

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

FACULTAD DE INGENIERÍA



**MODELADO DE LA MÁQUINA DE
INDUCCIÓN CONSIDERANDO
ENTREHIERRO NO UNIFORME**

por

Marcelo Hugo PONCIO

para la obtención del grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Director: Dr. Ing. Pablo M. de la Barrera

Co-Director: Dr. Ing. Guillermo R. Bossio

Río Cuarto, Córdoba, Argentina, setiembre de 2018

**MODELADO DE LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN CONSIDERANDO
ENTREHIERRO NO UNIFORME**

por

Marcelo Hugo PONCIO

Dr. Pablo M. de la Barrera

Director

Dr. Guillermo R. Bossio

Co-Director

APROBADA POR:

Mg. Xxxx X. Xxxxx

Jurado

Dr. Xxxx X. Xxxxx

Jurado

Dra. Xxxx X. Xxxxx

Jurado

Dr. Pablo M. De La Barrera

Director

Ing. xxx

Secretario Académico Facultad de Ingeniería UNRC

Dra. Gabriela Maldonado

Secretaria de Posgrado de la UNRC

Río Cuarto, Argentina, setiembre de 2018

Resumen

En esta tesis se estudian y comparan dos modelos de la máquina de inducción que permiten considerar el entrehierro no uniforme. De esta manera es posible analizar los efectos de las ranuras en el estátor y rotor de la máquina como así también las asimetrías producidas por la excentricidad estática o dinámica. Uno de los modelos es el de circuitos múltiplemente acoplados donde las inductancias se calculan mediante la aproximación de funciones de bobinados. Debido a las características de este modelo las inductancias y sus derivadas se calculan mediante aproximaciones numéricas. El segundo modelo estudiado es el de circuitos magnéticos equivalentes para el cual se propone un método analítico para determinar sus parámetros. Los resultados de simulación obtenidos muestran un mejor desempeño para el segundo modelo si se considera entrehierro no uniforme en la máquina debido a que no existen errores de aproximación mediante el cálculo analítico.

Abstract

This thesis presents a study and a comparison of two induction motor model which consider non-uniform air-gap. The effects of the saliencies, such as stator and rotor slotting, and static and dynamic air-gap eccentricities, were taken into account by the models.

On one hand, a multi-coupled circuit model for the induction machine was studied. This model is based on the inductances calculation by using the winding function approach. Numeric approximation of inductances and its derivatives were used due to the model feature. On the other hand, a magnetic equivalent circuit model was studied. In this case an analytic approximation was used in order to obtain model parameters

Obtained simulation results showed the magnetic equivalent circuit model has better performance than multi-coupled circuit model in order to represent air-gap eccentricities and saliencies. Due to the fact that the first one uses an analytic approximation for its parameters avoiding in this way errors during the computation.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VI
Índice general	VIII
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XIX
Lista de símbolos y siglas	5
1 Introducción	5
1.1 Descripción del problema	5
1.2 Antecedentes del tema	9
1.3 Objetivos	24
1.4 Contribuciones de la tesis	24
2 Modelo de Circuitos Múltiplemente Acoplados	27
2.1 Introducción	27
2.2 Modelo de la Máquina de Inducción	28
2.2.1 Circuito eléctrico del estator y del rotor	30
2.2.2 Par electromagnético	40
2.3 Cálculo de inductancias	45
2.3.1 Distribuciones de bobinados	46
2.3.2 Función del entrehierro	53
2.3.3 Funciones de bobinados	56
2.3.4 Inductancias del estator	73
2.3.5 Inductancias del rotor	75
2.3.6 Inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor	76
2.4 Costo computacional del cálculo analítico	76
2.5 Sumario	77
3 Circuito Magnético Equivalente	79
3.1 Introducción	79

3.2	Fundamentos del Circuito Magnético Equivalente	81
3.3	Circuito Magnético Equivalente de una Máquina de Inducción	85
3.3.1	Red de permeancias y fuentes de fuerza magnetomotriz	89
3.3.2	Circuito eléctrico del estator y del rotor	97
3.3.3	Par electromagnético	100
3.4	Cálculo de las permeancias y sus derivadas	101
3.4.1	Fraccionamiento del entrehierro en tubos de flujo	106
3.4.2	Permeancia de un tubo de flujo del entrehierro	109
3.4.3	Derivadas de la permeancia de un tubo de flujo del entrehierro	109
3.4.4	Derivada de la ventana de un diente	111
3.4.5	Derivada de la función del entrehierro	111
3.5	Sumario	113
4	Resultados del cálculo de parámetros	115
4.1	Introducción	115
4.2	Distribución y función de bobinados de las fases del estator	116
4.3	Análisis de Fourier	116
4.4	Inductancias propias y mutuas de las fases del estator y sus derivadas	119
4.5	Inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor y sus derivadas	123
4.6	Inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor y sus derivadas	128
4.7	Permeancias de los tubos de flujo del entrehierro y sus derivadas	138
4.8	Resolución analítica	159
4.9	Sumario	162
5	Resultados de simulación	165
5.1	Introducción	165
5.1.1	Estimación cualitativa de las variables	166
5.2	Ensayo con el rotor bloqueado	169
5.2.1	Flujos	170
5.2.2	Corrientes	180
5.2.3	Potencial magnético en el yugo del estator	181
5.2.4	Par	182
5.3	Cruces de ranuras	188
5.4	Ensayo a velocidad variable	191
5.4.1	Flujos	193
5.4.2	Par	201
5.4.3	Error por interpolación en el cálculo numérico	206
5.5	Ensayo en vacío	219
5.5.1	Flujos y corrientes	220
5.5.2	Par	223
5.6	Arranque sin carga	226

5.6.1	Entrehierro liso y uniforme	226
5.6.2	Entrehierro con irregularidades geométricas	231
5.7	Sumario	236
6	Conclusiones y propuesta de trabajos futuros	239
6.1	Conclusiones parciales	239
6.2	Conclusiones finales	242
6.3	Trabajos futuros	243
	Bibliografía	245
A	Diferencia de potencial magnético en el entrehierro	262
B	Parámetros de cálculo y simulación	266
B.1	Equivalencia entre los dos modelos	266
B.2	Parámetros del motor modelado	267

Índice de figuras

2.1	Modelo de circuitos múltiplemente acoplados.	29
2.2	Posiciones angulares respecto de una referencia fija sobre el estator, de una referencia fija sobre el rotor y posición del rotor.	45
2.3	Trayectoria de Ampere, distribución de la fase a del estator y su derivada.	46
2.4	Trayectoria de Ampere, distribución del lazo 1 del rotor y su derivada.	49
2.5	Trayectoria de Ampere, distribución del lazo 4 del rotor y su derivada.	50
2.6	Distribución de los lazos del rotor de las Fig. 2.4(a) y 2.5(a).	52
2.7	Entrehierro liso y uniforme.	53
2.8	Excentricidad.	54
2.9	Ranurado.	55
2.10	Trayectoria de Ampere con estator ranurado.	58
2.11	Relación entre la DPM inducida por un bobinado y su función.	66
2.12	Relación entre la distribución y la función de bobinados de la fase a del estator, y la función del entrehierro, correspondiente a la posición del rotor mostrada en la Fig. 2.11(c).	68
2.13	Relación entre la distribución y la función de bobinados del lazo 4 del rotor, y la función del entrehierro, correspondientes a la posición mostrada en la Fig. 2.5.	70
2.14	Relación entre la distribución y la función de bobinados del lazo 2 del rotor, y la función del entrehierro, correspondientes a la posición mostrada en la Fig. 2.5.	71
3.1	Ejemplo circuito con acoplamiento magnético.	81
3.2	Máquina de inducción modelada.	87
3.3	Numeración de ranuras, dientes, sectores y designación de polos.	90
3.4	Red magnética del modelo CME.	91
3.5	Red magnética del modelo CME bajo las restricciones R1 y R2.	102
3.6	Ventana de un diente del estator y sus derivada respecto de ϕ^s	106
3.7	Ventana de un diente del rotor y su derivada respecto de ϕ^r	107
4.1	Distribución y función de bobinados de la fase a del estator con ELU.	117

4.2	Síntesis de Fourier de la función de la fase a con ELU, dada en la Fig. 4.1.	118
4.3	Efectos de la excentricidad dinámica sobre las inductancias propias y mutuas de las fases del estator.	120
4.4	Efectos de la excentricidad dinámica combinada con el ranurado del rotor sobre las inductancias propias y mutuas de las fases del estator.	121
4.5	Efectos de la excentricidad dinámica y el ranurado del rotor sobre las derivadas de las inductancias propias y mutuas de las fases del estator.	122
4.6	Efectos de la excentricidad estática sobre las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor.	124
4.7	Efectos de la excentricidad estática combinada con el ranurado del estator sobre las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor.	126
4.8	Efectos de la excentricidad estática y el ranurado del estator sobre las derivadas de las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor.	127
4.9	Efectos de las excentricidades estática y dinámica, con entrehierro liso, sobre las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.	129
4.10	Efectos de las excentricidades estática y dinámica, con entrehierro liso, sobre la derivada de las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.	132
4.11	Zona de transición entre los polos $S2$ y $N1$ de la fase a	133
4.12	Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del estator, sobre las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.	134
4.13	Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del estator, sobre las derivadas de las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.	135
4.14	Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del rotor, sobre las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.	136
4.15	Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del rotor, sobre las derivadas de las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.	137
4.16	Intervalos de enfrentamiento entre dos dientes, entrehierro liso.	139
4.17	Intervalos de enfrentamiento entre dos dientes, estator ranurado.	139
4.18	Intervalos de enfrentamiento entre dos dientes, rotor ranurado.	140
4.19	Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre los dientes del estator y el diente 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	142
4.20	Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 12 del estator y el 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	144

4.21	Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre los dientes del estator y el diente 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 %, apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator y rotor liso.	147
4.22	Permeancia del entrehierro y su derivada, entre el diente 12 del estator y el 40 del rotor, sin excentricidad, apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator y rotor liso.	148
4.23	Permeancia del entrehierro y su derivada, entre el diente 12 del estator y el 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 %, apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator y rotor liso.	149
4.24	Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y los dientes del rotor, con excentricidad dinámica del 50 % y entrehierro liso.	151
4.25	Permeancia del entrehierro y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y el 10 del rotor, con excentricidad dinámica del 50 % y entrehierro liso.	152
4.26	Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y los dientes del rotor, con excentricidad dinámica del 50 %, estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.	155
4.27	Permeancia del entrehierro y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y el 10 del rotor, sin excentricidad, con estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.	156
4.28	Permeancia del entrehierro y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y el 10 del rotor, con excentricidad dinámica del 50 %, estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.	157
4.29	Comparación entre resultados de cálculo analítico y numérico.	159
4.30	Comparación entre resultados de cálculo analítico y numérico.	160
4.31	Comparación entre resultados de cálculo analítico y numérico.	161
5.1	Flujo inducido por cada fase en los inicios de ciclo.	168
5.2	Flujos en los dientes del estator en el modelo CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$	171
5.3	Flujo en los dientes del estator en el modelo CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$	173
5.4	Diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator y flujo en los dientes 40, 05, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$	177
5.5	Flujo entre dientes enfrentados durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$	179

5.6	Corrientes en el estator y en los lazos 40, 05, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.	180
5.7	PM en el yugo del estator durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.	181
5.8	Par durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.	184
5.9	Relación entre variables del modelo CME para el cálculo del par entre el diente 48 del estator y el 40 del rotor, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.	186
5.10	Pares ejercidos por otras combinaciones de dientes durante un ensayo con el rotor bloqueado y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$, obtenidos con la misma relación de variables mostrada en la Fig. 5.9.	187
5.11	Posición del rotor $\theta = 0$ con entrehierro liso.	188
5.12	Primera a cuarta PCR.	190
5.13	Quinta y sexta PCR.	191
5.14	Segunda PCR, $\theta = 0.0393$ rad.	192
5.15	Flujo en los dientes del estator, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	194
5.16	Flujo en los dientes 5 y 40 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	197
5.17	Corriente en el lazo 40 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	197
5.18	Permeancia, flujo y PM entre los dientes del estator y del rotor, durante un ensayo a velocidad impuesta de 1 rev/s, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	198
5.19	Permeancia, flujo y PM entre los dientes del estator y del rotor, durante un ensayo a velocidad impuesta de 1 rev/s, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	199
5.20	Permeancia, flujo y PM entre el diente 8 del estator y 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad impuesta de 1 rev/s, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	200
5.21	Derivada de la inductancia mutua entre la fase a del estator y el lazo 3 del rotor, y de las permeancias en un ME entre los dientes del estator relacionados con la distribución de esa fase y el diente 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	202

5.22 Pares calculados con las derivadas de permeancias de la Fig. 5.21, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	203
5.23 Par en el MCMA y el CME, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	206
5.24 Detalle de la segunda PCR en la derivada de la inductancia mutua entre la fase <i>a</i> del estator y el lazo 3 del rotor, de las permeancias en un ME entre los dientes 4 y 5 del estator y ese mismo lazo, y del par total durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	208
5.25 Pares calculados con las mismas derivadas de permeancias de la Fig. 5.22 para el caso de una MI con ELU.	209
5.26 Detalle de la segunda PCR del par total en el MCMA y el CME, durante un ensayo a velocidad variable.	211
5.27 Atenuación del rizado y variación del valor medio en el par calculado con el MCMA, durante un ensayo a velocidad variable.	212
5.28 Par ejercido en el TFE entre el diente 8 del estator y el 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con ELU.	214
5.29 Par ejercido en los TFE entre el diente 8 del estator y el 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable.	215
5.30 Corrientes en el estator y en los lazos 40, 5, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	220
5.31 Diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator y flujo en los dientes 40, 5, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	222
5.32 Flujo en todos los dientes del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	223
5.33 Par en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	224
5.34 Corriente en la fase <i>a</i> del estator y en el lazo 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.	227
5.35 Diferencia entre los flujos enlazados por dos fases del estator y flujo en el diente 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.	228
5.36 Par en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.	229
5.37 Velocidad en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.	230
5.38 Velocidad en el MCMA y el CME con distintas irregularidades del entrehierro durante un arranque en vacío.	232

5.39	Velocidad en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	233
5.40	Corriente en la fase <i>a</i> del estator y en el lazo 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	234
5.41	Diferencia entre los flujos enlazados por dos fases del estator y flujo en el diente 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	235
5.42	Par en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.	236
A.1	Circuito magnético inducido por la fase <i>a</i> en las figuras 2.3 y 2.11. . .	264

Índice de tablas

3.1 Analogía entre un tubo de flujo y un condensador eléctrico.	85
B.1 Permeancias del CME para su equivalencia con el método AFB.	266
B.2 Geometría de los núcleos.	267
B.3 Parámetros de los arrollamientos del estator.	268
B.4 Parámetros de los lazos del rotor.	268
B.5 Parámetros mecánicos.	269
B.6 Parámetros de la alimentación eléctrica.	269

Lista de símbolos y siglas

<u>Símbolo</u>	<u>Constante física, parámetro o variable representada</u>
i	Vector corriente;
L	matriz de inductancias;
R	matriz de resistencias;
v	vector tensión;
λ	vector flujo enlazado;
W	matriz de transformación de FMM;
\mathcal{F}	vector fuerza magnetomotriz;
\mathcal{P}	matriz permeancia;
u	vector tensión magnética;
\vec{B}	inducción magnética;
c	conmutación;
ed	excentricidad dinámica;
ee	excentricidad estática;
g	función de entrehierro;
$\langle 1/g \rangle$	valor medio de la función recíproca de entrehierro;
\vec{H}	intensidad de campo magnético;
h	ventana de integración;
i	corriente, número genérico de diente o ranura del estator;
j	número genérico de diente o ranura del rotor;

l	longitud efectiva del paquete de chapas;
L	inductancia;
m	número de circuitos en el estator;
mcd	operador máximo común divisor;
n	número de barras del rotor, distribución espacial de los bobinados;
N	función espacial de los bobinados;
P	número de pares de polos;
p	potencia;
q	número de ranuras por polo y por fase;
r	radio del entrehierro;
S_r	número de ranuras del rotor;
S_s	número de ranuras del estator;
T_e	par electromagnético;
v	tensión eléctrica;
W	energía;
z	posición axial;
θ	posición angular del rotor;
μ_0	permeabilidad del aire;
τ_s	paso de diente del estator;
τ_r	paso de diente del rotor;
ϕ	posición angular.

<u>Sigla</u>	<u>Expresión</u>
AFB	Aproximación de funciones de bobinados (método de);
CME	circuito magnético equivalente (modelo de);
DPM	diferencia de potencial magnético, simbolizado $\Delta\mathcal{U}$;
ELU	entrehierro liso y uniforme;
FEM	fuerza electromotriz;
FMM	fuerza magnetomotriz;
IVME	irregularidad (del entrehierro) variable en marco estatórico;
IVMR	irregularidad (del entrehierro) variable en marco rotórico;
MCMA	modelo de circuitos múltiplemente acoplados;
ME	marco (de referencia) estatórico;
MEF	modelo de elementos finitos;
MI	máquina de inducción;
MR	marco (de referencia) rotórico;
PCR	posición de cruce de ranuras;
PM	potencial magnético, simbolizado \mathcal{U} ;
TFE	tubo de flujo en el entrehierro.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Descripción del problema

Las máquinas de inducción (**MI**) consumen la mayor cantidad de energía eléctrica en la industria [1], alcanzando en la Argentina una cifra del orden del 69% [2]. Una aplicación tan difundida deviene de su robustez, relación peso-potencia, bajo costo y operación sin chispas.

El modelado de la MI es un recurso indispensable para su análisis, diseño, control y monitoreo de condición. Tales aplicaciones requieren la obtención de los valores de las variables de funcionamiento como resultado de cálculos que aplican los parámetros constructivos provistos por el modelo.

Entre las aplicaciones mencionadas, el análisis se ocupa del estudio de la conversión electromecánica de la energía, en la que interactúan los campos eléctricos y magnéticos, manifestándose a través de fuerzas y movimiento [3].

El diseño, por su parte, consiste principalmente en la previsión de las condicio-

nes de trabajo de la máquina, y comprende aspectos tan variados como su dimensionamiento, selección de materiales, categoría de servicio, agresividad del entorno ambiental, envejecimiento, disipación de calor y accesibilidad para mantenimiento.

El control requiere del conocimiento en tiempo real de los valores de las variables que en conjunto constituyen su estado de funcionamiento como tensiones, corrientes del estator y del rotor, flujos, flujos enlazados, par, velocidad y posición. A partir de las señales generadas por los sensores de medición de algunas de esas variables (típicamente corrientes del estator y velocidad), se han propuesto diferentes técnicas para estimar el valor de las restantes. Esta información es utilizada para adaptar en tiempo real el estado de funcionamiento, actuando sobre la fuente de alimentación.

El monitoreo de condición interpreta y registra algunas de las variables anteriores, pudiendo además comandar funciones de alarma y protección. Cualquier algoritmo de diagnóstico de fallas debe discriminar los patrones propios del servicio de aquellos causados por anomalías.

Las cuatro aplicaciones anteriores del modelo de una MI están intrínsecamente relacionadas a las irregularidades geométricas, las cuales pueden ser propias de sus características constructivas o bien producidas por fallas. Entre las primeras se pueden mencionar la distribución de los bobinados, el ranurado del estator y del rotor, o el cruzamiento de las ranuras. Las segundas son aquellas que apartan a la MI de su geometría original de diseño, como la excentricidad del entrehierro y la desalineación del eje entre otras.

Además de las irregularidades geométricas, la MI presenta otras que también pueden ser intrínsecas o producidas por fallas. Entre las primeras se pueden mencionar

la saturación del núcleo y la variación de la resistencia de los conductores con la temperatura; entre las segundas, las fallas de aislación de los bobinados, la rotura de barras del rotor y la falla interlaminar en el núcleo.

Los efectos producidos por las irregularidades geométricas y no geométricas deben verse reflejados en los distintos parámetros de un modelo, para obtener de éste una representación tan exacta como lo requiera la aplicación a la que se destine.

La Norma DIN 66201 [4] define al modelo de un sistema físico como una representación simplificada, un prototipo conceptual que permite analizar su comportamiento sin recurrir a la experimentación.

Esa Norma utiliza el término *delimitación* de un modelo para referirse al alcance de los fenómenos considerados, fuera del cual quedan los omitidos, según su incidencia sobre las variables de interés. En el caso de la MI, son usualmente omitidas la deformación elástica del eje o las vibraciones en el dominio mecánico, e incluso un dominio físico completo como el térmico, en el que se relacionan la generación y disipación de calor con la variación de temperatura. A continuación se presenta una recopilación de modelos [5], comenzando por el más delimitado:

1. El modelo de régimen estacionario desarrollado por Charles Steinmetz [6] se representa con parámetros concentrados. Está restringido a considerar que las líneas de inducción en el entrehierro tienen dirección radial, el entrehierro es liso y uniforme (**ELU**) y la distribución espacial tanto de los circuitos del estator como del rotor es sinusoidal. Este modelo se resuelve con ecuaciones algebraicas y representa sólo el régimen estacionario de la MI sin irregularidades ni presencia de elementos que aporten una componente tangencial a las líneas de inducción

en el entrehierro.

2. El modelo dinámico $qd0$ se distingue del anterior por resolverse con ecuaciones diferenciales algebraicas y representar entonces los regímenes dinámico y estacionario. Salvo en versiones modificadas como las que se comentarán en la Sec. 1.2, tampoco representa la saturación de los núcleos, las irregularidades geométricas como el ranurado del estator y del rotor o la excentricidad, ni el flujo tangencial en el entrehierro [7]-[9].

3. El Modelo de Circuitos Múltiplemente Acoplados (**MCMA**), al igual que el modelo dinámico $qd0$, se resuelve con ecuaciones diferenciales algebraicas, pero a diferencia de éste, no está restringido a considerar que el entrehierro sea liso y uniforme, ni que los bobinados tengan distribución espacial sinusoidal. Entre sus parámetros más importantes se encuentran las inductancias propias y mutuas, que se calculan con el método de Aproximación de Funciones de Bobinados (**AFB**). El MCMA resuelto con inductancias calculadas por el método AFB, tampoco representa la saturación de los núcleos, ni el flujo tangencial en el entrehierro [10][11].

4. El modelo de Circuito Magnético Equivalente (**CME**), al igual que el modelo dinámico $qd0$ y el MCMA, se resuelve con ecuaciones diferenciales algebraicas, pero a diferencia de éstos, no está restringido a considerar que los núcleos del estator y del rotor tengan permeabilidad infinita, ni las líneas de inducción en el entrehierro tengan dirección radial. Su topología fragmenta al motor en partes formando una red magnética con densidad adaptable [10]. Su costo computacio-

nal es alto en caso de representar corrientes parásitas en los núcleos del estator y del rotor [12]. A diferencia de los modelos anteriores, el CME sí puede representar la saturación de los núcleos y la presencia de elementos que aporten una componente tangencial a las líneas de inducción en el entrehierro, como las cuñas de material magnético en las ranuras del rotor.

5. Los modelos de Elementos Finitos (**MEF**), a diferencia de todos los anteriores, se representan con parámetros distribuidos y se resuelven con ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, con un considerable aumento de costo computacional. Un MEF es el límite al que tiende el modelo CME al aumentar la densidad de su red magnética [13].

El problema que describe esta sección es, entonces, el análisis comparativo de las posibles formas de representar las irregularidades geométricas de la MI ofrecida por la diversidad de modelos existente, y la selección del más conveniente para una aplicación dada.

1.2 Antecedentes del tema

Se puede encontrar vastedad de literatura referida a la MI, sus irregularidades, modelos y las aplicaciones de éstos. En esta sección se presentará un relevamiento de ese material, compuesto por una descripción de cada modelo, sus ventajas, desventajas y aplicaciones.

Entre esas aplicaciones se encuentran las de control y diagnóstico de fallas. Las variables que usualmente se controlan son la velocidad y posición del rotor, bajo la

condición de limitar la intensidad de corriente a un rango de valores. Las fallas que se procura diagnosticar son, en principio, las de ocurrencia más frecuente. Según las estadísticas de mantenimiento predictivo [14], un 40% tiene lugar en los rodamientos [15], un 38% en la aislación del arrollamiento estático, un 10% son roturas de las barras o anillos de cortocircuito y el restante 12% tiene causas varias.

Las fallas en los rodamientos son causadas por las variaciones bruscas de par, las tensiones mecánicas internas a la máquina y las corrientes circulantes por los rodamientos [16].

Las variaciones de par pueden originarse en la máquina o en el sistema mecánico acoplado. Las primeras se deben a ciertas combinaciones entre los armónicos espaciales y temporales de inducción en el entrehierro con la velocidad del rotor, y pueden incluso fatigar al eje, aún estando alineado [16].

Las tensiones mecánicas internas pueden estar presentes aún con la máquina detenida o darse sólo en marcha. Entre las primeras están las causadas por la excentricidad, curvatura o desalineación del eje, o un mal posicionamiento en el montaje. Entre las segundas, las debidas a la operación a velocidades próximas a la resonancia [16].

En cuanto a la circulación de corriente por los rodamientos, ésta es causada por las tensiones homopolares propias de los accionamientos implementados con electrónica de potencia [16].

Las fallas en los rodamientos comunmente se detectan mediante el análisis de las vibraciones que producen. Muchas publicaciones también proponen hacerlo con el análisis de las corrientes del estator, pese a que las relaciones de causa-efecto con estas últimas todavía no son completamente conocidas [16].

Las fallas siguientes en su frecuencia de aparición son las de aislación estática y luego las roturas en la jaula de ardilla.

Las fallas de aislación comunmente se inician como cortocircuitos entre espiras, los cuales son de difícil detección. Si la máquina con esta falla se mantiene en servicio, el calentamiento local deriva en un cortocircuito entre fases o entre una o más fases y la carcasa. El método usual para detectarlas es la medición de las corrientes estáticas de secuencia inversa. Un diagnóstico efectivo debe distinguir entre aquellas corrientes de secuencia inversa debidas al cortocircuito entre espiras de las debidas a la asimetría en la tensión de alimentación, la saturación de los núcleos y las irregularidades constructivas [16].

Las roturas en la jaula de ardilla pueden tener lugar en las barras o los anillos de cortocircuito, y se deben a fatiga térmica y mecánica, los esfuerzos electrodinámicos, vibraciones, centrifugado, fricción provocada por chapas flojas en el rotor o fallas en los rodamientos [16][17].

Ante una rotura en la jaula de ardilla, circulan por la misma corrientes de secuencia inversa que hacen reaccionar al arrollamiento estático con armónicos de corriente cuya frecuencia guarda relación con el deslizamiento. Estas combinaciones entre armónicos de corriente en la jaula de ardilla y en las fases del estator producen pulsaciones de par y fluctuaciones de velocidad. Estas fallas se pueden detectar con el análisis espectral de las corrientes en el estator, también llamado análisis de firma [17].

Modelo de régimen estacionario

La inducción de fuerza electromotriz (**FEM**) en una MI es un proceso mixto de transformación y generación, como los que se dan en un transformador y en una máquina síncrona respectivamente [18]. La FEM inducida por transformación también se designa como *FEM de transformación*, y la inducida por generación como *FEM de velocidad*.

En cuanto a las FEM de transformación respecta, el modelo de la MI es análogo al de un transformador. Las FEM de velocidad, por su parte, en régimen estacionario sólo se inducen en el rotor y guardan con el deslizamiento una relación que introduce la única alinealidad de este modelo [18].

