros el término $-a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + a_\alpha(u_{\alpha q}(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) \\
&= L_{\alpha q}(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle.
\end{aligned}$$

De la definición de a_α y $L_{\alpha q}$, la última igualdad puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + a_\alpha(u_{\alpha q}(t) - u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma_1} u_q(t)(u_{\alpha q}(t) - u_q(t))d\gamma \\
&= L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} b(u_{\alpha q}(t) - u_q(t))d\gamma \\
&- a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle,
\end{aligned}$$

y dado que $u_q\big|_{\Gamma_1} = b$, la expresión anterior se simplifica a

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + a_\alpha(u_{\alpha q}(t) - u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) \\
&= L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por otro lado, de la coercividad de la forma bilineal a_1 se tiene

$$\begin{aligned}
&a_\alpha(u_{\alpha q}(t) - u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) \\
&= a(u_{\alpha q}(t) - u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) + \int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma + (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\
&= a_1(u_{\alpha q}(t) - u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) + (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\
&\geqslant \lambda_1 ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma.
\end{aligned}$$

Reemplazando lo obtenido en (2.33) se logra

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + \lambda_1 ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 \\
&+ (\alpha - 1)\int\limits_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\
&\leqslant L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Aquí, dado que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa la paridad entre V_0' y V_0 o entre V' y V según corresponda, y puesto que $\dot{u}_q(t) \in V_0'$ y $u_{\alpha q}(t) - u_q(t) \in V$, para que la expresión $\langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle$ tenga sentido se debe extender $\dot{u}_q(t)$ a un elemento de V'. En efecto, se sabe que V_0 es un subespacio de V, donde la inclusión $V_0 \subset V$ es continua. Además, la aplicación $\dot{u}_q(t) \in V_0'$ para todo t, por lo que $\dot{u}_q(t)$ es una aplicación lineal y continua. Entonces por Teorema A.2.1 del Apéndice (Teorema de Hahn-Banach) $\dot{u}_q(t)$ se puede extender a un elemento de V' preservando la norma para todo t. Es decir, $\dot{u}_q$ puede ser extendido a un elemento de $L^2(V')$.

En lo que sigue se acota el lado derecho de la desigualdad (2.34), para ello se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
&L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle \\
&\leqslant |L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t))| + |a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t))| + |\langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle| \\
&\leqslant |(g(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t))_H| + |(q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t))_Q| \\
&\quad + |a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t))| + |\langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle| \\
&\leqslant ||g(t)||_H ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_H + ||q(t)||_Q ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_Q \\
&\quad + ||\nabla u_q(t)||_H ||\nabla(u_{\alpha q}(t) - u_q(t))||_H + ||\dot{u}_q(t)||_{V'} ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t))||_V \\
&\leqslant ||g(t)||_H ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V + D_1 ||q(t)||_Q ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V \\
&\quad + ||\nabla u_q(t)||_H ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V + ||\dot{u}_q(t)||_{V'} ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t))||_V,
\end{aligned}$$

donde D_1 surge de aplicar el teorema de trazas.

Luego, de (2.34) y (2.4), se consigue

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + \lambda_1 ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int\limits_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\
&\leqslant ||g(t)||_H ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V + D_1 ||q(t)||_Q ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V \\
&\quad + ||\nabla u_q(t)||_H ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V + ||\dot{u}_q(t)||_{V'} ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t))||_V.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy con ε a cada término del lado derecho para $\epsilon = \frac{\lambda_1}{4}$, se logra

$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + \lambda_1 ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda_1}||g(t)||_H^2 + \frac{\lambda_1}{8}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + \frac{2}{\lambda_1}D_1^2||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_1}{8}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 \\ &\quad + \frac{2}{\lambda_1}||\nabla u_q(t)||_H^2 + \frac{\lambda_1}{8}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\dot{u}_q(t)||_{V'}^2 + \frac{\lambda_1}{8}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t))||_V^2,\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}&\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + \frac{\lambda_1}{2}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda_1}||g(t)||_H^2 + \frac{2}{\lambda_1}D_1^2||q(t)||_Q^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\nabla u_q(t)||_H^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\dot{u}_q(t)||_{V'}^2.\end{aligned}$$

Dado que $\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_H^2$ y que $u_q|_{\Gamma_1} = b$, se tiene

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_H^2 + \frac{\lambda_1}{2}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)||u_{\alpha q}(t) - b||_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda_1}||g(t)||_H^2 + \frac{2}{\lambda_1}D_1^2||q(t)||_Q^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\nabla u_q(t)||_H^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\dot{u}_q(t)||_{V'}^2.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Integrando entre 0 y T, y usando que $u_{\alpha q}(0) = u_q(0) = v_b$, se logra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}||u_{\alpha q}(T) - u_q(T)||_H^2 + \frac{\lambda_1}{2}||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)}^2 + (\alpha - 1)||u_{\alpha q} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))}^2 \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda_1}||g||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2}{\lambda_1}D_1^2||q||_{\mathcal{Q}}^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\nabla u_q||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2}{\lambda_1}||\dot{u}_q||_{L^2(V')}^2 = \frac{2}{\lambda_1}A_1,\end{aligned}$$

donde $A_1 = ||g||_{\mathcal{H}}^2 + D_1^2||q||_{\mathcal{Q}}^2 + ||\nabla u_q||_{\mathcal{H}}^2 + ||\dot{u}_q||_{L^2(V')}^2$.
De esta última desigualdad se deduce

$$\sqrt{(\alpha - 1)}||u_{\alpha q} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}A_1}, \tag{2.36}$$

y de $||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)} \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\sqrt{A_1}$, se obtiene

$$||u_{\alpha q}||_{L^2(V)} - ||u_q||_{L^2(V)} \leqslant ||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)} \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\sqrt{A_1},$$

por lo tanto

$$||u_{\alpha q}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\sqrt{A_1} + ||u_q||_{L^2(V)}. \tag{2.37}$$

Además, de (2.35) se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t)-u_q(t)||_H^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}||g(t)||_H^2+\frac{2}{\lambda_1}D_1^2||q(t)||_Q^2+\frac{2}{\lambda_1}||\nabla u_q(t)||_H^2+\frac{2}{\lambda_1}||\dot{u}_q(t)||_{V'}^2.$$

Integrando entre 0 y s, con $s \leqslant T$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t)-u_q(t)||_H^2 dt\\
&\leqslant \frac{2}{\lambda_1}\int_0^s ||g(t)||_H^2 dt+\frac{2}{\lambda_1}D_1^2\int_0^s ||q(t)||_Q^2 dt+\frac{2}{\lambda_1}\int_0^s ||\nabla u_q(t)||_H^2 dt+\frac{2}{\lambda_1}\int_0^s ||\dot{u}_q(t)||_{V'}^2 dt\\
&\leqslant \frac{2}{\lambda_1}||g||_{\mathcal{H}}^2+\frac{2}{\lambda_1}D_1^2||q||_{\mathcal{Q}}^2+\frac{2}{\lambda_1}||\nabla u_q||_{\mathcal{H}}^2+\frac{2}{\lambda_1}||\dot{u}_q||_{L^2(V')}^2=\frac{2}{\lambda_1}A_1.
\end{aligned}$$

Nuevamente, usando que $u_{\alpha q}(0)=u_q(0)=v_b$, se logra

$$\frac{1}{2}||u_{\alpha q}(s)-u_q(s)||_H^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}A_1,$$

y tomando supremo sobre s, con $0 \leqslant s \leqslant T$, se deduce

$$\frac{1}{2}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^\infty(H)}^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}A_1,$$

es decir

$$||u_{\alpha q}||_{L^\infty(H)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{A_1}+||u_q||_{L^\infty(H)}. \tag{2.38}$$

Por otro lado, si en la ecuación variacional (2.5) se considera $v \in V_0$, y se le resta la ecuación variacional (2.4), se logra

$$(\dot{u}_{\alpha q}(t)-\dot{u}_q(t),v)_H+a(u_{\alpha q}(t)-u_q(t),v)=0, \quad \forall v \in V_0.$$

Luego, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\begin{aligned}
(\dot{u}_{\alpha q}(t)-\dot{u}_q(t),v)_H &\leqslant |a(u_q(t)-u_{\alpha q}(t),v)|\\
&\leqslant ||\nabla(u_q(t)-u_{\alpha q}(t))||_{L^2(\Omega)}||v||_{V_0}\\
&\leqslant ||u_q(t)-u_{\alpha q}(t)||_V||v||_{V_0} \quad \forall v \in V_0.
\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $\{v \in V_0 \text{ tal que } ||v||_{V_0} \leqslant 1\}$ e integrando entre 0 y T, se sigue

$$||\dot{u}_{\alpha q}-\dot{u}_q||_{L^2(V_0')} \leqslant ||u_q-u_{\alpha q}||_{L^2(V)}. \tag{2.39}$$

Así,

$$||\dot{u}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} - ||\dot{u}_q||_{L^2(V_0')} \leqslant ||u_q||_{L^2(V)} + ||u_{\alpha q}||_{L^2(V)},$$

y por (2.37), se obtiene

$$||\dot{u}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\sqrt{A_1} + 2||u_q||_{L^2(V)} + ||\dot{u}_q||_{L^2(V_0')}. \tag{2.40}$$

Utilizando las cotas halladas en (2.36), (2.37), (2.38) y (2.40) se puede concluir que, para todo $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} &||\dot{u}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} + ||u_{\alpha q}||_{L^\infty(H)} + ||u_{\alpha q}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha-1)}||u_{\alpha q} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\ &\leqslant \sqrt{A_1}\left(\frac{4}{\lambda_1} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1}}\right) + 3||u_q||_{L^2(V)} + ||\dot{u}_q||_{L^2(V_0')} + ||u_q||_{L^\infty(H)} =: E_1. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.2. Para $q \in \mathcal{Q}$ fijo, cuando $\alpha \to +\infty$, se tiene que $u_{\alpha q} \to u_q$ fuertemente en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$ y $\dot{u}_{\alpha q} \to \dot{u}_q$ fuertemente en $L^2(V_0')$.

Demostración. Sea $q \in \mathcal{Q}$ fijo. La prueba se desarrolla en tres pasos:

Paso 1. En esta etapa se prueba que existe una sucesión $\{u_{\alpha_n q}\}$ y $w_q \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$ tal que $u_{\alpha_n q} \rightharpoonup w_q$ débilmente en $L^2(V)$ y débil estrella en $L^\infty(H)$, y además, $\dot{u}_{\alpha_n q} \rightharpoonup \dot{w}_q$ débilmente en $L^2(V_0')$.

En efecto, sea $\{u_{\alpha_n q}\}$ una sucesión en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$. De la estimación (2.32), se tiene

$$||u_{\alpha_n q}||_{L^2(V)} \leqslant E_1,$$

lo que implica que $\{u_{\alpha_n q}\}$ es una sucesión acotada en el espacio Banach reflexivo $L^2(V)$. Así, por Teorema A.1.4 del Apéndice, existe una subsucesión $\{u_{\alpha_n q}\}$, denotada igual que la sucesión original, que converge en la topología débil a $w_q \in L^2(V)$.

En lo que sigue se probará que $w_q \in L^\infty(H)$ y que $u_{\alpha_n q} \overset{*}{\rightharpoonup} w_q$ en $L^\infty(H)$ (vía identificación). A tal efecto, para cada $u_{\alpha_n q} \in L^\infty(H)$ se define

$$\phi_{\alpha_n q}(h) = \int_0^T (h(t), u_{\alpha_n q}(t))_H \, dt \qquad \forall h \in L^1(H).$$

Claramente $\phi_{\alpha_n q} \in (L^1(H))'$, pues son aplicaciones lineales y continuas, ya que

$$|\phi_{\alpha_n q}(h)| \leqslant \int_0^T |\left(h(t), u_{\alpha_n q}(t)\right)_H| dt \leqslant ||u_{\alpha_n q}||_{L^\infty(H)} \int_0^T ||h(t)||_H dt \leqslant ||h||_{L^1(H)} ||u_{\alpha_n q}||_{L^\infty(H)}.$$

De la Proposición 2.4.1, se sigue

$$||\phi_{\alpha_n q}||_{(L^1(H))'} = \sup_{h \in L^1(H)} \frac{|\phi_{\alpha_n q}(h)|}{||h||_{L^1(H)}} \leqslant ||u_{\alpha_n q}||_{L^\infty(H)} \leqslant E_1.$$

Así, $\{\phi_{\alpha_n q}\}$ es una sucesión acotada en el espacio $(L^1(H))'$, y dado que $L^1(H)$ es un espacio de Banach separable, por Teorema A.1.5 del Apéndice, existe una subsucesión $\{\phi_{\alpha_n q}\}$ que converge en la topología débil estrella a $\phi_q \in (L^1(H))'$.

A continuación se identificará a ϕ_q con w_q. Sea $h \in L^1(H)$, de la Proposición A.1.3 del Apéndice, se tiene

$$\phi_q(h) = \lim_{\alpha_n \to \infty} \phi_{\alpha_n q}(h) = \lim_{\alpha_n \to \infty} \int_0^T \left(u_{\alpha_n q}(t), h(t)\right)_H dt = \int_0^T \left(w_q(t), h(t)\right)_H dt. \tag{2.41}$$

Por otro lado, dado que $\phi_q \in (L^1(H))'$, por la Proposición 1.3.3 existe $f_q \in L^\infty(H)$ tal que

$$\phi_q(h) = \int_0^T \left(f_q(t), h(t)\right)_H dt, \qquad \forall h \in L^1(H). \tag{2.42}$$

Luego, de (2.41) y (2.42) se deduce

$$\int_0^T \left(f_q(t) - w_q(t), h(t)\right)_H dt = 0 \qquad \forall h \in L^1(H).$$

Por lo tanto, $f_q(t) = w_q(t)$ en c.t.p de $(0, T)$. Así, se tiene que $\phi_q \in (L^1(H))'$ se identifica con $w_q \in L^\infty(H)$. De esta forma se puede afirmar que existe (vía identificación) una sucesión que se denota por $\{u_{\alpha_n q}\}$ y $w_q \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$ tal que $u_{\alpha_n q} \to w_q$ débilmente en $L^2(V)$ y débil estrella en $L^\infty(H)$.

Además, de la estimación (2.32) se tiene que

$$||\dot{u}_{\alpha_n q}||_{L^2(V_0')} \leqslant E_1$$

lo que implica que $\{\dot{u}_{\alpha_n q}\}$ es una sucesión acotada en el espacio Banach reflexivo $L^2(V_0')$. Así, existe una subsucesión denotada por $\{\dot{u}_{\alpha_n q}\}$ que converge en la topología débil a

$\eta_q \in L^2(V_0')$.

Dado que $u_{\alpha_n q} \rightharpoonup w_q$ en $L^2(V)$ y $\dot{u}_{\alpha_n q} \rightharpoonup \eta_q$ en $L^2(V_0')$, por la Proposición 1.3.7 se obtiene que $\eta_q = \dot{w}_q$, y por lo tanto queda demostrado que

$$\dot{u}_{\alpha_n q} \rightharpoonup \dot{w}_q \quad \text{débilmente en} \quad L^2(V_0').$$

Paso 2. En este paso se prueba que $w_q = u_q$.

En primer lugar se demuestra que $w_q = b$ sobre Γ_1. A tal efecto, de la estimación (2.32) se sabe que

$$\sqrt{(\alpha_n - 1)}||u_{\alpha_n q} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant E_1 \qquad \text{para } \alpha_n > 1.$$

Luego, de la Proposición A.2.9 del Apéndice, se tiene

$$0 \leq ||w_q - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant \liminf_{\alpha_n \to \infty} ||u_{\alpha_n q} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant \liminf_{\alpha_n \to \infty} \frac{E_1}{\sqrt{(\alpha_n - 1)}} = 0,$$

por lo tanto $w_q = b$ sobre Γ_1 y dado que $v_b = b$ sobre Γ_1, se tiene que $w_q - v_b \in L^2(V_0)$.

En segundo lugar se muestra que w_q satisface la ecuación variacional (2.4). Por tal motivo, si en la ecuación variacional (2.5) se considera $v \in V_0$, se tiene

$$\langle \dot{u}_{\alpha_n q}(t), v\rangle + a(u_{\alpha_n q}(t), v) = L_q(t, v), \quad \forall v \in V_0.$$

Así, para todo $v \in L^2(V_0)$ se satisface

$$\langle \dot{u}_{\alpha_n q}(t), v(t)\rangle + a(u_{\alpha_n q}(t), v(t)) = L_q(t, v(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Integrando sobre el intervalo $[0, T]$ se logra

$$\int_0^T \langle \dot{u}_{\alpha_n q}(t), v(t)\rangle dt + \int_0^T a(u_{\alpha_n q}(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(V_0). \tag{2.43}$$

Si se toma límite cuando $\alpha_n \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^T \langle \dot{w}_q(t), v(t)\rangle dt + \int_0^T a(w_q(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(V_0). \tag{2.44}$$

Lo anterior se deduce utilizando la Proposición A.1.3 del Apéndice y las convergencias débiles $u_{\alpha_n q} \rightharpoonup w_q$ en $L^2(V)$ y $\dot{u}_{\alpha_n q} \rightharpoonup \dot{w}_q$ en $L^2(V_0')$.

Sea $s \in V_0$ y cualquier $t_0 \in (0, T)$. Se considera el intervalo abierto

$$\mathcal{O}_j = \left(t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}\right) \subset (0, T)$$

para $j \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande y se toma

$$v(t) = \begin{cases} s & \text{si} \quad t \in \mathcal{O}_j \\ 0 & \text{si} \quad t \in (0,T) - \mathcal{O}_j. \end{cases}$$

Reemplazando $v \in L^2(V_0)$ en (2.44), se tiene

$$\int_{\mathcal{O}_j} \langle \dot{w}_q(t), s \rangle dt + \int_{\mathcal{O}_j} a(w_q(t), s) dt = \int_{\mathcal{O}_j} L_q(t, s) dt.$$

Dividiendo la expresión anterior por $\frac{2}{j}$ y tomando límite cuando $j \to \infty$, del Teorema A.2.5 del Apéndice (Teorema de diferenciación de Lebesgue), se logra

$$\langle \dot{w}_q(t), s \rangle + a(w_q(t), s) = L_q(t, s) \quad \forall s \in V_0, \quad \text{c.t.p } t \in (0,T).$$

Se demuestra además que $w_q(0) = v_b$. En efecto, de (2.43) y (2.44) se sigue

$$\int_0^T \langle \dot{u}_{\alpha_n q}(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T a(u_{\alpha_n q}(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(V_0),$$

y

$$\int_0^T \langle \dot{w}_q(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T a(w_q(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(V_0).$$

Sea $v \in C^1(0,T;V_0)$ con $v(T) = 0$, aplicando el Teorema 1.5.3 (Fórmula de integración por partes) y teniendo en cuenta que, por Proposición 1.5.2, w_q se puede considerar como una función en $C(0,T;H)$, se tiene

$$\int_0^T -\langle \dot{v}(t), u_{\alpha_n q}(t) \rangle dt - (u_{\alpha_n q}(0), v(0)) + \int_0^T a(u_{\alpha_n q}(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt, \tag{2.45}$$

y

$$\int_0^T -\langle \dot{v}(t), w_q(t) \rangle dt - (w_q(0), v(0)) + \int_0^T a(w_q(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt. \tag{2.46}$$

Tomando límite cuando $\alpha_n \to \infty$ en la expresión (2.45), y usando que $u_{\alpha_n q}(0) = v_b$ y que $u_{\alpha_n q}$ converge débilmente a w_q en $L^2(V)$, se obtiene

$$\int_0^T -\langle \dot{v}(t), w_q(t) \rangle dt - (v_b, v(0)) + \int_0^T a(w_q(t), v(t)) dt = \int_0^T L_q(t, v(t)) dt. \tag{2.47}$$

Restando las expresiones (2.46) y (2.47) se deduce

$$(v_b, v(0)) = (w_q(0), v(0)),$$

y, dado que $v(0)$ es arbitrario, se logra $w_q(0) = v_b$.

De lo anterior se consigue

$$\begin{cases} w_q - v_b \in L^2(V_0), \qquad w_q(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{w}_q \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{w}_q(t), v\rangle + a(w_q(t), v) = L_q(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases}$$

Así, $w_q = u_q$ por unicidad de la solución del problema variacional (2.4).

De lo demostrado en los dos pasos anteriores se tiene que, cuando $\alpha \to \infty$,

$$u_{\alpha q} \rightharpoonup u_q \text{ en } L^2(V), \quad u_{\alpha q} \overset{*}{\rightharpoonup} u_q \text{ en } L^\infty(H) \quad \text{y} \quad \dot{u}_{\alpha q} \rightharpoonup \dot{u}_q \text{ en } L^2(V_0').$$

Paso 3. En lo que sigue se prueban las siguientes convergencias fuertes para $\alpha \to \infty$:

$$u_{\alpha q} \to u_q \quad \text{en} \quad L^2(V) \cap L^\infty(H), \qquad u_{\alpha q} \to u_q \quad \text{en} \quad L^2(L^2(\Gamma_1)),$$

$$\dot{u}_{\alpha q} \to \dot{u}_q \quad \text{en} \quad L^2(V_0').$$

En efecto, de (2.34) se tiene

$$\langle \dot{u}_{\alpha q}(t) - \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle + \lambda_1 ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma$$
$$\leqslant L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_H^2 + \lambda_1 ||u_{\alpha q}(t) - u_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_{\alpha q}(t) - u_q(t))^2 d\gamma \\ &\leqslant L_q(t, u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - a(u_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)) - \langle \dot{u}_q(t), u_{\alpha q}(t) - u_q(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Integrando entre 0 y T, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||u_{\alpha q}(T)-u_q(T)||_H^2+\lambda_1||u_{\alpha q}-u_q||^2_{L^2(V)}+(\alpha-1)||u_{\alpha q}-u_q||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))}\\
&\leqslant \int_0^T L_q(t,u_{\alpha q}(t)-u_q(t))-a(u_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))-\langle \dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t)\rangle dt\\
&= \int_0^T\left(\int_\Omega g(t)(u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dx\right)dt-\int_0^T\left(\int_{\Gamma_2} q(t)(u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dx\right)dt\\
&\quad -\int_0^T a(u_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dt-\int_0^T\langle \dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t)\rangle dt.
\end{aligned}\tag{2.49}$$

Una consecuencia de esta desigualdad es la siguiente

$$\begin{aligned}
\lambda_1||u_{\alpha q}-u_q||^2_{L^2(V)} \leqslant& \int_0^T\left(\int_\Omega g(t)(u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dx\right)dt-\int_0^T\left(\int_{\Gamma_2} q(t)(u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dx\right)dt\\
&-\int_0^T a(u_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dt-\int_0^T\langle \dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\alpha\to\infty$ y usando propiedades de convergencia débil, se tiene

$$\lambda_1||u_{\alpha q}-u_q||^2_{L^2(V)}=0 \quad \text{esto es} \quad \lim_{\alpha\to\infty}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}=0,$$

es decir, $u_{\alpha q}$ converge fuertemente a u_q en $L^2(V)$.

Otra consecuencia de (2.49) es

$$\begin{aligned}
&(\alpha-1)||u_{\alpha q}-u_q||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))}\\
&\leqslant \int_0^T\left(\int_\Omega g(t)(u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dx\right)dt-\int_0^T\left(\int_{\Gamma_2} q(t)(u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dx\right)dt\\
&\quad -\int_0^T a(u_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dt-\int_0^T\langle \dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Nuevamente, tomando límite cuando $\alpha\to\infty$, se tiene $\lim\limits_{\alpha\to\infty}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(L^2(\Gamma_1))}=0$

$$\lim_{\alpha\to\infty}||u_{\alpha q}-u_q||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))}=0 \quad \text{es decir} \quad \lim_{\alpha\to\infty}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(L^2(\Gamma_1))}=0,$$

por lo tanto, $u_{\alpha q}$ converge fuertemente a u_q en $L^2(L^2(\Gamma_1))$.

Ahora, de la expresión (2.48), se logra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t)-u_q(t)||_H^2\\ &\leqslant L_q(t,u_{\alpha q}(t)-u_q(t))-a(u_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))-(\dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))_H\,.\end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior entre 0 y s, para $s>0$ fijo, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha q}(t)-u_q(t)||_H^2 dt=\frac{1}{2}||u_{\alpha q}(s)-u_q(s)||_H^2\\ &\leqslant \int_0^s L_q(t,u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dt-\int_0^s a(u_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))dt-\int_0^s (\dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))_H\,dt\\ &\leqslant \left|\int_0^s (g(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))_H dt\right|+\left|\int_0^s (q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))_Q dt\right|\\ &\quad+\left|\int_0^s (\nabla u_q(t),\nabla(u_{\alpha q}(t)-u_q(t)))_H dt\right|+\left|\int_0^s (\dot{u}_q(t),u_{\alpha q}(t)-u_q(t))_H\,dt\right|\\ &=\left|(g,u_{\alpha q}-u_q)_{L^2(0,s;H)}\right|+\left|(q,u_{\alpha q}-u_q)_{L^2(0,s;Q)}\right|\\ &\quad+\left|(\nabla u_q,\nabla(u_{\alpha q}-u_q))_{L^2(0,s;H)}\right|+\left|(\dot{u}_q,u_{\alpha q}-u_q)_{L^2(0,s,H)}\right|\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}&\left|(g,u_{\alpha q}-u_q)_{L^2(0,s;H)}\right|+\left|(q,u_{\alpha q}-u_q)_{L^2(0,s;Q)}\right|\\ &\quad+\left|(\nabla u_q,\nabla(u_{\alpha q}-u_q))_{L^2(0,s;H)}\right|+\left|(\dot{u}_q,u_{\alpha q}-u_q)_{L^2(0,s,H)}\right|\\ &\leqslant ||g||_{L^2(0,s;H)}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(0,s;H)}+||q||_{L^2(0,s;Q)}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(0,s;Q)}\\ &\quad+||\nabla u_q||_{L^2(0,s;H)}||\nabla(u_{\alpha q}-u_q)||_{L^2(0,s;H)}+||\dot{u}_q||_{L^2(0,s;V')}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(0,s;V)}\\ &\leqslant ||g||_{\mathcal{H}}||u_{\alpha q}-u_q||_{\mathcal{H}}+||q||_{\mathcal{Q}}||u_{\alpha q}-u_q||_{\mathcal{Q}}+||\nabla u_q||_{\mathcal{H}}||\nabla(u_{\alpha q}-u_q)||_{\mathcal{H}}+||\dot{u}_q||_{L^2(V')}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}\\ &\leqslant ||g||_{\mathcal{H}}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}+D_1||q||_{\mathcal{Q}}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}\\ &\quad+||u_q||_{L^2(V_0)}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}+||\dot{u}_q||_{L^2(V')}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)},\end{aligned}$$

donde la constante D_1 surge de aplicar el teorema de trazas.

Así se ha logrado que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||u_{\alpha q}(s)-u_q(s)||_H^2 &\leqslant ||g||_{\mathcal{H}}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}+D_1||q||_{\mathcal{Q}}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}\\ &\quad+||u_q||_{L^2(V_0)}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}+||\dot{u}_q||_{L^2(V')}||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}.\end{aligned}$$

Tomando supremo para $0 \leqslant s \leqslant T$ se tiene

$$\begin{aligned}
||u_{\alpha q} - u_q||^2_{L^\infty(H)} &= \sup_{0\leqslant s\leqslant T} ||u_{\alpha q}(s) - u_q(s)||^2_H \\
&\leqslant 2||g||_{\mathcal{H}}||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)} + 2D_1||q||_{\mathcal{Q}}||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)} \\
&\quad + 2||u_q||_{L^2(V_0)}||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)} + 2||\dot{u}_q||_{L^2(V')}||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)}.
\end{aligned}$$

Puesto que $u_{\alpha q}$ converge fuertemente a u_q en $L^2(V)$, de lo anterior se deduce que $u_{\alpha q}$ converge fuertemente a u_q en $L^\infty(H)$.
Por otro lado, de la estimación (2.39), se sabe que

$$||\dot{u}_{\alpha q} - \dot{u}_q||^2_{L^2(V_0')} \leqslant ||u_q - u_{\alpha q}||^2_{L^2(V)}.$$

Luego, dado que $||u_{\alpha q} - u_q||_{L^2(V)} \to 0$ se deduce que

$$||\dot{u}_{\alpha q} - \dot{u}_q||_{L^2(V_0')} \to 0,$$

es decir, $\dot{u}_{\alpha q}$ converge fuertemente a $\dot{u}_q$ en $L^2(V_0')$. □

Proposición 2.4.3. Para q fijo, si $p_{\alpha q}$ es la única solución del problema adjunto (2.28), se tiene la siguiente estimación:

$$||\dot{p}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} + ||p_{\alpha q}||_{L^\infty(H)} + ||p_{\alpha q}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha-1)}||p_{\alpha q}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant F_1, \tag{2.50}$$

para todo $\alpha > 1$, donde la constante F_1 depende de las normas $||\dot{p}_q||_{L^2(V_0')}$, $||\dot{p}_q||_{L^2(V')}$, $||\nabla p_q||_{\mathcal{H}}$, $||p_q||_{L^2(V)}$, $||p_q||_{L^\infty(H)}$, $||\dot{u}_q||_{L^2(V')}$, $||\nabla u_q||_{\mathcal{H}}$, $||u_q||_{L^2(V)}$, $||u_q||_{L^\infty(H)}$, $||g||_{\mathcal{H}}$, $||q||_{\mathcal{Q}}$, $||z_d||_{\mathcal{H}}$ y de la constante de coercividad λ_1.

Demostración. Si en la ecuación variacional (2.28) se toma $v = p_{\alpha q}(t) - p_q(t) \in V$ y se le suma la expresión $-a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) + \langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle$ a ambos miembros, se obtiene

$$\begin{aligned}
&- \langle \dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle + a_\alpha(p_{\alpha q}(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) - a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) \\
&= (u_{\alpha q}(t) - z_d(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t))_H - a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) + \langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Aquí, de manera similar a lo expuesto para $\dot{u}_q$, observar nuevamente que $\dot{p}_q$ puede ser extendido a un elemento de $L^2(V')$ para que la expresión $\langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle$ tenga sentido.

Dado que $p_q \in L^2(V_0)$, se tiene que $\int\limits_{\Gamma_1} p_q(t)(p_{\alpha q}(t) - p_q(t))d\gamma = 0$, con lo cual la igualdad anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} &- \langle \dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle + a_\alpha(p_{\alpha q}(t) - p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) \\ =& (u_{\alpha q}(t) - z_d(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t))_H - a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) \\ &+ \langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Por otro lado, de la coercividad de la forma bilineal a_1, se tiene

$$a_\alpha(p_{\alpha q}(t) - p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) \geqslant \lambda_1 ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int\limits_{\Gamma_1} (p_{\alpha q}(t) - p_q(t))^2 d\gamma.$$

Reemplazando lo obtenido en (2.60) se logra

$$\begin{aligned} &- \langle \dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle + \lambda_1 ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int\limits_{\Gamma_1} (p_{\alpha q}(t) - p_q(t))^2 d\gamma \\ \leqslant& (u_{\alpha q}(t) - z_d(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t))_H - a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t) + \langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma en el espacio dual, se obtiene

$$\begin{aligned} &(u_{\alpha q}(t) - z_d(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t))_H - a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) + \langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle \\ \leqslant& ||u_{\alpha q}(t) - z_d(t)||_H ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V + ||\nabla p_q(t)||_H ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V \\ &+ ||\dot{p}_q(t)||_{V'} ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t))||_V. \end{aligned}$$

Utilizando esta cota en (2.52) y aplicando la desigualdad de Cauchy con $\epsilon = \frac{\lambda_1}{3}$, se logra

$$\begin{aligned} &- \langle \dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle + \frac{\lambda_1}{2} ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V^2 + (\alpha - 1)\int\limits_{\Gamma_1} (p_{\alpha q}(t) - p_q(t))^2 d\gamma \\ \leqslant& \frac{3}{2\lambda_1} ||u_{\alpha q}(t) - z_d(t)||_H^2 + \frac{3}{2\lambda_1} ||\nabla p_q(t)||_H^2 + \frac{3}{2\lambda_1} ||\dot{p}_q(t)||_{V'}^2. \end{aligned}$$

Dado que $\langle \dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_H^2$ y que $p_q(t)|_{\Gamma_1} = 0$ e integrando sobre el intervalo $[0, T]$, se deduce

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{d}{dt} ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_H^2 dt + \frac{\lambda_1}{2}\int\limits_0^T ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V^2 dt + (\alpha - 1)\int\limits_0^T ||p_{\alpha q}(t)||_{L^2(\Gamma_1)}^2 dt \\ \leqslant& \frac{3}{2\lambda_1}\int\limits_0^T ||u_{\alpha q}(t) - z_d(t)||_H^2 dt + \frac{3}{2\lambda_1}\int\limits_0^T ||\nabla p_q(t)||_H^2 dt + \frac{3}{2\lambda_1}\int\limits_0^T ||\dot{p}_q(t)||_{V'}^2 dt. \end{aligned}$$

Usando que $p_{\alpha q}(T) = p_q(T) = 0$ y la acotación obtenida en (2.37) se logra

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||p_{\alpha q}(0) - p_q(0)||_H^2 + \frac{\lambda_1}{2}||p_{\alpha q} - p_q||^2_{L^2(V)} + (\alpha - 1)||p_{\alpha q}||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\
&\leqslant \frac{3}{2\lambda_1}||u_{\alpha q} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{3}{2\lambda_1}||\nabla p_q||^2_{\mathcal{H}} + \frac{3}{2\lambda_1}||\dot{p}_q||^2_{L^2(V')} \\
&\leqslant \frac{3}{2\lambda_1}\left(2||u_{\alpha q}||^2_{L^2(V)} + 2||z_d||^2_{\mathcal{H}} + ||\nabla p_q||^2_{\mathcal{H}} + ||\dot{p}_q||^2_{L^2(V')}\right) \\
&\leqslant \frac{3}{2\lambda_1}B_1,
\end{aligned}
$$

donde $B_1 := 2\left(\frac{2}{\lambda_1}\sqrt{A_1} + ||u_q||_{L^2(V)}\right)^2 + 2||z_d||^2_{\mathcal{H}} + ||\nabla p_q||^2_{\mathcal{H}} + ||\dot{p}_q||^2_{L^2(V')}$.
De esta última desigualdad se deduce:

$$
\sqrt{(\alpha-1)}||p_{\alpha q}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leq \sqrt{\frac{3}{2\lambda_1}B_1}, \qquad ||p_{\alpha q}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{\lambda_1}\sqrt{B_1} + ||p_q||_{L^2(V)}.
$$

Además, integrando en $[s, T]$, con $0 < s < T$ la siguiente expresión

$$
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||^2_H \leqslant \frac{3}{2\lambda_1}||u_{\alpha q}(t) - z_d(t)||^2_H + \frac{3}{2\lambda_1}||\nabla p_q(t)||^2_H + \frac{3}{2\lambda_1}||\dot{p}_q(t)||^2_{V'},
$$

y usando nuevamente que $p_{\alpha q}(T) = p_q(T) = 0$ se obtiene

$$
\frac{1}{2}||p_{\alpha q}(s) - p_q(s)||^2_H \leqslant \frac{3}{2\lambda_1}B_1.
$$

Tomando supremo sobre s, con $0 \leqslant s \leqslant T$, se logra

$$
||p_{\alpha q}||_{L^\infty(H)} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{B_1} + ||p_q||_{L^\infty(H)}.
$$

Si a la ecuación variacional (2.28) para $v \in V_0$ se le resta la ecuación variacional (2.15), se logra

$$
-(\dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), v)_H + a(p_{\alpha q}(t) - p_q(t), v) = (u_{\alpha q}(t) - u_q(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0.
$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$
(\dot{p}_{\alpha q}(t) - \dot{p}_q(t), v)_H \leqslant ||p_{\alpha q}(t) - p_q(t)||_V||v||_{V_0} + D_1||u_q(t) - u_{\alpha q}(t)||_V||v||_{V_0}, \quad \forall v \in V_0
$$

donde D_1 es la constante que surge de aplicar la desigualdad de Poincaré.
Tomando supremo sobre $v \in V_0$, integrando en $[0, T]$ y usando la acotación (2.37), se tiene

$$
||\dot{p}_{\alpha q} - \dot{p}_q||^2_{L^2(V_0')} \leqslant 2||p_{\alpha q} - p_q||^2_{L^2(V)} + 2D_1^2||u_{\alpha q} - u_q||^2_{L^2(V)} \leqslant \frac{6}{\lambda_1^2}B_1 + \frac{8}{\lambda_1^2}D_1^2A_1. \quad (2.53)
$$

Luego,

$$||\dot{p}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} \leqslant \sqrt{\frac{6}{\lambda_1^2}B_1 + \frac{8}{\lambda_1^2}D_1^2 A_1} + ||\dot{p}_q||_{L^2(V_0')}.$$

Utilizando las cotas halladas anteriormente se puede concluir que, para todo $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} &||\dot{p}_{\alpha q}||_{L^2(V_0')} + ||p_{\alpha q}||_{L^\infty(H)} + ||p_{\alpha q}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha-1)}||p_{\alpha q}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\ \leqslant &\sqrt{\frac{6}{\lambda_1^2}B_1 + \frac{8}{\lambda_1^2}D_1^2 A_1} + ||\dot{p}_q||_{L^2(V_0')} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{B_1} + ||p_q||_{L^\infty(H)} \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{\lambda_1}\sqrt{B_1} + ||p_q||_{L^2(V)} + \sqrt{\frac{3}{2\lambda_1}B_1} := F_1. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.4.4. Para $q \in \mathcal{Q}$ fijo, cuando $\alpha \to \infty$, se tiene que $p_{\alpha q} \to p_q$ fuertemente en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$ y $\dot{p}_{\alpha q} \to \dot{p}_q$ fuertemente en $L^2(V_0')$.

Demostración. Sea $q \in \mathcal{Q}$ fijo. Se considera $\{p_{\alpha_n q}\}$ una sucesión en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$.
Repitiendo el procedimiento realizado en el Teorema 2.4.2, se puede afirmar que existe (vía identificación) una sucesión $\{p_{\alpha_n q}\}$ y $\eta_q \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$ tal que $p_{\alpha_n q} \rightharpoonup \eta_q$ débilmente en $L^2(V)$ y débil estrella en $L^\infty(H)$, y además, $\dot{p}_{\alpha_n q} \rightharpoonup \dot{\eta}_q$ débilmente en $L^2(V_0')$.
En lo que sigue se prueba que η_q verifica el problema variacional (2.15), lo que permite concluir que $\eta_q = p_q$.
En efecto, de la Proposición 2.4.3 y la semicontinuidad inferior débil de las normas se demuestra que $||\eta_q||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} = 0$, y por lo tanto se tiene que $\eta_q \in L^2(V_0)$. Por otro lado, si se integra entre 0 y T en la ecuación variacional (2.28) con $v \in V_0$, y se toma límite cuando $\alpha \to \infty$ se obtiene, $\forall v \in L^2(V_0)$,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle \dot{\eta}_q(t), v(t)\rangle dt + \int_0^T a(\eta_q(t), v(t))dt &= \int_0^T (u_q(t), v(t))_H dt - \int_0^T (z_d(t), v(t))_H dt \\ &= \int_0^T (u_q(t) - z_d(t), v(t))_H dt, \end{aligned} \tag{2.54}$$

pues $p_{\alpha_n q} \rightharpoonup \eta_q$ débilmente en $L^2(V)$, $\dot{p}_{\alpha_n q} \rightharpoonup \dot{\eta}_q$ débilmente en $L^2(V_0')$ y $u_{\alpha_n q} \rightharpoonup u_q$ débilmente en $L^2(V)$.

Sea $s \in V_0$ y $t_0 \in (0,T)$. Si se considera el intervalo $\mathcal{O}_j = \left(t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}\right) \subset (0,T)$ para j lo suficientemente grande y se reemplaza

$$v(t) = \begin{cases} s & \text{si} \quad t \in \mathcal{O}_j \\ 0 & \text{si} \quad t \in (0,T) - \mathcal{O}_j \end{cases}$$

en (2.54), por el teorema de diferenciación de Lebesgue, se logra

$$-\langle \dot{\eta}_q(t), v\rangle + a(\eta_q(t), v) = (u_q(t) - z_d(t), v)_H \quad \forall v \in V_0.$$

Además se tiene que $\eta_q(T) = 0$.

De esta forma se consigue

$$\begin{cases} \eta_q \in L^2(V_0), \qquad \eta_q(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\eta}_q \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle -\dot{\eta}_q(t), v\rangle + a(\eta_q(t), v) = (u_q(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0, \end{cases}$$

Así, $\eta_q = p_q$, por unicidad de la solución del problema variacional (2.15).

De lo anterior se tiene que, cuando $\alpha \to \infty$,

$$p_{\alpha q} \rightharpoonup p_q \text{ en } L^2(V), \quad p_{\alpha q} \overset{*}{\rightharpoonup} p_q \text{ en } L^\infty(H) \quad \text{y} \quad \dot{p}_{\alpha q} \rightharpoonup \dot{p}_q \text{ en } L^2(V_0').$$

En lo que sigue, para completar la prueba, se deducen las convergencias fuertes.

Integrando entre 0 y T la expresión (2.52) se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}||p_{\alpha q}(0) - p_q(0)||_H^2 + \lambda_1 ||p_{\alpha q} - p_q||^2_{L^2(V)} + (\alpha - 1)||p_{\alpha q} - p_q||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\ \leqslant \quad & \int_0^T (u_{\alpha q}(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t))_H dt - \int_0^T (z_d(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t))_H dt \\ & - \int_0^T a(p_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)) dt + \int_0^T \langle \dot{p}_q(t), p_{\alpha q}(t) - p_q(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\alpha \to \infty$ y usando que $u_{\alpha q}$ converge fuertemente a u_q en $L^2(V)$ y que $p_{\alpha q}$ converge débilmente a p_q en $L^2(V)$, se tiene

$$\lim_{\alpha \to \infty} ||p_{\alpha q} - p_q||_{L^2(V)} = 0, \quad \text{y} \qquad \lim_{\alpha \to \infty} ||p_{\alpha q} - p_q||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} = 0,$$

es decir, $p_{\alpha q}$ converge fuertemente a p_q en $L^2(V)$ y, $p_{\alpha q}$ converge fuertemente a p_q en $L^2(L^2(\Gamma_1))$.

Por otro lado, integrando la siguiente desigualdad en $[s,T]$, para $0<s<T$,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{\alpha q}(t)-p_q(t)||_H^2$$
$$\leqslant (u_{\alpha q}(t)-z_d(t),p_{\alpha q}(t)-p_q(t))_H - a(p_q(t),p_{\alpha q}(t)-p_q(t)) + (\dot{p}_q(t),p_{\alpha q}(t)-p_q(t))_H\,.$$

se tiene,

$$-\int_s^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{\alpha q}(t)-p_q(t)||_H^2 dt = \frac{1}{2}||p_{\alpha q}(s)-p_q(s)||_H^2$$
$$\leqslant \left|(u_{\alpha q}-z_d,p_{\alpha q}-p_q)_{L^2(s,T;H)}\right| + \left|(\nabla p_q,\nabla(p_{\alpha q}-p_q))_{L^2(s,T;H)}\right| + \left|(\dot{p}_q,p_{\alpha q}-p_q)_{L^2(s,T,H)}\right|$$
$$\leqslant ||u_{\alpha q}-z_d||_{\mathcal{H}}||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)} + ||p_q||_{L^2(V_0)}||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)} + ||\dot{p}_q||_{L^2(V')}||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)}.$$

Tomando supremo para $0\leqslant s\leqslant T$ se logra

$$||p_{\alpha q}-p_q||_{L^\infty(H)}^2 = \sup_{0\leqslant s\leqslant T}||p_{\alpha q}(s)-p_q(s)||_H^2$$
$$\leqslant ||u_{\alpha q}-z_d||_{\mathcal{H}}||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)} + ||p_q||_{L^2(V_0)}||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)} + ||\dot{p}_q||_{L^2(V')}||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)}.$$

Dado que $p_{\alpha q}$ converge fuertemente a p_q en $L^2(V)$ y que $u_{\alpha q}$ converge fuertemente a u_q en $L^2(V)$, de lo anterior se deduce que $p_{\alpha q}$ converge fuertemente a p_q en $L^\infty(H)$.

Por último, de (2.61) y usando que $||u_{\alpha q}-u_q||_{L^2(V)}\to 0$ y $||p_{\alpha q}-p_q||_{L^2(V)}\to 0$ cuando $\alpha\to\infty$, se deduce que $\dot{p}_{\alpha q}$ converge fuertemente a $\dot{p}_q$ en $L^2(V_0')$.

$\square$

2.5. Convergencia del Problema P_α y sus correspondientes Controles Óptimos cuando $\alpha\to\infty$

En esta sección se enuncia y demuestra el siguiente teorema, el cual establece la convergencia fuerte de los controles óptimos, los estados del sistema y los estados adjuntos vinculados a los problemas P_α, al correspondiente control óptimo, estado del sistema y estado adjunto del problema P, cuando α tiende a infinito.

Teorema 2.5.1.

i) Si $u_{\overline{q}}$ y $u_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ son los únicos estados del sistema, correspondiente a los problemas de control óptimo (2.8) y (2.9) respectivamente, entonces:

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - u_{\overline{q}}||_{L^2(V)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha\to\infty} ||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha} - \dot{u}_{\overline{q}}||_{L^2(V_0')} = 0.$$

ii) Si $p_{\overline{q}}$ y $p_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ son los únicos estados adjuntos, correspondiente a los problemas de control óptimo (2.8) y (2.9) respectivamente, entonces:

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||p_{\alpha\overline{q}_\alpha} - p_{\overline{q}}||_{L^2(V)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha\to\infty} ||\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha} - \dot{p}_{\overline{q}}||_{L^2(V_0')} = 0.$$

iii) Si $\overline{q}$ y $\overline{q}_\alpha$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo frontera (2.8) y (2.9) respectivamente, entonces:

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||\overline{q}_\alpha - \overline{q}||_{\mathcal{Q}} = 0.$$

Demostración. La demostración se realiza en dos etapas.