De no ser por las FEM de velocidad inducidas en el rotor, el modelo de régimen estacionario sería, entonces, semejante al de un transformador. Por esa similitud, el modelo estacionario de la MI también se llama *modelo transformador de la MI* [19] y representa, al igual que aquél, al circuito equivalente en π de una fase.

El cálculo del par se limita a su valor medio, relacionado con el valor medio de potencia en los elementos del modelo que representan al rotor, la velocidad estacionaria de este último y la de sincronismo.

La principal ventaja del modelo de régimen estacionario es su simplicidad de resolución, posible incluso con métodos gráficos. La principal desventaja es su omisión de las irregularidades geométricas, el flujo tangencial en el entrehierro y los regímenes transitorios.

En [20] se propone adoptar una inductancia magnetizante no lineal para representar el efecto de la saturación de los núcleos. El resultado es un alto contenido

armónico en las tensiones y corrientes, y la consecuente disminución del rendimiento y factor de potencia.

Con el modelo transformador de la MI se pueden calcular las variables de marcha en estado estacionario en cualquier régimen de alimentación y carga, incluyendo los pares e intensidades de arranque y máximo [21]. Estos cálculos permiten dimensionar la máquina, o incluso prever su servicio en condiciones distintas a las de diseño. Por ejemplo, en [22] se evalúa utilizar como generador a una MI trifásica autoexcitada aplicando la conexión Steinmetz [23], propuesta por el mismo desarrollador del modelo.

El modelo de régimen estacionario no tiene aplicación directa al control, aunque en [24] se lo utiliza como introducción conceptual al control vectorial de la máquina síncrona y asíncrona.

Asimismo, puede aplicarse al diagnóstico de algunas fallas. Por ejemplo a las de aislación en el estator, como se propone para una MI con rotor de jaula de ardilla en [25] y [26]. También a la rotura de barras mediante el análisis de firma, como se propone en [27] y [28].

Según [29], los modelos elaborados de la MI que representan sus distintas irregularidades, pueden simular sus efectos pero no resolver el problema inverso de determinar la causa de un efecto dado. Más aún, al utilizar muchos parámetros de la máquina, no discriminan cuáles de éstos tienen mayor incidencia sobre el fenómeno cuya procedencia se busca. Con el objeto de diagnosticar fallas, entonces, se necesita un modelo más simple, encontrando resultados satisfactorios en el de régimen estacionario, como se prueba en [28].

Modelo dinámico $qd0$

El modelo dinámico $qd0$ representa a la MI trifásica con arrollamientos bifásicos equivalentes a los del estator y del rotor, conversión que se efectúa aplicando la transformación de Park [7][8]. Como esta última obtiene los arrollamientos bifásicos sólo a partir de otros trifásicos, el modelo se adapta más exactamente a la MI con rotor bobinado. No obstante, también ha sido extendido para representarla con jaula de ardilla, utilizando las inductancias calculadas con el método AFB [30].

El par se obtiene por el método de la coenergía, aplicando como parámetros a las derivadas de las inductancias respecto de la posición del rotor [7][8].

En [31] se representa a este modelo, y también al inversor trifásico que alimenta a una MI funcionando en régimen motor, con la técnica conocida como Diagrama de Enlaces o Bond Graphs.

La principal ventaja del modelo dinámico $qd0$ es su bajo costo computacional, que permite su resolución en tiempo real. La principal desventaja, al igual que en el modelo de régimen estacionario, es su omisión de la saturación de los núcleos, las irregularidades geométricas y el flujo tangencial en el entrehierro [7]-[9]. Debido a la segunda de estas omisiones, no puede representar una máquina de reluctancia, así como los fenómenos relacionados con las aplicaciones al control y diagnóstico de fallas, haciendo entonces necesarias las adaptaciones que se mencionarán, en detrimento de la velocidad de resolución.

El modelo dinámico $qd0$ puede aplicarse al control de campo orientado. Ahora bien, este control requiere la adquisición de la posición del flujo en tiempo real [32], y la variable a partir de la cual se obtiene es la FEM inducida en el rotor, cuyo valor es

proporcional a la velocidad. A velocidades bajas, entonces, la estimación de la posición del flujo resulta imprecisa debido al ruido y la desviación de los parámetros [11]. Para superar ese inconveniente, hay diversidad de propuestas, como la de [33], que presenta un estimador y la de [34], que presenta un observador de flujo y velocidad.

Aplicando el modelo dinámico $qd0$ también se puede estimar la posición del rotor a partir de la FEM, aunque con el mismo problema anterior.

El modelo dinámico $qd0$ puede aplicarse al diagnóstico de fallas. Comenzando por las más frecuentes en la estadística citada, las cuales son aquellas que tienen lugar en los rodamientos y sus precursoras, el modelo permite diagnosticarlas requiriendo también adaptaciones que salven la restricción de considerar ELU. Tal es el caso de las propuestas dadas en [15] y [35].

Continuando con las fallas siguientes en su frecuencia de aparición, el modelo $qd0$ puede aplicarse al diagnóstico de las fallas de aislación y roturas en la jaula de ardilla, siempre con las modificaciones correspondientes. Las propuestas dadas en [36] y [37] permiten detectar cortocircuitos entre espiras y rotura de barras, la segunda complementando al modelo con un controlador y un observador deslizante en espacio de estados. La dada en [38], permite detectar cortocircuitos entre espiras analizando por separado sus componentes de secuencia directa e inversa, y la dada en [39], detectar la rotura de barras y anillos analizando el espectro de las corrientes.

La última tipificación de fallas en la estadística citada, las agrupa como atribuibles a causas varias. Como ejemplo de esta categoría, en [40] se aplica el modelo dinámico $qd0$ a la detección de cortocircuitos interlaminares en el núcleo del estator.

Modelo de Circuitos Múltiplemente Acoplados

El MCMA representa a la MI con un circuito por cada bobina del estator y cada lazo del rotor, cuyos elementos son sus respectivas inductancias y resistencias. La corriente que circula por cada uno de estos circuitos induce flujo en el mismo debido a su inductancia propia, y en los demás circuitos debido a sus inductancias mutuas, formando una red de acoplamiento magnético.

Los circuitos correspondientes a las bobinas del arrollamiento estatórico pueden agruparse para formar los polos, y éstos para formar las fases, permitiendo una configuración flexible a las combinaciones de conexión serie y paralelo.

Las inductancias de las bobinas del estator y los lazos del rotor se calculan con el método AFB presentado en [41] y [42]. Los lados activos de las bobinas y las barras de la jaula de ardilla ocupan exactamente la misma posición que en la máquina representada, de modo que las inductancias calculadas incluyen todos los armónicos espaciales [11].

El MCMA y el método AFB pueden extenderse al análisis tridimensional. En [43] se propone el cálculo de las inductancias de la MI considerando el cruzamiento de las barras del rotor, y en [44] se generaliza su representatividad a otras irregularidades axiales, como la desalineación y el cruzamiento de barras.

Al igual que en el modelo dinámico $qd0$, el par se obtiene por el método de la coenergía, teniendo como parámetros a las derivadas de las inductancias respecto de la posición del rotor [41][42].

La principal ventaja del MCMA en comparación con el modelo dinámico $qd0$ es el relevamiento de las irregularidades geométricas. A diferencia de aquél, el MCMA sí

puede representar una máquina de reluctancia y su aplicación al control y diagnóstico de fallas no requiere adaptaciones. Como contrapartida surge una desventaja: el aumento de costo computacional impide actualmente su resolución en tiempo real. El MCMA, al igual que el modelo dinámico $qd0$, también omite la saturación de los núcleos y del flujo tangencial en el entrehierro.

El MCMA puede aplicarse al diseño de la MI. Por ejemplo, si éste se orienta a la atenuación de los armónicos espaciales de fuerza magnetomotriz (**FMM**), el MCMA permite combinar con ese fin la distribución de los arrollamientos con el aumento del número de fases. En [45] se optimiza esta combinación en el caso de una máquina de reluctancia, obteniendo como arrollamiento estático más conveniente a uno pentafásico concentrado, alimentado con un inversor de cinco pares de llaves complementarias.

El MCMA también puede aplicarse al control de la MI. En [46], por ejemplo, se lo utiliza para el análisis de las corrientes de secuencia inversa debidas al ranurado del rotor, a partir de las cuales se mide la velocidad. En [47] se lo utiliza para la estimación de la posición del rotor mediante la inyección de una señal exploradora, misma comentada para el modelo $qd0$. Como el MCMA sí representa las irregularidades geométricas, no es necesario crear una irregularidad ex-profeso en el rotor.

Asimismo, el MCMA puede aplicarse al diagnóstico de fallas. Las de ocurrencia más frecuente, que tienen lugar en los rodamientos, son causadas o agravadas en su mayoría por la excentricidad. Hay numerosas propuestas para diagnosticarla en la MI, entre ellas [48][49][51], así como en la máquina síncrona [52], haciéndolo en [53] mediante la inyección de una señal superpuesta a la alimentación.

Continuando con las fallas siguientes en su frecuencia de aparición, que son las de aislación y roturas en la jaula de ardilla, el MCMA también puede aplicarse a diagnosticarlas. Un trabajo precursor es [54], en el cual se desarrollan este modelo y el método AFB, exponiendo su capacidad para representar a la MI con irregularidades, en particular las roturas de barras y anillos de cortocircuito. En [55]-[57] se proponen métodos para detectar las fallas mencionadas analizando los armónicos de corriente que éstas generan. En [58] se propone medir los armónicos de FEM en los terminales de la MI una vez desconectada para detectar cortocircuitos entre espiras.

Las fallas rotóricas en particular producen alteraciones en los parámetros de la MI que dependen de la posición. Por tal motivo, tanto esas fallas como la posición pueden detectarse con las mismas técnicas [11]. Con este concepto, los mismos autores de [47], que trata sobre la estimación de la posición del rotor mediante la inyección de una señal exploradora, en [59] aplican esa misma señal al diagnóstico de roturas de barras y anillos de cortocircuito.

Para completar la tipificación de fallas dada, falta citar las atribuibles a causas varias. Como ejemplo, en [60] se aplican el MCMA y el método AFB al diagnóstico del desbalanceo mecánico del rotor y la evaluación de sus efectos.

Modelo de Circuito Magnético Equivalente

En el modelo CME, el núcleo de los dispositivos electromagnéticos se fragmenta en figuras geométricas sencillas [61]. El conjunto de las permeancias correspondientes a los distintos fragmentos, conectadas en red, representa al núcleo. Para completar el modelo, a esa red magnética se acoplan los circuitos eléctricos y sistemas mecánicos

vinculados [62][63].

Los elementos activos de la red magnética son fuentes de FMM, las cuales son inducidas desde los distintos arrollamientos por los que circula corriente, arreglo con el que se sustituye el uso de inductancias.

La fragmentación del núcleo es adaptable a la precisión requerida del modelo. Cuanto más finamente dividido esté, mayor es la densidad de la red magnética, aumentando la precisión y el costo computacional.

En el caso de una máquina eléctrica rotativa, la red magnética está compuesta por el núcleo del estator, el del rotor y el entrehierro; los circuitos eléctricos son los del estator y del rotor y el sistema mecánico es el formado por la masa rotante [61][64]. En el caso particular de la MI, el circuito eléctrico del estator es el de su arrollamiento conectado a la red o a un inversor, y el del rotor el de su arrollamiento o bien la jaula de ardilla [65][66].

En el modelo CME de una máquina eléctrica rotativa, la distribución de los arrollamientos se expresa con coeficientes matriciales [61][64]-[66]. El desarrollo de estas matrices es extenso, la operatoria para obtenerlas incluye diversos pasos y su interpretación física requiere un manejo fluido del procedimiento. Para facilitar su comprensión, en [67] se relacionan estos coeficientes matriciales con la distribución de bobinados, parámetro definido en el desarrollo del método AFB.

Puede evitarse el uso de los coeficientes matriciales del modelo CME aplicando la técnica conocida como Diagrama de Enlaces o Bond Graphs [68][69]. Además, en esos artículos se propone modelar a las permeancias del CME como condensadores eléctricos en reemplazo de la analogía más difundida, según la cual se modelan como

conductancias.

El par en el modelo CME se obtiene por el método de la coenergía, mismo utilizado por el modelo dinámico $qd0$ y el MCMA. Pero, a diferencia de éstos, los parámetros de cálculo son las derivadas de las permeancias en vez de las inductancias, también respecto de la posición del rotor.

La red magnética del CME puede ser fácilmente extendida a tres dimensiones, incluyendo intrínsecamente la dispersión y los armónicos espaciales de flujo, tal como sucede en los MEF [12].

Una primera ventaja del modelo CME en comparación con un MCMA que utilice las inductancias obtenidas con el método AFB es la adaptación a diversas disposiciones constructivas del dispositivo modelado. El modelo CME puede, por ejemplo, representar un motor de polos apantallados o espiras de sombra [61], cuyo arrollamiento inductor no esté distribuido en el perímetro del entrehierro. El MCMA sólo puede representar a ese motor aplicando las inductancias obtenidas a partir del CME, ya que el método AFB no permite calcularlas.

Pasando del ejemplo de un motor con polos apantallados, que tiene rotor con jaula de ardilla, al de uno con rotor liso macizo de corrientes parásitas, el CME puede también representarlo [70], mientras que el MCMA en ese caso ya no tiene forma de hacerlo.

Una segunda ventaja del CME es la representación de la saturación de los núcleos, aplicada en [61] y [64] a la generalidad de las máquinas eléctricas rotativas, y en [71] a la MI con rotor de jaula de ardilla, presentando resultados de simulación validados con un MEF.

Una tercera y una cuarta ventajas son la representación del flujo tangencial en el entrehierro y la adaptabilidad de la red magnética. El CME puede, por ejemplo, representar una MI con rotor de ranuras profundas [61]. En ese modelo, las ranuras del rotor se dividen conceptualmente en capas separadas entre las cuales se ubican líneas de inducción tangenciales, lo cual lleva implícito un aumento de la densidad local en la red magnética.

En cuanto al costo computacional, el del modelo CME de baja densidad es comparable al del MCMA, no pudiendo ninguno de los dos resolverse en tiempo real.

El CME puede aplicarse a diseños de la MI más elaborados. Combinando las cuatro ventajas antes citadas, el CME puede representar a una MI con cuñas magnéticas en las ranuras. Estas cuñas se incorporan a la máquina para atenuar la distorsión del campo en el entrehierro, cuyos armónicos superiores producen pérdidas, pulsaciones de par y disminución del factor de potencia [72]. En [73] se presentan resultados empíricos de esa distorsión, y su atenuación con el agregado de cuñas en el estator.

Si bien se puede modelar a la MI con estas cuñas aplicando los MEF, éstos actualmente deben limitarse a dos dimensiones debido al costo computacional, dada la alta densidad requerida en la zona de las cuñas. Con los MEF, en [74]-[79] se analizan los armónicos de flujo, se prueban cuñas de materiales magnéticos y no magnéticos de distintos tamaños, se calcula su sollicitación mecánica, su efecto sobre el régimen transitorio de conexión de la máquina, el factor de potencia y la temperatura. Como esos trabajos tienen una considerable carga empírica debido a las pruebas iterativas, el costo computacional de las simulaciones es crítico.

En [80] y [81] se prueba al modelo CME como alternativa a los MEF, validándolo

con estos últimos. Dada la relación de tamaño y concentración de accidentes geométricos entre las ranuras y la sección completa de la máquina, las primeras requieren una mayor densidad localizada de la red magnética, sucediendo lo contrario en los yugos del estator y del rotor.

En [70] se da otra propuesta de aplicación del CME al diseño de una MI, ésta con rotor liso macizo de corrientes parásitas para alta velocidad. En ese trabajo se presentan resultados de simulación de marcha a 24.000 rpm, validados con un prototipo experimental.

El CME también puede aplicarse al control de la MI. Por ejemplo, en [82] se desarrolla un algoritmo de alimentación de una MI trifásica con el arrollamiento estatórico conectado en triángulo, el cual ante una eventual falla de apertura de una fase la mantiene en un régimen de servicio restringido. Para una representación más realista de los regímenes transitorios, el modelo representa los efectos de la saturación y la profundidad de las ranuras del rotor.

Aplicado al diagnóstico de fallas, a diferencia de los modelos anteriores, el CME sí puede representar el efecto de la saturación de los núcleos.

Comenzando nuevamente por las de ocurrencia más frecuente, aquellas que tienen lugar en los rodamientos y son causadas o agravadas en su mayoría por la excentricidad, en [83] y [84] se analiza el efecto de esta última en una MI con jaula de ardilla, teniendo en cuenta la saturación de los núcleos. En el segundo trabajo, que presenta resultados experimentales, se concluye en que la saturación del hierro en los dientes, al aumentar la reluctancia, hace disminuir el flujo y el potencial magnético (**PM**) en el entrehierro, y por lo tanto el par, fenómeno que se acentúa en el arranque debido

a la intensidad de corriente.

Continuando con las fallas siguientes en su frecuencia de aparición, en [85] y [86] se propone aplicar el CME al diagnóstico de cortocircuitos entre espiras, y en [87] además, al de roturas en la jaula de ardilla. Esos trabajos presentan resultados de simulación y validación experimental, que revelan la presencia de combinaciones de armónicos espaciales y temporales de corriente y par, los cuales no serían detectados si se omitiera el efecto de la saturación. El último trabajo también considera el efecto de la profundidad de las ranuras.

En [88] y [89] se propone aplicar el CME tridimensional al análisis de los efectos de las corrientes de fuga entre las barras de la jaula de ardilla, las cuales inducen flujo axial en el eje.

Pasando de la MI con jaula de ardilla a la MI con rotor bobinado, en [90] y [91] se propone aplicar el CME al diagnóstico de cortocircuitos entre espiras del rotor, validando los resultados con un MEF y en forma experimental. Lo mismo se propone en [92], para cortocircuitos entre espiras tanto del estator como del rotor, así como en [93] y [94], estos últimos con validación sólo experimental. En general, se concluye en que un cortocircuito entre espiras del rotor produce efectos más leves y difíciles de detectar que uno entre espiras del estator, y que el aumento de la intensidad de corriente debido a estos cortocircuitos produce saturación local del hierro en los dientes, produciendo rizado en el par.

Finalmente, como ejemplo de aplicación del CME al diagnóstico de fallas atribuíbles a causas varias, en [95] se lo aplica a la detección de cortocircuitos interlaminares en el núcleo del estator. Esta propuesta es una extensión de la dada en [40], citada

como ejemplo de aplicación del modelo dinámico $qd0$, a la cual el CME agrega el modelado de la saturación de los núcleos y la representación del dominio térmico. En este último, la temperatura se utiliza como síntoma para el diagnóstico.

1.3 Objetivos

El objetivo general de esta tesis es modelar la MI con entrehierro no uniforme. Las irregularidades del entrehierro a considerar serán geométricas, tanto las inherentes a las características constructivas de la MI como aquellas que se originan por diferentes tipos de fallas.

En tal sentido, se plantean los siguientes objetivos particulares:

1. Modelar las irregularidades geométricas de la MI utilizando el método AFB.
2. Modelar las irregularidades geométricas de la MI utilizando el modelo CME.
3. Determinar el efecto de las irregularidades geométricas en los parámetros de ambos modelos.
4. Analizar las expresiones para el cálculo del par electromagnético en los modelos estudiados.
5. Comparar los dos modelos y determinar ventajas y desventajas de cada uno.

1.4 Contribuciones de la tesis

1. En el Cap. 2 se proponen expresiones analíticas que descomponen a la función del entrehierro en términos correspondientes a cada una de las distintas irre-

gularidades geométricas, combinándolas libremente al evaluarlas por separado. A su vez, esos términos están dados en función de la posición respecto de una referencia fija sobre el estator o bien sobre el rotor, llamadas marco de referencia estatórico (**ME**) y rotórico (**MR**) respectivamente.

2. La descomposición de la función del entrehierro en términos correspondientes a las distintas irregularidades geométricas y la adopción de un ME y un MR, hacen posible su derivación analítica en reemplazo de los métodos numéricos.
3. Limitando los marcos de referencia a los ME y los MR, fijos en cada una de las dos partes constitutivas de la máquina, las irregularidades geométricas del entrehierro resultan variables sólo en uno u otro de esos dos grupos. Por esa causa, en el Cap. 3 se las clasifica en Irregularidades Variables en un ME (**IVME**) o en un MR (**IVMR**), y se presenta la relación matemática de conversión de la función del entrehierro entre ambas referencias.
4. La derivación analítica de la función del entrehierro hace a su vez posible la de las permeancias y sus parámetros de cálculo previos. Tal derivación analítica revela la existencia de relaciones entre las bobinas inductoras, la jaula de ardilla, las IVME y las IVMR, con el par electromagnético.
5. Se muestran resultados de simulación de variables que no es posible representar con modelos menos elaborados que el CME, tales como el flujo en los dientes del estator, y el flujo, PM y par entre los dientes del estator y del rotor, así como el PM entre sus núcleos. Todas estas variables se interpretan geométrica y físicamente.

Las contribuciones mencionadas de esta tesis son la integración y profundización de las hechas en trabajos previos, de los cuales:

En [96] y [97] se presentaron las expresiones analíticas del entrehierro, su derivación y la clasificación de las irregularidades geométricas mencionadas en las contribuciones 1, 2 y 3 respectivamente.

En [96] se extendió el método AFB al planteo de las derivadas de las inductancias, aplicadas por el MCMA para el cálculo del par. En [97] se hizo lo propio con el CME, presentando un cálculo analítico de las derivadas de las permeancias. Ambas propuestas para obtener las derivadas son preliminares a las de la contribución 4.

En [98] se propuso obtener las inductancias de una MI elemental adoptada como ejemplo mediante una construcción de arcos geométricos, siendo utilizables por el MCMA en reemplazo de las inductancias calculadas con el método AFB. Luego, en [99] se presentó una operatoria algebraica para obtener esas mismas inductancias a partir del CME. En base a ese vínculo algebraico se planteó un enfoque unificado de los dos modelos. En [100] se amplió este enfoque unificado al modelado de las irregularidades geométricas, obteniendo nuevamente las inductancias de la misma MI, esta vez considerando además la apertura de las ranuras.

Capítulo 2

Modelo de Circuitos

Múltiplemente Acoplados

2.1 Introducción

El MCMA representa a la MI con una rama por cada circuito elemental del estator¹ y una malla por cada lazo del rotor. La corriente que circula por esos circuitos induce flujo en ellos mismos y también en los otros debido a su acoplamiento magnético mutuo.

Para resolver las variables eléctricas y magnéticas del MCMA es necesario conocer los valores de las inductancias propias y mutuas de tales circuitos. Esas inductancias, en general, son variables con la posición del rotor, y su derivada respecto de la misma

¹El circuito de cada fase está compuesto por uno o más pares de polos, y cada polo a su vez puede estar formado por una o más bobinas, posibilitando conexiones en serie, paralelo o combinaciones de ambos. La expresión *circuito elemental* del estator se refiere a una subdivisión del arrollamiento de una fase a partir de cuyas combinaciones de conexión eléctrica y acoplamiento magnético ésta resulta completa.

se utiliza en el cálculo del par. Ésto permite a su vez resolver las variables mecánicas, entre ellas la posición del rotor, en base a la cual se actualizan los valores de las inductancias y sus derivadas, completando el ciclo del flujo de variables.

La solución del MCMA requiere la determinación previa de los valores de las inductancias y sus derivadas. Éstas se pueden calcular aplicando el método AFB que se desarrollará en este capítulo, o el modelo CME que se desarrollará en el Cap. 3.

El cálculo de las inductancias aplicando el método AFB se puede implementar sólo con métodos numéricos, y calcular luego las derivadas de la misma forma. Con el CME, en cambio, se pueden calcular tanto las inductancias como sus derivadas en forma numérica o analítica.

El MCMA puede resolverse con las inductancias y sus derivadas obtenidas de una y otra forma, teniendo mayor resolución con la segunda, según se verá en los resultados de cálculo y simulación presentados en los Cap. 4 y 5 respectivamente.

2.2 Modelo de la Máquina de Inducción

Una MI trifásica con rotor de jaula de ardilla en general puede considerarse compuesta por m circuitos elementales ¹ en el estator y n lazos en el rotor. La Fig. 2.1 representa el MCMA de una MI básica adoptada como ejemplo, en la cual el número de circuitos elementales del estator es $m = 3$ y el de lazos en el rotor es $n = 4$.

Al estar el estator trifásico compuesto por sólo tres circuitos, cada uno de éstos resulta ser una fase, como se muestra en la Fig. 2.1(a). En esa figura, L_{ssaa} , L_{ssbb} y L_{sscc} representan las inductancias propias de las fases a , b y c respectivamente, mientras que R_{sa} , R_{sb} y R_{sc} son sus resistencias, e I_{sa} , I_{sb} , I_{sc} las corrientes que circulan por ellas.

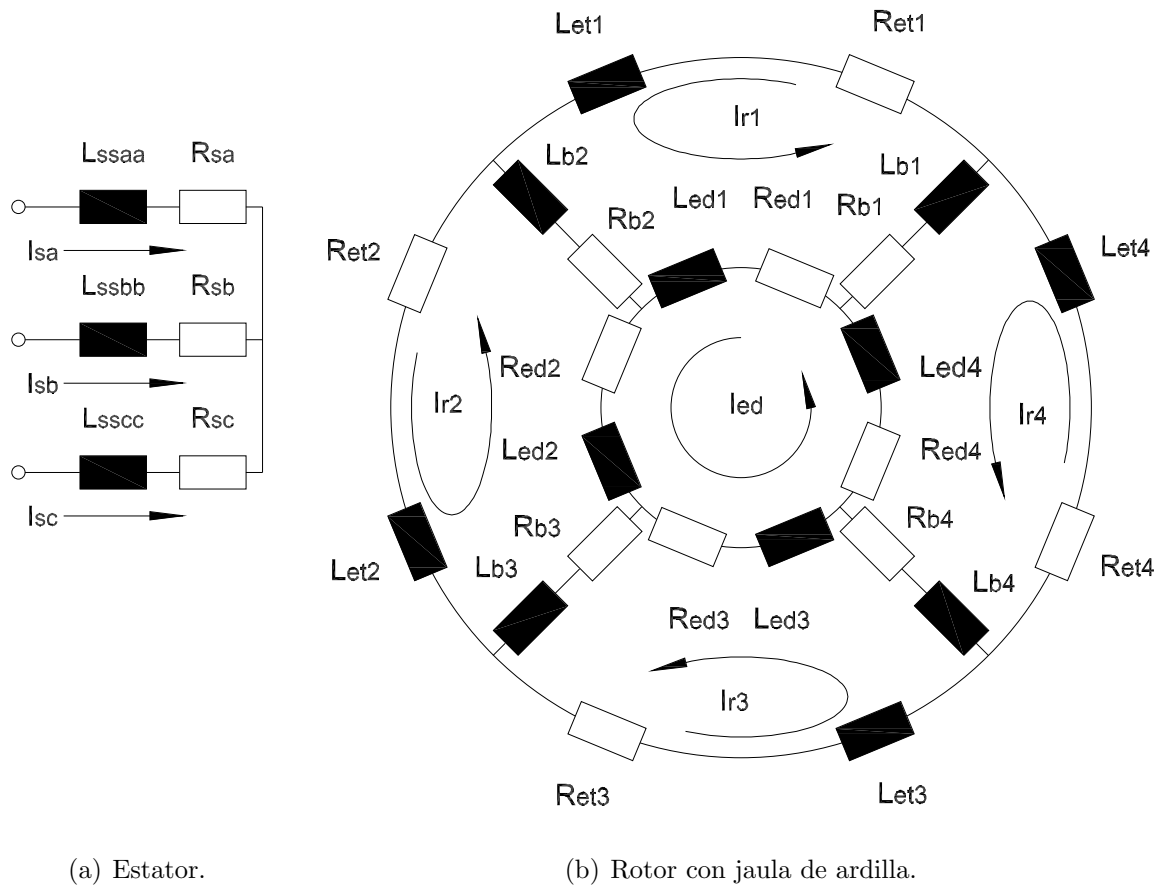


Figura 2.1: Modelo de circuitos múltiplemente acoplados.