Paso 1. En esta etapa se demuestra la convergencia débil de los controles óptimos, los estados del sistema y los estados adjuntos vinculados a los problemas P_α, al correspondiente control óptimo, estado del sistema y estado adjunto del problema P, cuando α tiende a infinito. En efecto, de la estimación (2.32) para $q = 0$ se tiene

$$||u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}} \leqslant ||u_{\alpha 0}||_{L^2(V)} \leqslant E_1, \qquad \forall \alpha > 1.$$

Dado que $J_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) \leqslant J_{1\alpha}(0)$, de la definición de $J_{1\alpha}$, se sigue

$$\frac{1}{2}||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||\overline{q}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{1}{2}||u_{\alpha 0} - z_d||^2_{\mathcal{H}}, \tag{2.55}$$

y por lo tanto, se obtiene

$$\frac{1}{2}||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{2}||u_{\alpha 0} - z_d||^2_{\mathcal{H}}$$

luego

$$||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{\mathcal{H}} - ||z_d||_{\mathcal{H}} \leqslant ||u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}} + ||z_d||_{\mathcal{H}}$$

así, se tiene

$$||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{\mathcal{H}} \leqslant ||u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}} + 2||z_d||_{\mathcal{H}} \leqslant E_1 + 2||z_d||_{\mathcal{H}}.$$

Además, nuevamente de (2.55), se logra

$$\frac{M_2}{2}||\overline{q}_\alpha||_{\mathcal{Q}}^2 \leqslant \frac{1}{2}||u_{\alpha 0} - z_d||_{\mathcal{H}}^2$$

entonces

$$||\overline{q}_\alpha||_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{M_2}}\left(||u_{\alpha 0}||_{\mathcal{H}} + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right)$$

y finalmente

$$||\overline{q}_\alpha||_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{M_2}}\left(E_1 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right). \tag{2.56}$$

Así, de las estimaciones anteriores se concluye

$$||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{\mathcal{H}} + ||\overline{q}_\alpha||_{\mathcal{Q}} \leqslant E_1 + 2||z_d||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\sqrt{M_2}}\left(E_1 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right).$$

Luego, con un razonamiento similar al realizado en la demostración de la Proposición 2.4.1, tomando $v = u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - v_b$ para $\overline{q}_\alpha$, existe una constante $D > 0$, que no depende de α, tal que

$$||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha-1)}||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant D \quad \forall \alpha > 1. \tag{2.57}$$

Por otro lado, si en la ecuación variacional (2.5) para $\overline{q}_\alpha$, se considera $v \in V_0$ y se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned}
|(\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t), v)_H| &\leqslant |L_{\overline{q}_\alpha}(t,v)| + |a(u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t), v)| \\
&\leqslant |(g(t), v)_H| + |(\overline{q}_\alpha(t), v)_Q| + |(\nabla u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t), \nabla v)_H| \\
&\leqslant ||g(t)||_H||v||_H + ||\overline{q}_\alpha(t)||_Q||v||_Q + ||\nabla u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_H||\nabla v||_H \\
&\leqslant D_1||g(t)||_H||v||_{V_0} + D_2||\overline{q}_\alpha(t)||_Q||v||_{V_0} + ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_V||v||_{V_0},
\end{aligned}$$

donde D_1 es la constante que se obtiene de la desigualdad de Poincaré y D_2 surge de aplicar el teorema de trazas y equivalencia de normas.

Tomando supremo sobre $\{v \in V_0 : ||v||_{V_0} \leqslant 1\}$, se logra

$$||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_{V_0'} \leqslant D_1||g(t)||_H + D_2||\overline{q}_\alpha(t)||_Q + ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_V,$$

así,

$$
\begin{aligned}
||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||^2_{V_0'} &\leqslant \left(D_1||g(t)||_H + D_2||\overline{q}_\alpha(t)||_Q + ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_V\right)^2 \\
&= \left(D_1||g(t)||_H + D_2||\overline{q}_\alpha(t)||_Q\right)^2 + ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||^2_V \\
&+ 2\left(D_1||g(t)||_H + D_2||\overline{q}_\alpha(t)||_Q\right)||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_V \\
&\leqslant 2\left(D_1||g(t)||_H + D_2||\overline{q}_\alpha(t)||_Q\right)^2 + 2||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||^2_V \\
&\leqslant 2\left(2D_1^2||g(t)||^2_H + 2D_2^2||\overline{q}_\alpha(t)||^2_Q\right) + 2||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||^2_V \\
&= 4D_1^2||g(t)||^2_H + 4D_2^2||\overline{q}_\alpha(t)||^2_Q + 2||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||^2_V.
\end{aligned}
$$

Integrando entre 0 y T se consigue

$$
||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||^2_{L^2(V_0')} \leqslant 4D_1^2||g||^2_{\mathcal{H}} + 4D_2^2||\overline{q}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}} + 2||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||^2_{L^2(V)}.
$$

De (2.56) y (2.57) se logra

$$
||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||^2_{L^2(V_0')} \leqslant 4D_1^2||g||^2_{\mathcal{H}} + 4\frac{D_2^2}{M_2}\left(E_1 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{\lambda_1}\sqrt{A_1} + ||v_b||_{L^2(V)}\right)^2.
$$

Luego, $||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V_0')}$ se puede acotar por una constante que no depende de α.
Así, se tiene

$$
||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V)} + ||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V_0')} + \sqrt{(\alpha-1)}||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant D_3, \tag{2.58}
$$

donde D_3 es una constante que no depende de α.
Para encontrar una estimación para el estado adjunto, análoga a (2.58), la prueba resulta de manera similar a la Proposición 2.4.3, tomando en la ecuación variacional (2.28), $v = p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)$ y utilizando la cota uniforme D_3. Así, se obtiene

$$
||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V)} + ||\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V_0')} + \sqrt{(\alpha-1)}||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant D_5 \quad \forall\alpha > 1. \tag{2.59}
$$

De las estimaciones (2.56), (2.58) y (2.59) se tiene que $||\overline{q}_\alpha||_{\mathcal{Q}}$, $||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V)}$, $||\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V_0')}$, $||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V)}$ y $||\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}||_{L^2(V_0')}$ se pueden acotar por constantes que no dependen de α.
Luego, dado que $L^2(V)$, $L^2(V_0')$ y $\mathcal{Q}$ son espacios de Banach reflexivos, por Teorema A.1.4 del Apéndice, para cada una de las sucesiones consideradas, existe una subsucesión que verifica lo siguiente

$$
\overline{q}_\alpha \rightharpoonup \delta \quad \text{en} \quad \mathcal{Q},
$$

$$u_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup \mu \quad \text{en} \quad L^2(V), \qquad \dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup \dot{\mu} \quad \text{en} \quad L^2(V_0'),$$

$$p_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup \rho \quad \text{en} \quad L^2(V), \qquad \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup \dot{\rho} \quad \text{en} \quad \in L^2(V_0').$$

De manera análoga a lo realizado en la prueba del Teorema 2.4.2 se muestra que μ es solución de la ecuación variacional parabólica (2.4), y por unicidad de la solución se concluye que $\mu = u_\delta$, y por lo tanto se tiene que

$$u_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup u_\delta \quad \text{en} \quad L^2(V).$$

De la misma forma, para el estado adjunto se deduce que ρ es solución de la ecuación variacional (2.15), con lo cual se tiene que $\rho = p_\delta$, y así

$$p_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup p_\delta \quad \text{en} \quad L^2(V).$$

Por otro lado, la condición de optimalidad para el problema (2.9) establece

$$(M_2\overline{q}_\alpha - p_{\alpha\overline{q}_\alpha}, \eta)_{\mathcal{Q}} = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{Q},$$

es decir,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} (M_2\overline{q}_\alpha(t) - p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t))\eta(t) d\gamma dt = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{Q}.$$

Dado que $p_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup p_\delta$ en $L^2(V)$, y $\overline{q}_\alpha \rightharpoonup \delta$ en $\mathcal{Q}$, tomando límite cuando $\alpha \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} (M_2\delta - p_\delta(t))\eta(t) d\gamma dt = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{Q},$$

con lo cual se deduce que $-p_\delta + M_2\delta = 0$.

Así, por el Lema 2.3.2, se tiene que δ es un mínimo para el problema de control (2.8), y por unicidad se deduce que $\delta = \overline{q}$.

En este punto, se tienen las siguientes convergencias débiles

$$(\overline{q}_\alpha, u_{\alpha\overline{q}_\alpha}, \dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}, p_{\alpha\overline{q}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}) \rightharpoonup (\overline{q}, u_{\overline{q}}, \dot{u}_{\overline{q}}, p_{\overline{q}}, \dot{p}_{\overline{q}})$$

en los espacios correspondientes, inicialmente para una subsucesión conveniente, pero por la unicidad del límite, toda la sucesión converge débil cuando $\alpha \to \infty$.

Paso 2. En este paso se demuestra que las convergencias débiles obtenidas en la etapa anterior, en realidad, son convergencias fuertes. Para ello, se usa la semicontinuidad inferior débil de las normas, la optimalidad de $\overline{q}$ y $\overline{q}_\alpha$, y la convergencia $u_{\alpha q} \to u_q$ en $L^2(V)$ cuando $\alpha \to \infty$, deducida en el Teorema 2.4.2.

A saber,

$$\begin{aligned} J_1(\overline{q}) &= \frac{1}{2}||u_{\overline{q}} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||\overline{q}||^2_{\mathcal{Q}} \leqslant \liminf_{\alpha\to\infty} \left[\frac{1}{2}||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||\overline{q}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\ &\leqslant \limsup_{\alpha\to\infty} \left[\frac{1}{2}||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||\overline{q}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}}\right] = \limsup_{\alpha\to\infty} J_{1\alpha}(\overline{q}_\alpha) \\ &\leqslant \limsup_{\alpha\to\infty} J_{1\alpha}(q) = \lim_{\alpha\to\infty} \left[\frac{1}{2}||u_{\alpha q} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\ &= \frac{1}{2}||u_q - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} = J_1(q), \qquad \forall q \in \mathcal{Q} \quad \text{fijo}, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad vale por Proposición A.2.6 del Apéndice.

Tomando ínfimo sobre $q \in Q$, todas las desigualdades anteriores se convierten en igualdades, ya que $J_1(\overline{q}) = \inf_{q\in Q} J_1(q)$, y por lo tanto se tiene

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left[||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + M_2||\overline{q}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}}\right] = ||u_{\overline{q}} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + M_2||\overline{q}||^2_{\mathcal{Q}}.$$

Luego, por definición de norma en el espacio producto, se sigue

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||(\sqrt{M_2}\overline{q}_\alpha, u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - z_d)||^2_{\mathcal{Q}\times\mathcal{H}} = ||(\sqrt{M_2}\overline{q}, u_{\overline{q}} - z_d)||^2_{\mathcal{Q}\times\mathcal{H}}.$$

De esta última igualdad y las convergencias débiles $\overline{q}_\alpha \rightharpoonup \overline{q}$ en $\mathcal{Q}$ y $u_{\alpha\overline{q}_\alpha} \rightharpoonup u_{\overline{q}}$ en $L^2(V)$, por la Proposición A.2.6 del Apéndice se concluye que $(\overline{q}_\alpha, u_{\alpha\overline{q}_\alpha}) \to (\overline{q}, u_{\overline{q}})$ fuertemente en $\mathcal{Q} \times \mathcal{H}$ cuando $\alpha \to \infty$.

Finalmente, si en la ecuación variacional (2.5) para $q = \overline{q}_\alpha$ se toma $v = u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t) \in V$ y se suma a ambos miembros el término

$$-a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - \langle \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)\rangle$$

se obtiene

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)\rangle + a_\alpha(u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) \\ &= L_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t, u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - \langle \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)\rangle. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de a_α, de $L_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ y el hecho que $u_{\overline{q}}(t)\big|_{\Gamma_1} = b$, se obtiene

$$\langle \dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)\rangle + a_\alpha(u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))$$
$$= L_{\overline{q}_\alpha}(t, u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))) - a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - \langle \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)\rangle.$$

luego

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)\rangle \\
&+ a_1(u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) + (\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))^2 d\gamma \\
= {}& L_{\overline{q}_\alpha}(t, u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) \\
&- a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - \langle \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))\rangle \\
= {}& (g(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))_H - (\overline{q}_\alpha(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))_Q \\
&- a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) - (\dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)) \\
= {}& (g(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))_H - (\overline{q}_\alpha(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))_Q \\
&- a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)).
\end{aligned}$$

Por la coercividad de la forma bilineal a_1 se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda_1 ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)||_V^2 \leqslant {}& (g(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))_H \\
&- (\overline{q}_\alpha(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t))_Q - a(u_{\overline{q}}(t), u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t)).
\end{aligned}$$

Si se llama $z_\alpha = u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - u_{\overline{q}}$, la desigualdad anterior puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\lambda_1 ||z_\alpha(t)||_V^2 \leqslant (g(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), z_\alpha(t))_H - (\overline{q}_\alpha(t), z_\alpha(t))_Q - a(u_{\overline{q}}(t), z_\alpha(t)).$$

Integrando entre 0 y T se tiene

$$\lambda_1 ||z_\alpha||_{L^2(V)}^2 \leqslant \int_0^T \left[(g(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), z_\alpha(t))_H - (\overline{q}_\alpha(t), z_\alpha(t))_Q - a(u_{\overline{q}}(t), z_\alpha(t))\right] dt.$$

Dado que $z_\alpha \to 0$ débilmente en $L^2(V)$ y $\overline{q}_\alpha \to \overline{q}$ fuertemente en $\mathcal{Q}$, siguiendo [2], se obtiene que

$$\int_0^T \left[(g(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), z_\alpha(t))_H - (\overline{q}_\alpha(t), z_\alpha(t))_Q - a(u_{\overline{q}}(t), z_\alpha(t))\right] dt \to 0,$$

cuando $\alpha \to \infty$.

Así se logra

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||z_\alpha||^2_{L^2(V)} = 0,$$

quedando demostrado que $u_{\alpha\overline{q}_\alpha} \to u_{\overline{q}}$ fuertemente en $L^2(V)$ cuando $\alpha \to \infty$.

Ahora, si a la ecuación variacional (2.5) para $\overline{q}_\alpha$ con $v \in V_0$, se le resta la ecuación variacional (2.4) para $\overline{q}$, se logra

$$(\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{u}_{\overline{q}}(t), v)_H + a(u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t), v) = (\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t), v)_Q, \quad \forall v \in V_0,$$

es decir,

$$(\dot{z}_\alpha(t), v)_H + a(z_\alpha(t), v) = (\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t), v)_Q, \quad \forall v \in V_0.$$

Luego, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue

$$\begin{aligned} |(\dot{z}_\alpha(t), v)_H| &\leqslant |a(z_\alpha(t), v)| + |(\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t), v)_Q| \\ &\leqslant ||\nabla z_\alpha(t)||_H ||\nabla v||_H + ||\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t)||_Q ||v||_Q \\ &\leqslant ||z_\alpha(t)||_V ||v||_{V_0} + D_6 ||\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t)||_Q ||v||_{V_0}, \end{aligned}$$

donde D_6 surge de aplicar el teorema de trazas y equivalencia de normas.

Tomando supremo sobre $\{v \in V_0 : ||v|| \leq 1\}$ se logra

$$||\dot{z}_\alpha(t)||_{V_0'} \leqslant ||z_\alpha(t)||_V + D_6 ||\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t)||_Q$$

es decir,

$$||\dot{z}_\alpha(t)||^2_{V_0'} \leqslant 2||z_\alpha(t)||^2_V + 2D_6^2 ||\overline{q}(t) - \overline{q}_\alpha(t)||^2_Q.$$

Integrando entre 0 y T se obtiene

$$||\dot{z}_\alpha||^2_{L^2(V_0')} \leqslant 2||z_\alpha||^2_{L^2(V)} + 2D_6^2 ||\overline{q} - \overline{q}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}}.$$

Dado que $\overline{q}_\alpha \to \overline{q}$ fuertemente en $\mathcal{Q}$ y que $u_{\alpha\overline{q}_\alpha} \to u_{\overline{q}}$ fuertemente en $L^2(V)$ cuando $\alpha \to \infty$, se concluye que $\dot{u}_{\alpha\overline{q}_\alpha} \to \dot{u}_{\overline{q}}$ fuertemente en $L^2(V_0')$. Con lo cual queda demostrada la convergencia fuerte de la derivada.

De manera similar se prueba que $(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}) \to (p_{\overline{q}}, \dot{p}_{\overline{q}})$ fuertemente en $L^2(V) \times L^2(V_0')$ cuando $\alpha \to \infty$. En efecto, si en la ecuación variacional (2.28), para cada $\alpha > 0$, se toma

$v = p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t) \in V$ y se suma $-a(p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) + \langle \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle$ a ambos miembros, se obtiene

$$\begin{aligned} &-\langle \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle + a_\alpha(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) - a(p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) \\ &= (u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - z_d(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))_H - a(p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) + \langle \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle. \end{aligned}$$

Dado que $p_{\overline{q}} \in L^2(V_0)$, se tiene que $\int\limits_{\Gamma_1} p_{\overline{q}}(t)(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))d\gamma = 0$, con lo cual la igualdad anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} &-\langle \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle + a_\alpha(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) \\ &= (u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - z_d(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))_H - a(p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) \qquad (2.60) \\ &+ \langle \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la coercividad de la forma bilineal a_1, se tiene

$$a_\alpha(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)) \geqslant \lambda_1||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)||_V^2 + (\alpha-1)\int\limits_{\Gamma_1}(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))^2 d\gamma.$$

Reemplazando lo obtenido en (2.60) se logra

$$\begin{aligned} &-\langle \dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle + \lambda_1||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)||_V^2 + (\alpha-1)\int\limits_{\Gamma_1}(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))^2 d\gamma \\ &\leqslant (u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - z_d(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))_H - a(p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t) + \langle \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle. \end{aligned}$$

Integrando entre 0 y T la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(0) - p_{\overline{q}}(0)||_H^2 + \lambda_1||p_{\alpha\overline{q}_\alpha} - p_{\overline{q}}||_{L^2(V)}^2 + (\alpha-1)||p_{\alpha\overline{q}_\alpha} - p_{\overline{q}}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))}^2 \\ \leqslant\ &\int\limits_0^T (u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))_H dt - \int\limits_0^T (z_d(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))_H dt \\ &- \int\limits_0^T a(p_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t))dt + \int\limits_0^T \langle \dot{p}_{\overline{q}}(t), p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\alpha \to \infty$ y usando que $u_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ converge fuertemente a $u_{\overline{q}}$ en $L^2(V)$ y que $p_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ converge débilmente a $p_{\overline{q}}$ en $L^2(V)$, para $\alpha > 1$, se tiene

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||p_{\alpha\overline{q}_\alpha} - p_\alpha||_{L^2(V)} = 0,$$

es decir, $p_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ converge fuertemente a $p_{\overline{q}}$ en $L^2(V)$.

Si a la ecuación variacional (2.28) para $q = \overline{q}_\alpha$ con $v \in V_0$, se le resta la ecuación variacional (2.15) para $q = \overline{q}$, se logra

$$-(\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{p}_{\overline{q}}(t), v)_H + a(p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t), v) = (u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - u_{\overline{q}}(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$(\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - \dot{p}_{\overline{q}}(t), v)_H \leqslant ||p_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t) - p_{\overline{q}}(t)||_V ||v||_{V_0} + D_1 ||u_{\overline{q}}(t) - u_{\alpha\overline{q}_\alpha}(t)||_V ||v||_{V_0}, \quad \forall v \in V_0$$

donde D_1 es la constante que surge de aplicar la desigualdad de Poincaré.

Tomando supremo sobre $v \in V_0$ e integrando en $[0, T]$, se tiene

$$||\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha} - \dot{p}_{\overline{q}}||^2_{L^2(V_0')} \leqslant 2||p_{\alpha\overline{q}_\alpha} - p_{\overline{q}}||^2_{L^2(V)} + 2D_1^2 ||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - u_{\overline{q}}||^2_{L^2(V)}. \tag{2.61}$$

Luego, dado que $||u_{\alpha\overline{q}_\alpha} - u_{\overline{q}}||_{L^2(V)} \to 0$ y $||p_{\alpha\overline{q}_\alpha} - p_{\overline{q}}||_{L^2(V)} \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$, se deduce que $\dot{p}_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ converge fuertemente a $\dot{p}_{\overline{q}}$ en $L^2(V_0')$. Lo que completa la prueba.

$\square$

Capítulo 3

Control Óptimo Simultáneo sobre el Flujo de Calor y la Fuente de Energía

En este capítulo, se formulan problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera para problemas de conducción del calor no estacionarios, aquí la variable de control es el vector (g, q) con g la energía interna del sistema y q el flujo de calor. Se prueba existencia y unicidad de los controles óptimos simultáneos, se da una condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema, y se muestran resultados de convergencia cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito.

3.1. Planteo del Problema

Se consideran los siguientes problemas de conducción del calor evolutivos P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$), respectivamente con condiciones de frontera mixta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad u\Big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \qquad u(0) = v_b. \tag{3.2}$$

Los datos b y v_b son fijos y satisfacen la condición de compatibilidad $v_b = b$ sobre Γ_1, mientras que g y q se toman como variables de control.

Se denota con u_{gq} y $u_{\alpha gq}$ las únicas soluciones de los problemas parabólicos (3.1) y (3.2) respectivamente, cuyas formulaciones variacionales están dadas por:

$$\begin{cases} u_{gq} - v_b \in L^2(V_0), \qquad u_{gq}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_{gq} \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_{gq}(t), v\rangle_{V_0',V_0} + a(u_{gq}(t), v) = L_{gq}(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} u_{\alpha gq} \in L^2(V), \qquad u_{\alpha gq}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{u}_{\alpha gq} \in L^2(V') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{u}_{\alpha gq}(t), v\rangle_{V',V} + a_\alpha(u_{\alpha gq}(t), v) = L_{\alpha gq}(t, v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde

$$L_{gq}(t,v) := (g(t), v)_H - \int_{\Gamma_2} q(t) v d\gamma; \qquad L_{\alpha gq}(t,v) := L_{gq}(t,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} b v d\gamma.$$

Sobre los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{Q}$, se consideran los funcionales costo no negativos J_2 y $J_{2\alpha}$ definidos por las expresiones

$$J_2(g,q) := \frac{1}{2}||u_{gq} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \tag{3.5}$$

$$J_{2\alpha}(g,q) := \frac{1}{2}||u_{\alpha gq} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}, \tag{3.6}$$

donde z_d es un elemento dado que pertenece a $\mathcal{H}$ y M_1, M_2 son constantes positivas, y se formulan, al igual que en la introducción, los siguientes problemas de control óptimo distribuido-frontera:

$$\text{hallar} \quad (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_2(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) = \min_{g \in \mathcal{H}, q \in \mathcal{Q}} J_2(g,q) \tag{3.7}$$

$$\text{hallar} \quad (\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) = \min_{g \in \mathcal{H}, q \in \mathcal{Q}} J_{2\alpha}(g,q). \tag{3.8}$$

3.2. Problema P y su correspondiente Problema de Control Óptimo Simultáneo

En esta sección se demuestra que el funcional J_2 es coercivo y diferenciable Gâteaux en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$. También se muestra la existencia y unicidad del control óptimo $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ para el problema (3.7) y se da una condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema $p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$.

Al igual que en el capítulo 2, se introduce la aplicación $C_2 : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to L^2(V_0)$ definida por

$$C_2(g, q) = u_{gq} - u_{00},$$

donde u_{00} es la solución del problema variacional (3.3) para $g = 0$ y $q = 0$ cuya ecuación variacional viene dada por

$$\langle \dot{u}_{00}(t), v\rangle + a(u_{00}(t), v) = L_{00}(t, v), \;\; \forall v \in V_0,$$

con $L_{00}(t, v) = 0$.

Sean $\Pi_2 : (\mathcal{H} \times \mathcal{Q}) \times (\mathcal{H} \times \mathcal{Q}) \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2 : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ definidas por las siguientes expresiones:

$$\Pi_2((g, q), (h, \eta)) = (C_2(g, q), C_2(h, \eta))_{\mathcal{H}} + M_1(g, h)_{\mathcal{H}} + M_2(q, \eta)_{\mathcal{Q}},$$

$$\mathcal{L}_2(g, q) = (C_2(g, q), z_d - u_{00})_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, (g, q),\, (h, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

De forma análoga al Lema 2.2.1 se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.2.1.

i) C_2 es una aplicación lineal y continua.

ii) Π_2 es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, esto es,

$$\Pi_2((g, q), (g, q)) \geqslant \text{mín}\{M_1, M_2\}||(g, q)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}, \quad \forall (g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

iii) $\mathcal{L}_2$ es lineal y continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$.

iv) J_2 se puede escribir como

$$J_2(g, q) = \frac{1}{2}\Pi_2((g, q), (g, q)) - \mathcal{L}_2(g, q) + \frac{1}{2}||u_{00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}, \qquad \forall (g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

v) J_2 es un funcional coercivo sobre $\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$, esto es: $\forall (g_2, q_2),\, (g_1, q_1) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q},\; \forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &(1 - t)J_2(g_2, q_2) + tJ_2(g_1, q_1) - J_2((1 - t)(g_2, q_2) + t(g_1, q_1)) \\ &= \frac{t(1 - t)}{2}\left[||u_{g_2q_2} - u_{g_1q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M_1||g_2 - g_1||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\ &\geqslant \text{mín}\{M_1, M_2\}\frac{t(1 - t)}{2}||(g_2 - g_1, q_2 - q_1)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}. \end{aligned}$$

vi) Existe un único control óptimo $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ tal que $J_2(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) = \min\limits_{g \in \mathcal{H}, q \in \mathcal{Q}} J_2(g, q)$.