Si el número de circuitos elementales hubiera sido mayor a tres, esa figura tendría entonces mayor número de ramas, las cuales estarían eléctricamente conectadas en serie, paralelo o combinaciones de ambos, formando los circuitos completos de las tres fases.

La Fig. 2.1(b) representa a la red eléctrica formada por la jaula de ardilla, en la cual las ramas radiales corresponden a las barras, y los lazos circulares interno y externo a los anillos de cortocircuito delantero y trasero respectivamente. En esa red, L_{bj} son las inductancias de dispersión de las barras, donde $j = 1, 2, 3, 4$, y R_{bj}

sus resistencias; L_{edj} son las inductancias de dispersión de los segmentos del anillo de cortocircuito delantero, R_{edj} sus resistencias; y análogamente L_{etj} y R_{etj} para el anillo trasero.

El modelo debe su nombre al acoplamiento magnético múltiple entre las redes eléctricas descritas del estator y del rotor. Ese acoplamiento, que no tiene representación explícita en la Fig. 2.1, vincula todas las combinaciones de pares de mallas de ambas redes. Vale decir, la corriente que circula por cada una de esas $m + n + 1$ mallas o ramas, que en el ejemplo dado resultan ser ocho, induce flujo en la misma y también en todas las demás.

2.2.1 Circuito eléctrico del estator y del rotor

Teniendo en cuenta el acoplamiento magnético múltiple, las ecuaciones de tensión de la MI se pueden expresar en forma matricial:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_s}{dt}, \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{i}_r + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_r}{dt}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{v} , \mathbf{i} , $\boldsymbol{\lambda}$, son vectores de tensiones, corrientes y flujos enlazados, y los subíndices s y r significan que los parámetros y variables corresponden al estator o al rotor respectivamente. Estos flujos enlazados son los resultantes de sumar los mutuos entre circuitos más los dispersos.

Los vectores de tensiones y corrientes del estator y del rotor, de orden m y $n + 1$ respectivamente, tienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= [v_{s1} \ v_{s2} \ \dots \ v_{sm}]^T, & \mathbf{v}_r &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{i}_s &= [i_{s1} \ i_{s2} \ \dots \ i_{sm}]^T, & \mathbf{i}_r &= [i_{r1} \ i_{r2} \ \dots \ i_{rn} \ i_{ed}]^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En el ejemplo de la Fig. 2.1, (2.2) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= [v_{sa} \ v_{sb} \ v_{sc}]^T, & \mathbf{v}_r &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{i}_s &= [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T, & \mathbf{i}_r &= [i_{r1} \ i_{r2} \ i_{r3} \ i_{r4} \ i_{ed}]^T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En (2.1), los flujos enlazados por los circuitos del estator y del rotor están relacionados con las corrientes que circulan por éstos mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

La matriz \mathbf{R}_s de orden $(m \times m)$ contiene a las resistencias de los circuitos elementales del estator¹:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_{s1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{s2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{sm} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

En el ejemplo de la Fig. 2.1(a), (2.5) resulta:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_{sa} & 0 & 0 \\ 0 & R_{sb} & 0 \\ 0 & 0 & R_{sc} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

La matriz \mathbf{R}_r de orden $((n + 1) \times (n + 1))$ contiene las resistencias del circuito formado por la jaula de ardilla, en el cual cada malla corresponde a un lazo del rotor y cada rama a una barra o segmento de anillo de cortocircuito:

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix}
\left(\begin{array}{c} R_{b1} + R_{b2} \\ + R_{ed1} + R_{et1} \end{array} \right) & -R_{b2} & 0 & \dots & 0 & -R_{b1} & -R_{ed1} \\
-R_{b2} & \left(\begin{array}{c} R_{b2} + R_{b3} \\ + R_{ed2} + R_{et2} \end{array} \right) & -R_{b3} & \dots & 0 & 0 & -R_{ed2} \\
0 & -R_{b3} & \left(\begin{array}{c} R_{b3} + R_{b4} \\ + R_{ed3} + R_{et3} \end{array} \right) & \dots & 0 & 0 & -R_{ed3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \left(\begin{array}{c} R_{b(n-1)} + R_{bn} \\ + R_{ed(n-1)} + R_{et(n-1)} \end{array} \right) & -R_{bn} & -R_{ed(n-1)} \\
-R_{b1} & 0 & 0 & \dots & -R_{bn} & \left(\begin{array}{c} R_{bn} + R_{b1} \\ + R_{edn} + R_{etn} \end{array} \right) & -R_{edn} \\
-R_{ed1} & -R_{ed2} & -R_{ed3} & \dots & -R_{ed(n-1)} & -R_{edn} & \sum_{j=1}^n R_{edj}
\end{bmatrix} \quad (2.7)$$

En caso de ser uniforme la distribución de la resistencia en las barras y en cada uno de los anillos, se cumple:

$$R_{b1} = R_{b2} = \dots = R_{bn} = R_b, \quad (2.8)$$

$$R_{ed1} = R_{ed2} = \dots = R_{edn} = R_{ed}, \quad (2.9)$$

$$R_{et1} = R_{et2} = \dots = R_{etn} = R_{et}, \quad (2.10)$$

y el desarrollo de la matriz \mathbf{R}_r dada en (2.7), sustituyendo en ella a (2.8)-(2.10), se reduce a:

$\mathbf{R}_r =$

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_b & 0 & \dots & 0 & -R_b & -R_{ed} \\ -R_b & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & \dots & 0 & 0 & -R_{ed} & \\ 0 & -R_b & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & \dots & 0 & 0 & -R_{ed} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_b & -R_{ed} \\ -R_b & 0 & 0 & \dots & -R_b & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_{ed} \\ -R_{ed} & -R_{ed} & -R_{ed} & \dots & -R_{ed} & -R_e & nR_{ed} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

En el ejemplo de la Fig. 2.1(b), (2.11) resulta:

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_b & 0 & -R_b & -R_{ed} \\ -R_b & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_b & 0 & -R_{ed} \\ 0 & -R_b & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_b & -R_{ed} \\ -R_b & 0 & -R_b & \left(\begin{array}{c} 2R_b \\ +R_{ed}+R_{et} \end{array} \right) & -R_{ed} \\ -R_{ed} & -R_{ed} & -R_{ed} & -R_{ed} & 4R_{ed} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Continuando con los parámetros matriciales en (2.1), \mathbf{L}_{ss} es una matriz de orden $(m \times m)$ que contiene las inductancias propias y mutuas de los circuitos elementales del estator¹:

$$\mathbf{L}_{ss} = \begin{bmatrix} (L_{ss11} + L_{sl1}) & L_{ss12} & \dots & L_{ss1m} \\ L_{ss21} & (L_{ss22} + L_{sl2}) & \dots & L_{ss2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{ssm1} & L_{ssm2} & \dots & (L_{ssmm} + L_{slm}) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde L_{ss11} es la inductancia propia del circuito 1 del estator, $L_{ss12} = L_{ss21}$ es la inductancia mutua entre los circuitos 1 y 2, etc. y L_{sli} es la inductancia de dispersión del circuito elemental i .

En el ejemplo de la Fig. 2.1(a), (2.13) resulta:

$$\mathbf{L}_{ss} = \begin{bmatrix} (L_{ssaa} + L_{sla}) & L_{ssab} & L_{ssac} \\ L_{ssba} & (L_{ssbb} + L_{slb}) & L_{ssbc} \\ L_{ssca} & L_{sscb} & (L_{sscc} + L_{slc}) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

donde L_{ssaa} es la inductancia propia de la fase a del estator, $L_{ssab} = L_{ssba}$ es la inductancia mutua entre las fases a y b , etc. y L_{sla} , L_{slb} , L_{slc} son las inductancias de dispersión de las tres fases.

Como puede observarse, las matrices dadas en (2.13) y (2.14) son simétricas, los elementos en su diagonal principal son inductancias propias y los restantes son inductancias mutuas.

Continuando con los parámetros matriciales en (2.1), \mathbf{L}_{rr} es una matriz de orden $((n + 1) \times (n + 1))$ que contiene las inductancias de los lazos del rotor:

$$\mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} L_{rr11} \\ +L_{b1}+L_{b2} \\ +L_{ed1}+L_{et1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr12} \\ -L_{b2} \end{pmatrix} & L_{rr13} & \dots & L_{rr1(n-1)} & \begin{pmatrix} L_{rr1n} \\ -L_{b1} \end{pmatrix} & -L_{ed1} \\ \begin{pmatrix} L_{rr21} \\ -L_{b2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr22} \\ +L_{b2}+L_{b3} \\ +L_{ed2}+L_{et2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr23} \\ -L_{b3} \end{pmatrix} & \dots & L_{rr2(n-1)} & L_{rr2n} & -L_{ed2} \\ L_{rr31} & \begin{pmatrix} L_{rr32} \\ -L_{b3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr33} \\ +L_{b3}+L_{b4} \\ +L_{ed3}+L_{et3} \end{pmatrix} & \dots & L_{rr3(n-1)} & L_{rr3n} & -L_{ed3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{rr1(n-1)} & L_{rr2(n-1)} & L_{rr3(n-1)} & \dots & \begin{pmatrix} L_{rr(n-1)(n-1)} \\ +L_{b(n-1)}+L_{bn} \\ +L_{ed(n-1)}+L_{et(n-1)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr(n-1)n} \\ -L_{bn} \end{pmatrix} & -L_{ed(n-1)} \\ \begin{pmatrix} L_{rrn1} \\ -L_{b1} \end{pmatrix} & L_{rrn2} & L_{rrn3} & \dots & \begin{pmatrix} L_{rrn(n-1)} \\ -L_{bn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rrnn} \\ +L_{bn}+L_{b1} \\ +L_{edn}+L_{etn} \end{pmatrix} & -L_{edn} \\ -L_{ed1} & -L_{ed2} & -L_{ed3} & \dots & -L_{ed(n-1)} & -L_{edn} & \sum_{j=1}^n L_{edj} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En caso de ser uniforme la distribución de la inductancia de dispersión en las barras y en cada uno de los anillos, se cumple:

$$L_{b1} = L_{b2} = \dots = L_{bn} = L_b, \quad (2.16)$$

$$L_{ed1} = L_{ed2} = \dots = L_{edn} = L_{ed}, \quad (2.17)$$

$$L_{et1} = L_{et2} = \dots = L_{etn} = L_{et}, \quad (2.18)$$

y el desarrollo de la matriz \mathbf{L}_{rr} dada en (2.15), sustituyendo en ella a (2.16)-(2.18), se reduce a:

$$\mathbf{L}_{rr} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} L_{rr11}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr12} \\ -L_b \end{pmatrix} & L_{rr13} & \dots & L_{rr1(n-1)} & \begin{pmatrix} L_{rr1n} \\ -L_b \end{pmatrix} & -L_{ed} \\ \begin{pmatrix} L_{rr21} \\ -L_b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr22}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr23} \\ -L_b \end{pmatrix} & \dots & L_{rr2(n-1)} & L_{rr2n} & -L_{ed} \\ L_{rr31} & \begin{pmatrix} L_{rr32} \\ -L_b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr33}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & \dots & L_{rr3(n-1)} & L_{rr3n} & -L_{ed} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{rr1(n-1)} & L_{rr2(n-1)} & L_{rr3(n-1)} & \dots & \begin{pmatrix} L_{rr(n-1)(n-1)} \\ +2L_b+L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr(n-1)n} \\ -L_b \end{pmatrix} & -L_{ed} \\ \begin{pmatrix} L_{rrn1} \\ -L_b \end{pmatrix} & L_{rrn2} & L_{rrn3} & \dots & \begin{pmatrix} L_{rrn(n-1)} \\ -L_b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rrnn}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & -L_{ed} \\ -L_{ed} & -L_{ed} & -L_{ed} & \dots & -L_{ed} & -L_{ed} & nL_{ed} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

En el ejemplo de la Fig. 2.1(b), (2.19) resulta:

$$\mathbf{L}_{rr} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} L_{rr11}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr12} \\ -L_b \end{pmatrix} & L_{rr13} & \begin{pmatrix} L_{rr14} \\ -L_b \end{pmatrix} & -L_{ed} \\ \begin{pmatrix} L_{rr21} \\ -L_b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr22}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr23} \\ -L_b \end{pmatrix} & L_{rr24} & -L_{ed} \\ L_{rr31} & \begin{pmatrix} L_{rr32} \\ -L_b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} L_{rr33}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & L_{rr34} & -L_{ed} \\ \begin{pmatrix} L_{rr41} \\ -L_b \end{pmatrix} & L_{rr42} & L_{rr43} & \begin{pmatrix} L_{rr44}+2L_b \\ +L_{ed}+L_{et} \end{pmatrix} & -L_{ed} \\ -L_{ed} & -L_{ed} & -L_{ed} & -L_{ed} & 4L_{ed} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff al anillo trasero de la jaula de ardilla representada en la Fig. 2.1(b) bajo las condiciones de uniformidad del mismo dadas en (2.10) y (2.18), se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{j=n} L_{et} \frac{di_{rj}}{dt} + R_{et} i_{rj} = \frac{d\lambda_{et}}{dt}, \quad (2.21)$$

donde λ_{et} es el flujo enlazado por ese anillo, inducido sólo en caso de circulación de corrientes homopolares.

En condiciones simétricas, el flujo enlazado por ambos anillos es nulo:

$$\lambda_{ed} = \lambda_{et} = 0, \quad (2.22)$$

anulándose también entonces (2.21):

$$\sum_{j=1}^{j=n} L_{et} \frac{di_{rj}}{dt} + R_{et} i_{rj} = 0. \quad (2.23)$$

Al anillo delantero, siendo uno de los lazos del rotor adoptados en la Fig. 2.1(b), bajo las condiciones de uniformidad dadas en (2.9) y (2.17) corresponde la ecuación:

$$L_{ed} \frac{di_{ed}}{dt} + R_{ed} i_{ed} - \left(\sum_{j=1}^{j=n} L_{ed} \frac{di_{rj}}{dt} + R_{ed} i_{rj} \right) = \frac{d\lambda_{ed}}{dt}, \quad (2.24)$$

cuyo flujo enlazado también se anula:

$$L_{ed} \frac{di_{ed}}{dt} + R_{ed} i_{ed} - \left(\sum_{j=1}^{j=n} L_{ed} \frac{di_{rj}}{dt} + R_{ed} i_{rj} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Si además de cumplirse las condiciones de uniformidad de los dos anillos dadas en (2.9), (2.10), (2.17) y (2.18), y de estar sana la aislación, los dos anillos son iguales, se cumple:

$$R_{ed} = R_{et}, \quad L_{ed} = L_{et}. \quad (2.26)$$

Bajo esta condición conjunta de uniformidad e igualdad de los dos anillos y de aislación sana, se puede sustituir (2.23) en (2.25), resultando [11]:

$$L_{ed} \frac{di_{ed}}{dt} + R_{ed} i_{ed} = 0. \quad (2.27)$$

En (2.27), a partir de una condición inicial nula, la corriente en el anillo delantero mantiene ese valor en todo instante de tiempo. Esa corriente es el último elemento del vector \mathbf{i}_r dado en (2.2) y (2.3).

Como la condición conjunta anterior incluye la de aislación sana, se cumple (2.22), siendo entonces también nulo en (2.4) el último elemento del vector $\boldsymbol{\lambda}_r$, que es el flujo enlazado por el anillo delantero λ_{ed} .

La anulación del último elemento de los vectores \mathbf{i}_r y $\boldsymbol{\lambda}_r$, permite reducir el orden de (2.4). La matriz \mathbf{L}_{rr} pasa de tener orden $((n+1) \times (n+1))$ a tener orden $(n \times n)$, prescindiendo de la última fila y columna en sus desarrollos dados en (2.11), (2.12), (2.19) y (2.20).

Como puede observarse, la submatriz formada por las primeras $n \times n$ líneas en (2.15), así como las matrices dadas en (2.19) y (2.20) son simétricas, los elementos en su diagonal principal son inductancias propias y los restantes son inductancias mutuas.

Continuando con los parámetros matriciales en (2.1), \mathbf{L}_{sr} es una matriz de orden $(m \times n)$ compuesta por las inductancias mutuas entre los circuitos elementales del estator¹ y los lazos del rotor, y \mathbf{L}_{rs} una matriz de orden $(n \times m)$, compuesta por las inductancias mutuas entre los lazos del rotor y los circuitos elementales del estator¹, siendo ambas traspuestas entre sí:

$$\mathbf{L}_{sr} = \mathbf{L}_{rs}^T = \begin{bmatrix} L_{sr11} & L_{sr12} & \dots & L_{sr1n} \\ L_{sr21} & L_{sr22} & \dots & L_{sr2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{srm1} & L_{srm2} & \dots & L_{srmn} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

En el ejemplo de la Fig. 2.1, (2.28) resultan de orden (3×4) y $(4 \times 3)^T$:

$$\mathbf{L}_{sr} = \mathbf{L}_{rs}^T = \begin{bmatrix} L_{sra1} & L_{sra2} & L_{sra3} & L_{sra4} \\ L_{srb1} & L_{srb2} & L_{srb3} & L_{srb4} \\ L_{src1} & L_{src2} & L_{src3} & L_{src4} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Todos los elementos de las matrices \mathbf{L}_{ss} , \mathbf{L}_{rr} y \mathbf{L}_{sr} , excepto las inductancias de dispersión de las fases del estator y de las barras y anillos del rotor, se calculan utilizando el método AFB. Esas inductancias, en general, son función de la posición del rotor.

2.2.2 Par electromagnético

Si a partir de la MI desconectada se energiza sólo uno de sus circuitos, por ejemplo la fase a del estator, una fracción de la energía aportada es almacenada en el campo de acoplamiento y otra es entregada al sistema mecánico en forma de trabajo. Ese balance de energía puede expresarse como:

$$dW = i_{sa} d\lambda_{sa} - T_e d\theta, \quad (2.30)$$

donde dW es el incremento infinitesimal de la energía almacenada en el campo de acoplamiento, $i_{sa} d\lambda_{sa} = i_{sa} e_{sa} dt$ el incremento de energía aportado al mismo por la fase a , T_e el par electromagnético ejercido por el campo sobre el rotor y $T_e d\theta$ el incremento infinitesimal de trabajo mecánico desarrollado por él.

Dado que las variables en (2.30) son separables, puede escribirse:

$$dW(\lambda_{sa}, \theta) = \frac{\partial W(\lambda_{sa}, \theta)}{\partial \lambda_{sa}} d\lambda_{sa} + \frac{\partial W(\lambda_{sa}, \theta)}{\partial \theta} d\theta. \quad (2.31)$$

Comparando (2.30) y (2.31), el par debido a la energización parcial resulta:

$$T_e = -\frac{\partial W(\lambda_{sa}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.32)$$

La energía almacenada en el campo de acoplamiento se obtiene con la integración:

$$W = \int_0^{\lambda_{sa}} i_{sa}(\lambda_{sa}, \theta) d\lambda_{sa}, \quad (2.33)$$

la cual se expresa en función del flujo enlazado para que resulte sustituible en (2.32) y así calcular el par con esta energización parcial:

$$W(\lambda_{sa}, \theta) = \int_0^{\lambda_{sa}} \frac{\lambda_{sa}}{L_{ssaa}(\theta)} d\lambda_{sa} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{sa}^2}{L_{ssaa}(\theta)}. \quad (2.34)$$

Energizando a continuación otro circuito, por ejemplo la fase b , y manteniendo constante el valor de λ_{sa} , la integración (2.33) adquiere un nuevo término:

$$W = \int_0^{\lambda_{sa}} i_{sa}(\lambda_{sa}, \theta) d\lambda_{sa} + \int_0^{\lambda_{sb}} i_{sb}(\lambda_{sa} = cte, \lambda_{sb}, \theta) d\lambda_{sb}. \quad (2.35)$$

Un incremento diferencial de la energía almacenada en el campo de acoplamiento calculada con (2.35) tiene las variables separables λ_{sa} , λ_{sb} y θ , de modo que el par debido a esta nueva energización parcial se obtiene con la expresión:

$$T_e = -\frac{\partial W(\lambda_{sa}, \lambda_{sb}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.36)$$

Para sustituir (2.35) en (2.36), debe ser expresada en función de los flujos enlazados. Durante la energización de la fase a circuló corriente sólo por la misma, de modo que la sustitución correspondiente al primer término en (2.35) es la hecha en (2.34): $i_{sa} = \frac{\lambda_{sa}}{L_{ssaa}(\theta)}$. Pero durante la energización de la fase b circuló corriente por ambas fases, con las cuales hay que relacionar λ_{sb} en el segundo término. El sistema formado por (2.4), al estar expresado en función de inductancias, descompone el flujo enlazado por un circuito en términos parciales correspondientes a los aportes debidos a las corrientes que circulan por los otros, pero no descompone la corriente que circula por un circuito en términos parciales correspondientes a sus aportes a los flujos enlazados por los otros. Compactando ese sistema en la expresión:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L} \mathbf{i}, \quad (2.37)$$

en la cual los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ e \mathbf{i} son de orden $(m + n)$, y la matriz \mathbf{L} es de orden $(m + n) \times (m + n)$, la descomposición buscada se obtiene a través de la matriz inversa de las inductancias:

$$\mathbf{i} = \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.38)$$

cuyos elementos son dimensionalmente recíprocos. Esos parámetros, que no tienen nombre, se simbolizan Γ [18][101], resultando:

$$W(\lambda_{sa}, \lambda_{sb}, \theta) = W(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \int_0^{\lambda_1} \Gamma_{11}(\theta) \lambda_1 d\lambda_1 \quad (2.39)$$

$$+ \int_0^{\lambda_2} \Gamma_{12}(\theta) \lambda_1 d\lambda_2 + \int_0^{\lambda_2} \Gamma_{22}(\theta) \lambda_2 d\lambda_2.$$

La energía almacenada en el campo de acoplamiento puede expresarse en forma matricial:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1,1}(\theta) & \Gamma_{1,2}(\theta) \\ \Gamma_{2,1}(\theta) & \Gamma_{2,2}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Generalizando el procedimiento hasta energizar todos los circuitos restantes, resulta:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{m+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{1,1}(\theta) & \Gamma_{1,2}(\theta) & \dots & \Gamma_{1,3+S_r}(\theta) \\ \Gamma_{2,1}(\theta) & \Gamma_{2,2}(\theta) & \dots & \Gamma_{2,3+S_r}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{m+n,1}(\theta) & \Gamma_{m+n,2}(\theta) & \dots & \Gamma_{m+n,m+n}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_{m+n} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Finalmente, se obtiene una expresión para cálculo del par electromagnético:

$$T_e = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{m+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_{1,1}(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial \Gamma_{1,2}(\theta)}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{1,m+n}(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Gamma_{2,1}(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial \Gamma_{2,2}(\theta)}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{2,m+n}(\theta)}{\partial \theta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Gamma_{m+n,1}(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial \Gamma_{m+n,2}(\theta)}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{m+n,m+n}(\theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_{m+n} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Se puede evitar el cambio de notación y la inversión de la matriz de inductancias, reemplazando en la secuencia de energización anterior a la energía almacenada en el campo de acoplamiento por la función coenergía [7][21][61]. Energizando nuevamente la fase a a partir de la MI desconectada, la coenergía del campo de acoplamiento se define como:

$$W' = i_{sa} \lambda_{sa} - W, \quad (2.43)$$

cuyo incremento infinitesimal resulta:

$$dW' = d(i_{sa} \lambda_{sa}) - dW. \quad (2.44)$$

Desarrollando el diferencial $d(i_{sa} \lambda_{sa})$ y relacionando (2.44) con (2.30), se obtiene:

$$dW' = \lambda_{sa} di_{sa} + T_e d\theta. \quad (2.45)$$

Dado que las variables en (2.44) son separables, puede escribirse:

$$dW'(i_{sa}, \theta) = \frac{\partial W'(i_{sa}, \theta)}{\partial i_{sa}} di_{sa} + \frac{\partial W'(i_{sa}, \theta)}{\partial \theta} d\theta. \quad (2.46)$$

Comparando (2.45) y (2.46), el par debido a la energización parcial resulta:

$$T_e = \frac{\partial W'(i_{sa}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.47)$$

La coenergía del campo de acoplamiento se obtiene con la integración:

$$W' = \int_0^{i_{sa}} \lambda_{sa}(i_{sa}, \theta) di_{sa}, \quad (2.48)$$

la cual se expresa en función de la corriente para que resulte sustituible en (2.47) y así calcular el par con esta energización parcial:

$$W'(i_{sa}, \theta) = \int_0^{i_{sa}} L_{ssaa}(\theta) i_{sa} di_{sa} = \frac{1}{2} L_{ssaa}(\theta) i_{sa}^2. \quad (2.49)$$

Energizando a continuación la fase b , y manteniendo constante el valor de i_{sa} , la integración (2.48) adquiere un nuevo término:

$$W' = \int_0^{i_{sa}} \lambda_{sa}(i_{sa}, \theta) di_{sa} + \int_0^{i_{sb}} \lambda_{sb}(i_{sa} = cte, i_{sb}, \theta) di_{sb}, \quad (2.50)$$

Un incremento diferencial de la coenergía del campo de acoplamiento calculada con (2.50) tiene las variables separables i_{sa} , i_{sb} y θ , de modo que el par debido a esta nueva energización parcial se obtiene con la expresión:

$$T_e = \frac{\partial W'(i_{sa}, i_{sb}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.51)$$

Para sustituir (2.50) en (2.51), debe ser expresada en función de los flujos enlazados. Durante la energización de la fase a varió sólo el flujo enlazado por la misma, de modo que la sustitución correspondiente al primer término en (2.50) es la hecha en (2.49): $\lambda_{sa} = L_{ssaa}(\theta) i_{sa}$. Pero durante la energización de la fase b variaron los flujos enlazados por ambas fases, con los cuales hay que relacionar i_{sb} en el segundo término, resultando:

$$\begin{aligned} W'(i_{sa}, i_{sb}, \theta) &= \int_0^{i_{sa}} L_{ssaa}(\theta) i_{sa} di_{sa} \\ &+ \int_0^{i_{sb}} L_{ssab}(\theta) i_{sa} di_{sb} + \int_0^{i_{sb}} L_{ssbb}(\theta) i_{sb} di_{sb}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La coenergía del campo de almacenamiento puede expresarse en forma matricial:

$$W'(i_{sa}, i_{sb}, \theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{sa} & i_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ssaa}(\theta) & L_{ssab}(\theta) \\ L_{ssba}(\theta) & L_{ssbb}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Generalizando el procedimiento hasta energizar todos los circuitos restantes del sistema formado por (2.4), resulta:

$$W' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s^T & \mathbf{i}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Finalmente, se obtiene otra expresión para el cálculo del par electromagnético, ésta en función de las derivadas de las inductancias:

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s^T & \mathbf{i}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{L}_{ss}(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{L}_{sr}(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{L}_{rs}(\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{L}_{rr}(\theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

2.3 Cálculo de inductancias

En la sección transversal de una máquina eléctrica, la posición angular puede expresarse en función de una referencia fija sobre el estator, o bien sobre el rotor, como se representa en la Fig. 2.2. En la misma, ϕ^s y ϕ^r son respectivamente esas posiciones angulares, y θ es la posición del rotor.

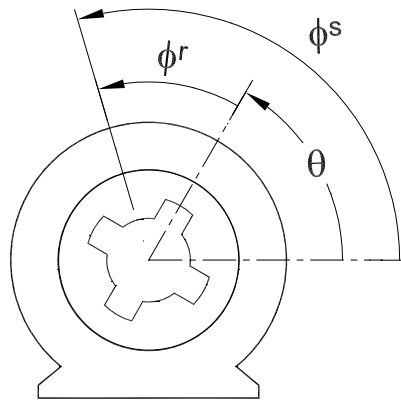
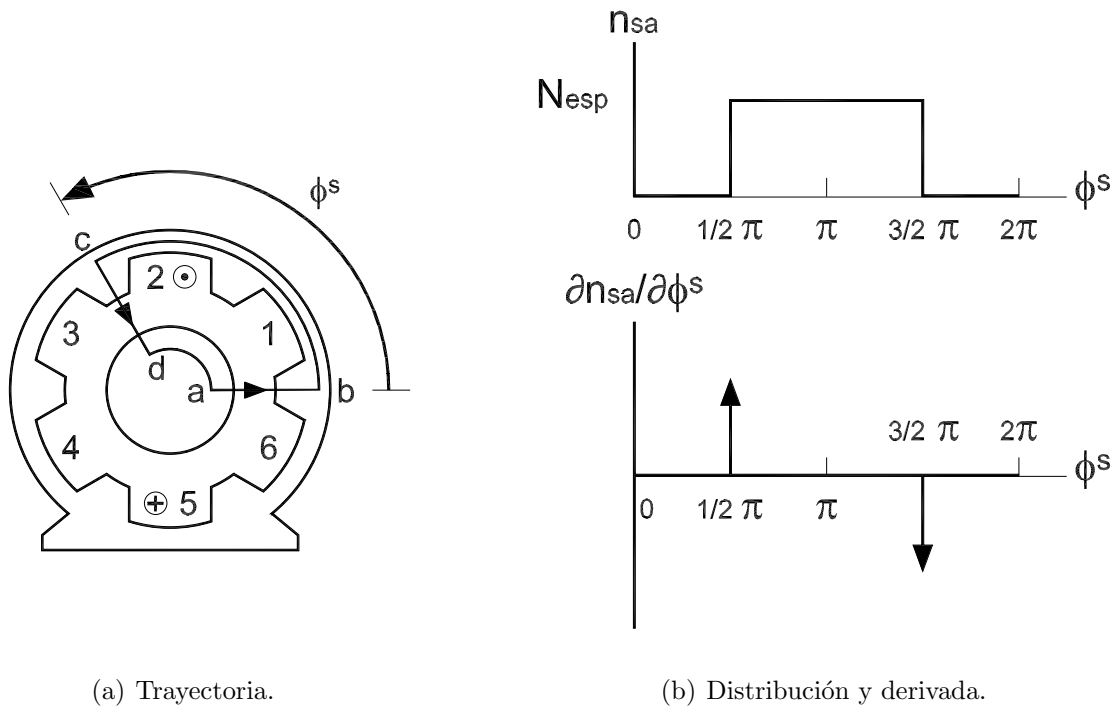


Figura 2.2: Posiciones angulares respecto de una referencia fija sobre el estator, de una referencia fija sobre el rotor y posición del rotor.

El pasaje de una referencia fija sobre el estator a una fija sobre el rotor se hace con la siguiente expresión [7]:

$$\phi^s = \theta + \phi^r. \quad (2.56)$$



(a) Trayectoria.

(b) Distribución y derivada.

Figura 2.3: Trayectoria de Ampere, distribución de la fase a del estator y su derivada.

2.3.1 Distribuciones de bobinados

La distribución de un bobinado es una función espacial rectangular con su misma posición en el entrehierro.

La Fig. 2.3(a) representa la sección transversal de la misma MI trifásica que fue adoptada como ejemplo en la Fig. 2.1, considerando además que ésta tiene un par de polos y una ranura por polo y por fase, por lo tanto seis ranuras en el estator.

En el plano de la sección transversal, una trayectoria de Ampere $abcda$ tiene dos lados radiales \overline{ab} y \overline{cd} , y dos arcos de circunferencia \widehat{bc} y \widehat{da} . Cada uno de los lados radiales ocupa una única posición angular ϕ^s . El \overline{ab} se mantiene fijo en la referencia sobre el estator $\phi^s = 0$, mientras que el \overline{cd} se mueve adoptando valores crecientes de posición ϕ^s , con los arcos de circunferencia adaptando su longitud a esos cambios de

posición para mantener cerrada la trayectoria.

En su movimiento antihorario, el lado radial \overline{cd} cruza sucesivamente las seis ranuras del estator. Considerando que los lados activos del arrollamiento de la fase a están alojados en las ranuras 2 y 5, como se indica en la figura, el lado radial \overline{cd} pasa por ellos en las posiciones $\phi^s = \frac{1}{2}\pi$ y $\phi^s = \frac{3}{2}\pi$ respectivamente.

La Fig. 2.3(b) muestra una función espacial rectangular y dos impulsos delta de Dirac, ambos graficados en función de la posición angular ϕ^s del lado radial \overline{cd} en su recorrido de una vuelta. En las posiciones pertenecientes al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right)$, la trayectoria no rodea ningún conductor de la fase a , por lo tanto la FMM correspondiente a esa fase en la trayectoria es nula. En correspondencia con esto, la función espacial rectangular es nula en ese intervalo.

En las posiciones del lado radial \overline{cd} pertenecientes al intervalo $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, la trayectoria rodea sólo a los conductores alojados en la ranura 2. Si se adopta como sentido de referencia de la corriente en la fase a al entrante por la ranura 5 y saliente por la 2, indicado en la figura, el sentido de referencia de la FMM inducida por esta fase en la trayectoria es el antihorario indicado también en la figura. En correspondencia con esto, la función espacial rectangular tiene una amplitud proporcional a la FMM inducida en la trayectoria, dada por el número de espiras N_{esp} , y el signo positivo correspondiente al sentido de referencia.

En las posiciones pertenecientes al intervalo $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, la trayectoria enlaza además a los conductores alojados en la ranura 5, por lo tanto a la bobina completa. La FMM inducida por la fase a en la trayectoria es entonces nula. En correspondencia con esto, la función espacial rectangular también es nula en ese intervalo.

Resumiendo, la FMM inducida por la fase a en la trayectoria de Ampere \mathcal{F}_{sa-TA} cuyo lado radial \overline{cd} ocupa una posición ϕ^s dada, es proporcional a la función espacial rectangular graficada en la Fig. 2.3(b). Designando a esta última como $n_{sa}(\phi^s)$, esa FMM y la función quedan relacionados por la expresión:

$$\mathcal{F}_{sa-TA}(\phi^s, i_{sa})[\text{A-esp}] = n_{sa}(\phi^s)[\text{esp}] i_{sa}[\text{A}]. \quad (2.57)$$

En la terminología del método AFB, la función espacial rectangular $n_{sa}(\phi^s)$ se llama *distribución de bobinados* de la fase a .

En cuanto a la gráfica con los dos impulsos delta de Dirac, ésta representa a la derivada de la distribución de bobinados de la fase a respecto de la posición angular ϕ^s .

La FMM inducida en la trayectoria de Ampere por la corriente en los lados activos alojados en la ranura 2 tiene el sentido antihorario de referencia indicado en la Fig. 2.3(a). El paso del lado radial \overline{cd} por la posición de esa ranura, produce en la FMM un incremento finito positivo. En correspondencia con esto, el impulso delta de Dirac en esa posición es también positivo.

Analogamente, la FMM inducida en la trayectoria de Ampere por la corriente en los lados activos alojados en la ranura 5 tiene sentido horario opuesto al de referencia. El paso del lado radial \overline{cd} por la posición de esa ranura, produce en la FMM un incremento finito negativo. En correspondencia con esto, el impulso delta de Dirac en esa posición es también negativo.

Volviendo a la distribución de bobinados, ésta puede obtenerse con la suma de dos funciones escalón de Heaviside, una para el flanco ascendente y otra para el descendente. En el caso de la bobina de la fase a :

$$n_{sa}(\phi^s) = N_{esp} \text{Heav} \left(\phi^s - \frac{1}{2}\pi \right) - N_{esp} \text{Heav} \left(\phi^s - \frac{3}{2}\pi \right). \quad (2.58)$$

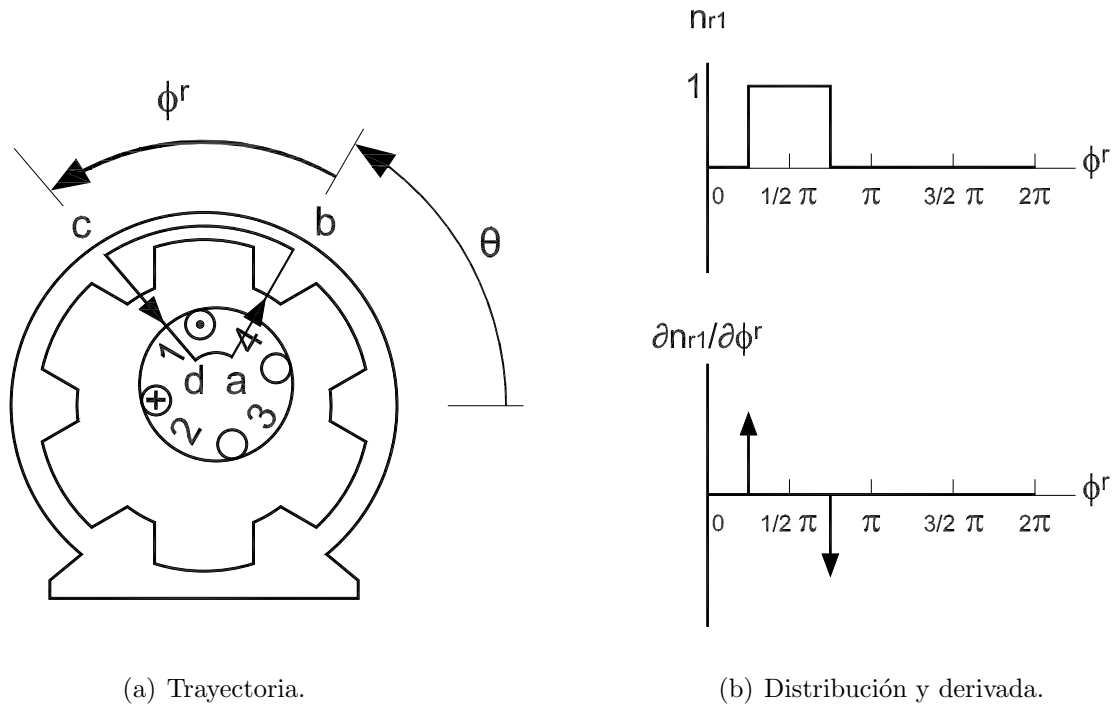


Figura 2.4: Trayectoria de Ampere, distribución del lazo 1 del rotor y su derivada.

En general, si i e ii son las ranuras en las que se alojan los conductores activos de una bobina x , y $\phi_{ss}^s(i)$, $\phi_{ss}^s(ii)$ sus posiciones en un ME, la distribución de esa bobina se obtiene con:

$$n_{sx}(\phi^s) = N_{esp} \text{Heav}(\phi^s - \phi_{ss}^s(i)) - N_{esp} \text{Heav}(\phi^s - \phi_{ss}^s(ii)). \quad (2.59)$$

La distribución de bobinados no depende del entrehierro, y puede definirse como el número de espiras de un arrollamiento, afectado por su signo, encerrado por la trayectoria en cada posición del lado radial \overline{cd} .

Para obtener la distribución de bobinados de un lazo del rotor se procede en modo análogo. Las Fig. 2.4(a) y 2.5(a) representan la sección transversal de la misma MI, que además incluye a las barras del rotor liso bajo la forma de círculos superpuestos

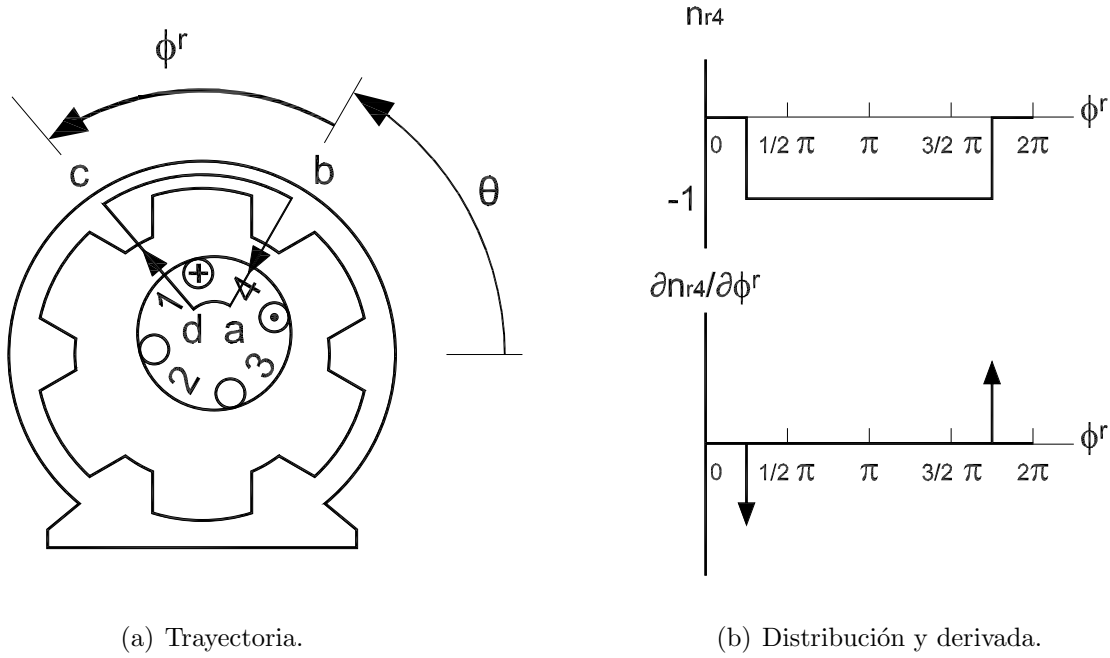


Figura 2.5: Trayectoria de Ampere, distribución del lazo 4 del rotor y su derivada.

al núcleo. La numeración indicada en el rotor es la de los lazos, y la trayectoria de Ampere en ambas Fig. tiene su lado radial fijo en la posición $\phi^r = 0$.

En la Fig. 2.4(a), si se adopta como sentido de referencia de la corriente en el lazo 1 del rotor al indicado en las ranuras adyacentes a éste, su distribución de bobinados en un MR, graficada en la Fig. 2.4(b) se expresa como:

$$n_{r1}(\phi^r) = \text{Heav}\left(\phi^r - \frac{1}{4}\pi\right) - \text{Heav}\left(\phi^r - \frac{3}{4}\pi\right), \quad (2.60)$$

y en un ME:

$$n_{r1}(\phi^s, \theta) = \text{Heav}\left(\phi^s - \left(\frac{1}{4}\pi + \theta\right)\right) - \text{Heav}\left(\phi^s - \left(\frac{3}{4}\pi + \theta\right)\right). \quad (2.61)$$

En la Fig. 2.5(a), si se adopta como sentido de referencia de la corriente en el lazo 4 del rotor al indicado en las ranuras adyacentes a éste, su distribución en un MR se

expresa como:

$$n_{r4}(\phi^r) = \text{Heav}\left(\phi^r - \frac{7}{4}\pi\right) - \text{Heav}\left(\phi^r - \frac{1}{4}\pi\right), \quad (2.62)$$

y en un ME:

$$n_{r4}(\phi^s, \theta) = \text{Heav}\left(\phi^s - \left(\frac{7}{4}\pi + \theta\right)\right) - \text{Heav}\left(\phi^s - \left(\frac{1}{4}\pi + \theta\right)\right). \quad (2.63)$$

En general, si un lazo genérico j del rotor está ubicado entre las ranuras j y $j + 1$, cuyas posiciones en un MR son, respectivamente, $\phi_{rs}^r(j)$ y $\phi_{rs}^r(j + 1)$, la distribución de ese lazo se obtiene con:

$$n_{rj}(\phi^r) = \text{Heav}\left(\phi^r - \phi_{rs}^r(j)\right) - \text{Heav}\left(\phi^r - \phi_{rs}^r(j + 1)\right), \quad (2.64)$$

y en un ME:

$$n_{rj}(\phi^s, \theta) = \text{Heav}\left(\phi^s - \left(\phi_{rs}^r(j) + \theta\right)\right) - \text{Heav}\left(\phi^s - \left(\phi_{rs}^r(j + 1) + \theta\right)\right). \quad (2.65)$$

Comparando las Fig. 2.4(a) y 2.5(a), puede notarse que en la primera la FMM inducida en la trayectoria de Ampere tiene sentido antihorario, mientras que en la segunda tiene sentido horario. En correspondencia con esta inversión, en las gráficas de las Fig. 2.4(b) y 2.5(b) la distribución de bobinados del lazo 1 es una función espacial rectangular positiva cuyo ancho es igual a un paso de diente del rotor, mientras que la del 4 es una función negativa cuyo ancho es igual a la vuelta completa menos un paso de diente.

Para analizar esta diferencia, la Fig. 2.6 muestra las gráficas de distribución de los cuatro lazos del rotor. Las correspondientes a los lazos 2 y 3, son una copia desfasada de la gráfica del lazo 1, mientras que la del 4 mantiene con los anteriores la diferencia mencionada, que equivale a un desplazamiento en ordenadas igual a la amplitud de los pulsos.

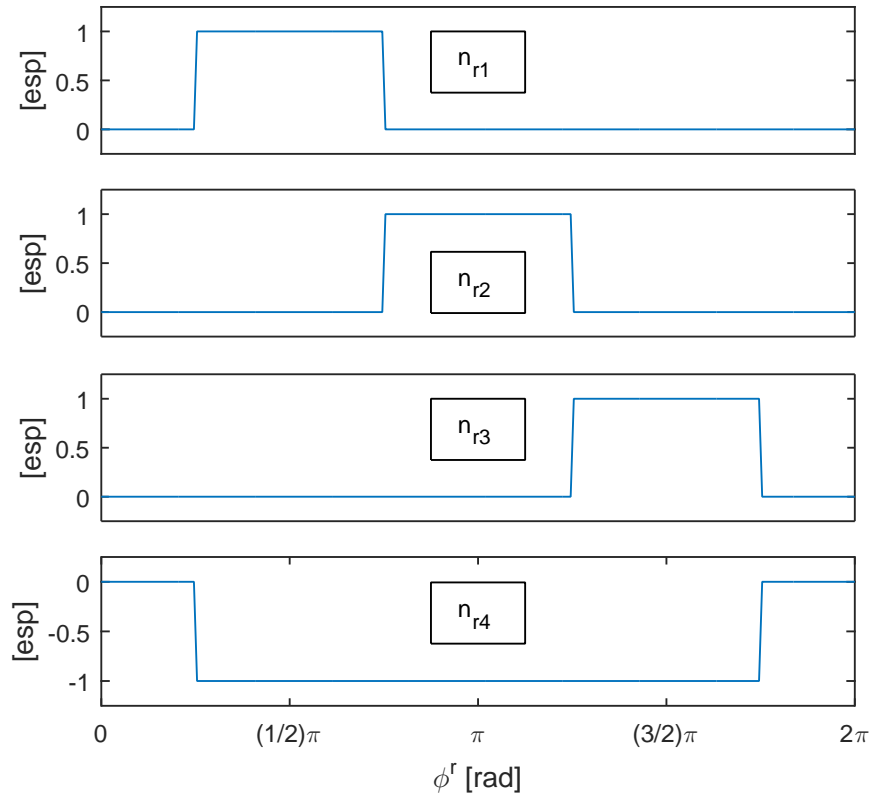


Figura 2.6: Distribución de los lazos del rotor de las Fig. 2.4(a) y 2.5(a).

Esta particularidad en la distribución de bobinados del lazo 4 se debe a que éste ocupa el intervalo angular que contiene a la posición del lado radial \overline{ab} .

Si se hubiera adoptado en cambio una posición de ese lado contenida en el intervalo angular que ocupa otro de los lazos del rotor, sería ese otro lazo el que tendría un pulso de distribución desplazado en ordenadas. Por lo tanto, la distribución de los lazos del rotor depende de la adopción arbitraria de la posición del lado radial fijo de la trayectoria de Ampere. Sin embargo, como se verá en la Sec. 2.3.3, esa arbitrariedad no se propaga hacia otros parámetros.

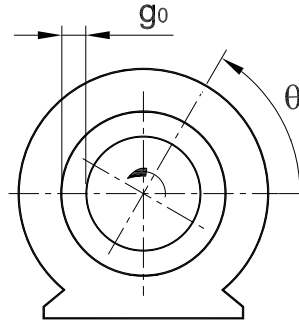


Figura 2.7: Entrehierro liso y uniforme.

2.3.2 Función del entrehierro

La longitud radial del entrehierro, en general, varía con las irregularidades geométricas del mismo. Esa variación puede evaluarse en una posición angular fija sobre el estator ϕ^s o sobre el rotor ϕ^r al cambiar la posición θ del rotor, o bien con el rotor inmóvil, al pasar de una posición ϕ^s a otra, o de una posición ϕ^r a otra. El entrehierro puede entonces expresarse como una función matemática de los pares de variables independientes (ϕ^s, θ) o (ϕ^r, θ) .

Si además se consideran las irregularidades de la máquina en la dirección de su eje, el entrehierro varía también entre una y otra posición axial z , pasando a ser una función de las variables (ϕ^s, θ, z) o (ϕ^r, θ, z) [11].

Esta tesis se limita al modelado bidimensional de la MI, de modo que la función del entrehierro resulta entonces dependiente de sólo dos variables. Su expresión es la suma de un valor constante g_0 más un término correspondiente a cada una de las irregularidades modeladas. De esta forma, es posible evaluarlas por separado y combinarlas libremente. En ausencia de irregularidades, el entrehierro es liso y uniforme

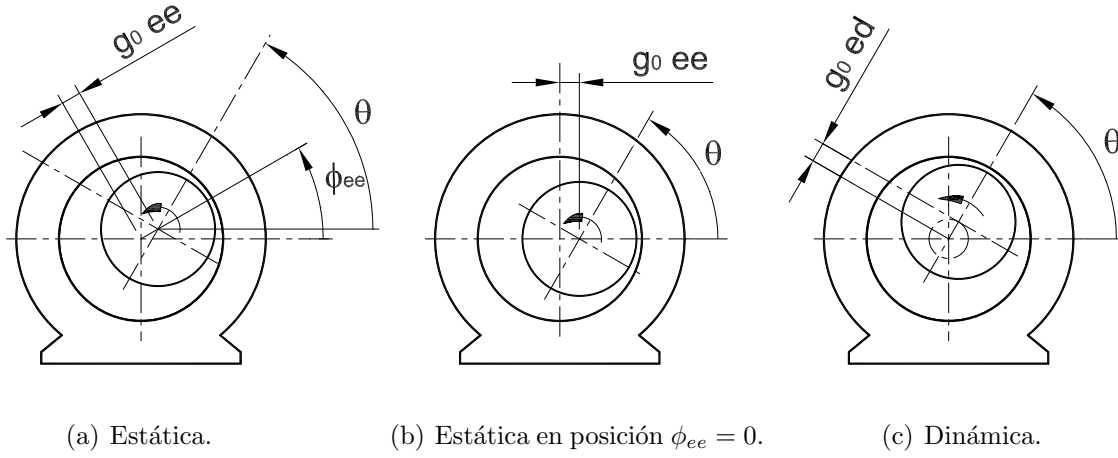


Figura 2.8: Excentricidad.

como el representado en la Fig. 2.7, de valor igual a la constante g_0 , y los términos correspondientes a las irregularidades son nulos.

Las irregularidades modeladas en esta tesis son las excentricidades estática y dinámica, y los ranurados del estator y del rotor, representadas en las Fig. 2.8 y 2.9 respectivamente.

La excentricidad estática es el corrimiento del centro del rotor hacia un punto fijo no coincidente con el centro del estator, siendo el primero el centro de rotación. El centro del rotor puede estar desplazado en cualquier posición angular de valor constante ϕ_{ee} , como muestra la Fig. 2.8(a). Esta excentricidad aporta al entrehierro una variación que puede expresarse en función de las variables ϕ^s [11] o (ϕ^r, θ) :

$$\begin{aligned} g_{ee}(\phi^s) &= -g_0 ee \cos(\phi^s - \phi_{ee}), \\ g_{ee}(\phi^r, \theta) &= -g_0 ee \cos(\phi^r + \theta - \phi_{ee}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde ee es un factor adimensional que puede adoptar valores entre 0 y 1. El valor $ee = 0$ corresponde a la ausencia de excentricidad estática, mientras que $ee = 1$

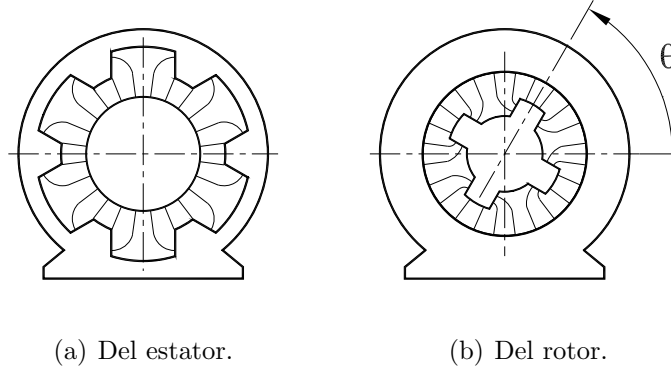


Figura 2.9: Ranurado.

corresponde a la excentricidad máxima, con la que el rotor está desplazado hasta tocar al estator.

La Fig. 2.8(b) representa el caso particular en el que $\phi_{ee} = 0$, valor que se adopta para el resto de este trabajo.

La excentricidad dinámica, representada en la Fig. 2.8(c), es el corrimiento del centro del rotor hacia un punto móvil que describe una trayectoria circular concéntrica con el estator, siendo el centro de este último también el de rotación. Esta excentricidad aporta al entrehierro una variación que puede expresarse en función de las variables (ϕ^s, θ) [11] o ϕ^r :

$$\begin{aligned} g_{ed}(\phi^s, \theta) &= -g_0 ed \cos(\phi^s - \theta), \\ g_{ed}(\phi^r) &= -g_0 ed \cos(\phi^r), \end{aligned} \tag{2.67}$$

donde ed es un factor análogo al ee utilizado en (2.66).

Las Fig. 2.9(a) y 2.9(b) representan el ranurado del estator y del rotor respectivamente. En ambos casos, hay líneas de inducción que tienen incidencia lateral sobre los

dientes. Esas líneas están modeladas por un tramo recto de dirección radial extendido con un arco de circunferencia [11].

La longitud del tramo recto radial es la misma de la línea correspondiente al entrehierro liso y uniforme, cuyo valor es g_0 . La longitud de los arcos de circunferencia internos a las ranuras se puede calcular considerando que el centro está ubicado en el vértice del diente más cercano, sobre el cual la línea de inducción incide lateralmente.