Demostración.

i) La aplicación C_2 es continua, ya que de las ecuaciones variacionales (3.3) y (3.4), y tomando $v = u_{gq}(t) - u_{00}(t)$[1], se obtiene

$$\begin{aligned} &(\dot{u}_{gq}(t) - \dot{u}_{00}(t), u_{gq}(t) - u_{00}(t))_H + a(u_{gq}(t) - u_{00}(t), u_{gq}(t) - u_{00}(t)) \\ &= (g(t), u_{gq}(t) - u_{00}(t))_H - \int\limits_{\Gamma_2} q(t)\,(u_{gq}(t) - u_{00}(t))\,d\gamma. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Además se tiene

$$(\dot{u}_{gq}(t) - \dot{u}_{00}(t), u_{gq}(t) - u_{00}(t))_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{gq}(t) - u_{00}(t)||_H^2. \tag{3.10}$$

Luego, de (3.9), (3.10) y de la coercividad de la forma bilineal a se consigue

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{gq}(t) - u_{00}(t)||_H^2 + \lambda_0||\nabla(u_{gq}(t) - u_{00}(t))||_H^2 \\ &\leqslant (g(t), u_{gq}(t) - u_{00}(t))_H - \int\limits_{\Gamma_2} q(t)\,(u_{gq}(t) - u_{00}(t))\,d\gamma \\ &\leqslant \left|\int\limits_{\Omega} g(t)(u_{gq}(t) - u_{00}(t))dx\right| + \left|\int\limits_{\Gamma_2} q(t)\,(u_{gq}(t) - u_{00}(t))\,d\gamma\right|. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2}$ en cada término del lado derecho de la desigualdad anterior, se logra

$$\left|\int\limits_{\Omega} g(t)(u_{gq}(t) - u_{00}(t))dx\right| \leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}||g(t)||_H^2 + \frac{\lambda_0}{4}||\nabla(u_{gq}(t) - u_{00}(t))||_H^2,$$

donde D_1 es una constante que surge de aplicar equivalencia de normas, y

$$\left|\int\limits_{\Gamma_2} q(t)\,(u_{gq}(t) - u_{00}(t))\,d\gamma\right| \leqslant \frac{D_2^2}{\lambda_0}||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_0}{4}||\nabla(u_{gq}(t) - u_{00}(t))||_H^2,$$

donde D_2 es una constante que se obtiene de aplicar el teorema de trazas y equivalencia de normas.

Reemplazando lo obtenido en (3.11), se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{gq}(t) - u_{00}(t)||_H^2 + \lambda_0||\nabla(u_{gq}(t) - u_{00}(t))||_H^2 \\ &\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}||g(t)||_H^2 + \frac{D_2^2}{\lambda_0}||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_0}{2}||\nabla(u_{gq}(t) - u_{00}(t))||_H^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De esta desigualdad se deducen las siguientes estimaciones:

[1] $u_{gq}(t) - u_{00}(t) \in V_0$ pues $u_{gq}(t)\big|_{\Gamma_1} = b$ y $u_{00}(t)\big|_{\Gamma_1} = b$, entonces $u_{gq}(t) - u_{00}(t)\big|_{\Gamma_1} = 0$.

1) Integrando entre 0 y T la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{gq}(t)-u_{00}(t)||_H^2+\frac{\lambda_0}{2}||\nabla(u_{gq}(t)-u_{00}(t))||_H^2 \leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}||g(t)||_H^2+\frac{D_2^2}{\lambda_0}||q(t)||_Q^2,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}||u_{gq}(t)-u_{00}(t)||_H^2 dt+\frac{\lambda_0}{2}\int_0^T ||\nabla(u_{gq}(t)-u_{00}(t))||_H^2 dt\\ &\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_0}||g||_{\mathcal{H}}^2+\frac{D_2^2}{\lambda_0}||q||_{\mathcal{Q}}^2.\end{aligned}$$

Así,

$$||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}}^2=\int_0^T ||\nabla(C_2(g,q)(t))||_H^2 dt \leqslant \frac{2D_1^2}{\lambda_0^2}||g||_{\mathcal{H}}^2+\frac{2D_2^2}{\lambda_0^2}||q||_{\mathcal{Q}}^2,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant \text{máx}\left\{\frac{2D_1^2}{\lambda_0^2},\frac{2D_2^2}{\lambda_0^2}\right\}\left(||g||_{\mathcal{H}}^2+||q||_{\mathcal{Q}}^2\right)\\ &=\frac{2}{\lambda_0^2}\,\text{máx}\left\{D_1^2,D_2^2\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2.\end{aligned}$$

Es decir,

$$||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda_0^2}\,\text{máx}\left\{D_1^2,D_2^2\right\}}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}. \tag{3.13}$$

2) Dado que $\lambda_0||\nabla(u_{gq}(t)-u_{00}(t))||_H^2 \geqslant 0$, de (3.12) se obtiene

$$\frac{d}{dt}||u_{gq}(t)-u_{00}(t)||_H^2 \leqslant \frac{2D_1^2}{\lambda_0}||g(t)||_H^2+\frac{2D_2^2}{\lambda_0}||q(t)||_Q^2+\lambda_0||\nabla(u_{gq}(t)-u_{00}(t))||_H^2.$$

Integrando entre 0 y s, para $0 \leqslant s \leqslant T$, se logra

$$\begin{aligned}||C_2(g,q)(s)||_H^2 &= \int_0^s \frac{d}{dt}||u_{gq}(t)-u_{00}(t)||_H^2 dt\\ &\leqslant \frac{2D_1^2}{\lambda_0}\int_0^s ||g(t)||_H^2 dt+\frac{2D_2^2}{\lambda_0}\int_0^s ||q(t)||_Q^2 dt+\lambda_0\int_0^s ||\nabla(C_2(g,q)(t))||_H^2 dt\\ &\leqslant \frac{2D_1^2}{\lambda_0}||g||_{\mathcal{H}}^2+\frac{2D_2^2}{\lambda_0}||q||_{\mathcal{Q}}^2+\lambda_0||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}}^2\\ &\leqslant \text{máx}\left\{\frac{2D_1^2}{\lambda_0},\frac{2D_2^2}{\lambda_0}\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2+\lambda_0||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}}^2 \qquad \forall s\in[0,T].\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad obtenida en (3.13) se tiene

$$||C_2(g,q)(t)||_H^2 \leqslant 2\,\text{máx}\left\{\frac{2D_1^2}{\lambda_0},\frac{2D_2^2}{\lambda_0}\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2 \qquad \forall t\in[0,T],$$

y tomando supremo para $0 \leqslant t \leqslant T$ se consigue

$$||C_2(g,q)||_{L^\infty(H)} \leqslant \sqrt{2\,\text{máx}\left\{\frac{2D_1^2}{\lambda_0}, \frac{2D_2^2}{\lambda_0}\right\}}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.$$

3) Se deduce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{d}{dt}C_2(g,q)(t), v\right)_H \right| &= |\,(\dot{u}_{gq}(t) - \dot{u}_{00}(t), v)_H\,| \\
&\leqslant \left|(g(t),v)_H\right| + \left|(q(t),v)_Q\right| + \left|a(u_{gq}(t) - u_{00}(t), v)\right| \\
&\leqslant ||g(t)||_H||v||_H + ||q(t)||_Q||v||_Q + \left|a(C_2(g,q)(t), v)\right| \\
&\leqslant ||g(t)||_H||v||_V + ||q(t)||_Q D_3||v||_V + ||\nabla(C_2(g,q)(t))||_H||\nabla v||_H \\
&= \left(||g(t)||_H + D_3||q(t)||_Q\right)||v||_V + ||\nabla(C_2(g,q)(t))||_H||\nabla v||_H \\
&\leqslant D_4\left(||g(t)||_H + D_3||q(t)||_Q\right)||v||_{V_0} + ||C_2(g,q)(t)||_{V_0}||v||_{V_0},
\end{aligned}$$

donde D_3 es una constante que surge de aplicar el teorema de trazas y D_4 equivalencia entre las normas de V y V_0.

Tomando supremo sobre $\{v \in V_0 :\, ||v||_{V_0} \leqslant 1\}$, se logra

$$\left|\left|\frac{d}{dt}C_2(g,q)(t)\right|\right|_{V_0'} \leqslant D_4\left(||g(t)||_H + D_3||q(t)||_Q\right) + ||C_2(g,q)(t)||_{V_0}.$$

Luego, usando la desigualdad de Cauchy, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{d}{dt}C_2(g,q)(t)\right|\right|_{V_0'}^2 &\leqslant D_4^2\left(||g(t)||_H + D_3||q(t)||_Q\right)^2 + ||C_2(g,q)(t)||_{V_0}^2 \\
&\quad + 2D_4\left(||g(t)||_H + D_3||q(t)||_Q\right)||C_2(g,q)(t)||_{V_0} \\
&\leqslant 2D_4^2\left(||g(t)||_H + D_3||q(t)||_Q\right)^2 + 2||C_2(g,q)(t)||_{V_0}^2 \\
&\leqslant 4D_4^2||g(t)||_H^2 + 4D_4^2D_3^2||q(t)||_Q^2 + 2||C_2(g,q)(t)||_{V_0}^2.
\end{aligned}$$

Integrando en $[0,T]$ y utilizando (3.13) se deduce

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_2(g,q)(t)\right|\right|_{V_0'}^2 dt &\leqslant 4D_4^2\,\text{máx}\{1, D_3^2\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2 + 2||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leqslant \left(4D_4^2\,\text{máx}\{1, D_3^2\} + \frac{4}{\lambda_0^2}\,\text{máx}\left\{D_1^2, D_2^2\right\}\right)||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2.
\end{aligned}$$

Así, se logra

$$\left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_2(g,q)(t)\right|\right|_{V_0'}^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{4D_4^2\,\text{máx}\{1, D_3^2\} + \frac{4}{\lambda_0^2}\,\text{máx}\left\{D_1^2, D_2^2\right\}}\,||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.$$

De esta manera, el operador

$$C_2 : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \{v \in L^2(V_0) \cap L^\infty(H) : \dot{v} \in L^2(V_0')\}$$

resulta continuo.

ii) De la linealidad de la aplicación C_2, y de la linealidad y simetría de los correspondientes productos internos, se sigue la bilinealidad y simetría de Π_2.
La continuidad de la aplicación Π_2 se deduce de (3.13), de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Poincaré, y de la Proposición A.3.4 del Apéndice.
Además, Π_2 es coerciva en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, ya que

$$\begin{aligned}
\Pi_2((g,q),(g,q)) &= (C_2(g,q), C_2(g,q))_{\mathcal{H}} + M_1(g,g)_{\mathcal{H}} + M_2(q,q)_{\mathcal{Q}} \\
&= ||u_{gq} - u_{00}||^2_{\mathcal{H}} + M_1||g||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q||^2_{\mathcal{Q}} \\
&\geqslant \text{mín}\{M_1, M_2\}||(g,q)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}, \qquad \forall (g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

iii) $\mathcal{L}_2$ es continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$. En efecto, de (3.13) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_2(g,q)| &\leqslant ||C_2((g,q))||_{\mathcal{H}}||z_d - u_{00}||_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant D_5||C_2(g,q)||_{L^2(V_0)}||z_d - u_{00}||_{\mathcal{H}} \\
&= D_5||\nabla C_2(g,q)||_{\mathcal{H}}||z_d - u_{00}||_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant \frac{D_5}{\lambda_0}\sqrt{2\,\text{máx}\,\{D_1^2, D_2^2\}}||z_d - u_{00}||_{\mathcal{H}}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}},
\end{aligned}$$

donde D_5 es la constante de Poincaré.

iv) Por las definiciones de Π_2 y $\mathcal{L}_2$ y por (3.5), J_2 se puede escribir como

$$\begin{aligned}
J_2(g,q) &= \frac{1}{2}||u_{gq} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \\
&= \frac{1}{2}||u_{gq} - u_{00} + u_{00} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \\
&= \frac{1}{2}\left(C_2(g,q), C_2(g,q)\right)_{\mathcal{H}} - \left(C_2(g,q), z_d - u_{00}\right)_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{1}{2}||z_d - u_{00}||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \\
&= \frac{1}{2}\Pi_2((g,q),(g,q)) - \mathcal{L}_2(g,q) + \frac{1}{2}||u_{00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

v) Para todo (g_1, q_1), $(g_2, q_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ y $t \in [0, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
&(1-t)J_2(g_2, q_2) + tJ_2(g_1, q_1) - J_2\left((1-t)(g_2, q_2) + t(g_1, q_1)\right) \\
&= \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{g_2q_2} - u_{g_1q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M_1||g_2 - g_1||^2_{\mathcal{Q}} + M_2||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\
&\geqslant \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{g_2q_2} - u_{g_1q_1}||^2_{\mathcal{H}} + \text{mín}\{M_1, M_2\}\left(||g_2 - g_1||^2_{\mathcal{Q}} + ||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right)\right] \qquad (3.14) \\
&\geqslant \text{mín}\{M_1, M_2\}\frac{t(1-t)}{2}\left[||g_2 - g_1||^2_{\mathcal{Q}} + ||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right] \\
&= \text{mín}\{M_1, M_2\}\frac{t(1-t)}{2}||(g_2 - g_1, q_2 - q_1)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}},
\end{aligned}$$

y por lo tanto J_2 resulta coercivo sobre $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$.

vi) Dado que Π_2 es una forma bilineal, continua y coerciva sobre $(\mathcal{H} \times \mathcal{Q}) \times (\mathcal{H} \times \mathcal{Q})$, $\mathcal{L}_2$ es una forma lineal y continua sobre $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ y $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ es un conjunto convexo, cerrado y no vacío, por Lema A.2.10 se tiene que existe un único elemento de $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ que minimiza el siguiente funcional

$$J(g, q) = \frac{1}{2}\Pi_2((g, q), (g, q)) - \mathcal{L}_2(g, q).$$

Luego, como $\frac{1}{2}||u_{00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}$ es constante, el funcional J_2 tiene un mínimo en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ al cual se lo denota con $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$.

□

Se define el estado adjunto p_{gq} correspondiente a (3.1) para cada $(g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, como la única solución del siguiente problema parabólico mixto

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = u_{gq} - z_d \quad \text{en } \Omega \qquad p\big|_{\Gamma_1} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = 0 \qquad p(T) = 0,$$

cuya formulación variacional está dada por

$$\begin{cases} p_{gq} \in L^2(V_0), \qquad p_{gq}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_{gq} \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad -\langle \dot{p}_{gq}(t), v\rangle + a(p_{gq}(t), v) = (u_{gq}(t) - z_d, v)_H, \quad \forall v \in V_0 \end{cases} \qquad (3.15)$$

y se prueba el siguiente resultado.

Lema 3.2.2.

i) El estado adjunto p_{gq} satisface la siguiente igualdad

$$(C_2(h,\eta), u_{gq} - z_d)_{\mathcal{H}} = (h, p_{gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{gq})_{\mathcal{Q}}.$$

ii) El funcional J_2 es diferenciable Gâteaux y J_2' viene dado por: $\forall (g,q),(h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$

$$\begin{aligned}\langle J_2'(g,q),(h-g,\eta-q)\rangle &= (u_{h\eta} - u_{gq}, u_{gq} - z_d)_{\mathcal{H}} + M_1(g,h-g)_{\mathcal{H}} + M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}} \\ &= \Pi_2((g,q),(h-g,\eta-q)) - \mathcal{L}_2(h-g,\eta-q).\end{aligned}$$

iii) La derivada Gâteaux de J_2 puede escribirse como

$$\langle J_2'(g,q),(h,\eta)\rangle = (M_1 g + p_{gq}, h)_{\mathcal{H}} + (M_2 q - p_{gq}, \eta)_{\mathcal{Q}}, \qquad \forall (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

iv) La condición de optimalidad para el problema (3.7) viene dada por

$$\langle J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}),(h,\eta)\rangle = (M_1 \overline{\overline{g}} + p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, h)_{\mathcal{H}} + (M_2 \overline{\overline{q}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \eta)_{\mathcal{Q}} = 0, \qquad \forall (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

Demostración.

i) Si en (3.15) se toma $v = C_2(h,\eta)(t) \in V_0$, y se integra entre 0 y T, se logra

$$-(\dot{p}_{gq}, C_2(h,\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a(p_{pq}(t), C_2(h,\eta)(t))dt = (u_{gq} - z_d, C_2(h,\eta))_{\mathcal{H}}. \tag{3.16}$$

Por otro lado, si en (3.3) se elige $v = p_{gq}(t)$ para $g = 0$, $q = 0$ y para $g = h$, $q = \eta$ se obtiene

$$(\dot{u}_{h\eta}(t) - \dot{u}_{00}(t), p_{gq}(t))_H + a(u_{h\eta}(t) - u_{00}(t), p_{gq}(t)) = (h(t), p_{gq}(t))_H - (\eta(t), p_{gq}(t))_Q.$$

Integrando la igualdad anterior entre 0 y T, se tiene

$$(\dot{u}_{h\eta} - \dot{u}_{00}, p_{gq})_{\mathcal{H}} + \int_0^T a(C_2(h,\eta)(t), p_{gq}(t))dt = (h, p_{gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{gq})_{\mathcal{Q}}. \tag{3.17}$$

Entonces de (3.16), (3.17), utilizando que $p_{gq}(T) = 0$ y $C_2(h,\eta)(0) = 0$ y por la simetría de la forma bilineal a, se sigue

$$\begin{aligned}(u_{gq} - z_d, C_2(h,\eta))_{\mathcal{H}} &= -\int_0^T \frac{d}{dt}(p_{gq}(t), C_2(h,\eta)(t))_H\, dt + (h, p_{gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{gq})_{\mathcal{Q}} \\ &= (h, p_{gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{gq})_{\mathcal{Q}}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

ii) Sean (g,q), $(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$ y $s>0$, entonces de la definición de J_2 se tiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\left[J_2\left((g,q)+s((h,\eta)-(g,q))\right)-J_2(g,q)\right]\\
&=\frac{1}{s}\left[\frac{1}{2}||u_{(g,q)+s((h,\eta)-(g,q))}-z_d||^2_{\mathcal{H}}+\frac{M_1}{2}||g+s(h-g)||^2_{\mathcal{H}}+\frac{M_2}{2}||q+s(\eta-q)||^2_{\mathcal{Q}}\right]\\
&+\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{2}||u_{gq}-z_d||^2_{\mathcal{H}}-\frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}}-\frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}\right]\\
&=\frac{s}{2}(u_{h\eta}-u_{gq},u_{h\eta}-u_{gq})_{\mathcal{H}}+(u_{gq}-z_d,u_{h\eta}-u_{gq})_{\mathcal{H}}\\
&+\frac{M_1 s}{2}(h-g,h-g)_{\mathcal{H}}+M_1(g,h-g)_{\mathcal{H}}+\frac{M_2 s}{2}(\eta-q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando $s\to 0^+$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\langle J_2'(g,q),(h,\eta)-(g,q)\rangle\\
&=(u_{gq}-z_d,u_{h\eta}-u_{gq})_{\mathcal{H}}+M_1(g,h-g)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}\\
&=(C_2(g,q),C_2((h,\eta)-(g,q)))_{\mathcal{H}}-(z_d-u_{00},C_2((h,\eta)-(g,q)))_{\mathcal{H}}\\
&\quad+M_1(g,h-g)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}\\
&=\Pi_2((g,q),(h-g,\eta-q))-\mathcal{L}_2(h-g,\eta-q).
\end{aligned}
$$

iii) De los incisos anteriores, se sigue

$$
\begin{aligned}
&\langle J_2'(g,q),(h,\eta)\rangle\\
&=\Pi_2((g,q),(h,\eta))-\mathcal{L}_2(h,\eta)\\
&=(C_2(h,\eta),u_{gq}-z_d)_{\mathcal{H}}+M_1(g,h)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}}\\
&=(h,p_{gq})_{\mathcal{H}}-(\eta,p_{gq})_{\mathcal{Q}}+M_1(g,h)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}}\\
&=(M_1 g+p_{gq},h)_{\mathcal{H}}+(M_2 q-p_{gq},\eta)_{\mathcal{Q}},\qquad\forall(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.
\end{aligned}
$$

iv) La condición de optimalidad para el problema (3.7) está dada por $J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})=0$, y por el inciso anterior, esto equivale a pedir

$$(M_1\overline{\overline{g}}+p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}},h)_{\mathcal{H}}+(M_2\overline{\overline{q}}-p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}},\eta)_{\mathcal{Q}}=0\qquad\forall(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.$$

En efecto, puesto que $J_2(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})\leqslant J_2(g,q)\quad\forall(g,q)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$, en particular vale para $(\overline{\overline{g}}+tg,\overline{\overline{q}}+tq)$ con $t>0$, entonces

$$
\begin{aligned}
J_2(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})\leqslant J_2(\overline{\overline{g}}+tg,\overline{\overline{q}}+tq)&\Rightarrow\ \frac{J_2(\overline{\overline{g}}+tg,\overline{\overline{q}}+tq)-J_2(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})}{t}\geqslant 0\\
&\Rightarrow\ \langle J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}),(g,q)\rangle\geqslant 0\qquad\forall(g,q)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.
\end{aligned}
$$

Dado que $-(g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, entonces

$$\langle J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}), -(g,q)\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \ \Pi_2((\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}),(g,q)) - \mathcal{L}_2(g,q) \leqslant 0$$
$$\Rightarrow \langle J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}),(g,q)\rangle \leqslant 0 \qquad \forall (g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

De lo anterior se sigue que $\langle J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}),(g,q)\rangle = 0 \quad \forall (g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ y por lo tanto $J_2'(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}) = 0$.