Finalmente, la función del entrehierro expresada en un ME o un MR se obtiene con las expresiones:

$$\begin{aligned} g(\phi^s, \theta) &= g_0 + g_{ee}(\phi^s) + g_{ed}(\phi^s, \theta) + g_s(\phi^s) + g_r(\phi^s, \theta), \\ g(\phi^r, \theta) &= g_0 + g_{ee}(\phi^r, \theta) + g_{ed}(\phi^r) + g_s(\phi^r, \theta) + g_r(\phi^r), \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde g_s y g_r son las longitudes de los arcos con que se extienden las líneas de inducción en las ranuras del estator y del rotor respectivamente.

El valor medio de las variaciones del entrehierro es nulo para las componentes de excentricidad, y no nulo para las de los ranurados. El valor constate g_0 es, entonces, el valor medio del entrehierro sin considerar el ranurado.

2.3.3 Funciones de bobinados

En la Sec. 2.3.1 se desarrolló la distribución de bobinados de la fase a , con la cual se calcula la FMM inducida por esa fase para la trayectoria de Ampere representada en la Fig. 2.3(a).

Con el fin de calcular la inductancia propia de esa fase, y sus inductancias mutuas con las otras fases y con los lazos del rotor, el paso siguiente es determinar la inducción B a lo largo de la trayectoria. Para ésto, es necesario conocer la geometría tanto

de la sección transversal de la MI como de la trayectoria, así como los valores de permeabilidad μ de los medios materiales presentes en su recorrido.

Aplicación de la Ley de Ampere

La trayectoria de la Fig. 2.3(a) tiene cuatro lados, dos radiales \overline{ab} y \overline{cd} que cruzan el entrehierro, y dos arcos \widehat{bc} y \widehat{da} en los núcleos del estator y del rotor. Como el aire tiene un valor finito de permeabilidad, el flujo en los cruces del entrehierro produce diferencias de potencial magnético (DPM) también de valor finito.

Si se considerase un valor finito de permeabilidad en los núcleos, el flujo produciría además una DPM en el estator y otra en el rotor, como sucede en los cruces del entrehierro. Para simplificar el análisis, se establece la siguiente restricción:

R1: *La permeabilidad de los núcleos del estator y del rotor se considera infinita.*

Los valores de permeabilidad de los medios materiales que recorre la trayectoria de Ampere son entonces $\mu \rightarrow \infty$ en los núcleos del estator y del rotor, y μ_0 en el aire del entrehierro. Dada la relación entre la inducción y la intensidad de campo $B = \mu H$, de la restricción R1 surge que la intensidad de campo H es nula en los núcleos, y tiene valor no nulo sólo en los cruces por el entrehierro. Así, el número de incógnitas de la ecuación planteada por la Ley de Ampere se reduce a dos, una por cada lado radial:

$$\begin{array}{cccc}
 H_{ab}(0, \theta) g(0, \theta) & + & H_{cd}(\phi^s, \theta) g(\phi^s, \theta) & = & n_{sa}(\phi^s) i_{sa} \\
 \text{Wb/H} & & \text{Wb/H} & & \text{A-esp}
 \end{array} \tag{2.69}$$

El segundo miembro en (2.69) es la FMM inducida por la fase a , y los dos términos del primer miembro son las DPM que produce el flujo en la parte pasiva del circui-

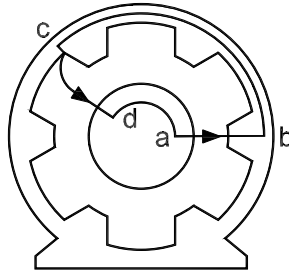


Figura 2.10: Trayectoria de Ampere con estator ranurado.

to, que es el recorrido de la trayectoria pasando por el aire como medio material. Están indicadas como unidades de medida el A-esp (Ampere-espira) y el Wb/H respectivamente, que si bien son dimensionalmente equivalentes, expresan la diferencia conceptual entre la excitación magnética proporcional a la corriente que circula por un arrollamiento y a su número de espiras, y las DPM producidas por el almacenamiento de flujo en la parte pasiva de un circuito magnético.

En (2.69), los valores de $H_{ab}(0, \theta)$ y $H_{cd}(\phi^s, \theta)$ deben ser únicos y constantes en toda la longitud de ambos cruces del entrehierro, para lo cual éstos deben tener la misma dirección de las líneas de inducción. Esta condición se cumple en la Fig. 2.3(a), donde los lados \overline{ab} y \overline{cd} inciden sobre dientes del estator y las líneas de inducción son radiales en esas posiciones.

Si en cambio alguno de los lados de la trayectoria que cruzan el entrehierro incide sobre una ranura, como sucede con el cd en la Fig. 2.10, para que su dirección en el entrehierro sea la misma de la línea de inducción en esa posición debe, al igual que ésta, prolongarse con un arco, lo cual impone una segunda restricción al método AFB:

R2: *Las direcciones de los lados de la trayectoria de Ampere que cruzan el entrehierro*

deben ser las mismas de la línea de inducción en la posición angular que ocupa cada uno, las cuales son segmentos radiales prolongados con arcos en caso de incidir sobre una ranura.

De la restricción R2 surge que la longitud de los cruces del entrehierro en la trayectoria es el valor de la función $g(\phi^s, \theta)$ en las respectivas posiciones que éstos ocupan, dada en (2.68).

Finalmente, en (2.69) la distribución de bobinados $n_{sa}(\phi^s)$ está dada por (2.58).

Aplicación de la Ley de Gauss

En lo expuesto de la sección hasta este punto, con el propósito inmediato de calcular la inducción B a lo largo de la trayectoria se aplicó la Ley de Ampere, obteniendo bajo restricciones la expresión (2.69). En la misma, si se conoce la geometría del entrehierro y el valor de la corriente i_{sa} , quedan como incógnitas las intensidades de campo H_{ab} y H_{cd} en cada uno de los cruces del entrehierro.

La ecuación faltante a este sistema formado por una ecuación y dos incógnitas es provista por la disposición topológica: el lado cd gira la vuelta completa, entonces el campo vectorial \vec{H}_{cd} atraviesa al entrehierro en toda su extensión angular.

A esa disposición es aplicable la Ley de Gauss, según la cual el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es nulo. Se aplica entonces una superficie gaussiana cilíndrica interior al entrehierro que envuelva al rotor en toda su longitud. El radio de esa superficie puede ser arbitrario entre los límites del entrehierro, porque en cada cruce radial la intensidad de campo H_{cd} tiene valor constante. Tomando ese

radio igual al radio medio r del entrehierro, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l H_{cd}(\phi^s, z, \theta) dz d\phi^s = 0,$$

donde l es la longitud efectiva del paquete de chapas.

Si el entrehierro tiene uniformidad axial, la intensidad de campo H_{cd} es constante respecto de la posición z , y (2.70) se reduce a:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l H_{cd}(\phi^s, z, \theta) dz d\phi^s = l \int_0^{2\pi} H_{cd}(\phi^s, \theta) d\phi^s = 0.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} H_{cd}(\phi^s, \theta) d\phi^s = 0, \quad (2.70)$$

habiendo entonces vuelto a un planteo bidimensional con una integración simple.

Por el contrario, si el entrehierro tuviera variación axial, la reducción anterior no sería posible. En [11] se aborda el tratamiento de las irregularidades tridimensionales con el método AFB. En esta tesis, en cambio, se adopta una tercera restricción:

R3: *El entrehierro se considera axialmente uniforme.*

Puede notarse una distinción en la terminología utilizada en las restricciones. A diferencia de R1 y R2, que *son impuestas* por el planteo del método AFB, R3 *se adopta* para reducir el análisis de la MI a dos dimensiones, omitiendo las irregularidades axiales como el cruzamiento de las ranuras o la desalineación del eje. Expresado de otra forma, el método AFB puede superar R3, pero no R1 y R2.

Solución de la condición de contorno

Recapitulando, con objeto de aportar la ecuación faltante al sistema formado por (2.69) y sus dos incógnitas, se aplicó la Ley de Gauss a una superficie cilíndrica,

obteniendo (2.70).

La operatoria que vincula ambas ecuaciones es la división de (2.69) por la función del entrehierro $g(\phi^s, \theta)$, la integración de la expresión resultante en la variable ϕ^s y la sustitución de (2.70) en esa expresión. Con el primero de estos tres pasos se llega a:

$$H_{ab}(0, \theta) g(0, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} + H_{cd}(\phi^s, \theta) = \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} n_{sa}(\phi^s) i_{sa}, \quad (2.71)$$

y con la integración y la sustitución, a:

$$H_{ab}(0, \theta) g(0, \theta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s = \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} n_{sa}(\phi^s) d\phi^s \right] i_{sa}. \quad (2.72)$$

En (2.72) queda una única incógnita, que es la intensidad de campo $H_{ab}(0, \theta)$, o bien su DPM resultante del producto $H_{ab}(0, \theta) g(0, \theta)$. Esta ecuación es, entonces, resoluble para una geometría del entrehierro y un valor de corriente dados.

Como la intensidad de campo $H_{ab}(0, \theta)$ y su DPM son las correspondientes al lado fijo de la trayectoria, su obtención es la solución al problema de contorno planteado por (2.69).

Despejando en (2.72) la DPM $H_{ab}(0, \theta) g(0, \theta)$, sustituyéndola en (2.69) y reordenando para obtener la DPM en el lado móvil cd , resulta:

$$H_{cd}(\phi^s, \theta) g(\phi^s, \theta) = \left[n_{sa}(\phi^s) - \frac{1}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} n_{sa}(\phi^s) d\phi^s \right] i_{sa}. \quad (2.73)$$

El segundo miembro en (2.73) es una expresión del tipo $N_{sa}(\phi^s, \theta) i_{sa}$, siendo $N_{sa}(\phi^s, \theta)$ la función entre corchetes, que varía en forma continua al rotar el lado móvil cd , designada en la terminología del método AFB como *función de bobinados*

de la fase a :

$$N_{sa}(\phi^s, \theta) = n_{sa}(\phi^s) - \frac{\int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s} = n_{sa}(\phi^s) - \frac{\int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s}{2\pi \frac{1}{g_{perim}(\theta)}}. \quad (2.74)$$

En el tercer miembro de (2.74), $g_{perim}(\theta)$ se puede interpretar como el valor de ELU con el que se obtendría la misma permeancia en la extensión angular completa del entrehierro y es una función de la posición θ del rotor.

La función de bobinados de la fase a dada en (2.74) es un parámetro propio de la máquina. Su evaluación permite calcular, sustituyéndola en (2.73), la DPM inducida por la fase a en el lado móvil cd en todas las posiciones ϕ^s que éste ocupa, dada una posición θ cualquiera del rotor.

Para calcular la función de bobinados de un lazo del rotor se procede en forma análoga. La aplicación de las leyes de Ampere y Gauss a las trayectorias mostradas en las Fig. 2.4(a) y 2.5(a) es igual a la explicada para la mostrada en la Fig. 2.3(a), y no amerita repetir el desarrollo.

En cambio sí cabe una observación referida a la solución de contorno. En el caso del bobinado de la fase a del estator, ésta es dada por (2.72). En el caso de un lazo j del rotor, es dada por una expresión similar, en la cual la distribución del bobinado de la fase a del estator $n_{sa}(\phi^s)$ y la corriente i_{sa} son reemplazadas por la distribución del lazo j del rotor $n_r(j, \phi^r)$ o $n_r(j, \phi^s, \theta)$ y por la corriente i_{rj} . En un MR, esa solución de contorno se obtiene con la expresión:

$$H_{ab}(0, \theta) g(0, \theta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r = \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} n_{rj}(\phi^r) d\phi^r \right] i_{rj}, \quad (2.75)$$

y en un ME:

$$H_{ab}(\theta, \theta) g(\theta, \theta) \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s = \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} n_{rj}(\phi^s, \theta) d\phi^s \right] i_{rj}. \quad (2.76)$$

Continuando con el procedimiento análogo al presentado para la fase *a* del estator, la DPM en el entrehierro inducida por la corriente en el lazo *j* del rotor, expresada en un MR, se obtiene con:

$$H_{cd}(\phi^r, \theta) g(\phi^r, \theta) = \left[n_{rj}(\phi^r) - \frac{1}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} n_{rj}(\phi^r) d\phi^r \right] i_{rj}, \quad (2.77)$$

y en un ME, con:

$$H_{cd}(\phi^s, \theta) g(\phi^s, \theta) = \left[n_{rj}(\phi^s, \theta) - \frac{1}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} n_{rj}(\phi^s, \theta) d\phi^s \right] i_{rj}. \quad (2.78)$$

Recordando de la Sec. 2.3.1 que la distribución de bobinados de un lazo del rotor depende de la adopción arbitraria de la posición del lado fijo *ab* de la trayectoria, la solución al problema de contorno dada por (2.75) y (2.76) hace que esa arbitrariedad no se propague a la función del lazo *j*, la cual expresada en un MR se obtiene con:

$$N_{rj}(\phi^r, \theta) = n_{rj}(\phi^r) - \frac{\int_0^{2\pi} n_{rj}(\phi^r) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r} = n_{rj}(\phi^r) - \frac{\int_0^{2\pi} n_{rj}(\phi^r) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r}{2\pi \frac{1}{g_{perim}(\theta)}}, \quad (2.79)$$

y en un ME, con:

$$\begin{aligned}
 N_{rj}(\phi^s, \theta) &= n_{rj}(\phi^s, \theta) - \frac{\int_0^{2\pi} n_{rj}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s} \\
 &= n_{rj}(\phi^s, \theta) - \frac{\int_0^{2\pi} n_{rj}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s}{2\pi \frac{1}{g_{perim}(\theta)}}.
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Al igual que la función de un bobinado del estator, la de un lazo j del rotor es un parámetro propio de la máquina, libre entonces de adopciones arbitrarias. Su evaluación permite calcular, sustituyéndola en (2.73), la DPM inducida por el lazo j en el lado móvil cd en todas las posiciones ϕ^r o ϕ^s que éste ocupa, dada una posición θ cualquiera del rotor.

En la notación del primer miembro en (2.73), (2.77) y (2.78), los subíndices de la intensidad de campo $H_{cd}(\phi^s, \theta)$ corresponden al lado radial móvil en las trayectorias de Ampere representadas en las Fig. 2.3(a), 2.4(a) y 2.5(a).

Habiendo resuelto la condición de contorno, se puede prescindir de la notación referida a las trayectorias y expresar la DPM como una variable de la máquina. Luego, se puede plantear la conclusión parcial:

CP1: *La DPM inducida en el entrehierro por la corriente en una bobina del estator o un lazo del rotor resulta de su producto por la función de bobinados.*

Designando a la DPM inducida en el entrehierro con la notación matemática $\Delta \mathcal{U}_{sr}$, su componente inducida por la corriente en la fase a del estator puede expresarse como:

$$\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa}) = N_{sa}(\phi^s, \theta) i_{sa}, \tag{2.81}$$

la inducida por la corriente en el lazo j del rotor, referenciada a un MR, como:

$$\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^r, \theta, i_{rj}) = N_{jr}(\phi^r) i_{rj}, \quad (2.82)$$

y referenciada a un ME, como:

$$\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{rj}) = N_{rj}(\phi^s, \theta) i_{rj}. \quad (2.83)$$

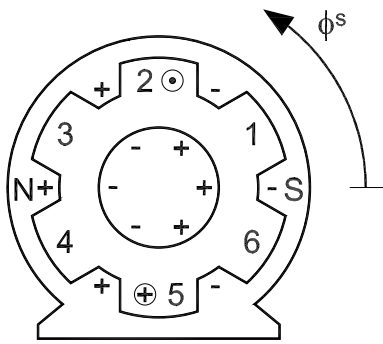
En el Ap. A se analiza la relación entre el signo de la DPM en el entrehierro y el de las corrientes en las fases del estator.

Análisis de la gráfica de la función de bobinados

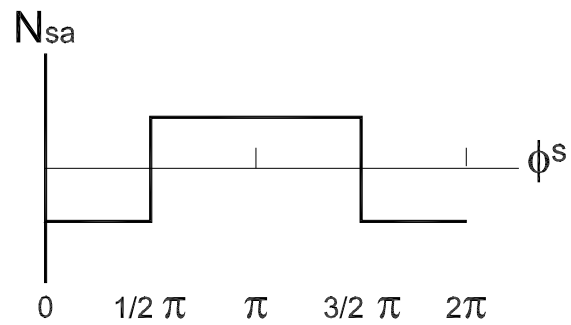
La Fig. 2.11(a) representa nuevamente la sección transversal de la MI con los lados activos del arrollamiento de la fase a . La Fig. 2.11(b) muestra la gráfica de la función de bobinados de esa fase en una posición θ del rotor fija. Al sentido dado de referencia de la corriente corresponden las polaridades *Norte* y *Sur* de la excitación magnética y la indicada con los singos $+$ y $-$ de la DPM en el entrehierro.

La gráfica de la función de bobinados tiene la misma forma que la de su distribución mostrada en la Fig. 2.3(b), con la sola diferencia de presentar un corrimiento en ordenadas. Su forma es la misma porque la función de bobinados se obtiene con la expresión (2.74) como la diferencia entre su distribución y una relación que no depende de la variable ϕ^s una vez resueltas las integrales definidas.

Esa forma rectangular de la gráfica de la función de bobinados también puede explicarse cualitativamente. Dada la restricción R1, según la cual la permeabilidad de los núcleos se considera infinita, éstos son entonces equipotenciales a cada lado de la bobina de la fase a , resultando la DPM una función de dos niveles, cada uno de valor constante.



(a) Rotor centrado.



(b) Función con el rotor centrado.

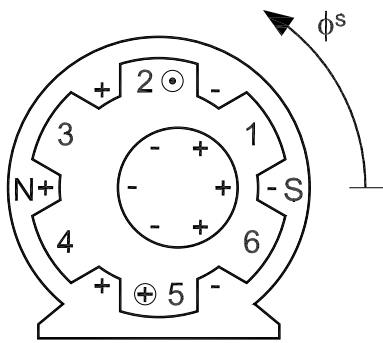
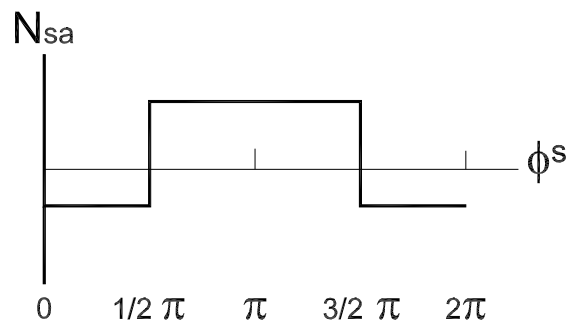
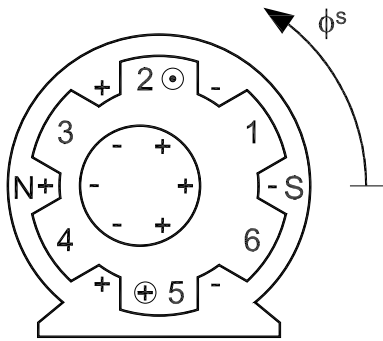
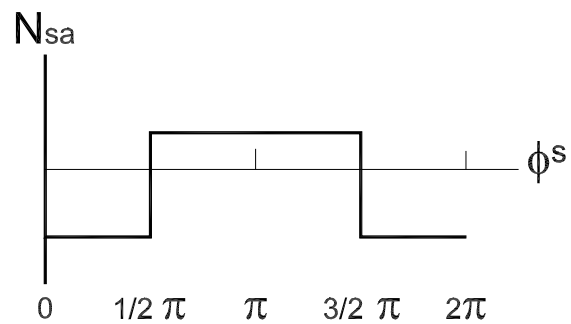
(c) Rotor próximo al polo *Sur*.(d) Función con el rotor próximo al polo *Sur*.(e) Rotor próximo al polo *Norte*.(f) Función con el rotor próximo al polo *Norte*.

Figura 2.11: Relación entre la DPM inducida por un bobinado y su función.

En el Ap. A se analiza la forma de la gráfica de la función de bobinados.

Las Fig. 2.11(c) y 2.11(e) representan a la misma sección de la MI, con la diferencia

de que está el rotor descentrado en la dirección del eje del arrollamiento de la fase a hacia los polos Sur y $Norte$ respectivamente. Las Fig. 2.11(d) y 2.11(f) muestran las gráficas correspondientes de la función de bobinados de esa fase. En el primer caso, la gráfica presenta un corrimiento en ordenadas positivo respecto de la correspondiente al rotor centrado, y en el segundo caso un corrimiento negativo. Generalizando, se puede plantear la conclusión parcial:

CP2: *El valor absoluto de la función de bobinados disminuye en la zona de menor entrehierro.*

Para justificar esta relación entre el corrimiento en ordenadas de la gráfica de la función de bobinados $N_{sa}(\phi^s, \theta)$ y la función del entrehierro $g(\phi^s, \theta)$, el primer paso es analizar la relación entre ambas. Las Fig. 2.12(b) y (c) muestran sus respectivas gráficas, para la posición del rotor próxima al polo Sur representada en la Fig. 2.11(c).

No encontrando una relación inmediata entre esos dos parámetros de la máquina, un segundo paso en su búsqueda es el reemplazo de la función de bobinados por la DPM proporcional a ella según CP 1, cuya relación con la función del entrehierro es el módulo de la intensidad de campo inducida por la fase a :

$$H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa}) = \frac{\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa})}{g(\phi^s, \theta)}. \quad (2.84)$$

A esa intensidad de campo es aplicable la Ley de Gauss, la cual proporciona en forma indirecta la relación buscada:

$$\int_0^{2\pi} H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa}) d\phi^s = \int_0^{2\pi} \frac{\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa})}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s = 0. \quad (2.85)$$

En (2.85) se puede notar la conjunción de las conclusiones parciales CP 1 y CP 2, según las cuales la DPM inducida en el entrehierro por la corriente en una bobina

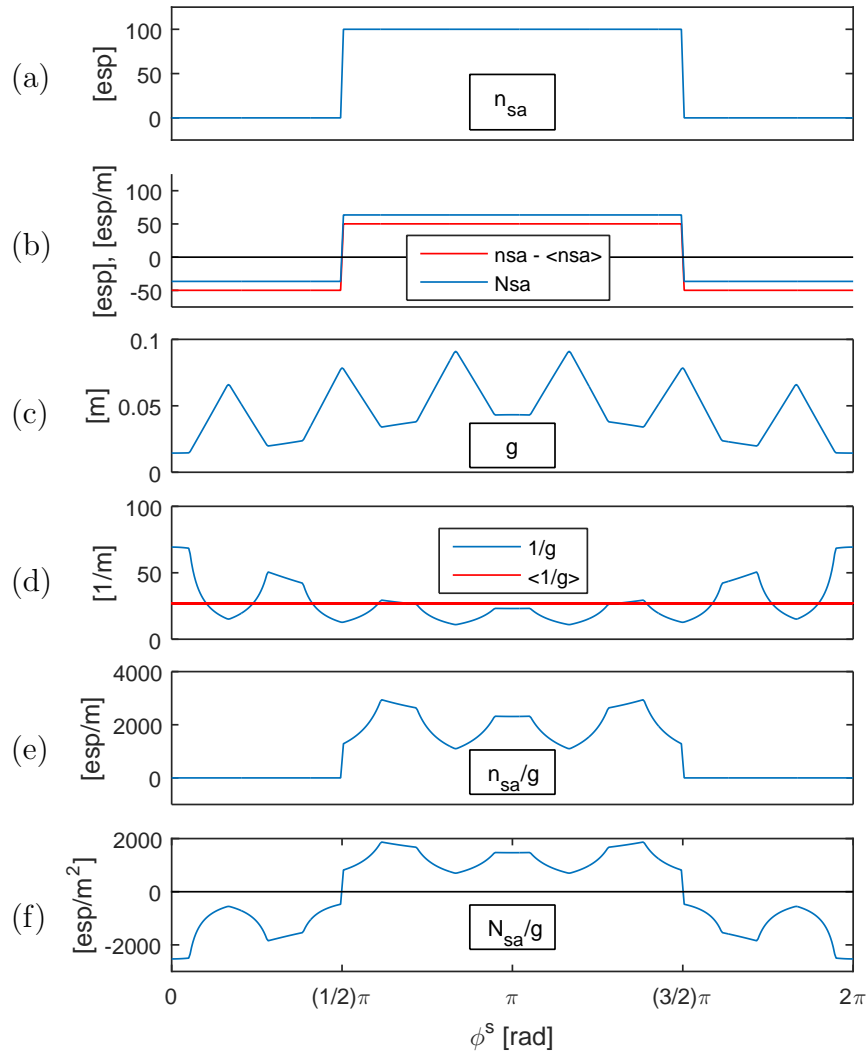


Figura 2.12: Relación entre la distribución y la función de bobinados de la fase a del estator, y la función del entrehierro, correspondiente a la posición del rotor mostrada en la Fig. 2.11(c).

del estator o un lazo del rotor resulta de su producto por la función de bobinados, disminuyendo el valor absoluto de ambas en la zona de menor entrehierro.

Se ha encontrado entonces una relación entre la DPM inducida en el entrehierro, que es una variable, y la función de este último, que es uno de los parámetros de la máquina graficados en la Fig. 2.12. Con el reemplazo inverso al anterior, es decir, de

la DPM por la función de bobinados a la que es proporcional, se obtiene la relación buscada entre las funciones de bobinados y del entrehierro:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa})}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s = \int_0^{2\pi} \frac{N_{sa}(\phi^s, \theta)}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s = 0. \quad (2.86)$$

A partir de (2.86) se puede justificar el corrimiento en ordenadas de la gráfica de la función de bobinados producido por la excentricidad del rotor en la dirección del eje del arrollamiento de la fase a . El integrando de su segundo miembro está graficado en la Fig. 2.12(f). La interpretación gráfica de la igualdad a cero de su integral definida es la compensación de las áreas positiva y negativa encerradas contra el eje de abscisas.

Como el área positiva resulta de integrar la relación $\frac{N_{sa}(\phi^s, \theta)}{g(\phi^s, \theta)}$ en el intervalo angular con valores de $g(\phi^s, \theta)$ mayores, el valor absoluto de $N_{sa}(\phi^s, \theta)$ debe ser también mayor para mantener la igualdad de las áreas encerradas, e inversamente en el intervalo complementario.

De la proximidad del rotor al polo *Sur* resulta, entonces, el corrimiento positivo en ordenadas de la gráfica de función de bobinados, y de modo análogo se analiza el caso inverso de proximidad del rotor al polo *Norte*.

Los corrimientos de las gráficas de las otras dos fases, no representados, son más atenuados porque la excentricidad tiene dirección oblicua respecto de sus ejes.

El ranurado del estator, en este caso particular, no produce corrimiento de las gráficas de la función de bobinados de ninguna de las tres fases, porque las ranuras están dispuestas de forma tal que las variaciones del entrehierro medio a cada lado de los bobinados son iguales.