□

3.3. Problema P_α y su correspondiente Problema de Control Óptimo Simultáneo

Al igual que en la sección anterior, en lo que sigue se demuestra que el funcional $J_{2\alpha}$ es coercivo y diferenciable Gâteaux en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$. También se muestra la existencia y unicidad de los controles óptimos simultáneos $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ para el problema (3.8) y se da una condición de optimalidad en términos del estado adjunto del sistema óptimo $p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$.
Sea $C_{2\alpha} : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to L^2(V)$ dada por

$$C_{2\alpha}(g,q) = u_{\alpha gq} - u_{\alpha 00},$$

donde $u_{\alpha 00}$ es la solución del problema variacional (3.4) para $g = 0$ y $q = 0$, y sean $\Pi_{2\alpha} : (\mathcal{H} \times \mathcal{Q}) \times (\mathcal{H} \times \mathcal{Q}) \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_{2\alpha} : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ definidas por las siguientes expresiones:

$$\Pi_{2\alpha}((g,q),(h,\eta)) = (C_{2\alpha}(g,q), C_{2\alpha}(h,\eta))_{\mathcal{H}} + M_1(g,h)_{\mathcal{H}} + M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}},$$

$$\mathcal{L}_{2\alpha}(g,q) = (C_{2\alpha}(g,q), z_d - u_{\alpha 00})_{\mathcal{H}} \qquad \forall (g,q),\ (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

Lema 3.3.1.

i) $C_{2\alpha}$ es una aplicación lineal y continua.

ii) $\Pi_{2\alpha}$ es una forma bilineal, continua, simétrica y coerciva en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, esto es

$$\Pi_{2\alpha}((g,q),(g,q)) \geqslant \text{mín}\{M_1, M_2\}||(g,q)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} \quad \forall (g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

iii) $\mathcal{L}_{2\alpha}$ es lineal y continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$.

iv) $J_{2\alpha}$ se puede escribir como: $\forall (g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$

$$J_{2\alpha}(g,q) = \frac{1}{2}\Pi_{2\alpha}((g,q),(g,q)) - \mathcal{L}_{2\alpha}(g,q) + \frac{1}{2}||u_{\alpha 00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}.$$

v) $J_{2\alpha}$ es un funcional coercivo sobre $\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$, esto es: $\forall (g_2,q_2),\ (g_1,q_1) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q}$, $\forall t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&(1-t)J_{2\alpha}(g_2,q_2) + tJ_{2\alpha}(g_1,q_1) - J_{2\alpha}((1-t)(g_2,q_2) + t(g_1,q_1))\\
&= \frac{t(1-t)}{2}\left[||u_{\alpha g_2 q_2} - u_{\alpha g_1 q_1}||^2_{\mathcal{H}} + M_1||g_2 - g_1||^2_{\mathcal{H}} + M_2||q_2 - q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right]\\
&\geqslant \min\{M_1, M_2\}\frac{t(1-t)}{2}||(g_2 - g_1, q_2 - q_1)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

vi) Existe un único control óptimo $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ tal que

$$J_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) = \min_{g\in\mathcal{H}, q\in\mathcal{Q}} J_{2\alpha}(g,q).$$

Demostración.

i) La linealidad de $C_{2\alpha}$ es inmediata. Para demostrar que $C_{2\alpha}$ es continua se toma $v = u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)$ en la siguiente ecuación

$$(\dot{u}_{\alpha gq}(t) - \dot{u}_{\alpha 00}(t), v)_H + a_\alpha(u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t), v) = (g(t), v)_H - (q(t), v)_Q, \quad (3.19)$$

y se obtiene

$$\begin{aligned}
&(\dot{u}_{\alpha gq}(t) - \dot{u}_{\alpha 00}(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t))_H + a_\alpha(u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t))\\
&= (g(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t))_H - (q(t), (u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)))_Q.
\end{aligned}$$

Además, utilizando que

$$(\dot{u}_{\alpha gq}(t) - \dot{u}_{\alpha 00}(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t))_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||^2_H$$

y la coercividad de a_α, se consigue

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||^2_H + \lambda_\alpha||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||^2_V\\
&\leqslant \left|\, (g(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t))_H \,\right| + \left|\, (q(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t))_Q \,\right|.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2}$, se tiene

$$\left| \left(g(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)\right)_H \right| \leqslant \frac{1}{\lambda_\alpha}||g(t)||_H^2 + \frac{\lambda_\alpha}{4}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_V^2,$$

$$\begin{aligned}\left| \left(q(t), u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)\right)_Q \right| &\leqslant D_1||q(t)||_Q||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_V \\ &\leqslant \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_\alpha}{4}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_V^2,\end{aligned}$$

donde D_1 es una constante que surge de aplicar el teorema de trazas.

Así, se logra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_H^2 + \lambda_\alpha||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_V^2 \\ \leqslant\ &\frac{1}{\lambda_\alpha}||g(t)||_H^2 + \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_V^2.\end{aligned} \tag{3.20}$$

De esta desigualdad se deducen las siguientes estimaciones:

1) Integrando entre 0 y T la expresión

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_H^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_V^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_\alpha}||g(t)||_H^2 + \frac{D_1^2}{\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2,$$

y utilizando que $\frac{1}{2}||u_{\alpha gq}(t) - u_{\alpha 00}(t)||_H^2\Big|_0^T$ es una constante no negativa y que $||\nabla\left(C_{2\alpha}(g,q)(t)\right)||_H \leqslant ||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_V$, resulta

$$||\nabla C_{2\alpha}(g,q)||_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_\alpha^2}||g||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha^2}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \leqslant \text{máx}\left\{1, D_1^2\right\}\frac{2}{\lambda_\alpha^2}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2,$$

es decir,

$$||\nabla C_{2\alpha}(g,q)||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda_\alpha}\,\text{máx}\left\{1, D_1\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}. \tag{3.21}$$

Cuando $\alpha > 1$, la estimación anterior resulta independiente de α,

$$||\nabla C_{2\alpha}(g,q)||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1}\,\text{máx}\left\{1, D_1\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}. \tag{3.22}$$

Además, si no se usa que $||\nabla\left(C_{2\alpha}(g,q)(t)\right)||_H \leqslant ||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_V$, la desigualdad (3.21) se escribe como

$$||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda_\alpha}\,\text{máx}\left\{1, D_1\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}. \tag{3.23}$$

2) De (3.20) se tiene

$$\frac{d}{dt}||u_{\alpha gq}(t)-u_{\alpha 00}(t)||_H^2$$
$$\leqslant \frac{2}{\lambda_\alpha}||g(t)||_H^2+\frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha}||q(t)||_Q^2+\lambda_\alpha||\nabla(u_{\alpha gq}(t)-u_{\alpha 00}(t))||_H^2.$$

Integrando la desigualdad anterior entre 0 y s, para $0\leqslant s\leqslant T$, y teniendo en cuenta que

$$\frac{2}{\lambda_\alpha}\int_0^s||g(t)||_H^2dt+\frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha}\int_0^s||q(t)||_Q^2dt+\lambda_\alpha\int_0^s||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_V^2dt$$
$$\leqslant \frac{2}{\lambda_\alpha}||g||_{\mathcal{H}}^2+\frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2+\lambda_\alpha||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)}^2,$$

se obtiene para todo $s\in[0,T]$

$$\begin{aligned}||C_{2\alpha}(g,q)(s)||_H^2 &\leqslant \frac{2}{\lambda_\alpha}||g||_{\mathcal{H}}^2+\frac{2D_1^2}{\lambda_\alpha}||q||_{\mathcal{Q}}^2+\lambda_\alpha||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)}^2\\ &\leqslant \frac{2}{\lambda_\alpha}\max\left\{1,D_1^2\right\}\left(||g||_{\mathcal{H}}^2+||q||_{\mathcal{Q}}^2\right)+\lambda_\alpha||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)}^2.\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad obtenida en (3.23), se tiene

$$||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_H^2\leqslant\frac{4}{\lambda_\alpha}\max\left\{1,D_1^2\right\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2 \qquad \text{para todo } t\in[0,T].$$

Tomando supremo para $0\leqslant t\leqslant T$ se obtiene

$$||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^\infty(H)}\leqslant\frac{2}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\max\{1,D_1\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.$$

Cuando $\alpha>1$ se consigue nuevamente una estimación independiente de α,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_H\leqslant\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}\max\{1,D_1\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}. \tag{3.24}$$

3) De (3.19) para $v\in V_0$ y la desigualdad de Cauchy- Schwarz, se deduce

$$\left|\left(\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t),v\right)_H\right|=\left|(\dot{u}_{\alpha gq}(t)-\dot{u}_{\alpha 00}(t),v)_H\right|$$
$$\leqslant\left|(g(t),v)_H\right|+\left|(q(t),v)_Q\right|+\left|a_\alpha(u_{\alpha gq}(t)-u_{\alpha 00}(t),v)\right|$$
$$\leqslant||g(t)||_H||v||_H+||q(t)||_Q||v||_Q+\left|a(C_{2\alpha}(g,q)(t),v)\right|+\alpha\left|\int_{\Gamma_1}(C_{2\alpha}(g,q)(t))\,vd\gamma\right|$$
$$\leqslant||g(t)||_H||v||_V+||q(t)||_QD_2||v||_V+||\nabla C_{2\alpha}(g,q)(t)||_H||\nabla v||_H$$
$$\leqslant D_3\left(||g(t)||_H+D_2||q(t)||_Q\right)||v||_{V_0}+||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_{V_0}||v||_{V_0},$$

donde D_2 es una constante que surge de aplicar el teorema de trazas y D_3 es la constante de Poincaré.

Tomando supremo sobre $\{v \in V_0$ tal que $||v||_{V_0} \leqslant 1\}$, se logra

$$\left|\left|\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t)\right|\right|_{V_0'} \leqslant D_3\left(||g(t)||_H + D_2||q(t)||_Q\right) + ||C_{2\alpha}(g,q)(t)||_{V_0},$$

entonces

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t)\right|\right|^2_{V_0'} &\leqslant 2D_3^2\left(||g(t)||_H + D_2||q(t)||_Q\right)^2 + 2||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_{V_0}\\ &\leqslant 4D_3^2\left(||g(t)||^2_H + D_2^2||q(t)||^2_Q\right) + 2||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_{V_0}.\end{aligned}$$

Integrando en $[0,T]$ y utilizando (3.21), se deduce

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t)\right|\right|^2_{V_0'} dt\\ &\leqslant 4D_3^2\,\text{máx}\{1,D_2^2\}\left(||g||^2_{\mathcal{H}} + ||q||^2_{\mathcal{Q}}\right) + 2||\nabla C_{2\alpha}(g,q)||^2_{\mathcal{H}}\\ &\leqslant 4D_3^2\,\text{máx}\{1,D_2^2\}||(g,q)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} + \frac{4}{\lambda_\alpha^2}\,\text{máx}\left\{1,D_1^2\right\}||(g,q)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}},\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}&\left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t)\right|\right|^2_{V_0'} dt\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant 2\sqrt{D_3^2\,\text{máx}\{1,D_2^2\} + \frac{1}{\lambda_\alpha^2}\,\text{máx}\left\{1,D_1^2\right\}}\,||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.\end{aligned}$$

Cuando $\alpha > 1$ resulta la siguiente desigualdad independiente de α

$$\begin{aligned}&\left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t)\right|\right|^2_{V_0'} dt\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant 2\sqrt{D_3^2\,\text{máx}\{1,D_2^2\} + \frac{1}{\lambda_1^2}\,\text{máx}\left\{1,D_1^2\right\}}\,||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Además, al igual que lo realizado para obtener la desigualdad (4.10), cuando $v \in V$ la estimación que se obtiene depende del parámetro α. Más precisamente, cuando $\alpha > 1$, resulta la siguiente desigualdad

$$\left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt}C_{2\alpha}(g,q)(t)\right|\right|_{V'}^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\sqrt{\text{máx}\{1, D_4^2\} + \frac{\text{máx}\{1, D_1^2\}(1+\alpha D_5^2)^2}{\lambda_1^2}}\,||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}, \tag{3.26}$$

donde D_4 y D_5 son constantes que surgen de aplicar el teorema de trazas.

De esta manera, el operador

$$C_{2\alpha} : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \{v \in L^2(V) \cap L^\infty(H) : \dot{v} \in L^2(V')\},$$

resulta continuo.

ii) La continuidad de la aplicación $\Pi_{2\alpha}$ se deduce utilizando (3.21), la desigualdad de Poincaré y la Proposición A.3.4 del Apéndice.

$$\begin{aligned}
&|\Pi_{2\alpha}((g,q),(h,\eta))| \\
&\leqslant ||C_{2\alpha}(g,q)||_{\mathcal{H}}||C_{2\alpha}(h,\eta)||_{\mathcal{H}} + M_1||g||_{\mathcal{H}}||h||_{\mathcal{H}} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \\
&\leqslant D_6^2||\nabla C_{2\alpha}(g,q)||_{\mathcal{H}}||\nabla C_{2\alpha}(h,\eta)||_{\mathcal{H}} + M_1||g||_{\mathcal{H}}||h||_{\mathcal{H}} + M_2||q||_{\mathcal{Q}}||\eta||_{\mathcal{Q}} \\
&\leqslant D_6^2\frac{2\,\text{máx}\{1, D_1^2\}}{\lambda_\alpha^2}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}||(h,\eta)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} \\
&\quad + \text{máx}\{M_1, M_2\}\sqrt{||g||_{\mathcal{H}}^2 + ||q||_{\mathcal{Q}}^2}\sqrt{||h||_{\mathcal{H}}^2 + ||\eta||_{\mathcal{Q}}^2} \\
&\leqslant \left(\frac{D_6^2 2\,\text{máx}\{1, D_1^2\}}{\lambda_\alpha^2} + \text{máx}\{M_1, M_2\}\right)||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}||(h,\eta)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

Además, $\Pi_{2\alpha}$ es coerciva en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, ya que

$$\begin{aligned}
\Pi_{2\alpha}((g,q),(g,q)) &\geqslant M_1||g||_{\mathcal{H}}^2 + M_2||q||_{\mathcal{Q}}^2 \\
&\geqslant \text{mín}\{M_1, M_2\}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}^2 \qquad \forall (g,q) \in \mathcal{H}\times\mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

iii) $\mathcal{L}_{2\alpha}$ es continua en $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, esto se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de (3.23)

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_{2\alpha}(g,q)| &= |(C_{2\alpha}(g,q), z_d - u_{\alpha 00})_{\mathcal{H}}| \\
&\leqslant ||C_{2\alpha}(g,q)||_{\mathcal{H}}||z_d - u_{\alpha 00}||_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant ||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)}||z_d - u_{\alpha 00}||_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda_\alpha}\,\text{máx}\{1, D_1\}\,||z_d - u_{\alpha 00}||_{\mathcal{H}}||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

iv) Por la definición de $\Pi_{2\alpha}$ y $\mathcal{L}_{2\alpha}$ y por (3.6), $J_{2\alpha}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} J_{2\alpha}(g,q) &= \frac{1}{2}||u_{\alpha gq} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \\ &= \frac{1}{2}\left(C_{2\alpha}(g,q), C_{2\alpha}(g,q)\right)_{\mathcal{H}} - \left(C_{2\alpha}(g,q), z_d - u_{\alpha 00}\right)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{1}{2}||z_d - u_{\alpha 00}||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \\ &= \frac{1}{2}\Pi_{2\alpha}((g,q),(g,q)) - \mathcal{L}_{2\alpha}(g,q) + \frac{1}{2}||u_{\alpha 00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

v) $J_{2\alpha}$ es un funcional coercivo sobre $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$. Esto resulta de manera análoga a (3.14).

vi) Por Lema A.2.10 del Apéndice se tiene que existe un único elemento de $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ que minimiza el siguiente funcional

$$J(g,q) = \frac{1}{2}\Pi_{2\alpha}((g,q),(g,q)) - \mathcal{L}_{2\alpha}(g,q),$$

y por lo tanto

$$J_{2\alpha}(g,q) = \frac{1}{2}\Pi_{2\alpha}((g,q),(g,q)) - \mathcal{L}_{2\alpha}(g,q) + \frac{1}{2}||u_{\alpha 00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}$$

tiene un mínimo, al cual se lo denota con $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$.

□

Se define el estado adjunto $p_{\alpha gq}$ correspondiente a (3.2) para cada $(g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, como la única solución débil del siguiente problema parabólico mixto

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = u_{\alpha gq} - z_d \quad \text{en } \Omega \qquad -\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_1} = \alpha p \qquad \frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = 0 \qquad p(T) = 0,$$

cuya formulación variacional es la siguiente

$$\begin{cases} p_{\alpha gq} \in L^2(V), \qquad p_{\alpha gq}(T) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{p}_{\alpha gq} \in L^2(V') \\ \text{tal que} \quad -\langle \dot{p}_{\alpha gq}(t), v\rangle + a_\alpha(p_{\alpha gq}(t), v) = (u_{\alpha gq}(t) - z_d, v)_H, \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{3.27}$$

De manera análoga al Lema 3.2.2, se enuncia el siguiente resultado.

Lema 3.3.2.

i) El estado adjunto $p_{\alpha gq}$ satisface la siguiente igualdad

$$(C_{2\alpha}(h,\eta), u_{\alpha gq} - z_d)_{\mathcal{H}} = (h, p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{\alpha gq})_{\mathcal{Q}}.$$

ii) El funcional $J_{2\alpha}$ es diferenciable Gâteaux y $J'_{2\alpha}$ viene dada por

$$
\begin{aligned}
&\langle J'_{2\alpha}(g,q),(h-g,\eta-q)\rangle \\
&= (u_{\alpha h\eta}-u_{\alpha gq}, u_{\alpha gq}-z_d)_{\mathcal{H}} + M_1(g,h-g)_{\mathcal{H}} + M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}} \\
&= \Pi_{2\alpha}((g,q),(h-g,\eta-q)) - \mathcal{L}_{2\alpha}(h-g,\eta-q), \qquad \forall (g,q),(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.
\end{aligned}
$$

iii) La derivada Gâteaux de $J_{2\alpha}$ puede escribirse como

$$
\langle J'_{2\alpha}(g,q),(h,\eta)\rangle = (M_1 g + p_{\alpha gq}, h)_{\mathcal{H}} + (M_2 q - p_{\alpha gq}, \eta)_{\mathcal{Q}}, \qquad \forall (h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.
$$

iv) La condición de optimalidad para el problema (3.8) viene dada por: $\forall (h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$

$$
\langle J'_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha,\overline{\overline{q}}_\alpha),(h,\eta)\rangle = (M_1\overline{\overline{g}}_\alpha + p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, h)_{\mathcal{H}} + (M_2\overline{\overline{q}}_\alpha - p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \eta)_{\mathcal{Q}} = 0.
$$

Demostración.

i) Si en (3.27) se elige $v = C_{2\alpha}(h,\eta)(t)\in V$ y se integra entre 0 y T, se tiene

$$
-(\dot{p}_{\alpha gq}, C_{2\alpha}(h,\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a_\alpha(p_{\alpha gq}(t), C_{2\alpha}(h,\eta)(t))dt = (u_{\alpha gq}-z_d, C_{2\alpha}(h,\eta))_{\mathcal{H}}.
$$

Por otro lado, si en (3.4) se elige $v = p_{\alpha gq}(t)$ para $g=0$, $q=0$ y para $g=h$, $q=\eta$, se resta y se integra entre 0 y T, se logra

$$
(\dot{u}_{\alpha h\eta} - \dot{u}_{\alpha 00}, p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}} + \int_0^T a_\alpha(C_{2\alpha}(h,\eta)(t), p_{\alpha gq}(t))dt = (h, p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{\alpha gq})_{\mathcal{Q}},
$$

Entonces, de las expresiones anteriores y por la simetría de la forma bilineal a_α, se sigue

$$
\begin{aligned}
&(u_{\alpha gq}-z_d, C_{2\alpha}(h,\eta))_{\mathcal{H}} \\
&= -(\dot{p}_{\alpha gq}, C_{2\alpha}(h,\eta))_{\mathcal{H}} + \int_0^T a_\alpha(p_{\alpha gq}(t), C_{2\alpha}(h,\eta)(t))dt \\
&= -(\dot{p}_{\alpha gq}, C_{2\alpha}(h,\eta))_{\mathcal{H}} - (\dot{u}_{\alpha h\eta} - \dot{u}_{\alpha 00}, p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}} + (h, p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{\alpha gq})_{\mathcal{Q}} \\
&= (h, p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}} - (\eta, p_{\alpha gq})_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}
$$

ii) Sean (g,q), $(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$ y $s>0$, entonces por la definición de $J_{2\alpha}$ y propiedades de producto interno se tiene, al igual que antes, que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\left[J_{2\alpha}\left((g,q)+s((h,\eta)-(g,q))\right)-J_{2\alpha}(g,q))\right]\\ =&\frac{s}{2}(u_{\alpha h\eta}-u_{\alpha gq},u_{\alpha h\eta}-u_{\alpha gq})_{\mathcal{H}}+(u_{\alpha gq}-z_d,u_{\alpha h\eta}-u_{\alpha gq})_{\mathcal{H}}\\ &+\frac{M_1 s}{2}(h-g,h-g)_{\mathcal{H}}+M_1(g,h-g)_{\mathcal{H}}+\frac{M_2 s}{2}(\eta-q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}+M_2(q,\eta-q)_{\mathcal{Q}}.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $s\to 0^+$, se obtiene

$$\langle J'_{2\alpha}(g,q),(h,\eta)-(g,q)\rangle=\Pi_{2\alpha}((g,q),(h-g,\eta-q))-\mathcal{L}_{2\alpha}(h-g,\eta-q).$$

iii) De los incisos anteriores, se sigue

$$\begin{aligned}\langle J'_{2\alpha}(g,q),(h,\eta)\rangle&=\Pi_{2\alpha}((g,q),(h,\eta))-\mathcal{L}_{2\alpha}(h,\eta)\\ &=(C_{2\alpha}(h,\eta),u_{\alpha gq}-z_d)_{\mathcal{H}}+M_1(g,h)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}}\\ &=(h,p_{\alpha gq})_{\mathcal{H}}-(\eta,p_{\alpha gq})_{\mathcal{Q}}+M_1(g,h)_{\mathcal{H}}+M_2(q,\eta)_{\mathcal{Q}}\\ &=(M_1 g+p_{\alpha gq},h)_{\mathcal{H}}+(M_2 q-p_{\alpha gq},\eta)_{\mathcal{Q}},\qquad\forall(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.\end{aligned}$$

iv) La condición de optimalidad para el problema (3.8) esta dada por $J'_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha,\overline{\overline{q}}_\alpha)=0$, es decir

$$(M_1\overline{\overline{g}}_\alpha+p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha},h)+(M_2\overline{\overline{q}}_\alpha-p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha},\eta)=0\qquad\forall(h,\eta)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}.$$

□

En la siguiente observación se introduce una estimación la cual será utilizada en la prueba del lema que se enuncia posteriormente.

Observación 3.3.3. Se tiene la siguiente estimación:

$$\alpha\int_0^T ||C_{2\alpha}(g,q)(t)|\,|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt\leqslant M\frac{\sqrt{2}}{\lambda_\alpha}\,\text{máx}\{1,D_1\}\,||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)}.\qquad(3.28)$$

Demostración. De la definición de a_α, para $u=v=C_{2\alpha}(g,q)(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned}&a_\alpha(C_{2\alpha}(g,q)(t),C_{2\alpha}(g,q)(t))\\ =&\,a(C_{2\alpha}(g,q)(t),C_{2\alpha}(g,q)(t))+\alpha\int_{\Gamma_1}C_{2\alpha}(g,q)(t)C_{2\alpha}(g,q)(t)d\gamma\\ =&\,||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_{V_0}+\alpha||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)}.\end{aligned}$$

Así,

$$\alpha||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} \leqslant |a_\alpha(C_{2\alpha}(g,q)(t), C_{2\alpha}(g,q)(t))| \leqslant M||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_V,$$

donde M es una constante positiva que surge de utilizar que a_α es continua en V. Integrando entre 0 y T y utilizando (3.23), se logra

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^T ||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)}dt &\leqslant M\int_0^T ||C_{2\alpha}(g,q)(t)||^2_V dt\\ &= M||C_\alpha(g,q)||_{L^2(V)}||C_\alpha(g,q)||_{L^2(V)}\\ &\leqslant M\frac{\sqrt{2}}{\lambda_\alpha}\,\text{máx}\{1,D_1\}\,||(g,q)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}||C_{2\alpha}(g,q)||_{L^2(V)}.\end{aligned}$$

□

En el siguiente lema se dan algunas estimaciones para la aplicación afín $(g,q)\mapsto u_{\alpha gq}$.

Lema 3.3.4.

1) $||\nabla u_{\alpha g_1 q_1} - \nabla u_{\alpha g_2 q_2}||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1}\,\text{máx}\{1,D_1\}\,||(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}$,

2) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}||u_{\alpha g_1 q_1}(t) - u_{\alpha g_2 q_2}(t)||_H \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}\,\text{máx}\{1,D_1\}\,||(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}$,

3) $||\dot u_{\alpha g_1 q_1} - \dot u_{\alpha g_2 q_2}||_{L^2(V_0')} \leqslant 2\sqrt{D_3^2\,\text{máx}\{1,D_2^2\} + \frac{1}{\lambda_1^2}\,\text{máx}\{1,D_1^2\}}||(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}$,

4) $||\dot u_{\alpha g_1 q_1} - \dot u_{\alpha g_2 q_2}||_{L^2(V')} \leqslant 2\sqrt{\text{máx}\{1,D_4^2\} + \frac{\text{máx}\left\{1,D_1^2\right\}(1+\alpha D_5^2)^2}{\lambda_1^2}}||(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}$,

5) $||u_{\alpha g_1 q_1} - u_{\alpha g_2 q_2}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant \sqrt{\frac{2M}{\alpha}\frac{\text{máx}\{1,D_1\}}{\lambda_1}}||(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}$.