La gráfica de la función de bobinados de un lazo del rotor, al igual que la de

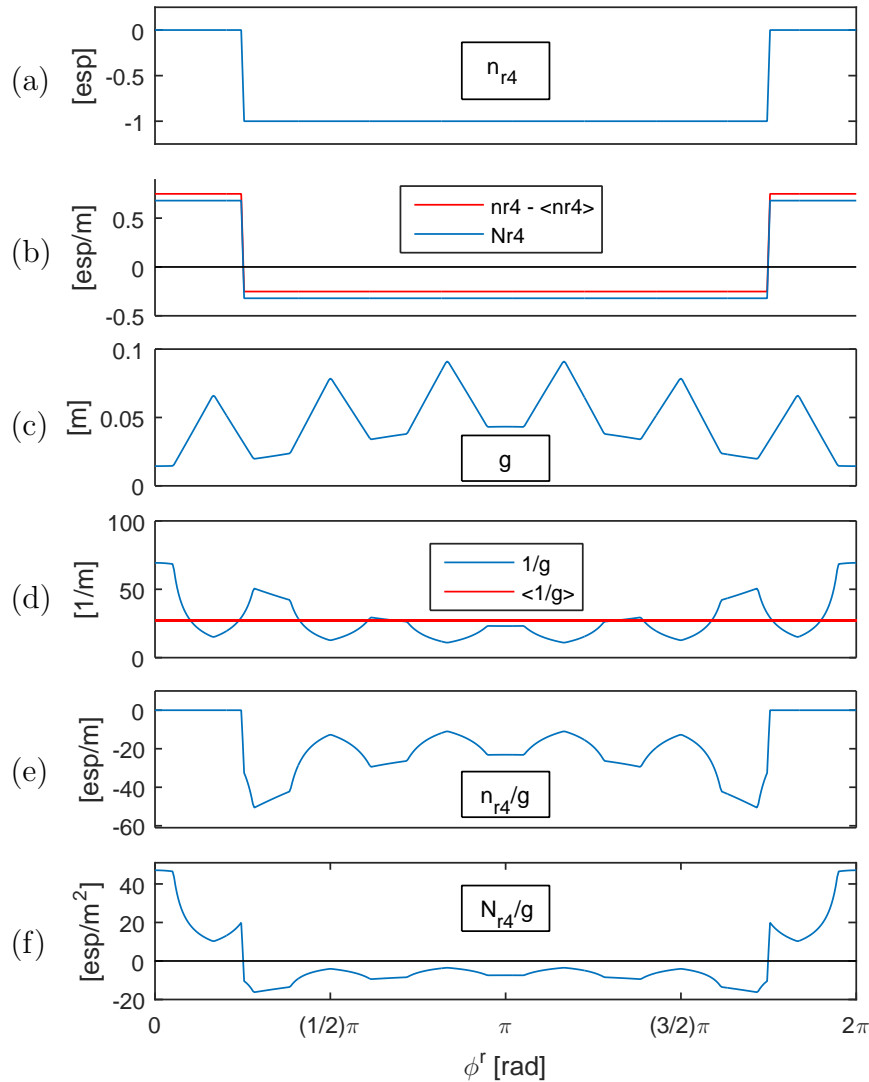


Figura 2.13: Relación entre la distribución y la función de bobinado del lazo 4 del rotor, y la función del entrehierro, correspondientes a la posición mostrada en la Fig. 2.5.

una bobina del estator, tiene valor medio nulo en caso de no haber irregularidades geométricas del entrehierro, o bien de haberlas en una disposición tal que las variaciones del entrehierro medio frente al lazo y en el perímetro completo tengan iguales valores.

Las Fig. 2.13 y 2.14 muestran la relación entre la distribución y la función de

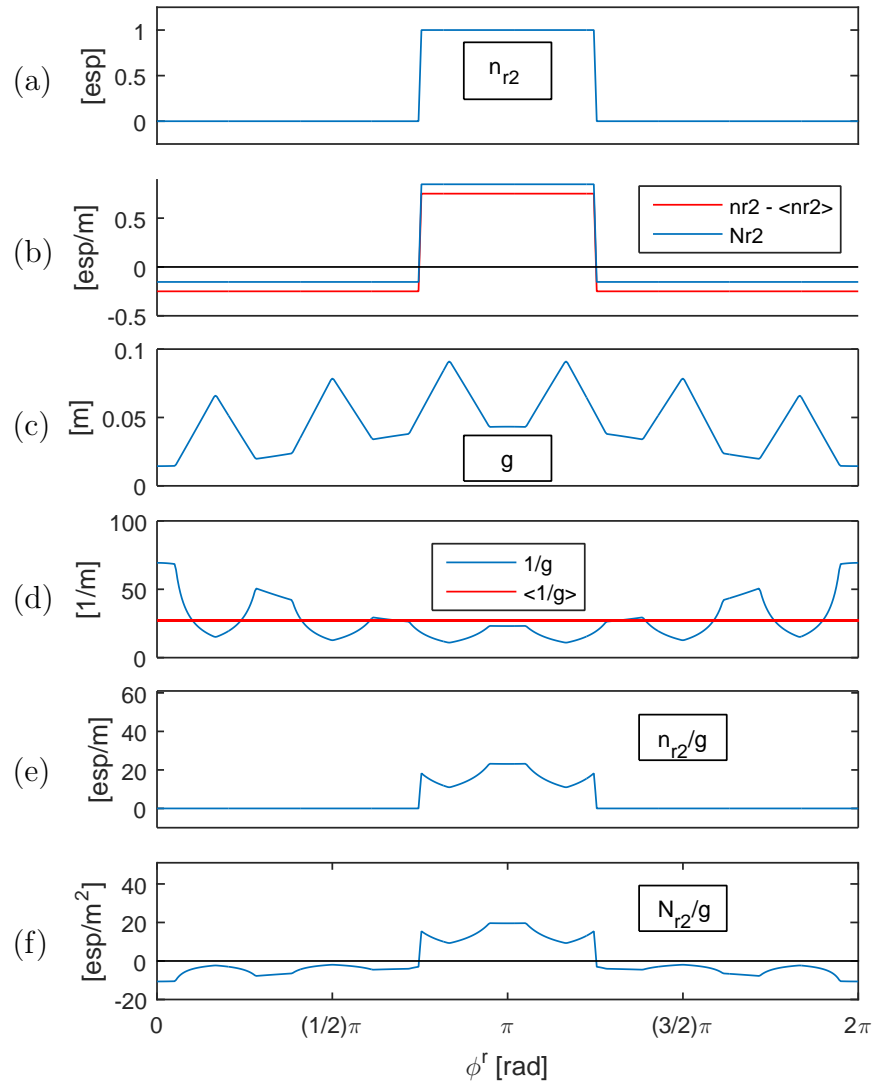


Figura 2.14: Relación entre la distribución y la función de bobinados del lazo 2 del rotor, y la función del entrehierro, correspondientes a la posición mostrada en la Fig. 2.5.

bobinados de los lazos 4 y 2 del rotor, y la función del entrehierro, correspondientes a la posición mostrada en la Fig. 2.5, en la cual el estator es ranurado y el rotor está descentrado.

La Fig. 2.13(b) muestra la gráfica de la función de bobinados del lazo 4, que es el más próximo al estator. La misma presenta un corrimiento negativo en ordenadas

respecto de la gráfica de valor medio nulo, mostrada en color rojo.

La Fig. 2.14(b) muestra la gráfica de la función de bobinados del lazo 2, que es el más alejado al estator. La misma presenta, en cambio, un corrimiento positivo.

Generalizando, se confirma la CP 2, según la cual el valor absoluto de la función de bobinados disminuye en la zona de menor entrehierro.

Además de la excentricidad, también el ranurado del estator produce un corrimiento en ordenadas de la gráfica de la función de bobinados de los lazos del rotor. Las variaciones del entrehierro medio que el ranurado del estator produce frente a los lazos y en el perímetro completo tienen distintos valores. Cada lazo ocupa un cuarto de vuelta y enfrenta, según cuál sea la posición θ del rotor, a un número no entero de ranuras del estator que toma valores estimados a simple vista entre uno y un cuarto y uno y tres cuartos.

Si la posición del rotor es tal que un lazo enfrenta a $1\frac{1}{4}$ de las seis ranuras del estator, la fracción del total de las ranuras enfrentada por ese lazo es menor a la fracción de vuelta que el mismo ocupa:

$$\frac{1\frac{1}{4}}{6} = \frac{\frac{5}{4}}{6} = \frac{5}{24} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Esta desigualdad, que implica una disminución del entrehierro medio enfrentado por el lazo, produce entonces una disminución del valor absoluto de su función de bobinados en las posiciones angulares ϕ^r ocupadas por él.

Si en cambio la posición del rotor es tal que el lazo enfrenta a $1\frac{3}{4}$ de las seis ranuras, la fracción enfrentada por este lazo pasa a ser mayor a la fracción de vuelta que el

mismo ocupa:

$$\frac{1}{6} \frac{3}{4} = \frac{7}{6} = \frac{7}{24} > \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Esta desigualdad, que implica un aumento del entrehierro medio enfrentado por el lazo, produce entonces un aumento del valor absoluto de su función de bobinados en las posiciones angulares ϕ^r ocupadas por él.

En el Ap. A se analiza la relación entre la excentricidad del rotor y el corrimiento en ordenadas de la gráfica de la función de bobinados y la DPM en el entrehierro.

2.3.4 Inductancias del estator

Con el fin de calcular la inductancia propia de la fase a y las inductancias mutuas con las otras fases y con los lazos del rotor, se definieron la distribución y la función de bobinados en las secciones 2.3.1 y 2.3.3 respectivamente.

Con la expresión (2.81) se puede calcular la DPM en el entrehierro inducida por la corriente en la fase a . De modo análogo, la inducida por la fase b $\Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) = N_{sb}(\phi^s, \theta) i_{sb}$, tiene como gradiente a la intensidad de campo cuyo módulo resulta:

$$H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) = \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} N_{sb}(\phi^s, \theta) i_{sb}. \quad (2.87)$$

La integración de esa intensidad de campo es proporcional al flujo inducido por la fase b , del cual una fracción es enlazada por la bobina de la fase a con el número entero de espiras N_{esp} en el segmento angular que ésta ocupa. El flujo así enlazado se calcula entonces con la expresión:

$$\lambda_{ssab}(\theta, i_{sb}) = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) d\phi^s. \quad (2.88)$$

Se obtiene el mismo resultado operando con la función de bobinados de la fase inducida $N_{sa}(\phi^s, \theta)$ en vez de su distribución $n_{sa}(\phi^s)$:

$$\lambda_{ssab}(\theta, i_{sb}) = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{sa}(\phi^s, \theta) H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) d\phi^s. \quad (2.89)$$

Tal equivalencia puede demostrarse sustituyendo (2.74) en la integral de (2.89), la cual resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} N_{sa}(\phi^s, \theta) H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) d\phi^s &= \int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) d\phi^s \\ &- \frac{\int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s} \int_0^{2\pi} H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) d\phi^s, \end{aligned}$$

donde el factor $\int_0^{2\pi} H_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sb}) d\phi^s$ en el término adicional debido al reemplazo de la distribución por la función de bobinados se anula aplicando la Ley de Gauss, y la integral se reduce a la del segundo término en (2.88).

Sustituyendo (2.87) en (2.88) y (2.89) para expresar la intensidad de campo inducida en el entrehierro por la fase b en función de los parámetros de la MI, y dividiendo por la corriente inductora i_{sb} , se obtiene la inductancia mutua entre las fases a y b :

$$\begin{aligned} L_{ssab}(\theta) &= \frac{\lambda_{ssab}(\theta, i_{sb})}{i_{sb}} = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) N_{sb}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s \\ &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{sa}(\phi^s, \theta) N_{sb}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s. \end{aligned} \quad (2.90)$$

La segunda expresión de (2.90) opera con la función de bobinados de la fase inducida $N_{sa}(\phi^s, \theta)$ en vez de su distribución $n_{sa}(\phi^s)$. Como el producto $N_{sa}(\phi^s, \theta) N_{sb}(\phi^s, \theta)$ es conmutativo, los roles inductor e inducido resultan permutables, verificándose la reciprocidad:

$$L_{ssab}(\theta) = L_{ssba}(\theta). \quad (2.91)$$

Análogamente, la inductancia propia de la fase a del estator se calcula con las expresiones:

$$\begin{aligned} L_{ssaa}(\theta) &= \frac{\lambda_{ssaa}(\theta, i_{sa})}{i_{sa}} = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} n_{sa}(\phi^s) N_{sa}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s \\ &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{sa}^2(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Los segundos miembros en (2.90) y (2.92) están expresados en función de la posición angular ϕ^s referida a un ME. Como las inductancias son parámetros propios de la máquina, por lo tanto independientes de la adopción arbitraria de un marco de referencia, pueden también desarrollarse expresiones en función de la posición angular referida a un MR.

2.3.5 Inductancias del rotor

Análogamente, la inductancia mutua entre un par de lazos genéricos del rotor, por ejemplo el j y el jj , expresada en un MR, se calcula con las expresiones:

$$\begin{aligned} L_{rr j-jj}(\theta) &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} n_{rj}(\phi^r) N_{rjj}(\phi^r, \theta) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r \\ &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{rj}(\phi^r, \theta) N_{rjj}(\phi^r, \theta) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r, \end{aligned} \quad (2.93)$$

y la propia del lazo j , con las expresiones:

$$\begin{aligned} L_{rr j-j}(\theta) &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} n_{rj}(\phi^r) N_{rj}(\phi^r, \theta) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r \\ &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{rj}^2(\phi^r, \theta) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Los segundos miembros en (2.93) y (2.94) están expresados en función de la posición angular ϕ^r referida a un MR. Como las inductancias son independientes de la adopción arbitraria de un marco de referencia, pueden también desarrollarse expresiones en función de la posición angular referida a un ME.

2.3.6 Inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor

La inductancia mutua entre una fase del estator, por ejemplo a , y un lazo j del rotor, expresada en función de la posición angular referida a un ME se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} L_{sraj}(\theta) &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{sa}(\phi^s) n_{rj}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s \\ &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} N_{sa}(\phi^s, \theta) N_{rj}(\phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Como las inductancias son independientes de la adopción arbitraria de un marco de referencia, puede también desarrollarse una expresión en función de la posición angular referida a un MR.

2.4 Costo computacional del cálculo analítico

Las expresiones desarrolladas en este capítulo para el cálculo de las inductancias usualmente se resuelven con métodos de integración numérica. El procedimiento consiste en discretizar la posición θ del rotor, y para cada valor de esa variable resolver las expresiones de la función del entrehierro, distribuciones y funciones de bobinados e inductancias. Cada uno de esos parámetros resulta entonces también discretizado, con un valor correspondiente a cada posición del rotor.

El cálculo analítico, en cambio, consiste en desarrollar una expresión analítica de la función del entrehierro y sustituirla en las expresiones de las funciones de bobinados (2.74), (2.79) y (2.80), y de las inductancias (2.90) y (2.92)-(2.95) y resolverlas con programas de cálculo simbólico.

Todas esas expresiones tienen en común la presencia de la función del entrehierro en el denominador de su integrando, y un intervalo de integración de 2π radianes, que es el recorrido angular del lado radial móvil de la trayectoria de Ampere. Si se modela el ranurado, la expresión analítica de la función del entrehierro en su extensión angular completa resulta en una serie con un gran número de términos, salvo que se trate de una MI con pocas ranuras, la cual sólo tiene aplicación didáctica.

Con tal serie y su función cuadrática operando en el denominador de los integrandos, el costo computacional del cálculo analítico lo hace inviable al momento presente. Luego, se puede plantear la siguiente conclusión parcial:

CP3: El cálculo analítico de las inductancias con el método AFB es inviable si se modela el ranurado, salvo que se trate de una MI con pocas ranuras. Las derivadas deben, entonces, obtenerse también por métodos numéricos.

2.5 Sumario

En este capítulo se presentó el MCMA, el cual relaciona las variables eléctricas, magnéticas y mecánicas de la MI. Se plantearon las ecuaciones matriciales para resolver los dos primeros de esos tres grupos de variables, cuyos parámetros son las inductancias y resistencias. En cuanto al tercer grupo, se presentó el lineamiento básico del método de la coenergía para obtener el par electromagnético, cuyos parámetros son las derivadas de las inductancias.

Se adoptaron referencias de posición angular sobre el estator y el rotor, relacionadas con la posición de este último, en función de las cuales se desarrollaron expresiones para evaluar el entrehierro con excentricidad, ranurado y combinaciones de ambos.

Se presentó el método AFB para el cálculo de las inductancias, y se desarrollaron expresiones para el cálculo de la distribución y función de bobinados de las fases del estator y los lazos del rotor como parámetros previos.

Por último, se analizó la viabilidad del cálculo analítico de las inductancias y sus derivadas con el método AFB, atendiendo a su costo computacional.

Capítulo 3

Circuito Magnético Equivalente

3.1 Introducción

En el Cap. 2 se presentó el MCMA, que se resuelve con inductancias y sus derivadas. Se desarrolló el método AFB para el cálculo de las inductancias, sobre el cual resultaron intrínsecamente impuestas dos restricciones de aplicación. En este capítulo se presentará el modelo de Circuito Magnético Equivalente (**CME**), que se resuelve con permeancias y sus derivadas y está libre de las restricciones anteriores.

El CME es útil para modelar dispositivos electromagnéticos con o sin partes móviles. La Ley de Hopkinson posibilita la vinculación de las variables eléctricas con las magnéticas del campo de acoplamiento. El análisis del espacio físico de almacenamiento de ese campo conduce al planteo de una red magnética que se resuelve en forma análoga a un circuito eléctrico.

En caso de modelar un dispositivo con partes móviles como la MI, el método de la coenergía permite calcular la fuerza o el par ejercido sobre las mismas, estableciendo

la vinculación con las variables mecánicas.

En la MI, las irregularidades del entrehierro alteran las inductancias o permeancias y sus respectivas derivadas con patrones característicos que las hacen identificables. Esas alteraciones se propagan a las variables eléctricas, magnéticas y mecánicas, siendo entonces aprovechable su análisis para la detección de fallas.

Las expresiones matemáticas del método AFB para cálculo de las inductancias desarrolladas en el Cap. 2 operan con la extensión completa de la función del entrehierro en su denominador, con el consiguiente costo computacional. En ese capítulo se arribó a la CP3, según la cual el cálculo analítico de las inductancias con el método AFB es inviable si se modela el ranurado, salvo que se trate de una MI con pocas ranuras.

Por el mismo motivo, ese método tampoco incluye el cálculo de las derivadas de las inductancias, para cuya obtención sólo queda el recurso de la derivación numérica a partir de los valores de sus primitivas. Ésta, si bien posibilita la solución cuantitativa, no establece la relación cualitativa entre las irregularidades del entrehierro y sus efectos sobre las variables del modelo, necesaria para la detección de fallas.

En el CME las expresiones matemáticas también operan con la función del entrehierro en su denominador, pero no en toda su extensión sino sólo en el segmento angular ocupado por cada par de dientes enfrentados. La reducción de costo computacional consiguiente posibilita el cálculo analítico.

En este capítulo se propone un modelo para la MI utilizando el CME. El cálculo de las permeancias y sus derivadas se realiza analíticamente utilizando un programa simbólico. Este procedimiento no requiere discretizar la posición θ del rotor y calcular

después los parámetros del modelo para cada valor de esa variable discreta, como se hace con el método AFB.

Como se verá en el Cap. 4, el cálculo analítico aumenta la resolución del CME, y como se verá en el Cap. 5, sus resultados de simulación están libres del error por interpolación de los parámetros entre los valores discretizados.

3.2 Fundamentos del Circuito Magnético Equivalente

Una alternativa a la operación con inductancias para resolver circuitos eléctricos con acoplamiento magnético es el empleo de su CME. Por ejemplo, el representado en la Fig. 3.1 está compuesto por un núcleo que tiene un entrehierro de longitud g , sobre el cual hay un arrollamiento inductor 1 por el que circula una corriente de intensidad i_1 , y un arrollamiento inducido 2. La FEM inducida en el segundo arrollamiento

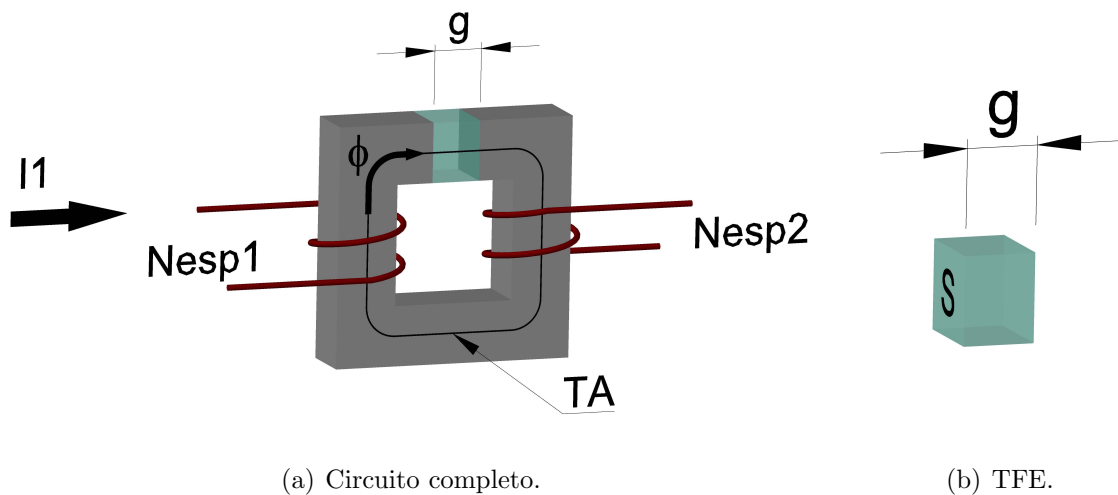


Figura 3.1: Ejemplo circuito con acoplamiento magnético.

debida a la corriente que circula por el primero se calcula con la expresión:

$$e_{21} = -\frac{d\lambda_{21}}{dt}. \quad (3.1)$$

La FEM inducida e_{21} debida a la corriente i_1 , es la expresión del flujo enlazado λ_{21} en función del flujo mutuo Φ :

$$\lambda_{21} = N_{esp2} \Phi, \quad (3.2)$$

donde N_{esp2} es el número de espiras del arrollamiento 2. El flujo mutuo a su vez se obtiene aplicando la Ley de Hopkinson:

$$\Phi = \mathcal{P}_{21} \mathcal{F}_1, \quad (3.3)$$

donde \mathcal{P}_{21} es la permeancia del espacio físico en el que se almacena el flujo mutuo, y \mathcal{F}_1 es la FMM inducida por el arrollamiento 1, obtenida a su vez con la expresión:

$$\mathcal{F}_1 = N_{esp1} i_1, \quad (3.4)$$

donde N_{esp1} es el número de espiras del arrollamiento 1.

De la aplicación de la Ley de Ampere a la trayectoria TA representada en la Fig. 3.1(a) resulta:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_{esp1} i_1. \quad (3.5)$$

Debido a los diferentes valores de permeabilidad, la integración $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$ en el cruce de la trayectoria por el entrehierro resulta mucho mayor que en el núcleo:

$$\int \vec{H}_{entrehierro} \cdot d\vec{l}_{entrehierro} \gg \int \vec{H}_{núcleo} \cdot d\vec{l}_{núcleo}. \quad (3.6)$$

Al campo vectorial \vec{H} corresponde una función escalar \mathcal{U} , con la que guarda la relación [10][61]:

$$\vec{H} = -\nabla\mathcal{U}, \quad (3.7)$$

la que se designa como potencial magnético (**PM**), de modo que:

$$\Delta\mathcal{U}_{entrehierro} \gg \Delta\mathcal{U}_{núcleo}, \quad (3.8)$$

donde $\Delta\mathcal{U}$ son los incrementos finitos del PM en los correspondientes tramos de la trayectoria.

En el caso extremo, si se considera que la permeabilidad del núcleo es infinita, dada la relación entre la inducción y la intensidad de campo $B = \mu H$, resulta que la intensidad de campo H es nula en el núcleo, y tiene valor no nulo sólo en el entrehierro.

El espacio físico en el que se almacena el flujo mutuo Φ_{21} puede descomponerse conceptualmente en cuerpos geométricos sencillos orientados, llamados tubos de flujo, en los cuales el medio material es homogéneo y las líneas de inducción tienen igual dirección. En cada uno de esos tubos, el flujo mutuo tiene el mismo valor en todas sus secciones transversales, sin presentar dispersión. Esta consideración simplifica la expresión matemática con que se calcula su permeancia.

En la Fig. 3.1(a), el espacio físico en el que se almacena el flujo mutuo se puede dividir en seis tubos con forma de prisma: dos correspondientes a las columnas del núcleo, uno al yugo inferior, dos más a los medio yugos superiores, y uno al entrehierro. Un fraccionamiento más preciso puede incluir cuatro tubos más correspondientes a las esquinas formadas por las columnas y los yugos, donde las líneas de inducción cambian de dirección. En [61] se presenta un conjunto de cuerpos geométricos típicos para descomponer los núcleos y entrehierros de las máquinas eléctricas.

Considerando infinita la permeabilidad del núcleo, el único tubo de flujo que interviene en el cálculo de las variables del circuito es el del entrehierro (**TFE**), representado nuevamente en la Fig. 3.1(b). Siendo S su sección transversal constante, g su

longitud en la dirección de las líneas de inducción y μ_0 la permeabilidad del aire, la permeancia de este TFE puede calcularse como:

$$\mathcal{P} = \mu_0 \frac{S}{g}. \quad (3.9)$$

A través de esa permeancia, aplicando la Ley de Hopkinson, se relacionan el flujo Φ almacenado en el TFE y la diferencia de potencial magnético (**DPM**) entre sus extremos:

$$\Phi = \mathcal{P} \Delta\mathcal{U}. \quad (3.10)$$

La energía almacenada en el TFE puede calcularse como:

$$W = \int_0^t i_1 e_1 dt = \int_0^t i_1 \frac{d\lambda_{11}}{dt} dt, \quad (3.11)$$

donde $\lambda_{11} = N_{esp1}\Phi$ es el flujo enlazado por el arrollamiento 1 debido a la corriente que circula por él.

Teniendo en cuenta (3.4), (3.11) puede expresarse en función de las variables magnéticas:

$$W = \int_0^t \frac{\mathcal{F}_1}{N_{esp1}} \frac{d(N_{esp1}\Phi)}{dt} dt = \int_0^t \mathcal{F}_1 \frac{d\Phi}{dt} dt. \quad (3.12)$$

Puede observarse una similitud entre (3.12) y la expresión para calcular la energía almacenada en un condensador eléctrico:

$$W = \int_0^t v \frac{dq}{dt} dt, \quad (3.13)$$

donde q es la carga eléctrica en el mismo. Tal similitud conduce a la analogía entre un tubo de flujo y un condensador, según la cual se establece la correspondencia entre sus parámetros y variables, listada en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Analogía entre un tubo de flujo y un condensador eléctrico.

	Tubo de flujo	Condensador
Flujo y carga	Φ	q
Variación de flujo y corriente eléctrica	$\frac{d\Phi}{dt}$	i
Potencial magnético y eléctrico	\mathcal{U}	v
Permeancia y capacidad	\mathcal{P}	C
Permeabilidad y permitividad	μ	ϵ

Esta analogía se aprovecha para resolver la red magnética del CME formada por tubos de flujo como si fuera una red eléctrica de condensadores. En esa correspondencia, las fuentes de FMM son equivalentes a fuentes de FEM, las DPM a las caídas de tensión eléctrica, las variaciones de flujo magnético a las intensidades de corriente eléctrica y las permeancias a las capacidades [63][68][69].

La interconexión de los tubos de flujo forma una red adaptable a las irregularidades geométricas y cambios en el medio material del espacio físico de almacenamiento magnético.

3.3 Circuito Magnético Equivalente de una Máquina de Inducción

Para desarrollar el CME de una MI se adopta como ejemplo una máquina trifásica de dos pares de polos con rotor con jaula de ardilla. La Fig. 3.2 muestra los núcleos del estator y del rotor, el arrollamiento de la fase a del estator compuesto por cuatro

polos y las barras de la jaula de ardilla. El estator tiene cuarenta y ocho ranuras y el rotor cuarenta. Cada polo de una fase está compuesto por dos bobinas concéntricas, la interior con un paso de nueve ranuras y la exterior de once, con dieciocho espiras cada una. Las ocho bobinas de cada fase están conectadas en serie. Los datos restantes de la geometría de los núcleos del estator y del rotor pueden encontrarse en la Tabla B.2, y los del arrollamiento estático en la Tabla B.3.