Demostración.

1) De la linealidad de $C_{2\alpha}$ y por la estimación (3.22) para $\alpha>1$, se deduce

$$\begin{aligned}||\nabla u_{\alpha g_1 q_1} - \nabla u_{\alpha g_2 q_2}||_{\mathcal{H}} &= ||\nabla(u_{\alpha g_1 q_1} - u_{\alpha 00}) - \nabla(u_{\alpha g_2 q_2} - u_{\alpha 00})||_{\mathcal{H}}\\ &= ||\nabla C_{2\alpha}(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}}\\ &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1}\,\text{máx}\{1,D_1\}\,||(g_1-g_2,q_1-q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.\end{aligned}$$

2) De la estimación (3.24) para $\alpha > 1$, se logra

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||u_{\alpha g_1 q_1}(t) - u_{\alpha g_2 q_2}(t)||_H \\
&= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||(u_{\alpha g_1 q_1}(t) - u_{\alpha 00}(t)) - (u_{\alpha g_2 q_2}(t) - u_{\alpha 00}(t))||_H \\
&= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||C_{2\alpha}(g_1 - g_2, q_1 - q_2)(t)||_H \\
&\leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}} \text{máx}\,\{1, D_1\}\, ||(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

3) Por la linealidad de $C_{2\alpha}$ y de la derivada, y utilizando la estimación (3.25) para $\alpha > 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
&||\dot{u}_{\alpha g_1 q_1} - \dot{u}_{\alpha g_2 q_2}||_{L^2(V_0')} \\
&= \left[\int_0^T ||(\dot{u}_{\alpha g_1 q_1}(t) - \dot{u}_{\alpha 00}(t)) - (\dot{u}_{\alpha g_2 q_2}(t) - \dot{u}_{\alpha 00}(t))||^2_{V_0'} dt\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt} C_{2\alpha}(g_1 - g_2, q_1 - q_2)(t)\right|\right|^2_{V_0'} dt\right]^{1/2} \\
&\leqslant 2\sqrt{D_3^2\,\text{máx}\{1, D_2^2\} + \frac{1}{\lambda_1^2}\,\text{máx}\,\{1, D_1^2\}}||(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

4) De la estimación (3.26) para $\alpha > 1$, se deduce

$$\begin{aligned}
&||\dot{u}_{\alpha g_1 q_1} - \dot{u}_{\alpha g_2 q_2}||_{L^2(V')} \\
&= \left[\int_0^T ||\dot{u}_{\alpha g_1 q_1}(t) - \dot{u}_{\alpha g_2 q_2}(t)||^2_{V'} dt\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_0^T \left|\left|\frac{d}{dt} C_{2\alpha}(g_1 - g_2, q_1 - q_2)(t)\right|\right|^2_{V'} dt\right]^{1/2} \\
&\leqslant 2\sqrt{\text{máx}\{1, D_4^2\} + \frac{\text{máx}\,\{1, D_1^2\}\,(1 + \alpha D_5^2)^2}{\lambda_1^2}}||(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

5) De las estimaciones (3.28) y (3.23) para $\alpha > 1$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
& ||u_{\alpha g_1 q_1} - u_{\alpha g_2 q_2}||^2_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\
&= \int_0^T ||u_{\alpha g_1 q_1}(t) - u_{\alpha g_2 q_2}(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt \\
&= \int_0^T ||C_{2\alpha}(g_1 - g_2, q_1 - q_2)(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt \\
&\leqslant M \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 \alpha} \text{máx}\{1, D_1\} ||(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} ||C_{2\alpha}(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||_{L^2(V)} \\
&\leqslant M \frac{2}{\lambda_1^2 \alpha} \text{máx}\left\{1, D_1^2\right\} ||(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}},
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
||u_{\alpha g_1 q_1} - u_{\alpha g_2 q_2}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant \sqrt{\frac{2M}{\alpha}} \frac{\text{máx}\{1, D_1\}}{\lambda_1} ||(g_1 - g_2, q_1 - q_2)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}.
$$

□

3.4. Estimaciones Asintóticas

A los efectos de estudiar el comportamiento asintótico, cuando α tiende a $+\infty$, de los estados del sistema, los estados adjuntos y los controles óptimos, se obtendrán estimaciones para $u_{\alpha gq}$, $\dot{u}_{\alpha gq}$, $p_{\alpha gq}$ y $\dot{p}_{\alpha gq}$ para $\alpha > 1$ y el par (g, q) fijo.

Proposición 3.4.1. Para $(g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ fijo, si $u_{\alpha gq}$ es la única solución de la ecuación variacional (2.5) se tiene la siguiente estimación

$$
||\dot{u}_{\alpha gq}||_{L^2(V_0')} + ||u_{\alpha gq}||_{L^\infty(H)} + ||u_{\alpha gq}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha - 1)} ||u_{\alpha gq} - b||_{L^\infty(L^2(\Gamma_1))} \leqslant E_2, \quad (3.29)
$$

para todo $\alpha > 1$, donde la constante E_2 depende de las normas $||\dot{u}_{gq}||_{L^2(V_0')}$, $||\dot{u}_{gq}||_{L^2(V')}$, $||\nabla u_{gq}||_{\mathcal{H}}$, $||u_{gq}||_{L^2(V)}$, $||u_{gq}||_{L^\infty(H)}$, $||g||_{\mathcal{H}}$, $||q||_{\mathcal{Q}}$ y de la constante de coercividad λ_1.

Demostración. Con el mismo razonamiento que fue realizado en la Proposición 2.4.1, se obtiene la siguiente cota, para todo $\alpha > 1$

$$
\begin{aligned}
& ||\dot{u}_{\alpha gq}||_{L^2(V_0')} + ||u_{\alpha gq}||_{L^\infty(H)} + ||u_{\alpha gq}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha - 1)} ||u_{\alpha gq} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\
\leqslant & \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{A_2} + ||u_{gq}||_{L^\infty(H)} + \frac{2}{\lambda_1} \sqrt{A_2} + ||u_{gq}||_{L^2(V)} + \sqrt{\frac{2}{\lambda_1} A_2} =: E_2,
\end{aligned}
$$

donde $A_2 = ||g||^2_{\mathcal{H}} + D_1^2||q||^2_{\mathcal{Q}} + ||\nabla u_{gq}||^2_{\mathcal{H}} + ||\dot{u}_{gq}||^2_{L^2(V')}$. $\square$

Teorema 3.4.2. Para $(g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ fijo, cuando $\alpha \to +\infty$ se tiene $u_{\alpha gq} \to u_{gq}$ fuertemente en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$ y $\dot{u}_{\alpha gq} \to \dot{u}_{gq}$ fuertemente $L^2(V_0')$.

Demostración. Sea $(g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ fijo. Con igual razonamiento que el utilizado en el Teorema 2.4.2, se obtiene que existe (vía identificación) una sucesión $\{u_{\alpha_n gq}\}$ y $w_{gq} \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$ tal que $u_{\alpha_n gq} \to w_{gq}$ débilmente en $L^2(V)$ y débil estrella en $L^\infty(H)$, y además, $\dot{u}_{\alpha_n gq} \to \dot{w}_{gq}$ débilmente en $L^2(V_0')$.

Luego, se prueba que $w_{gq} = u_{gq}$. Para ello, se obtiene que w_{gq} satisface el siguiente problema variacional

$$\begin{cases} w_{gq} - v_b \in L^2(V_0), \qquad w_{gq}(0) = v_b \quad \text{y} \quad \dot{w}_{gq} \in L^2(V_0') \\ \text{tal que} \quad \langle \dot{w}_{gq}(t), v \rangle + a(w_{gq}(t), v) = L_{gq}(t, v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases}$$

Así, $w_{gq} = u_{gq}$ por unicidad de la solución del problema variacional (3.3).

De lo demostrado anteriormente se tiene que, cuando $\alpha \to \infty$,

$$u_{\alpha gq} \rightharpoonup u_{gq} \text{ en } L^2(V), \quad u_{\alpha gq} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{gq} \text{ en } L^\infty(H) \quad \text{y} \quad \dot{u}_{\alpha gq} \rightharpoonup \dot{u}_{gq} \text{ en } L^2(V_0').$$

Finalmente, se obtienen las siguientes convergencias fuertes

$$u_{\alpha gq} \to u_{gq} \quad \text{en} \quad L^2(V) \cap L^\infty(H), \qquad u_{\alpha gq} \to u_{gq} \quad \text{en} \quad L^2(L^2(\Gamma_1)),$$

$$\dot{u}_{\alpha gq} \to \dot{u}_{gq} \quad \text{en} \quad L^2(V_0').$$

$\square$

Proposición 3.4.3. Para $(g, q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ fijo, si $p_{\alpha gq}$ es la única solución del problema adjunto (3.27), se tiene la siguiente estimación

$$||\dot{p}_{\alpha gq}||_{L^2(V_0')} + ||p_{\alpha gq}||_{L^\infty(H)} + ||p_{\alpha gq}||_{L^2(V)} + \sqrt{(\alpha - 1)}||p_{\alpha gq}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant F_2,$$

para todo $\alpha > 1$, donde la constante F_2 depende de las normas $||\dot{p}_{gq}||_{L^2(V_0')}$, $||\dot{p}_{gq}||_{L^2(V')}$, $||\nabla p_{gq}||_{\mathcal{H}}$, $||p_{gq}||_{L^2(V)}$, $||p_{gq}||_{L^\infty(H)}$, $||g||_{\mathcal{H}}$, $||q||_{\mathcal{Q}}$, $||z_d||_{\mathcal{H}}$, $||\dot{u}_{gq}||_{L^2(V')}$, $||\nabla u_{gq}||_{\mathcal{H}}$, $||u_{gq}||_{L^2(V)}$, $||u_q||_{L^\infty(H)}$ y de la constante de coercividad λ_1.

Demostración. La prueba resulta de manera similar a la dada en la Proposición 2.4.3. $\square$

Teorema 3.4.4. Para $(g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, cuando $\alpha \to \infty$ se tiene $p_{\alpha gq} \to p_{gq}$ fuertemente en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$ y $\dot{p}_{\alpha gq} \to \dot{p}_{gq}$ fuertemente en $L^2(V_0')$.

Demostración. Sea $(g,q) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ fijo. Se considera $\{p_{\alpha_n gq}\}$ una sucesión en $L^2(V) \cap L^\infty(H)$. Repitiendo el procedimiento realizado en el Teorema 3.4.2, se puede afirmar que existe (vía identificación) una sucesión $\{p_{\alpha_n gq}\}$ y $\eta_{gq} \in L^2(V) \cap L^\infty(H)$ tal que $p_{\alpha_n gq} \to \eta_{gq}$ débilmente en $L^2(V)$ y débil estrella en $L^\infty(H)$, y además, $\dot{p}_{\alpha_n gq} \to \dot{\eta}_{gq}$ débilmente en $L^2(V_0')$. Luego, se obtiene que η_{gq} verifica el problema variacional (3.15), lo que permite concluir que $\eta_{gq} = p_{gq}$.
Así, cuando $\alpha \to \infty$, se obtiene que

$$p_{\alpha gq} \rightharpoonup p_{gq} \text{ en } L^2(V), \qquad p_{\alpha gq} \overset{*}{\rightharpoonup} p_{gq} \text{ en } L^\infty(H) \quad \text{y} \quad \dot{p}_{\alpha gq} \rightharpoonup \dot{p}_{gq} \text{ en } L^2(V_0').$$

Finalmente, siguiendo el razonamiento realizado en el Teorema 2.4.4, se obtienen las correspondientes convergencias fuertes. $\square$

3.5. Convergencia del Problema P_α y sus correspondientes Controles Óptimos cuando $\alpha \to \infty$

De manera análoga al Teorema 2.5.1 se establece el siguiente resultado.

Teorema 3.5.1.

i) Si $u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ y $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$ son los únicos estados del sistema, correspondiente a los problemas de control óptimo vectorial (3.7) y (3.8) respectivamente, entonces:

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||_{L^2(V)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha\to\infty} ||\dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||_{L^2(V_0')} = 0.$$

ii) Si $p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ y $p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$ son los únicos estados adjuntos, correspondiente a los problemas de control óptimo vectorial (3.7) y (3.8) respectivamente, entonces:

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||_{L^2(V)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha\to\infty} ||\dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||_{L^2(V_0')} = 0.$$

iii) Si $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ y $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo distribuido-frontera (3.7) y (3.8) respectivamente, entonces:

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) - (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} = 0.$$

Demostración. La demostración se realiza en dos etapas.

Paso 1. En esta estapa se demuestra la convergencia débil de los controles óptimos simultáneos, los estados del sistema y los estados adjuntos vinculados a los problemas P_α, al correspondiente control óptimo simultáneo, estado del sistema y estado adjunto del problema P. De la estimación (3.29) en la Proposición 3.4.1 para $g = q = 0$ se tiene

$$||u_{\alpha 00}||_{\mathcal{H}} \leqslant ||u_{\alpha 00}||_{L^2(V)} \leqslant E_2, \qquad \forall \alpha > 1.$$

Dado que $J_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \leqslant J_{2\alpha}(0,0)$, de la definición de $J_{2\alpha}$, se tiene

$$\frac{1}{2}||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||\overline{\overline{g}}_\alpha||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||\overline{\overline{q}}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{1}{2}||u_{\alpha 00} - z_d||^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.30}$$

De esta desigualdad se deduce que

$$\frac{1}{2}||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{2}||u_{\alpha 00} - z_d||^2_{\mathcal{H}},$$

y por lo tanto

$$||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{\mathcal{H}} \leqslant ||u_{\alpha 00}||_{\mathcal{H}} + 2||z_d||_{\mathcal{H}} \leqslant E_2 + 2||z_d||_{\mathcal{H}}.$$

Por otro lado, nuevamente de (3.30), se logra

$$||\overline{\overline{q}}_\alpha||_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{M_2}}\left(E_2 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right) \quad \text{y} \quad ||\overline{\overline{g}}_\alpha||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{M_1}}\left(E_2 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right).$$

Así, de las estimaciones anteriores se concluye

$$||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{\mathcal{H}} + ||\overline{\overline{g}}_\alpha||_{\mathcal{H}} + ||\overline{\overline{q}}_\alpha||_{\mathcal{Q}} \leqslant E_2 + 2||z_d||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\sqrt{M_1}}\left(E_2 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right) + \frac{1}{\sqrt{M_2}}\left(E_2 + ||z_d||_{\mathcal{H}}\right).$$

Luego, con un razonamiento similar a la demostración de la Proposición 3.4.1, considerando $v = u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - v_b$ para $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$, se obtiene

$$||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V)} + ||\dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V_0')} + \sqrt{\alpha - 1}||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - b||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant D_3 \quad \forall \alpha > 1. \tag{3.31}$$

Utilizando la ecuación variacional (3.27) para $v \in V_0$ y la Proposición 3.4.3 se logra una estimación análoga a (3.31) para el estado adjunto.

$$||p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V)} + ||\dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V_0')} + \sqrt{(\alpha-1)}||p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \leqslant D_4 \quad \forall \alpha > 1,$$

donde D_4 es una constante positiva que no depende de α.

De las estimaciones anteriores se tiene que $||\overline{\overline{g}}_\alpha||_{\mathcal{H}}$, $||\overline{\overline{g}}_\alpha||_{\mathcal{Q}}$, $||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V)}$, $||\dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V_0')}$, $||p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V)}$ y $||\dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}||_{L^2(V_0')}$, están acotadas por constantes que no dependen de α.

Luego, para cada una de las sucesiones consideradas, existe una subsucesión que verifica lo siguiente

$$\overline{\overline{q}}_\alpha \rightharpoonup f \quad \text{en} \quad \mathcal{Q}, \qquad \overline{\overline{g}}_\alpha \rightharpoonup x \quad \text{en} \quad \mathcal{H},$$

$$u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \mu \quad \text{en} \quad L^2(V), \qquad \dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \dot{\mu} \quad \text{en} \quad L^2(V_0'),$$

$$p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \rho \quad \text{en} \quad L^2(V), \qquad \dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup \dot{\rho} \quad \text{en} \quad L^2(V_0').$$

De manera análoga a lo realizado en la demostración del Teorema 2.4.2 se prueba que μ es solución de la ecuación variacional parabólica (3.3) y ρ es solución de (3.15). Así, por unicidad de la solución, se concluye que $\mu = u_{xf}$ y $\rho = p_{xf}$, y por lo tanto

$$u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup u_{xf}, \qquad p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup p_{xf} \quad \text{en} \quad L^2(V).$$

Por otro lado, si en la condición de optimalidad para el problema (3.8)

$$\begin{aligned} & M_1 \int_0^T \int_\Omega \overline{\overline{g}}_\alpha(t) h(t)\, dxdt - \int_0^T \int_\Omega p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) h(t)\, dxdt \\ & + M_2 \int_0^T \int_{\Gamma_2} \overline{\overline{q}}_\alpha(t)\eta(t) d\gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_2} p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t)\eta(t) d\gamma dt = 0 \qquad \forall (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

se toma límite cuando $\alpha \to \infty$ y se utilizan las convergencias débiles, se logra

$$(M_1 x - p_{xf}, h)_{\mathcal{H}} + (M_2 f - p_{xf}, \eta)_{\mathcal{Q}} = 0 \qquad \forall (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}.$$

Por unicidad del control óptimo para el problema (3.7), se deduce que $(x, f) = (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$.

Así, se tienen las siguientes convergencias débiles

$$(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha, u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \dot{u}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \rightharpoonup (\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}, u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$$

en los espacios correspondientes, cuando $\alpha \to \infty$.

Paso 2. En esta etapa se prueba que las convergencias débiles demostradas en el paso anterior, son convergencias fuertes.

De manera análoga a la demostración del Teorema 2.5.1 se deduce

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left[||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + M_1||\overline{\overline{g}}_\alpha||^2_{\mathcal{H}} + M_2||\overline{\overline{q}}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}} \right] = ||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - z_d||^2_{\mathcal{H}} + M_1||\overline{\overline{g}}||^2_{\mathcal{H}} + M_2||\overline{\overline{q}}||^2_{\mathcal{Q}},$$

y por definición de norma en el espacio producto se tiene

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||(\sqrt{M_2}\overline{\overline{q}}_\alpha, \sqrt{M_1}\overline{\overline{g}}_\alpha, u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - z_d)||^2_{\mathcal{Q}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = ||(\sqrt{M_2}\overline{\overline{q}}, \sqrt{M_1}\overline{\overline{g}}, u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - z_d)||^2_{\mathcal{Q}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}}.$$

De esta última igualdad, de las convergencias débiles $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \rightharpoonup u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ en $L^2(V)$, $\overline{\overline{q}}_\alpha \rightharpoonup \overline{\overline{q}}$ en $\mathcal{Q}$, y $\overline{\overline{g}}_\alpha \rightharpoonup \overline{\overline{g}}$ en $\mathcal{H}$, y por la Proposición A.2.6 del Apéndice se tiene $(\overline{\overline{q}}_\alpha, \overline{\overline{g}}_\alpha, u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \to (\overline{\overline{q}}, \overline{\overline{g}}, u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$ fuertemente en $\mathcal{Q}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ cuando $\alpha \to \infty$.

Finalmente, si en la ecuación (3.4) para $g = \overline{\overline{g}}_\alpha$ y $q = \overline{\overline{q}}_\alpha$, se considera $v = u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)$, se le suma a ambos miembros el término

$$-a(u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)) - \langle \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)\rangle$$

y se usa la coercividad de la forma bilineal a_1, se tiene

$$\begin{aligned}\lambda_1||u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)||^2_V \leqslant{}& (\overline{\overline{g}}_\alpha(t) - \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t))_H \\ & - (\overline{\overline{q}}_\alpha(t), u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t))_Q - a(u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)).\end{aligned}$$

Si se denota con $z_\alpha = u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$, y se integra la desigualdad anterior entre 0 y T, se logra

$$\lambda_1||z_\alpha||^2_{L^2(V)} \leqslant \int_0^T \left[(\overline{\overline{g}}_\alpha(t) - \dot{u}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), z_\alpha(t))_H - (\overline{\overline{q}}_\alpha(t), z_\alpha(t))_Q - a(u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), z_\alpha(t)) \right] dt.$$

Dado que $z_\alpha \rightharpoonup 0$ débilmente en $L^2(V)$, $\overline{\overline{q}}_\alpha \to \overline{\overline{q}}$ fuertemente en $\mathcal{Q}$ y $\overline{\overline{g}}_\alpha \to \overline{\overline{g}}$ fuertemente en $\mathcal{H}$ cuando $\alpha \to \infty$, por Proposición A.2.7 del Apéndice y siguiendo [2], se obtiene que

$$\lim_{\alpha\to\infty} ||z_\alpha||^2_{L^2(V)} = 0,$$

con lo cual queda demostrado que $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha} \to u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}$ fuertemente en $L^2(V)$ cuando $\alpha \to \infty$.

Ahora, si a la ecuación variacional (3.3) para $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ se le resta la ecuación variacional (3.4) para $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ y se considera $v \in V_0$, se consigue

$$(\dot{z}_\alpha(t), v)_H + a(z_\alpha(t), v) = (\overline{\overline{g}}_\alpha(t) - \overline{\overline{g}}(t), v)_H + (\overline{\overline{q}}(t) - \overline{\overline{q}}_\alpha(t), v)_Q, \quad \forall v \in V_0.$$

Luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$|(\dot{z}_\alpha(t), v)_H| \leqslant ||z_\alpha(t)||_{V_0}||v||_{V_0} + D_5||\overline{\overline{g}}_\alpha(t) - \overline{\overline{g}}(t)||_H||v||_{V_0} + D_6||\overline{\overline{q}}(t) - \overline{\overline{q}}_\alpha(t)||_Q||v||_{V_0},$$

donde D_5 surge de aplicar equivalencia entre las normas definidas en V y en V_0, y D_6 se obtiene de aplicar el teorema de trazas y equivalencia de normas.
Tomando supremo sobre $\{v \in V_0 : ||v||_{V_0} \leqslant 1\}$ e integrando entre 0 y T se obtiene

$$||\dot{z}_\alpha||^2_{L^2(V_0')} \leqslant 3||z_\alpha||^2_{L^2(V)} + 3D_5^2||\overline{\overline{g}}_\alpha - \overline{\overline{g}}||^2_{\mathcal{H}} + 3D_6^2||\overline{\overline{q}} - \overline{\overline{q}}_\alpha||^2_{\mathcal{Q}}.$$

Luego, de las convergencias fuertes demostradas anteriormente se deduce la convergencia fuerte de la derivada.
Finalmente, de manera similar al Teorema 2.5.1, se prueba que $(p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}, \dot{p}_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}) \to (p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}})$ fuertemente en $L^2(V) \times L^2(V_0')$ cuando $\alpha \to \infty$. Esto completa la prueba.

$\square$

Capítulo 4

Estimaciones para Controles Óptimos

En este capítulo se obtienen estimaciones entre las soluciones de los problemas de control óptimo distribuido estudiados en [10] y las soluciones de los problemas de control óptimo frontera desarrollados en el capítulo 2 con las soluciones de los problemas de control óptimo simultáneo distribuido-frontera estudiados en el capítulo 3, para el problema P y el problema P_α (para cada $\alpha > 0$) respectivamente. Además, se da una caracterización de las soluciones de los problemas de control óptimo simultáneo (3.7) y (3.8) usando teoremas de punto fijo.