En la figura están indicados los sentidos de referencia de la posición θ del rotor, que es antihorario visto desde el frente; de la inducción \vec{B} , que es entrante desde el estator hacia el rotor; y el de las corrientes, indicado en una bobina del polo *Norte* en la parte superior del estator y en un lazo del rotor en la parte superior del mismo.

Sentido de referencia de la posición: El mismo sentido de referencia adoptado para la posición θ del rotor es válido para sus derivadas sucesivas velocidad y aceleración, para el par y para las posiciones angulares en función de la referencia fija sobre el estator ϕ^s y sobre el rotor ϕ^r . Ese sentido ya ha sido tácitamente adoptado en las Fig. 2.3(a), 2.4(a) y 2.5(a) al presentar la distribución de un bobinado del estator y de un lazo del rotor con el método AFB.

Sentido de referencia de la inducción: El sentido de referencia adoptado para la inducción es entrante desde el estator hacia el rotor, también aplicado tácitamente en el desarrollo del método AFB. En la Fig. 2.3(a), la inducción de la fase *a* en la trayectoria de Ampere tiene ese sentido entrante en el intervalo angular en el que luego su función de bobinados, graficada en la Fig. 2.11(b), ha de tener valores positivos. En la Fig. 2.11(a), ese intervalo es el ocupado por el polo *Norte* de la fase *a*, en el

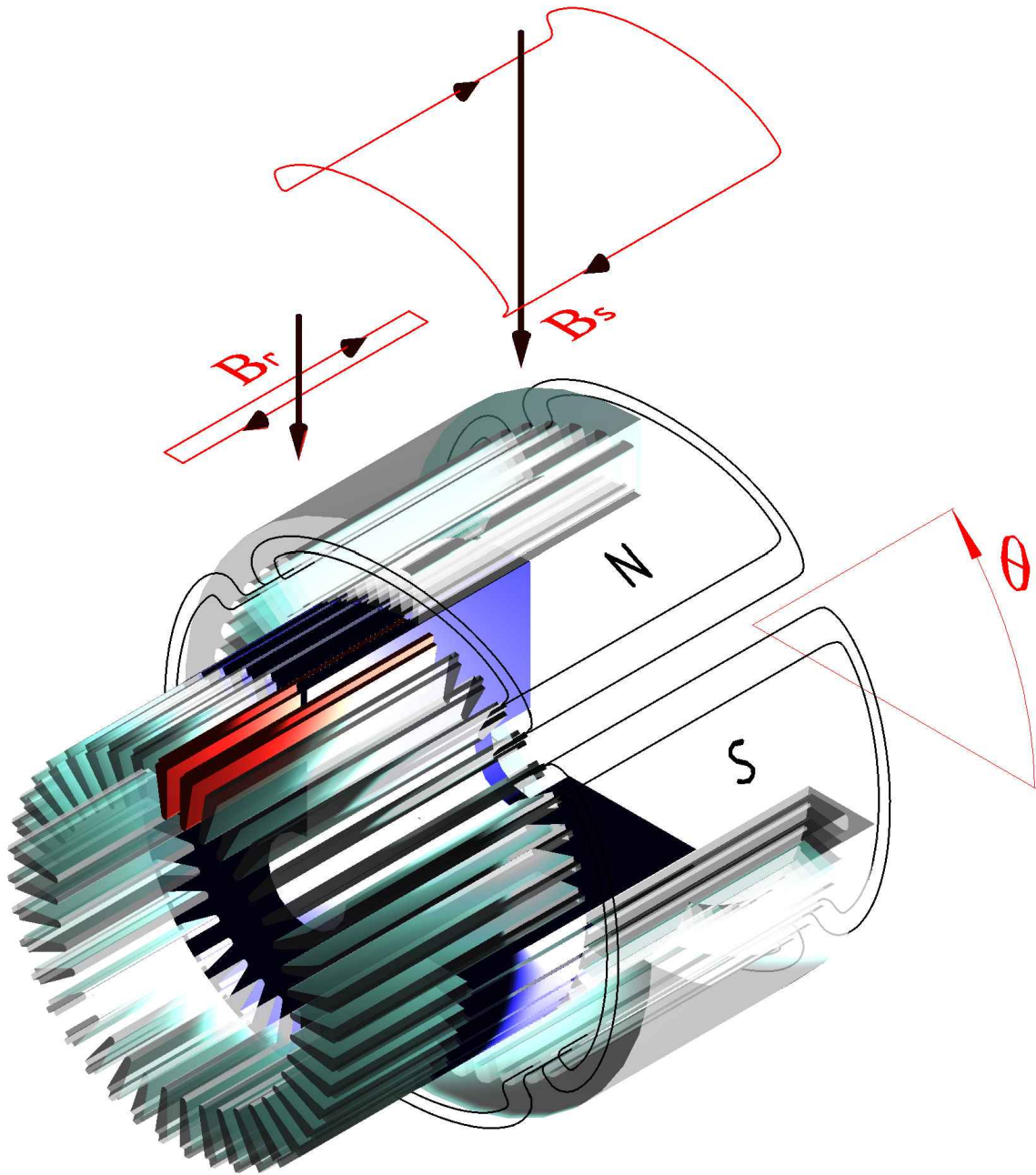


Figura 3.2: Máquina de inducción modelada.

cual el sentido de referencia de la FMM y la DPM en el entrehierro están indicados con los signos + y -.

Para ambos modelos, los valores de la inducción, la FMM y la DPM en el entrehierro son positivos en el polo *Norte* de cada fase y negativos en el polo *Sur*.

En el dominio magnético, las variables cuyo producto resulta en potencia son la derivada del flujo y la DPM [68][69]:

$$p(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \Delta\mathcal{U}(t), \quad (3.14)$$

en forma análoga a los condensadores, para los cuales esas variables son la intensidad de corriente y la diferencia de potencial eléctrico:

$$p(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Delta v(t). \quad (3.15)$$

Con los sentidos de referencia adoptados para la derivada del flujo y la DPM, el de la potencia resulta ser también entrante desde el estator hacia el rotor. Si el modelo CME se representa con la técnica conocida como Diagrama de Enlaces o Bond Graph [68][69], éstos deben tener esa orientación.

Al sentido de referencia de la inducción entrante desde el estator hacia el rotor corresponde el sentido de referencia de las corrientes en las bobinas del estator y los lazos del rotor indicado en la parte superior de la Fig. 3.2.

El sentido de la corriente que circula por las bobinas de un polo está relacionado con el de la FMM inducida por él a través del signo de sus bobinados. Como el sentido de referencia adoptado para la inducción, entrante desde el estator hacia el rotor, es el de los polos *Norte* al circular por ellos la corriente en su sentido de referencia, el signo de los bobinados de estos polos es positivo, mientras que el signo de los bobinados de los polos *Sur* es negativo.

De la misma forma, la polaridad del flujo Φ que es enlazado por un polo está relacionada con el signo de los enlaces de flujo λ a través del signo de sus bobinados.

El flujo positivo enlazado por los polos *Norte* genera en éstos enlaces de flujo del mismo signo, y de signo negativo en los polos *Sur*.

Se adopta como sentido de referencia de la corriente que circula por una barra del rotor a aquél que induce flujo positivo en el lazo de su misma numeración. Como el lazo (diente) posterior a una barra (ranura) tiene su misma numeración, el sentido de referencia de la corriente en ésta es saliente hacia el frente de la máquina.

La numeración con la secuencia ranura-diente se aplica en la Fig. 3.3, en la que además se representan las cabezas de bobina y se designan los polos.

3.3.1 Red de permeancias y fuentes de fuerza magnetomotriz

La Fig. 3.4 representa un fragmento de la red magnética del modelo CME, en el que se encuentran los dientes $i \pm 1$ del estator y $j \pm 1$ del rotor. Cada rama de la red corresponde a un tubo de flujo, cuya permeancia está simbolizada como un condensador eléctrico.

En una aproximación básica, los núcleos del estator y del rotor se fraccionan en un tubo de flujo por cada diente y por cada segmento de yugo entre dientes, cuyas permeancias se designan como \mathcal{P}_{st} , \mathcal{P}_{rt} , \mathcal{P}_{sy} y \mathcal{P}_{ry} , correspondiendo los subíndices s , r , t e y al estator, rotor, diente y yugo respectivamente. A su vez, el entrehierro se divide en un tubo de flujo por cada par de dientes adyacentes, tanto del estator como del rotor, cuyas permeancias se designan \mathcal{P}_{sg} y \mathcal{P}_{rg} respectivamente; y un tubo de flujo por cada combinación entre pares de dientes enfrentados del estator y del rotor, cuyas permeancias se designan \mathcal{P}_{sr} .

Las ramas correspondientes a los yugos y dientes del estator y del rotor tienen

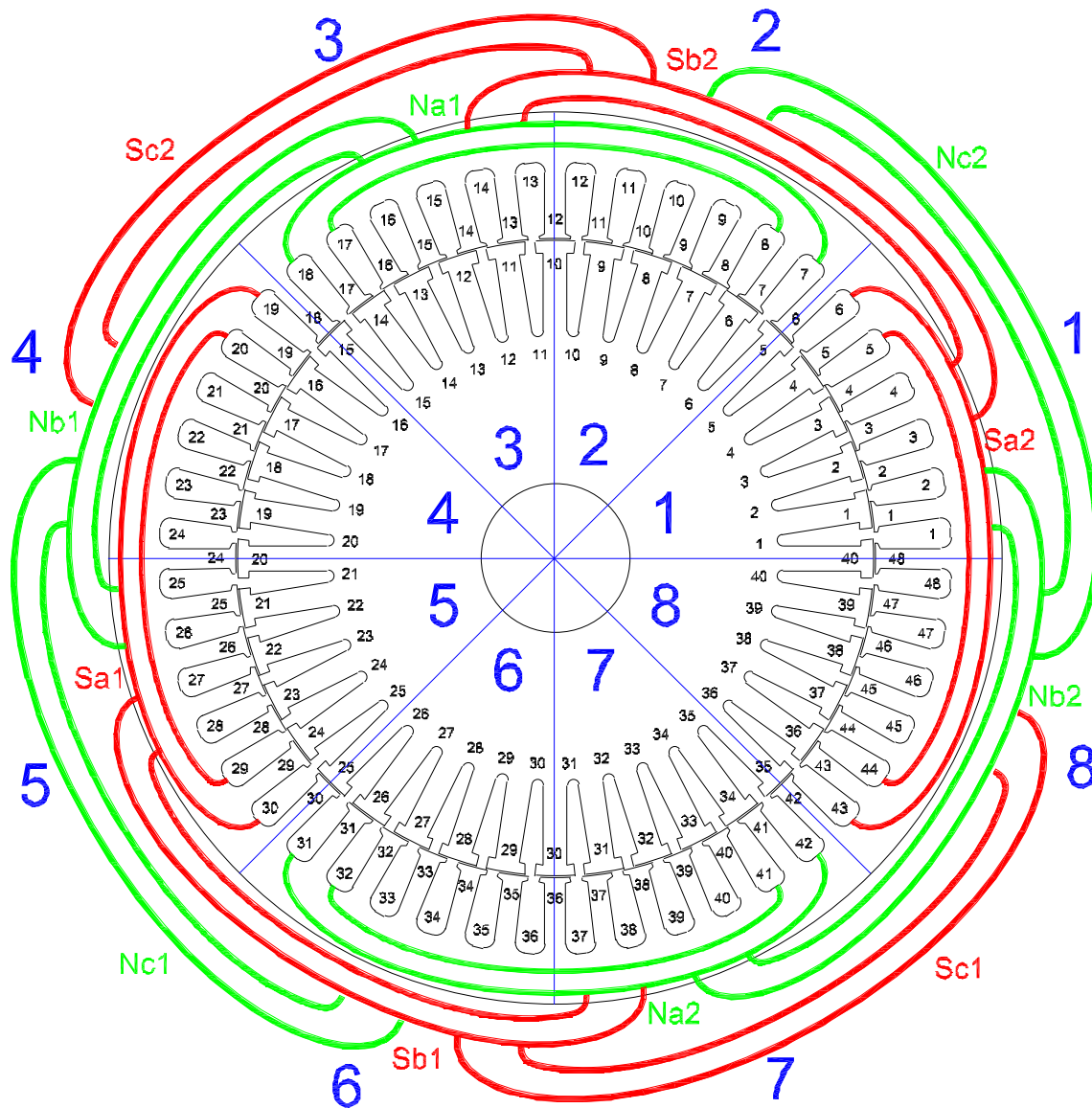


Figura 3.3: Numeración de ranuras, dientes, sectores y designación de polos.

además el símbolo de una conductancia conectada en paralelo al condensador, para modelar las pérdidas. Las ramas correspondientes a los dientes tienen una fuente de FMM para representar el efecto magnetizante de las bobinas del estator o los lazos del rotor.

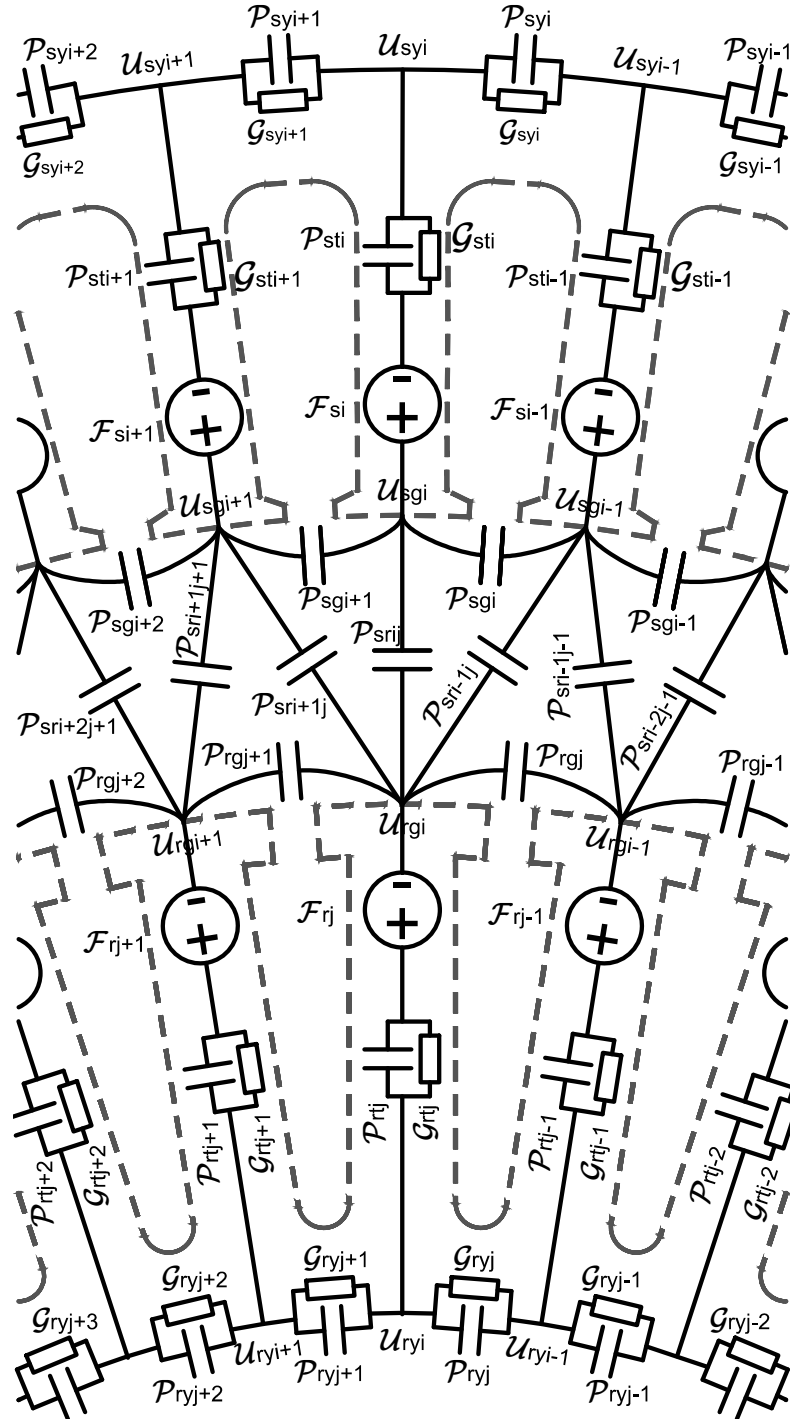


Figura 3.4: Red magnética del modelo CME.

Para aumentar la resolución del modelo, puede adoptarse una mayor densidad de la red magnética en la zona de las ranuras, donde se concentran las irregularidades, como se muestra en [80].

El modelo CME está libre de la restricción R1 impuesta al método AFB, según la cual la permeabilidad de los núcleos del estator y del rotor se considera infinita. Por el contrario, el CME puede aplicar un valor finito de permitividad como parámetro de cálculo de las capacidades representativas de las permeancias de los yugos y dientes \mathcal{P}_{st} , \mathcal{P}_{rt} , \mathcal{P}_{sy} y \mathcal{P}_{ry} . Puede, además, modelar la saturación magnética replicando la variación de permeabilidad con una variación análoga de permitividad, y modelar las pérdidas con el agregado de las conductancias como componentes disipativos.

El modelo CME también está libre de la restricción R2 impuesta al método AFB, según la cual la dirección de las líneas de inducción en los cruces del entrehierro debe considerarse radial, excepto en los arcos con los que se modela el ranurado. Por el contrario, el CME modela la componente tangencial con las permeancias \mathcal{P}_{sg} y \mathcal{P}_{rg} conectadas entre los extremos de los dientes adyacentes.

La restricción R1 puede *adoptarse voluntariamente* en el CME asignando valor infinito a las permeancias de las ramas correspondientes a los yugos y dientes \mathcal{P}_{st} , \mathcal{P}_{rt} , \mathcal{P}_{sy} y \mathcal{P}_{ry} , lo que equivale a reemplazarlas por conexiones puente. Asimismo, R2 puede también *adoptarse voluntariamente* asignando valor cero a las permeancias de las ramas tangenciales del entrehierro \mathcal{P}_{sg} y \mathcal{P}_{rg} , lo que equivale a su apertura.

Para modelar el ranurado, los valores de las permeancias \mathcal{P}_{sr} se calculan considerando a las líneas de inducción extendidas con los mismos arcos de circunferencia representados en la Fig. 2.9.

En cuanto a la restricción R3, según la cual el entrehierro se considera axialmente uniforme, no se impone al método AFB ni al CME, sino que se adopta en ambos casos para limitar el modelo a dos dimensiones. Un análisis de las irregularidades tridimensionales como el presentado para el método AFB en [11] excede el alcance de esta tesis.

En la Fig. 3.4, aplicando la Ley de Gauss al nodo en el yugo del diente i del estator, la suma de los flujos almacenados en los yugos de las ranuras adyacentes más el flujo Φ_{sti} almacenado en ese diente es igual a cero [10][61]:

$$\mathcal{P}_{syi} (\mathcal{U}_{syi} - \mathcal{U}_{syi-1}) + \mathcal{P}_{syi+1} (\mathcal{U}_{syi} - \mathcal{U}_{syi+1}) + \Phi_{sti} = 0, \quad (3.16)$$

donde $\mathcal{U}_{syi\pm 1}$ son los PM de los nodos en los yugos $i \pm 1$. Agrupando términos en cada uno de esos PM, resulta:

$$-\mathcal{P}_{syi} \mathcal{U}_{syi-1} + (\mathcal{P}_{syi} + \mathcal{P}_{syi+1}) \mathcal{U}_{syi} - \mathcal{P}_{syi} \mathcal{U}_{syi+1} = -\Phi_{sti}. \quad (3.17)$$

Aplicando la Ley de Gauss al nodo ubicado en el extremo del diente i del estator, la suma del flujo Φ_{sti} almacenado en ese diente más los flujos almacenados en los TFE adyacentes a él es igual a cero:

$$\mathcal{P}_{sgi} (\mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{U}_{sgi-1}) + \mathcal{P}_{sgi+1} (\mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{U}_{sgi+1}) + \sum_{j=1}^{S_r} \mathcal{P}_{srij} (\mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{U}_{rgj}) - \Phi_{sti} = 0, \quad (3.18)$$

donde \mathcal{P}_{srij} es la permeancia del TFE entre el diente i del estator y cada diente j del rotor, y S_r es el número de ranuras de este último. Agrupando términos en cada PM, resulta:

$$-\mathcal{P}_{sgi} \mathcal{U}_{sgi-1} + \left(\mathcal{P}_{sgi} + \mathcal{P}_{sgi+1} + \sum_{j=1}^{S_r} \mathcal{P}_{srij} \right) \mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{P}_{sgi} \mathcal{U}_{sgi+1} - \sum_{j=1}^{S_r} \mathcal{P}_{srij} \mathcal{U}_{rgj} = \Phi_{sti}. \quad (3.19)$$

Aplicando la Ley de Gauss al nodo ubicado en el extremo del diente j del rotor, la suma de los flujos almacenados en los TFE adyacentes a ese diente más el flujo Φ_{rtj} almacenado en él es igual a cero:

$$\mathcal{P}_{rgj} (\mathcal{U}_{rgj} - \mathcal{U}_{rgj-1}) + \mathcal{P}_{rgj+1} (\mathcal{U}_{rgj} - \mathcal{U}_{rgj+1}) + \sum_{i=1}^{S_s} \mathcal{P}_{srij} (\mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{U}_{rgj}) - \Phi_{rtj} = 0, \quad (3.20)$$

donde S_s es el número de ranuras del estator. Agrupando términos, resulta:

$$- \mathcal{P}_{rgi} \mathcal{U}_{rgi-1} + \left(\mathcal{P}_{rgi} + \mathcal{P}_{rgi+1} + \sum_{i=1}^{S_s} \mathcal{P}_{srij} \right) \mathcal{U}_{rgi} - \mathcal{P}_{rgi} \mathcal{U}_{rgi+1} - \sum_{j=1}^{S_r} \mathcal{P}_{srij} \mathcal{U}_{sgj} = \Phi_{rti}. \quad (3.21)$$

Aplicando la Ley de Gauss al nodo en el yugo del diente j del rotor, la suma de los flujos almacenados en los yugos de las ranuras adyacentes más el flujo Φ_{rtj} almacenado en ese diente es igual a cero:

$$\mathcal{P}_{ryj} (\mathcal{U}_{ryj} - \mathcal{U}_{ryj-1}) + \mathcal{P}_{ryj+1} (\mathcal{U}_{ryj} - \mathcal{U}_{ryj+1}) + \Phi_{rtj} = 0, \quad (3.22)$$

donde $\mathcal{U}_{ryj\pm 1}$ son los PM de los nodos en los yugos $j \pm 1$. Agrupando términos en cada uno de esos PM, resulta:

$$- \mathcal{P}_{ryj} \mathcal{U}_{ryj-1} + (\mathcal{P}_{ryj} + \mathcal{P}_{ryj+1}) \mathcal{U}_{ryj} - \mathcal{P}_{ryj} \mathcal{U}_{ryj+1} = -\Phi_{rtj}. \quad (3.23)$$

La aplicación de las ecuaciones (3.17), (3.19), (3.21) y (3.23) a todos los dientes del estator y del rotor puede expresarse en notación matricial:

$$\mathcal{P}_{sy} \mathcal{U}_{sy} = -\Phi_{st}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{P}_{sg} \mathcal{U}_{sg} + \mathcal{P}_{sr} \mathcal{U}_{rg} = \Phi_{st}, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{P}_{rs} \mathcal{U}_{sg} + \mathcal{P}_{rg} \mathcal{U}_{rg} = \Phi_{rt}, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{P}_{ry} \mathcal{U}_{ry} = -\Phi_{rt}, \quad (3.27)$$

donde \mathbf{u}_{sy} , \mathbf{u}_{sg} , \mathbf{u}_{rg} y \mathbf{u}_{ry} son vectores que contienen los PM en los yugos y extremos de los dientes del estator y del rotor:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{sy} &= [\mathcal{U}_{sy1} \ \mathcal{U}_{sy2} \ \dots \ \mathcal{U}_{syS_s}]^T, & \mathbf{u}_{rg} &= [\mathcal{U}_{rg1} \ \mathcal{U}_{rg2} \ \dots \ \mathcal{U}_{rgS_r}]^T, \\ \mathbf{u}_{sg} &= [\mathcal{U}_{sg1} \ \mathcal{U}_{sg2} \ \dots \ \mathcal{U}_{sgS_s}]^T, & \mathbf{u}_{ry} &= [\mathcal{U}_{ry1} \ \mathcal{U}_{ry2} \ \dots \ \mathcal{U}_{ryS_r}]^T, \end{aligned} \quad (3.28)$$

y Φ_{st} , Φ_{rt} vectores de flujo almacenado en los dientes:

$$\Phi_{st} = [\Phi_{st1} \ \Phi_{st2} \ \dots \ \Phi_{stS_s}]^T, \quad \Phi_{rt} = [\Phi_{rt1} \ \Phi_{rt2} \ \dots \ \Phi_{rtS_r}]^T. \quad (3.29)$$

La matriz \mathcal{P}_{sy} de orden $(S_s \times S_s)$ contiene a las permeancias de los yugos del estator:

$$\mathcal{P}_{sy} = \begin{bmatrix} (\mathcal{P}_{sy1} + \mathcal{P}_{sy2}) & -\mathcal{P}_{sy2} & \dots & -\mathcal{P}_{sy1} \\ -\mathcal{P}_{sy2} & (\mathcal{P}_{sy2} + \mathcal{P}_{sy3}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{P}_{sy1} & 0 & \dots & (\mathcal{P}_{syS_s} + \mathcal{P}_{sy1}) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Llamando \mathcal{P}_{si} en (3.18) y (3.19) a la permeancia del TFE generado por la proyección angular de un diente i del estator:

$$\mathcal{P}_{si} = \sum_{j=1}^{S_r} \mathcal{P}_{srij}, \quad (3.31)$$

esta permeancia de cada uno de esos dientes, así como las de dispersión entre los

dientes adyacentes, están incluidas en la matriz \mathcal{P}_{sg} de orden $(S_s \times S_s)$:

$$\mathcal{P}_{sg} = \begin{bmatrix} (\mathcal{P}_{sg1} + \mathcal{P}_{sg2} + \mathcal{P}_{s1}) & -\mathcal{P}_{sg2} & \dots & -\mathcal{P}_{sg1} \\ -\mathcal{P}_{sg2} & (\mathcal{P}_{sg2} + \mathcal{P}_{sg3} + \mathcal{P}_{s2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{P}_{sg1} & 0 & \dots & (\mathcal{P}_{sgS_s} + \mathcal{P}_{sg1} + \mathcal{P}_{sS_s}) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

La matriz \mathcal{P}_{sr} de orden $(S_s \times S_r)$ contiene a las permeancias de los TFE que cruzan el entrehierro entre los dientes del estator y los del rotor:

$$\mathcal{P}_{sr} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{sr11} & \mathcal{P}_{sr12} & \dots & \mathcal{P}_{sr1S_r} \\ \mathcal{P}_{sr21} & \mathcal{P}_{sr22} & \dots & \mathcal{P}_{sr2S_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{P}_{srS_s1} & \mathcal{P}_{srS_s2} & \dots & \mathcal{P}_{srS_sS_r} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

y la matriz \mathcal{P}_{rs} es:

$$\mathcal{P}_{rs} = \mathcal{P}_{sr}^T. \quad (3.34)$$

La permeancia del TFE generado por la proyección angular de un diente j del rotor, presente en (3.20) y (3.21), se define como \mathcal{P}_{rj} :

$$\mathcal{P}_{rj} = \sum_{i=1}^{S_s} \mathcal{P}_{srij}. \quad (3.35)$$

Esta permeancia, así como las de dispersión entre los dientes adyacentes, están

incluidas en la matriz \mathcal{P}_{rg} de orden $(S_r \times S_r)$:

$$\mathcal{P}_{rg} = \begin{bmatrix} (\mathcal{P}_{rg1} + \mathcal{P}_{rg2} + \mathcal{P}_{r1}) & -\mathcal{P}_{rg2} & \dots & -\mathcal{P}_{rg1} \\ -\mathcal{P}_{rg2} & (\mathcal{P}_{rg2} + \mathcal{P}_{rg3} + \mathcal{P}_{r2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{P}_{rg1} & 0 & \dots & (\mathcal{P}_{rgS_r} + \mathcal{P}_{rg1} + \mathcal{P}_{rS_r}) \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

La matriz \mathcal{P}_{ry} de orden $(S_r \times S_r)$ contiene a las permeancias de los yugos del rotor:

$$\mathcal{P}_{ry} = \begin{bmatrix} (\mathcal{P}_{ry1} + \mathcal{P}_{ry2}) & -\mathcal{P}_{ry2} & \dots & -\mathcal{P}_{ry1} \\ -\mathcal{P}_{ry2} & (\mathcal{P}_{ry2} + \mathcal{P}_{ry3}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathcal{P}_{ry1} & 0 & \dots & (\mathcal{P}_{ryS_r} + \mathcal{P}_{ry1}) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Finalmente, las expresiones (3.24) a (3.37) pueden unificarse en la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{sy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{sg} & \mathcal{P}_{sr} & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{rs} & \mathcal{P}_{rg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P}_{sg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{sy} \\ \mathcal{U}_{sg} \\ \mathcal{U}_{rg} \\ \mathcal{U}_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_{st} \\ \Phi_{st} \\ -\Phi_{rt} \\ \Phi_{rt} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Las submatrices en la diagonal de la matriz \mathcal{P} en (3.38) son simétricas e invertibles, y las que están fuera de la diagonal son traspuestas entre sí.