4.1. Estimaciones con respecto al problema P

Se considera el problema de control óptimo distribuido:

$$\text{hallar} \quad \overline{g} \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad J_3(\overline{g}) = \min_{g \in \mathcal{H}} J_3(g) \qquad \text{para} \quad q \in \mathcal{Q} \quad \text{fijo,} \tag{4.1}$$

y el problema de control óptimo frontera:

$$\text{hallar} \quad \overline{q} \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_4(\overline{q}) = \min_{q \in \mathcal{Q}} J_4(q) \qquad \text{para} \quad g \in \mathcal{H} \quad \text{fijo,} \tag{4.2}$$

donde J_3 es el funcional costo definido en [10] más la constante $\frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}}$, y J_4 es el funcional dado en (2.6) más la constante $\frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}}$, es decir, $J_3 : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_4 : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$

están dados por:

$$J_3(g) = \frac{1}{2}||u_g - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \qquad (q \in \mathcal{Q} \quad \text{fijo}),$$

$$J_4(q) = \frac{1}{2}||u_q - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_1}{2}||g||^2_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{2}||q||^2_{\mathcal{Q}} \qquad (g \in \mathcal{H} \quad \text{fijo}),$$

donde u_g y u_q son las únicas soluciones del problema (2.1) para q y g fijos, respectivamente.

Observación 4.1.1. El funcional J_2 definido en el capítulo 3, y los funcionales J_3, J_4 dados anteriormente, satisfacen las siguientes estimaciones elementales:

$$J_2(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \leqslant J_3(\overline{g}), \quad \forall q \in \mathcal{Q} \qquad \text{y} \qquad J_2(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \leqslant J_4(\overline{q}), \quad \forall g \in \mathcal{H}.$$

En el siguiente teorema se obtienen estimaciones entre la solución del problema de control óptimo distribuido (4.1) y la primer componente de la solución del problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera (3.7), y entre la solución del problema de control óptimo frontera (4.2) con la segunda componente de la solución del problema (3.7).

Teorema 4.1.2. Si $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ es la única solución del problema de control óptimo distribuido-frontera (3.7), $\overline{g}$ y $\overline{q}$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo (4.1) y (4.2) para q y g fijos respectivamente, entonces:

$$||\overline{q} - \overline{\overline{q}}||_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{||\gamma_0||}{C\lambda_0 M_2}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - u_{g\overline{q}}||_{\mathcal{H}} \tag{4.3}$$

$$||\overline{g} - \overline{\overline{g}}||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{C\lambda_0 M_1}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - u_{\overline{g}q}||_{\mathcal{H}}, \tag{4.4}$$

donde γ_0 es el operador traza, λ_0 es la constante de coercividad de a y C es una constante que surge de aplicar equivalencia entre las normas definidas en V y V_0.

Demostración. De la condición de optimalidad para $\overline{q}$ dada en el Lema 2.2.2 se tiene

$$(M_2\overline{q} - p_{g\overline{q}}, \eta)_{\mathcal{Q}} = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{Q},$$

tomando $\eta = \overline{\overline{q}} - \overline{q}$ se logra

$$(M_2\overline{q} - p_{g\overline{q}}, \overline{\overline{q}} - \overline{q})_{\mathcal{Q}} = 0. \tag{4.5}$$

Por otro lado, si se toma $h = 0 \in \mathcal{H}$ en la condición de optimalidad para $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ dada en el Lema 3.2.2 se tiene

$$(M_2\overline{\overline{q}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \eta)_{\mathcal{Q}} = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{Q},$$

luego, tomando $\eta = \overline{q} - \overline{\overline{q}}$, se obtiene

$$(M_2\overline{\overline{q}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{q} - \overline{\overline{q}})_{\mathcal{Q}} = 0,$$

o equivalentemente

$$(-M_2\overline{\overline{q}} + p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{q}} - \overline{q})_{\mathcal{Q}} = 0. \tag{4.6}$$

Sumando las expresiones (4.5) y (4.6) se tiene

$$\big(M_2(\overline{q} - \overline{\overline{q}}) + (p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}), \overline{\overline{q}} - \overline{q}\big)_{\mathcal{Q}} = 0,$$

y por lo tanto $M_2||\overline{\overline{q}} - \overline{q}||^2_{\mathcal{Q}} = \big(p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}, \overline{\overline{q}} - \overline{q}\big)_{\mathcal{Q}}$.
Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el teorema de trazas, se logra

$$\begin{aligned} ||\overline{\overline{q}} - \overline{q}||^2_{\mathcal{Q}} &\leqslant \frac{1}{M_2}\left|\big(p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}, \overline{\overline{q}} - \overline{q}\big)_{\mathcal{Q}}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{M_2}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}||_{\mathcal{Q}}||\overline{\overline{q}} - \overline{q}||_{\mathcal{Q}} \\ &\leqslant \frac{||\gamma_0||}{M_2}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}||_{L^2(V)}||\overline{\overline{q}} - \overline{q}||_{\mathcal{Q}}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$||\overline{\overline{q}} - \overline{q}||_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{||\gamma_0||}{M_2}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}||_{L^2(V)}.$$

Además, si se prueba que

$$||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - u_{g\overline{q}}||_{\mathcal{H}}$$

queda demostrada la estimación (4.3). En efecto, de la ecuación variacional (3.15) para $g = \overline{\overline{g}}$ y $q = \overline{\overline{q}}$ se tiene

$$-\langle \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), v\rangle + a(p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t), v) = (u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0,$$

y para g fijo y $q = \overline{q}$ se tiene

$$-\langle \dot{p}_{g\overline{q}}(t), v\rangle + a(p_{g\overline{q}}(t), v) = (u_{g\overline{q}}(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0.$$

Restando estas ecuaciones se logra

$$-\langle \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - \dot{p}_{g\overline{q}}(t), v\rangle + a(p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t), v) = (u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0.$$

Reemplazando $v = p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t) \in V_0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&- \langle \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - \dot{p}_{g\overline{q}}(t), p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)\rangle + a(p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t), p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)) \\
= &\ (u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t), p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t))_H.
\end{aligned}$$

Luego, usando que

$$2\langle \dot{p}_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - \dot{p}_{g\overline{q}}(t), p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)\rangle = \frac{d}{dt}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_H^2,$$

la coercividad de la forma bilineal a y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se consigue

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_H^2 + \lambda_0||\nabla\left(p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)\right)||_H^2 \\
\leqslant &\ (u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t), p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t))_H \\
\leqslant &\ ||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t)||_H||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_H.
\end{aligned}$$

Por equivalencia entre las normas definidas en V y V_0 se logra

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_H^2 + C\lambda_0||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_V^2 \\
\leqslant &\ ||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t)||_H||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_V,
\end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy para $\epsilon = C\lambda_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_H^2 + C\lambda_0||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_V^2 \\
\leqslant &\ \frac{1}{2C\lambda_0}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t)||_H^2 + \frac{C\lambda_0}{2}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_V^2.
\end{aligned}$$

Así,

$$- \frac{d}{dt}||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_H^2 + C\lambda_0||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{g\overline{q}}(t)||_V^2 \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{g\overline{q}}(t)||_H^2.$$

Integrando la expresión anterior entre 0 y T, y usando que $p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(T) = p_{g\overline{q}}(T) = 0$, se deduce

$$||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(0) - p_{g\overline{q}}(0)||_H^2 + C\lambda_0||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}||_{L^2(V)}^2 \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - u_{g\overline{q}}||_{\mathcal{H}}^2,$$

entonces

$$||p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - p_{g\overline{q}}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}} - u_{g\overline{q}}||_{\mathcal{H}}.$$

De manera análoga, utilizando la condición de optimalidad dada en [10] para el problema de control óptimo distribuido, se prueba la estimación (4.4). $\square$

Corolario 4.1.3. Si $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ es la única solución del problema de control óptimo simultáneo (3.7), $\overline{g}$ es la única solución del problema (4.1) para q fijo ($q = \overline{\overline{q}}$), y $\overline{q}$ es la única solución del problema (4.2) para g fijo ($g = \overline{\overline{g}}$) entonces $\overline{g} = \overline{\overline{g}}$ y $\overline{q} = \overline{\overline{q}}$.

Demostración. Si en la condición de optimalidad para el problema de control distribuido, dada en [10]

$$\left(M_1\overline{g} + p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}, h\right)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

se toma $h = \overline{\overline{g}} - \overline{g}$ se tiene:

$$\left(M_1\overline{g} + p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}} = 0. \tag{4.7}$$

Por otro lado, si en la condición de optimalidad dada en el Lema 3.2.2

$$\left(M_1\overline{\overline{g}} + p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, h\right)_{\mathcal{H}} + \left(M_2\overline{\overline{q}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \eta\right)_{\mathcal{Q}} = 0 \quad \forall (h,\eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q},$$

se toma $h = \overline{\overline{g}} - \overline{g}$ y $\eta = 0$ se obtiene:

$$\left(M_1\overline{\overline{g}} + p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}}. \tag{4.8}$$

Restando las ecuaciones (4.7) y (4.8), se deduce

$$\left(M_1\overline{g} + p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}} - M_1\overline{\overline{g}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}} = 0,$$

y por lo tanto

$$\left(p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}} - M_1\left(\overline{\overline{g}} - \overline{g}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}} = 0. \tag{4.9}$$

En lo que sigue se demuestra que

$$\left(p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}} = -||u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}} - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||^2_{\mathcal{H}}. \tag{4.10}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\left(p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}} - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}, \overline{\overline{g}} - \overline{g}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left(p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t)\right) - \Delta\left(u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t)\right)\right) dxdt.
\end{aligned}$$

Denotando por $p(t) = p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t)$, $u(t) = u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t)$ y aplicando el Teorema de Green, la expresión anterior resulta ser

$$\int_0^T \int_\Omega p(t) \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \Delta u(t) \right) dx dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega p(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t} dx dt + \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla p(t) \nabla u(t) dx - \int_{\Gamma_1} p(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} d\gamma - \int_{\Gamma_2} p(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} d\gamma \right) dt.$$

Dado que $p(t)\big|_{\Gamma_1} = 0$ pues $p(t) \in V_0$, $\frac{\partial u(t)}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = 0$, y aplicando nuevamente la Fórmula de Green, se obtiene

$$\int_0^T \int_\Omega p(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p(t) \nabla u(t) dx dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega p(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t} dx dt + \int_0^T \left(- \int_\Omega \Delta p(t)\, u(t) dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p(t)}{\partial n} u(t) d\gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p(t)}{\partial n} u(t) d\gamma \right) dt.$$

Dado que $u(t)\big|_{\Gamma_1} = 0$ pues $u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) = u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) = b$ sobre Γ_1, $\frac{\partial p(t)}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = 0$ y la fórmula de integración por partes se deduce

$$\int_0^T \int_\Omega p(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t} dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta p(t)\, u(t) dx dt$$

$$= \int_\Omega \left(p(t) u(t) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial p(t)}{\partial t} u(t) dt \right) dx - \int_0^T \int_\Omega \Delta p(t)\, u(t) dx dt.$$

Puesto que $p(T) = u(0) = 0$, se tiene

$$- \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p(t)}{\partial t} u(t) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta p(t)\, u(t) dx dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \left(- \frac{\partial}{\partial t} \left(p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) \right) - \Delta \left(p_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) \right) \right) u(t) dx dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \left(u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - z_d(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) + z_d(t) \right) u(t) dx dt$$

$$= - \int_0^T \int_\Omega \left(u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) \right) \left(u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}}(t) - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}(t) \right) dx dt$$

$$= -||u_{\overline{g}\,\overline{\overline{q}}} - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||^2_{\mathcal{H}}$$

De esta forma queda demostrada la igualdad (4.10). Luego, de (4.9) y (4.10) se tiene

$$-||u_{\overline{g}\,\overline{q}} - u_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}||^2_{\mathcal{H}} = M_1||\overline{\overline{g}} - \overline{g}||^2_{\mathcal{H}},$$

y dado que M_1 es una constante positiva se deduce que $||\overline{\overline{g}} - \overline{g}||^2_{\mathcal{H}} = 0$, y por lo tanto queda demostrado que $\overline{g} = \overline{\overline{g}}$.
De manera análoga se prueba que $\overline{q} = \overline{\overline{q}}$. $\square$

En lo que sigue se dará una caracterización de la solución del problema de control óptimo distribuido-frontera (3.7) usando la teoría de punto fijo. Para ello se introduce el operador $W : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, definido por

$$W(g, q) = \left(-\frac{1}{M_1}p_{gq}, \frac{1}{M_2}p_{gq}\right).$$

Teorema 4.1.4. Existe una constante positiva $C_0 = C_0(\lambda_0, \gamma_0, M_1, M_2, C)$ tal que, $\forall (g_1, q_1), (g_2, q_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$:

$$||W(g_2, q_2) - W(g_1, q_1)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}} \leqslant C_0||(g_2, q_2) - (g_1, q_1)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}},$$

y el operador W es una contracción si y sólo si los datos satisfacen la siguiente condición:

$$C_0 = \frac{2}{C^2\lambda_0^2}\sqrt{\frac{1}{M_1^2} + \frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}}\,(1 + ||\gamma_0||) < 1. \tag{4.11}$$

Demostración. En primer lugar se demuestran las siguientes estimaciones:
$\forall (g_1, q_1),\ (g_2, q_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$:

$$||u_{g_1q_1} - u_{g_2q_2}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{C\lambda_0}\left(||g_2 - g_1||_{\mathcal{H}} + ||\gamma_0||\,||q_2 - q_1||_{\mathcal{Q}}\right), \tag{4.12}$$

$$||p_{g_1q_1} - p_{g_2q_2}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{g_1q_1} - u_{g_2q_2}||_{\mathcal{H}}. \tag{4.13}$$

En efecto, para demostrar la estimación (4.12) se considera la ecuación variacional (3.3) para $g = g_1$ y $q = q_1$

$$\langle \dot{u}_{g_1q_1}(t), v\rangle + a(u_{g_1q_1}(t), v) = L_{g_1q_1}(t, v), \quad \forall v \in V_0,$$

y para $g = g_2$ y $q = q_2$

$$\langle \dot{u}_{g_2q_2}(t), v\rangle + a(u_{g_2q_2}(t), v) = L_{g_2q_2}(t, v), \quad \forall v \in V_0.$$

Restando estas expresiones se logra

$$\langle \dot{u}_{g_1q_1}(t) - \dot{u}_{g_2q_2}(t), v\rangle + a(u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t), v) = L_{g_1q_1}(t,v) - L_{g_2q_2}(t,v)$$
$$= (g_1(t) - g_2(t), v)_H - (q_1(t) - q_2(t), v)_Q, \qquad \forall v \in V_0.$$

Tomando $v = u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t) \in V_0$ y usando la coercividad de la forma bilineal a se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_H^2 + C\lambda_0||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_V^2\\
&\leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_H^2 + \lambda_0||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_{V_0}^2\\
&\leqslant |(g_1(t) - g_2(t), u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t))_H| + |(q_1(t) - q_2(t), u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t))_Q|\\
&\leqslant ||g_1(t) - g_2(t)||_H||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_H + ||q_1(t) - q_2(t)||_Q||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_Q\\
&\leqslant ||g_1(t) - g_2(t)||_H||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_V + ||\gamma_0||\,||q_1(t) - q_2(t)||_Q||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_V\\
&= ||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_V\left(||g_1(t) - g_2(t)||_H + ||\gamma_0||\,||q_1(t) - q_2(t)||_Q\right),
\end{aligned}$$

donde C es una constante que surge de aplicar equivalencia entre las normas en V y V_0. Por la desigualdad de Cauchy para $\epsilon = \frac{1}{C\lambda_0}$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_H^2 + C\lambda_0||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_V^2\\
&\leqslant \frac{1}{C\lambda_0}\left(||g_1(t) - g_2(t)||_H + ||\gamma_0||\,||q_1(t) - q_2(t)||_Q\right)^2\\
&\leqslant \frac{2}{C\lambda_0}\left(||g_1(t) - g_2(t)||_H^2 + ||\gamma_0||^2||q_1(t) - q_2(t)||_Q^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando entre 0 y T, y usando que $||u_{g_1q_1}(T) - u_{g_2q_2}(T)||_H^2 \geqslant 0$, se deduce

$$||u_{g_1q_1} - u_{g_2q_2}||_{L^2(V)}^2 \leqslant \frac{2}{C^2\lambda_0^2}\left(||g_1 - g_2||_{\mathcal{H}}^2 + ||\gamma_0||^2||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}^2\right).$$

Luego, usando la siguiente desigualdad de números $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a + b \quad \forall a, b \geqslant 0$, se logra

$$\begin{aligned}
||u_{g_1q_1} - u_{g_2q_2}||_{L^2(V)} &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{C\lambda_0}\sqrt{||g_1 - g_2||_{\mathcal{H}}^2 + ||\gamma_0||^2||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}^2}\\
&\leqslant \frac{\sqrt{2}}{C\lambda_0}\left(||g_1 - g_2||_{\mathcal{H}} + ||\gamma_0||\,||q_1 - q_2||_{\mathcal{Q}}\right).
\end{aligned}$$

Para demostrar la estimación (4.13), se considera la ecuación variacional (3.15) para $g = g_1$ y $q = q_1$, y para $g = g_2$ y $q = q_2$. Así, se tiene

$$-\langle \dot{p}_{g_1q_1}(t), v\rangle + a(p_{g_1q_1}(t), v) = (u_{g_1q_1}(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0,$$

$$-\langle \dot{p}_{g_2q_2}(t), v\rangle + a(p_{g_2q_2}(t), v) = (u_{g_2q_2}(t) - z_d(t), v)_H, \quad \forall v \in V_0.$$

Restando estas ecuaciones y reemplazando $v = p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t) \in V_0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&- \langle \dot{p}_{g_1q_1}(t) - \dot{p}_{g_2q_2}(t), p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)\rangle + a(p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t), p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)) \\
&= (u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t), p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t))_H.
\end{aligned}$$

Luego, se deduce

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)||_H^2 + C\lambda_0||p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)||_V^2 \\
&\leqslant -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)||_H^2 + \lambda_0||\nabla\left(p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)\right)||_H^2 \\
&\leqslant (u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t), p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t))_H \\
&\leqslant ||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_H||p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)||_H,
\end{aligned}$$

donde C es una constante que surge de la equivalencia de las normas.
De la desigualdad de Cauchy para $\epsilon = C\lambda_0$ se tiene

$$-\frac{d}{dt}||p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)||_H^2 + C\lambda_0||p_{g_1q_1}(t) - p_{g_2q_2}(t)||_V^2 \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{g_1q_1}(t) - u_{g_2q_2}(t)||_H^2.$$

Integrando la expresión anterior entre 0 y T, y usando que $||p_{g_1q_1}(0) - p_{g_2q_2}(0)||_H^2 \geqslant 0$, se deduce

$$||p_{g_1q_1} - p_{g_2q_2}||_{L^2(V)} \leqslant \frac{1}{C\lambda_0}||u_{g_1q_1} - u_{g_2q_2}||_{\mathcal{H}}.$$

Por último, usando las estimaciones (4.12) y (4.13) y el teorema de trazas, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&||W(g_2,q_2)-W(g_1,q_1)||^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}\\
&=\left|\left|\left(-\frac{1}{M_1}p_{g_2q_2},\frac{1}{M_2}p_{g_2q_2}\right)-\left(-\frac{1}{M_1}p_{g_1q_1},\frac{1}{M_2}p_{g_1q_1}\right)\right|\right|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}\\
&=\left|\left|\left(\frac{1}{M_1}\left(p_{g_1q_1}-p_{g_2q_2}\right),-\frac{1}{M_2}\left(p_{g_1q_1}-p_{g_2q_2}\right)\right)\right|\right|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}\\
&=\frac{1}{M_1^2}||p_{g_1q_1}-p_{g_2q_2}||^2_{\mathcal{H}}+\frac{1}{M_2^2}||p_{g_1q_1}-p_{g_2q_2}||^2_{\mathcal{Q}}\\
&\leqslant\frac{1}{M_1^2}||p_{g_1q_1}-p_{g_2q_2}||^2_{L^2(V)}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}||p_{g_1q_1}-p_{g_2q_2}||^2_{L^2(V)}\\
&\leqslant\left(\frac{1}{M_1^2}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}\right)\frac{1}{C^2\lambda_0^2}||u_{g_1q_1}-u_{g_2q_2}||^2_{\mathcal{H}}\\
&\leqslant\left(\frac{1}{M_1^2}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}\right)\frac{1}{C^2\lambda_0^2}||u_{g_1q_1}-u_{g_2q_2}||^2_{L^2(V)}\\
&\leqslant\left(\frac{1}{M_1^2}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}\right)\frac{2}{C^4\lambda_0^4}\left(||g_2-g_1||_{\mathcal{H}}+||\gamma_0||\,||q_2-q_1||_{\mathcal{Q}}\right)^2\\
&\leqslant\left(\frac{1}{M_1^2}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}\right)\frac{2}{C^4\lambda_0^4}\left((1+||\gamma_0||)||g_2-g_1||_{\mathcal{H}}+(1+||\gamma_0||)\,||q_2-q_1||_{\mathcal{Q}}\right)^2\\
&\leqslant\left(\frac{1}{M_1^2}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}\right)\frac{4}{C^4\lambda_0^4}(1+||\gamma_0||)^2\left(||g_2-g_1||^2_{\mathcal{H}}+||q_2-q_1||^2_{\mathcal{Q}}\right).
\end{aligned}
$$

Así, queda demostrado que

$$||W(g_2,q_2)-W(g_1,q_1)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}}\leqslant\frac{2}{C^2\lambda_0^2}\sqrt{\frac{1}{M_1^2}+\frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}}\,(1+||\gamma_0||)\,||(g_2,q_2)-(g_1,q_1)||_{\mathcal{H}\times\mathcal{Q}},$$

y el operador W es una contracción si y sólo si satisface (4.11) □

Corolario 4.1.5. Si los datos satisfacen la desigualdad $C_0<1$, entonces la única solución $(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$ del problema de control óptimo distribuido-frontera (3.7) se puede obtener como el único punto fijo del operador W, esto es:

$$W(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}})=\left(-\frac{1}{M_1}p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}},\frac{1}{M_2}p_{\overline{\overline{g}}\,\overline{\overline{q}}}\right)=(\overline{\overline{g}},\overline{\overline{q}}).$$

Demostración. Cuando $C_0<1$, el operador W es una contracción definida sobre $\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$, luego por el Teorema de punto fijo A.2.2 existe un único elemento $(g^*,q^*)\in\mathcal{H}\times\mathcal{Q}$ que satisface

$$W(g^*,q^*)=\left(-\frac{1}{M_1}p_{g^*q^*},\frac{1}{M_2}p_{g^*q^*}\right)=(g^*,q^*),$$

o equivalentemente

$$(M_1 g^* + p_{g^*q^*}, M_2 q^* - p_{g^*q^*}) = (0, 0).$$

Así, (g^*, q^*) verifica la condición de optimalidad dada en el Lema 3.2.2, y por lo tanto el único punto fijo de W es la solución del problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$. $\square$

4.2. Estimaciones con respecto al problema P_α

Para cada $\alpha > 0$, se consideran los siguientes problemas de control óptimo:

$$\text{hallar} \quad \overline{g}_\alpha \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad J_{3\alpha}(\overline{g}_\alpha) = \min_{g \in \mathcal{H}} J_{3\alpha}(g), \tag{4.14}$$

$$\text{hallar} \quad \overline{q}_\alpha \in \mathcal{Q} \quad \text{tal que} \quad J_{4\alpha}(\overline{q}_\alpha) = \min_{q \in \mathcal{Q}} J_{4\alpha}(q), \tag{4.15}$$

donde $J_{3\alpha} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{4\alpha} : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ vienen dados por:

$$J_{3\alpha}(g) = \frac{1}{2}||u_{\alpha g} - z_d||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_1}{2}||g||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \qquad (q \in \mathcal{Q} \quad \text{fijo}),$$

$$J_{4\alpha}(q) = \frac{1}{2}||u_{\alpha q} - z_d||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_1}{2}||g||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M_2}{2}||q||_{\mathcal{Q}}^2 \qquad (g \in \mathcal{H} \quad \text{fijo}),$$

es decir, $J_{3\alpha}$ es el funcional costo dado en [10] más la constante $\frac{M_2}{2}||q||_{\mathcal{Q}}^2$, y $J_{4\alpha}$ es el funcional (2.7) más la constante $\frac{M_1}{2}||g||_{\mathcal{H}}^2$, y $u_{\alpha g}$ y $u_{\alpha q}$ son las únicas soluciones del problema (2.2) para q y g fijos, respectivamente.

Observación 4.2.1. El funcional $J_{2\alpha}$ definido en el capítulo 3 y los funcionales $J_{3\alpha}$ y $J_{4\alpha}$ dados anteriormente satisfacen las siguientes estimaciones:

$$J_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \leqslant J_{3\alpha}(\overline{g}_\alpha), \quad \forall q \in \mathcal{Q} \qquad \text{y} \qquad J_{2\alpha}(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \leqslant J_{4\alpha}(\overline{q}_\alpha), \quad \forall g \in \mathcal{H}.$$

Estimaciones entre la solución del problema de control óptimo distribuido (4.14) con la primer componente de la solución del problema de control óptimo simultáneo distribuido-frontera (3.8), y entre la solución del problema de control óptimo frontera (4.15) con la segunda componente de la solución del problema (3.8), son dadas en el siguiente teorema cuya prueba es omitida por su similitud a la demostración dada en el Teorema 4.1.2.

Teorema 4.2.2. Si $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ es la única solución del problema de control óptimo distribuido-frontera (3.8), $\overline{g}_\alpha$ y $\overline{q}_\alpha$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo (4.14) y (4.15) para q y g fijos respectivamente, entonces:

$$||\overline{q}_\alpha - \overline{\overline{q}}_\alpha||_{\mathcal{Q}} \leqslant \frac{||\gamma_0||}{\lambda_\alpha M_2} ||u_{\alpha \overline{\overline{g}}_\alpha \overline{\overline{q}}_\alpha} - u_{\alpha g \overline{q}_\alpha}||_{\mathcal{H}}$$

$$||\overline{g}_\alpha - \overline{\overline{g}}_\alpha||_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{\lambda_\alpha M_1} ||u_{\alpha \overline{\overline{g}}_\alpha \overline{\overline{q}}_\alpha} - u_{\alpha \overline{g}_\alpha q}||_{\mathcal{H}}.$$

Corolario 4.2.3. Si $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ es la única solución del problema de control óptimo simultáneo (3.8), $\overline{g}_\alpha$ es la única solución del problema (4.14) para q fijo ($q = \overline{\overline{q}}_\alpha$), y $\overline{q}_\alpha$ es la única solución del problema (4.15) para g fijo ($g = \overline{\overline{g}}_\alpha$) entonces $\overline{g}_\alpha = \overline{\overline{g}}_\alpha$ y $\overline{q}_\alpha = \overline{\overline{q}}_\alpha$.

En forma similar al Teorema 4.1.4, ahora se da una caracterización de la solución del problema de control óptimo distribuido-frontera (3.8) mostrando que el operador W_α, que se define a continuación, es una contracción. Dicho resultado se presenta en el siguiente teorema cuya demostración se omite.

Sea el operador $W_\alpha : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, para cada $\alpha > 0$, definido por la expresión

$$W_\alpha(g, q) = \left(-\frac{1}{M_1} p_{\alpha g q}, \frac{1}{M_2} p_{\alpha g q} \right).$$

Teorema 4.2.4. W_α es un operador Lipschitz sobre $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}$, esto es, existe una constante positiva $C_{0\alpha} = C_{0\alpha}(\lambda_\alpha, \gamma_0, M_1, M_2)$, tal que:
$\forall (g_1, q_1), (g_2, q_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$:

$$||W_\alpha(g_2, q_2) - W_\alpha(g_1, q_1)||_{\mathcal{H} \times \mathcal{Q}} \leqslant C_{0\alpha} ||(g_2, q_2) - (g_1, q_1)||_{\mathcal{H} \times \mathcal{Q}}$$

y el operador W_α es una contracción si y sólo si los datos satisfacen la siguiente desigualdad:

$$C_{0\alpha} = \frac{2}{\lambda_\alpha^2} \sqrt{\frac{1}{M_1^2} + \frac{||\gamma_0||^2}{M_2^2}} (1 + ||\gamma_0||) < 1.$$

Corolario 4.2.5. Si los datos satisfacen la condición $C_{0\alpha} < 1$, entonces la única solución $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathcal{Q}$ del problema de control óptimo distribuido-frontera (3.8) se puede obtener como el único punto fijo del operador W_α, esto es:

$$W_\alpha(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha) = \left(-\frac{1}{M_1} p_{\alpha \overline{\overline{g}}_\alpha \overline{\overline{q}}_\alpha}, \frac{1}{M_2} p_{\alpha \overline{\overline{g}}_\alpha \overline{\overline{q}}_\alpha} \right) = (\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha).$$

Apéndice A

Apéndice

En este capítulo se exponen resultados teóricos de distintas áreas de la matemática, tales como análisis real, análisis funcional e inecuaciones variacionales, los cuales son fundamentales para el desarrollo de este trabajo de tesis.

A.1. Topología débil y débil estrella

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$ (espacio dual de E). Se define $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ a la aplicación dada por $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Cuando f recorre E' se obtiene una familia $(\phi_f)_{f \in E'}$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$.

Definición A.1.1. La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina que hace continuas todas las aplicaciones $(\phi_f)_{f \in E'}$.
Dada una sucesión $\{x_n\}$ en E, se designa con $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de x_n a x en la topología $\sigma(E, E')$.

Para cada $x \in E$ se considera la aplicación $\phi_x : E' \to \mathbb{R}$ definida por

$$f \mapsto \phi_x(f) = \langle f, x \rangle,$$

la cual resulta lineal y continua sobre E'. Cuando x recorre E se obtiene una familia de aplicaciones $(\phi_x)_{x \in E}$ de E' en $\mathbb{R}$.

Definición A.1.2. La topología débil estrella $\sigma(E', E)$ es la topología menos fina sobre E' que hace continuas todas las aplicaciones $(\phi_x)_{x \in E}$.

Dada una sucesión $\{f_n\}$ en E', se designa con $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergencia de f_n a f en la topología $\sigma(E', E)$.

Las demostraciones de los resultados que se dan a continuación se pueden ver en [3].

Proposición A.1.3.

a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en E. Se tiene

   i) $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E')$ si y sólo si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $f \in E'$.

   ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E')$ y $f_n \to f$ fuertemente en E' entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

b) Sea $\{f_n\}$ una sucesión en E'. Se tiene

   i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E', E)$ si y sólo si $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ para todo $x \in E$.

   ii) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E', E)$ y $x_n \to x$ fuertemente en E entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Teorema A.1.4. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge en la topología $\sigma(E, E')$.

Teorema A.1.5. Sea E un espacio de Banach separable y sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en E'. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge en la topología $\sigma(E', E)$.

Teorema A.1.6. Sea $\phi : E \to (-\infty, \infty)$ una función convexa, s.c.i (para la topología fuerte). Entonces ϕ es s.c.i para la topología débil $\sigma(E, E')$.
En particular, si $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E')$, entonces

$$\phi(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \phi(x_n).$$

A.2. Propiedades

A.2.1. Teoremas Importantes

Teorema A.2.1. (Hahn-Banach) Sea G un subespacio vectorial del espacio de Banach E y sea $g : G \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua de norma

$$||g||_{G'} = \sup_{x\in G, ||x||\leq 1} g(x).$$

Entonces existe $f \in E'$ que extiende a g y tal que $||f||_{E'} = ||g||_{G'}$.

Demostración. Para la prueba, ver [3] □

Teorema A.2.2. (Teorema de punto fijo) Si V es un espacio métrico completo con distancia d, $T : V \to V$ es una contracción, es decir

$$\text{existe } 0 < k < 1 \text{ tal que } d(T(x), T(y)) \leqslant kd(x, y), \quad \forall x, y \in V,$$

entonces existe un único $x \in V$ tal que $T(x) = x$.

Demostración. Para la prueba, ver [15]. □

Teorema A.2.3. (Representación de Riesz-Fréchet) Sea H un espacio de Hilbert real, con producto interno $(\cdot, \cdot)$. Dada $\phi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que

$$\langle \phi, v \rangle = (f, v) \qquad \forall v \in H.$$

Además se verifica $||f|| = ||\phi||_{H'}$

Demostración. Ver [3]. □

En lo que sigue se enuncia el Teorema de Diferenciación de Lebesgue.

Definición A.2.4. Sea f una función localmente integrable sobre cualquier cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Se define el promedio de f sobre Q por medio de la fórmula

$$f_Q = \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(x)dx.$$

Teorema A.2.5. (Diferenciación de Lebesgue) Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces los promedios

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)|dy$$

tienden a cero cuando $Q \to x$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

El límite anterior se toma sobre la familia de los cubos Q que contienen al punto x cuando $m(Q) \to 0$.

Demostración. Para la prueba, ver [5]. □

A.2.2. Convergencia en espacios de Hilbert

Proposición A.2.6. Sea H un espacio de Hilbert y sea la sucesión $\{u_n\}$ y $u \in H$. Cuando $n \to \infty$, se tiene:

a) Si $\|u_n - u\|_H \to 0$, entonces $\|u_n\|_H \to \|u\|_H$.

b) Si $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en H y $\|u_n\|_H \to \|u\|_H$ entonces $\|u_n - u\|_H \to 0$.

Demostración. a) Por la regla del paralelogramo se sabe que

$$||u_n - u||_H^2 + ||u_n + u||_H^2 = 2||u_n||_H^2 + 2||u||_H^2.$$

Luego, para $n \to \infty$, dado que $||u_n - u||_H \to 0$, se tiene

$$2||u_n||_H^2 + 2||u||_H^2 - ||u_n + u||_H^2 \to 0$$

entonces

$$2||u_n||_H^2 + 2||u||_H^2 - \left(||u_n||_H^2 + 2(u_n, u)_H + ||u||_H^2\right) \to 0$$

por lo tanto

$$||u_n||_H^2 + ||u||_H^2 - 2(u_n, u)_H \to 0.$$

Aquí, del hecho que convergencia fuerte implica convergencia débil, se tiene que $(u_n, u)_H \to (u, u)_H$. Así, se logra

$$||u_n||_H^2 + ||u||_H^2 - 2||u||_H^2 \to 0$$

es decir

$$||u_n||_H \to ||u||_H.$$

b) La prueba es inmediata.

□

Proposición A.2.7. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_H$ y sean $\{g_n\}$ y $\{q_n\}$ tales que, para $n \to \infty$, $g_n \to g$ fuertemente en H y $q_n \rightharpoonup q$ débilmente en H, entonces $(g_n, q_n)_H \to (g, q)_H$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}|(g_n,q_n)_H-(g,q)_H| &= |(g_n,q_n)_H-(g_n,q)_H-(g,q)_H+(g_n,q)_H|\\ &\leqslant |(g_n,q_n)_H-(g_n,q)_H|+|(g,q)_H+(g_n,q)_H|\\ &= |(g_n,q_n-q)_H|+|(g-g_n,q)_H|\\ &\leqslant |(g_n,q_n-q)_H|+||g-g_n||_H||q||_H\to 0,\end{aligned}$$

ya que por hipótesis $||g-g_n||_H\to 0$ y $(g_n,q_n-q)_H\to 0$, cuando $n\to\infty$. □

Lema A.2.8. Si a es una forma bilineal continua y semidefinida positiva en un espacio de Hilbert X, entonces

$$v\in X\to a(v,v)\in\mathbb{R}$$

es una aplicación semicontinua inferiormente en X débil, es decir

$$v_n\rightharpoonup v \text{ en } X \text{ débil} \quad \Rightarrow a(v,v)\leqslant \liminf_{n\to\infty} a(v_n,v_n).$$

Demostración. Para la prueba, ver [15]. □

Proposición A.2.9. La aplicación

$$v\in L^2(0,T;V)\to\int_0^T\left(\int_{\Gamma_1}(v(t))^2d\gamma\right)dt\in\mathbb{R}$$

es semicontinua inferiormente en $L^2(0,T;V)$ débil, es decir

$$\text{si } v_n\rightharpoonup v \text{ en } L^2(0,T;V) \text{ para } n\to\infty \;\Rightarrow\int_0^T\left(\int_{\Gamma_1}(v(t))^2d\gamma\right)dt\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_0^T\left(\int_{\Gamma_1}(v_n(t))^2d\gamma\right)dt.$$

Demostración. Para la prueba, se utiliza el Lema anterior. Para ello, se considera el espacio $X=L^2(0,T;V)$, el cual es un espacio de Hilbert y se define la aplicación

$$a(u,v)=\int_0^T\left(\int_{\Gamma_1}u(t)v(t)d\gamma\right)dt.$$

Se debe demostrar que a es una forma bilineal, continua y semidefinida positiva en $L^2(0,T;V)$. En efecto, claramente a es una forma bilineal por la linealidad de la integral. Además, a es semidefinida positiva, pues por propiedades de la integral se tiene

$$a(v,v)=\int_0^T\left(\int_{\Gamma_1}[v(t)]^2d\gamma\right)dt\geqslant 0\quad\forall v\in L^2(V).$$

Finalmente, a es continua, lo que resulta utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el teorema de trazas. Esto es,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_0^T \left(\int_{\Gamma_1} u(t)v(t)d\gamma \right) dt \right| = |(u,v)|_{L^2(L^2(\Gamma_1))} \\
&\leqslant ||u||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} ||v||_{L^2(L^2(\Gamma_1))} = \left(\int_0^T ||u||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T ||v||^2_{L^2(\Gamma_1)} dt \right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_0^T c^2 ||u||^2_V dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T c^2 ||v||^2_V dt \right)^{1/2} = c^2 ||u||_{L^2(V)} ||v||_{L^2(V)},
\end{aligned}$$

donde c es la constante que surge de aplicar el teorema de trazas.

Así, como la aplicación a cumple con las hipótesis del Lema A.2.8, queda probada la proposición. □

A.2.3. Minimización de funcionales

El siguiente lema resulta de gran utilidad ya que permite garantizar existencia y unicidad de la solución en los problemas de control óptimo.

Lema A.2.10. Sea X un espacio de Hilbert. Se considera el funcional J definido por

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v), \quad \forall v \in X,$$

donde a es una forma bilineal, continua y coerciva sobre X y L es una forma lineal y continua sobre X. Si K es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de X, entonces existe un único $u \in K$ que minimiza J en K.

Demostración. Ver [15]. □

A.3. Desigualdades Elementales

Proposición A.3.1. (Desigualdad de Cauchy)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Demostración. Esto resulta teniendo en cuenta que $0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. $\square$

Proposición A.3.2. (Desigualdad de Cauchy con ε)

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2} \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Ver [4]. $\square$

Proposición A.3.3. Sea H un espacio vectorial real. Si $(\cdot, \cdot)$ es un producto interno, la norma asociada es

$$||u|| := (u, u)^{1/2} \qquad u \in H.$$

La **desigualdad de Cauchy- Schwarz** establece

$$|(u, v)| \leqslant ||u|| \, ||v|| \qquad u, v \in H.$$

Demostración. Ver [4]. $\square$

Proposición A.3.4. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, se cumple que

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}$$

Demostración. De la desigualdad $2(ab)(cd) \leqslant (ad)^2 + (cb)^2$, se tiene que

$$(ab)^2 + (cd)^2 + 2abcd \leqslant (ab)^2 + (cd)^2 + (ad)^2 + (cb)^2$$

esto es

$$(ab + cd)^2 \leqslant \left(a^2 + c^2\right)\left(b^2 + d^2\right)$$

o equivalentemente $ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}$. $\square$

Conclusiones

El objetivo de esta tesis consistió en estudiar desde el punto de vista teórico los problemas de control óptimo vinculados a sistemas evolutivos de conducción del calor P y P_α (para cada $\alpha > 0$), que han sido presentados en la introducción. Más precisamente, en el capítulo 2, se formularon problemas de control óptimo *frontera* y se demostró existencia y unicidad de los controles óptimos $\overline{q}$ y $\overline{q}_\alpha$ (para cada $\alpha > 0$) relacionados a los problemas P y P_α, respectivamente, y se dieron condiciones de optimalidad de primer orden. Además, se probó que los controles óptimos $\overline{q}_\alpha$, los estados del sistema $u_{\alpha\overline{q}_\alpha}$ y estados adjuntos $p_{\alpha\overline{q}_\alpha}$, convergen fuertemente a $\overline{q}$, $u_{\overline{q}}$ y $p_{\overline{q}}$ respectivamente, cuando $\alpha \to \infty$, en adecuados espacios de Sobolev. Por otro lado, en el capítulo 3, para los problemas de control óptimo *simultáneo* formulados, se probaron resultados análogos a los del capítulo 2. A saber, se mostró existencia y unicidad del control óptimo simultáneo $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$ para el problema P y de $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$ para el problema P_α, para cada $\alpha > 0$. También se dieron condiciones de optimalidad y se probó que los controles óptimos $(\overline{\overline{g}}_\alpha, \overline{\overline{q}}_\alpha)$, los estados del sistema $u_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$ y estados adjuntos $p_{\alpha\overline{\overline{g}}_\alpha\overline{\overline{q}}_\alpha}$, convergen fuertemente a $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{q}})$, $u_{\overline{\overline{g}}\overline{\overline{q}}}$ y $p_{\overline{\overline{g}}\overline{\overline{q}}}$ respectivamente, cuando el coeficiente de transferencia del calor α tiende a infinito, en adecuados espacios de Sobolev. Por último, en el capítulo 4, se obtuvieron estimaciones entre las soluciones de los problemas de control óptimo simultáneo *distribuido-frontera* trabajados en el capítulo 3 con las soluciones de los problemas de control óptimo *frontera* considerados en el capítulo 2 y los problemas de control óptimo *distribuido* estudiados en [10]. A partir de lo trabajado en este capítulo se puede observar que, no necesariamente la primera componente del par óptimo de cada problema de control *simultáneo* coincide con la solución del problema de control *distribuido* estudiado en [10], ni la segunda componente coincide con la solución del problema de control *frontera* estudiado en el capítulo 2. Se destaca que, si se fija la variable q en $\overline{\overline{q}}$ se obtiene $\overline{g} = \overline{\overline{g}}$ y fijando la variable g en $\overline{\overline{g}}$, entonces se logra $\overline{q} = \overline{\overline{q}}$. De manera similar, para cada $\alpha > 0$, si se fija la componente q en $\overline{\overline{q}}_\alpha$ se obiene que $\overline{g}_\alpha = \overline{\overline{g}}_\alpha$ y fijando la componente g en $\overline{\overline{g}}_\alpha$ se prueba que $\overline{q}_\alpha = \overline{\overline{q}}_\alpha$.

Los resultados principales de este trabajo de tesis se pueden encontrar en [16].

Lista de Símbolos

Conjuntos

$\mathbb{N}$: el conjunto de los números enteros positivos

$\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales

$\mathbb{R}^n$: el espacio euclideo n-dimensional

$\mathbb{R}_0^+$: el conjunto de los números reales no negativos, es decir, $\mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geqslant 0\}$

Ω: es un conjunto en $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$: Γ_1 y Γ_2 son dos porciones disjuntas de Γ

$[0, T]$: intervalo de tiempo, $0 < T < \infty$

Espacios Abstractos

X: espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_X$ y norma $||\cdot||_X$

X': espacio dual de X

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$: corchetes de dualidad

$X \times Y$: producto entre los espacios de Hilbert X e Y

$X \subseteq Y \subseteq X'$: triple inclusión

Espacios de Funciones

$C^m(\Omega)$: el espacio de funciones continuamente diferenciables hasta el orden m

$C_c^\infty(\Omega)$: el espacio de funciones infinitamente diferenciables, con soporte compacto en Ω

$L^p(\Omega)$: el espacio de Lebesgue de funciones p-integrables, con la modificación habitual si $p = \infty$

$L^1_{loc}(\Omega)$: el espacio de funciones localmente integrables

$W^{k,p}(\Omega)$: el espacio de Sobolev de funciones cuyas derivadas débiles de orden menor o igual a k que son p-integrables en Ω

$W_0^{1,p}(\Omega)$: la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$

$H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega)$

$H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$

$H^{-1}(\Omega) \equiv W^{-1,2}(\Omega)$, el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$

$H = L^2(\Omega)$

$Q = L^2(\Gamma_2)$

$V = H^1(\Omega)$

$V_0 = \{v \in V : v\big|_{\Gamma_1} = 0\}$

$C(0,T;X) = \{v : [0,T] \to X$ tal que v es continua$\}$

$L^p(0,T;X) = \{v : (0,T) \to X$ medibles tal que $||v||_{L^p(0,T;X)} < \infty\}$

$W^{1,p}(0,T;X) = \{v \in L^p(0,T;X)$ tal que $\dot{v} \in L^q(0,T;X')$ con $p^{-1} + q^{-1} = 1\}$

$\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$

$\mathcal{Q} = L^2(0,T;Q)$

Operadores

$a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ forma bilineal sobre V_0

$a_\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal sobre V

γ_0: operador traza

Δ: operador laplaciano

∇: operador gradiente

Otros Símbolos

$\forall$: para todo

$\Rightarrow$: implicación

$\rightarrow$: convergencia fuerte

$\rightharpoonup$: convergencia débil

$\overset{*}{\rightharpoonup}$: convergencia débil estrella

$\dot{u}$: derivada débil

$\frac{\partial}{\partial t}$: derivada parcial respecto de t

$\frac{d}{dt}$: derivada respecto de t

$\frac{\partial}{\partial n}$: derivada respecto de la normal

Bibliografía

[1] Boukrouche M. - Tarzia D. A., *Existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind*, Nonlinear Analysis: Real World Aplications, 12, 2211-2224 (2011).

[2] Boukrouche M. - Tarzia D. A., *Convergence of optimal control problems governed by second kind parabolic variational inequalities*, J. Control Theory Appl. 11, 422-427 (2013).

[3] Brezís, H. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial (1983).

[4] Evans L. C., *Partial differential equations*, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island(1998).

[5] Fava, N. Zo, F. *Medida e Integración de Lebesgue.* Red Olimpica (1996).

[6] Gariboldi C. M. - Tarzia D. A., *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47, 213-230 (2003).

[7] Gariboldi C. M. - Tarzia D. A., *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1(2), 113-132 (2008).

[8] Gariboldi C. M. - Tarzia D. A., *Existence, uniqueness and convergence of simultaneous distributed-boundary optimal control problems*, Control and Cybernetics, 44, 5-17 (2015).

[9] Lions J.L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (1968).

[10] Menaldi J. - Tarzia D. A., *A distributed parabolic control with mixed boundary conditions*, Asymptotic Analisys 52, 227-241 (2007).

[11] Mirgórsky S. - Ochal A. - Sofonea M., *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities. Models and analysis of contact problems*, Advances in Mechanics and Mathematics No. 26, Springer, New York (2013).

[12] Tarzia D. A., *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941-944.

[13] Tarzia D. A., *Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Mathematicae Notae, 27 (1979/80) p. 145-156.

[14] Tarzia D. A., *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Mathematicae Notae, 27 (1979/80) p. 157-165.

[15] Tarzia D. A., *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre*. ClAMI (1981).

[16] Tarzia D. A. - Bollo C. M. - Gariboldi C. M., *Convergence of simultaneous distributed-boundary parabolic optimal control problems*. Evolution Equations and Control Theory. En prensa (2019).

[17] Trölstzsch F., *Optimal control of partial differetnial equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).

[18] Zeidler E., *Nonlinear functional analysis and its applications II/A. Linear Monotone Operators*, Springer- Verlag (1990).