3.3.2 Circuito eléctrico del estator y del rotor

Para completar la expresión matemática de la red magnética representada en la Fig. 3.4, se debe vincular el sistema de ecuaciones formado por (3.38) con los circuitos

eléctricos del estator y del rotor. Tal vinculación se hace relacionando los PM en las ramas correspondientes a los TFE de los dientes con las FMM inducidas por las bobinas del estator y de los lazos del rotor, de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_{sg} = \mathbf{u}_{sy} - \mathcal{R}_{st}\Phi_{st} + \mathcal{F}_s, \quad \mathbf{u}_{rg} = \mathbf{u}_{ry} - \mathcal{R}_{rt}\Phi_{rt} + \mathcal{F}_r, \quad (3.39)$$

donde \mathcal{R}_{st} , \mathcal{R}_{rt} , \mathcal{F}_s y \mathcal{F}_r son vectores cuyos elementos son las reluctancias de los dientes y las FMM aplicadas a éstos. Los primeros pueden expresarse como:

$$\mathcal{R}_{st} = [\mathcal{R}_{st1} \ \mathcal{R}_{st2} \ \dots \ \mathcal{R}_{stS_s}]^T, \quad \mathcal{R}_{rt} = [\mathcal{R}_{rt1} \ \mathcal{R}_{rt2} \ \dots \ \mathcal{R}_{rtS_r}]^T. \quad (3.40)$$

Los vectores de las FMM inducidas en los dientes del estator y del rotor se obtienen con las expresiones:

$$\mathcal{F}_s = \mathbf{W}_s \mathbf{i}_s, \quad \mathcal{F}_r = \mathbf{W}_r \mathbf{i}_r, \quad (3.41)$$

donde \mathbf{i}_s e \mathbf{i}_r están dados por

$$\mathbf{i}_s = [i_{sa} \ i_{sb} \ i_{sc}]^T, \quad \mathbf{i}_r = [i_{rt1} \ i_{rt2} \ \dots \ i_{rtS_r}]^T. \quad (3.42)$$

La matriz de transformación de FMM \mathbf{W}_s [61], es de orden $(S_s \times 3)$, contiene los números de espiras con los que el arrollamiento de cada fase enlaza a los dientes del estator. Como se observa en la Fig. 3.3, el diente 1 es enlazado por dos bobinas de un polo *Sur* de la fase *a*, una de un polo *Norte* de la fase *b* y dos de un polo *Norte* de la fase *c*, cada una con un número de espiras N_{esp} . Como los polos *Norte* tienen el mismo sentido de referencia del flujo y los *Sur* sentido contrario, resulta $w_{1,1} = -2N_{esp}$, $w_{1,2} = N_{esp}$ y $w_{1,3} = 2N_{esp}$. Aplicando el mismo criterio a los dientes

restantes, se obtiene:

$$\mathbf{W}_s = N_{esp} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}^T \quad (3.43)$$

Como cada lazo del rotor tiene una sola espira, \mathbf{W}_r es la matriz identidad de orden $(S_r \times S_r)$.

Los flujos enlazados por las fases del estator y los lazos del rotor se calculan con las expresiones:

$$\boldsymbol{\lambda}_s = \mathbf{W}_s^T \boldsymbol{\Phi}_{st} + \mathbf{L}_{sl} \mathbf{i}_s, \quad \boldsymbol{\lambda}_r = \mathbf{W}_r^T \boldsymbol{\Phi}_{rt} + \mathbf{L}_{rl} \mathbf{i}_r, \quad (3.44)$$

donde \mathbf{L}_{sl} es una matriz diagonal cuyos elementos son las inductancias de dispersión de las fases del estator:

$$\mathbf{L}_{sl} = \begin{bmatrix} L_{sla} & 0 & 0 \\ 0 & L_{slb} & 0 \\ 0 & 0 & L_{slc} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

y \mathbf{L}_{rl} es una matriz que contiene las inductancias de dispersión de las barras y segmentos de anillo de cortocircuito del rotor:

$$\mathbf{L}_{rl} = \begin{bmatrix} 2L_b + L_{ed} + L_{et} & -L_b & 0 & \vdots & -L_b \\ -L_b & 2L_b + L_{ed} + L_{et} & -L_b & \vdots & 0 \\ 0 & -L_b & 2L_b + L_{ed} + L_{et} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -L_b & 0 & 0 & \vdots & 2L_b + L_{ed} + L_{et} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Las ecuaciones (3.42) y (3.44) pueden sustituirse en (2.1), para la cual los desarrollos de las matrices \mathbf{R}_s y \mathbf{R}_r están dados por (2.6) y (2.7).

3.3.3 Par electromagnético

Para el cálculo del par, se aplica la metodología descrita en la Sec. 2.2.2 basada en el método de la coenergía. En el CME, los almacenadores considerados son las permeancias. En este caso, sólo intervienen en el cálculo del par las permeancias de los TFE proyectados por el enfrentamiento de los dientes del estator y del rotor, que son función de la posición, y por lo tanto tienen derivada no nula [61]. Tales permeancias forman la matriz (3.33) y su derivada:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{sr}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{P}_{sr11}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{P}_{sr12}}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}_{sr1S_r}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathcal{P}_{sr21}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{P}_{sr22}}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}_{sr2S_r}}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{P}_{srS_s1}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{P}_{srS_s2}}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}_{srS_sS_r}}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Las DPM aplicadas a los TFE se calculan como:

$$\mathbf{u}_{sr} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{sg1} - \mathcal{U}_{rg1} & \mathcal{U}_{sg1} - \mathcal{U}_{rg2} & \cdots & \mathcal{U}_{sg1} - \mathcal{U}_{rgS_r} \\ \mathcal{U}_{sg2} - \mathcal{U}_{rg1} & \mathcal{U}_{sg2} - \mathcal{U}_{rg2} & \cdots & \mathcal{U}_{sg2} - \mathcal{U}_{rgS_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_{sgS_s} - \mathcal{U}_{rg1} & \mathcal{U}_{sgS_s} - \mathcal{U}_{rg2} & \cdots & \mathcal{U}_{sgS_s} - \mathcal{U}_{rgS_r} \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

donde los elementos \mathcal{U}_{sgi} , \mathcal{U}_{rgj} son los mismos que forman los vectores en (3.28).

Con esas variables, el par electromagnético se obtiene aplicando la expresión:

$$T_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S_s} \sum_{j=1}^{S_r} \frac{\partial \mathcal{P}_{sr}}{\partial \theta} \circ \mathbf{u}_{sr}^2, \quad (3.49)$$

donde el operador \circ simboliza el producto Hadamard.

Como los cuadrados de los elementos de (3.48) pueden adoptar sólo valores positivos, el signo del par en cada TFE es el mismo de la derivada de su permeancia.

En el MCMA, en cambio, el signo del par no se relaciona con el de las derivadas de las inductancias. En el desarrollo de (2.55) para el cálculo del par con el MCMA, los signos de los términos que contienen a las derivadas de las inductancias propias de las fases del estator y de los lazos del rotor están dados por esos parámetros, ya que son multiplicados por el cuadrado de sus respectivas corrientes, el cual es siempre positivo. Pero no sucede lo mismo con el signo de los términos que contienen a las derivadas de las inductancias mutuas en general, porque dependen del producto de dos corrientes distintas.

Se puede plantear entonces la siguiente conclusión parcial:

CP4: *En el modelo CME, el signo de los pares ejercidos en los TFE entre los dientes del estator y del rotor es el mismo de las derivadas de sus permeancias, que son parámetros predecibles con la posición θ del rotor, mientras que en el MCMA el signo de los pares ejercidos por las inductancias mutuas entre las fases del estator, entre los lazos del rotor y entre las fases y los lazos, depende además de variables temporales.*

3.4 Cálculo de las permeancias y sus derivadas

Para comparar ambos modelos en igualdad de condiciones, se aplicarán al CME las mismas restricciones impuestas al método AFB. Tales son R1 y R2, según las cuales la permeabilidad de los núcleos del estator y del rotor se considera infinita, y las líneas de inducción deben ser segmentos radiales prolongados con arcos en caso

de incidir sobre una ranura.

Esas restricciones se aplican al CME asignando valor infinito a las permeancias de las ramas correspondientes a los yugos y dientes, lo que equivale a reemplazarlas

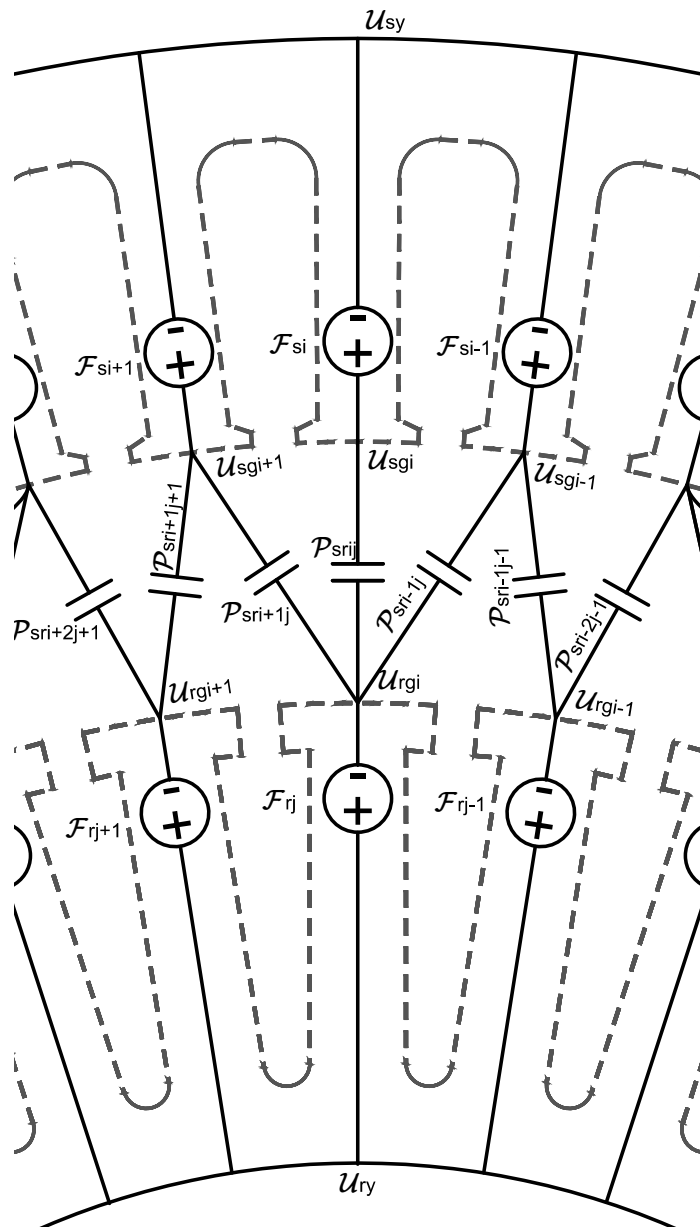


Figura 3.5: Red magnética del modelo CME bajo las restricciones R1 y R2.

por conexiones puente; y valor cero a las permeancias de las ramas tangenciales del entrehierro, lo que equivale a su apertura. Con tales consideraciones, la red magnética del CME mostrada en la Fig. 3.4 se reduce a la mostrada en la Fig. 3.5.

Debido a la restricción R1, los nodos de la red correspondientes a los yugos del estator se unifican, y aplicando la Ley de Gauss al nodo resultante se obtiene [10]:

$$\sum_{i=1}^{S_s} \Phi_{sti} = 0, \quad (3.50)$$

en reemplazo de (3.16) y (3.17).

Debido a la restricción R2, se anula la permeancia de los TFE tangenciales del entrehierro conectados entre los extremos de los dientes adyacentes del estator:

$$\mathcal{P}_{sgi} = 0 \quad \forall i. \quad (3.51)$$

Aplicando la Ley de Gauss al nodo ubicado en el extremo del diente i del estator, la suma del flujo Φ_{sti} almacenado en ese diente más los flujos almacenados en los TFE adyacentes a él es igual a cero, con lo cual (3.18) se reduce a:

$$\mathcal{P}_{si} \mathcal{U}_{srij} - \Phi_{sti} = 0. \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{U}_{srij} = \mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{U}_{rgj}$, resulta:

$$\mathcal{P}_{si} \mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{P}_{si} \mathcal{U}_{rgj} = \Phi_{sti}, \quad (3.53)$$

en reemplazo de (3.19).

También debido a la restricción R2, se anula la permeancia de los TFE tangenciales del entrehierro conectados entre los extremos de los dientes adyacentes del rotor:

$$\mathcal{P}_{rgj} = 0 \quad \forall j. \quad (3.54)$$

Aplicando la Ley de Gauss al nodo ubicado en el extremo del diente j del rotor, la suma del flujo Φ_{rtj} almacenado en ese diente más los flujos almacenados en los TFE adyacentes a él es igual a cero, con lo cual (3.20) se reduce a:

$$\mathcal{P}_{rj} \mathcal{U}_{srij} - \Phi_{rtj} = 0. \quad (3.55)$$

Teniendo también en cuenta que $\mathcal{U}_{srij} = \mathcal{U}_{sgi} - \mathcal{U}_{rgj}$, resulta:

$$\mathcal{P}_{rj} \mathcal{U}_{rgi} - \mathcal{P}_{rj} \mathcal{U}_{sgj} = \Phi_{rti}, \quad (3.56)$$

en reemplazo de (3.21).

Debido a la restricción R1, los nodos de la red correspondientes a los yugos del rotor se unifican, y aplicando la Ley de Gauss al nodo resultante se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{S_r} \Phi_{rtj} = 0, \quad (3.57)$$

en reemplazo de (3.22) y (3.23).

La aplicación de (3.50), (3.53), (3.56) y (3.57) a todos los dientes del estator y del rotor puede expresarse en notación matricial:

$$\mathbf{0} = \Phi_{st}, \quad (3.58)$$

$$\mathcal{P}_s \mathcal{U}_{sg} + \mathcal{P}_{sr} \mathcal{U}_{rg} = \Phi_{st}, \quad (3.59)$$

$$\mathcal{P}_{rs} \mathcal{U}_{sg} + \mathcal{P}_r \mathcal{U}_{rg} = \Phi_{rt}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{0} = \Phi_{rt}, \quad (3.61)$$

en reemplazo de (3.24) a (3.27).

En ambos sistemas de ecuaciones, \mathcal{U}_{sg} y \mathcal{U}_{rg} son los vectores de los PM en los extremos de los dientes dados en (3.28), y Φ_{st} , Φ_{rt} los vectores de flujo en los dientes dados en (3.29).

Las matrices \mathcal{P}_s y \mathcal{P}_r contienen sólo las permeancias de los TFE que son generados por las proyecciones angulares de los dientes del estator y del rotor respectivamente, reduciéndose (3.32) y (3.36) a:

$$\mathcal{P}_{sg} = \mathcal{P}_s = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{s1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{s2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{P}_{sS_s} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{rg} = \mathcal{P}_r = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{r1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{r2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{P}_{rS_r} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Las matrices \mathcal{P}_{sr} y su traspuesta \mathcal{P}_{rs} que contienen las permeancias de los TFE que cruzan el entrehierro entre los dientes del estator y los del rotor son las mismas dadas en (3.33) y (3.34).

Sustituyendo (3.58) en (3.24) y (3.61) en (3.27), se obtiene:

$$\mathcal{P}_{sy} \mathbf{u}_{sy} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{P}_{ry} \mathbf{u}_{ry} = \mathbf{0}. \quad (3.63)$$

Teniendo en cuenta que \mathcal{P}_{sy} y \mathcal{P}_{ry} son invertibles, resulta:

$$\mathbf{u}_{sy} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_{ry} = \mathbf{0}. \quad (3.64)$$

A su vez, debido a la restricción R1, las reluctancias de los dientes son nulas y (3.40) resulta:

$$\mathcal{R}_{st} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{R}_{rt} = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Finalmente, sustituyendo (3.64) y (3.65) en (3.39), esta última se reduce a:

$$\mathbf{u}_{sg} = \mathcal{F}_s, \quad \mathbf{u}_{rg} = \mathcal{F}_r. \quad (3.66)$$

El modelo matemático del CME bajo las restricciones R1 y R2 se completa con las expresiones (3.41) a (3.46), no afectadas por las mismas.

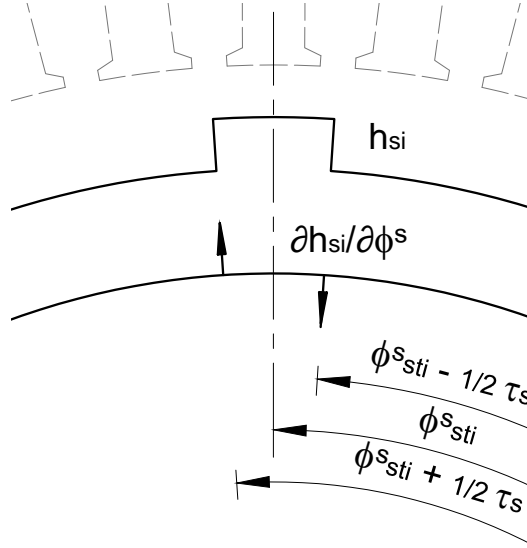


Figura 3.6: Ventana de un diente del estator y sus derivada respecto de ϕ^s .

3.4.1 Fraccionamiento del entrehierro en tubos de flujo

La Fig. 3.6 muestra un sector del entrehierro frente al diente i del estator, cuyo centro está ubicado en la posición ϕ_{sti}^s . Adoptando en la Fig. 3.3 la referencia de posición angular fija en el estator centrada en el diente 48, resulta:

$$\phi_{sti}^s = \phi_{st}^s(i) = \tau_s i, \quad (3.67)$$

donde τ_s es el paso angular de los dientes del estator:

$$\tau_s = \frac{2\pi}{S_s}. \quad (3.68)$$

La Fig. 3.6 muestra además la gráfica de una función espacial rectangular h_{si} frente al diente i , y su derivada respecto de ϕ^s . La función rectangular, usualmente llamada *función ventana*, puede expresarse como:

$$h_{si} = h_s(i, \phi^s) = \text{Heav} \left\{ \phi^s - \left[\phi_{st}^s(i) - \frac{1}{2} \tau_s \right] \right\} - \text{Heav} \left\{ \phi^s - \left[\phi_{st}^s(i) + \frac{1}{2} \tau_s \right] \right\}. \quad (3.69)$$

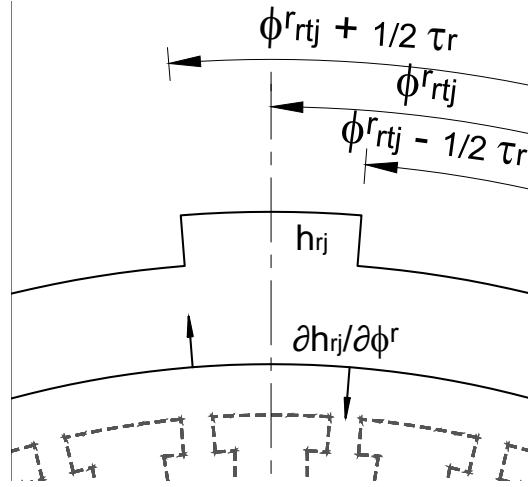


Figura 3.7: Ventana de un diente del rotor y su derivada respecto de ϕ^r .

La expresión (3.69) guarda similitudes con la (2.58) de la distribución de bobinados del método AFB, graficada en la Fig. 2.3. Ambas son funciones espaciales rectangulares, con la diferencia de que la ventana tiene el paso de un diente, mientras que la distribución de bobinados tiene el paso de la bobina; y la ventana tiene amplitud unitaria mientras que la distribución de bobinados tiene una amplitud igual al número de espiras de la bobina.

Análogamente, la Fig. 3.7 muestra un sector del entrehierro frente al diente j del rotor, cuyo centro está ubicado en la posición ϕ_{rtj}^r . Adoptando en la Fig. 3.3 la referencia de posición angular fija en el rotor centrada en el diente 40, resulta:

$$\phi_{rtj}^r = \phi_{rt}^r(j) = \tau_r j, \quad (3.70)$$

donde τ_r es el paso angular de los dientes del rotor:

$$\tau_r = \frac{2\pi}{S_r}. \quad (3.71)$$

La ventana del diente j del rotor puede expresarse como:

$$h_r(i, \phi^r) = \text{Heav} \left\{ \phi^r - \left[\phi_{rt}^r(j) - \frac{1}{2} \tau_r \right] \right\} - \text{Heav} \left\{ \phi^r - \left[\phi_{rt}^r(j) + \frac{1}{2} \tau_r \right] \right\}. \quad (3.72)$$

El efecto de la ventana de un diente al multiplicar funciones espaciales como la del entrehierro o su recíproca, es anularlas en las posiciones que no lo enfrentan. De este modo, la intersección de las ventanas de un diente i del estator y uno j del rotor limita el espacio que ocupa el TFE generado por la proyección angular de su área enfrentada.

Para determinar la intersección de dos ventanas, ambas deben estar expresadas en el mismo marco de referencia. Sustituyendo (2.56) en (3.67), la posición del centro del diente i del estator expresada en un MR resulta:

$$\phi_{sti}^r = \phi_{st}^r(i, \theta) = \phi_{st}^s(i) - \theta = \tau_s i - \theta. \quad (3.73)$$

Luego, la ventana de un diente i del estator expresada en ese marco de referencia se obtiene con la expresión:

$$h_s(i, \phi^r, \theta) = \text{Heav} \left\{ \phi^r + \left[\phi_{st}^r(i, \theta) - \frac{1}{2} \tau_s \right] \right\} - \text{Heav} \left\{ \phi^r + \left[\phi_{st}^r(i, \theta) + \frac{1}{2} \tau_s \right] \right\}. \quad (3.74)$$

Sustituyendo (2.56) en (3.70), la posición del centro del diente j del rotor expresada en un ME resulta:

$$\phi_{rtj}^s = \phi_{rt}^s(j, \theta) = \phi_{rt}^r(j) + \theta = \tau_r j + \theta. \quad (3.75)$$

Luego, la ventana de un diente j del rotor, expresada en ese marco de referencia se obtiene con la expresión:

$$h_r(j, \phi^s, \theta) = \text{Heav} \left\{ \phi^s - \left[\phi_{rt}^s(j, \theta) - \frac{1}{2} \tau_r \right] \right\} - \text{Heav} \left\{ \phi^s - \left[\phi_{rt}^s(j, \theta) + \frac{1}{2} \tau_r \right] \right\}. \quad (3.76)$$

La expresión (3.76) resulta ser equivalente a la (2.65) de la distribución de bobinados de un lazo de la jaula de ardilla, graficada en la Fig. 2.4, ya que ambas son una función espacial rectangular de paso de un diente y tienen amplitud unitaria.

3.4.2 Permeancia de un tubo de flujo del entrehierro

La permeancia de un TFE no depende del marco de referencia y puede calcularse en función de las posiciones angulares referidas indistintamente a un ME o a un MR como:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{sr}(i, j, \theta) &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} h_s(i, \phi^s) h_r(j, \phi^s, \theta) \frac{1}{g(\phi^s, \theta)} d\phi^s \\ &= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} h_r(j, \phi^r) h_s(i, \phi^r, \theta) \frac{1}{g(\phi^r, \theta)} d\phi^r, \end{aligned} \quad (3.77)$$

donde $g(\phi^s, \theta)$ y $g(\phi^r, \theta)$ es la función del entrehierro expresada en esos marcos de referencia, dada por (2.68).

3.4.3 Derivadas de la permeancia de un tubo de flujo del entrehierro

Si bien las expresiones de la permeancia de un TFE dadas en (3.77), correspondientes a uno y otro marco de referencia, resultan en un mismo valor, conducen a derivadas distintas. Esas derivadas, que se utilizan para el cálculo del par sustituyéndolas en

(3.49) resultan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}_{sr}(i, j, \theta)}{\partial \theta} &= \\
&= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{h_s(i, \phi^s)}{g(\phi^s, \theta)} \frac{\partial h_r(j, \phi^s, \theta)}{\partial \theta} d\phi^s - \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{h_s(i, \phi^s)}{g^2(\phi^s, \theta)} \frac{\partial g(\phi^s, \theta)}{\partial \theta} d\phi^s \\
&= \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{h_r(j, \phi^r)}{g(\phi^r, \theta)} \frac{\partial h_s(i, \phi^r, \theta)}{\partial \theta} d\phi^r - \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{h_r(j, \phi^r)}{g^2(\phi^r, \theta)} \frac{\partial g(\phi^r, \theta)}{\partial \theta} d\phi^r.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

En (3.78), la expresión de la derivada en cada marco de referencia tiene dos términos. En los primeros, el integrando contiene al producto de la ventana de un diente del estator por la derivada de la ventana de un diente del rotor, ambas en un ME, $h_s(i, \phi^s) \frac{\partial h_r(j, \phi^s, \theta)}{\partial \theta}$, o bien de la ventana de un diente del rotor por la derivada de la de uno del estator, ambas en un MR, $h_r(j, \phi^r) \frac{\partial h_s(i, \phi^r, \theta)}{\partial \theta}$.

En los segundos términos, el integrando contiene como factor a la derivada de la función del entrehierro en el respectivo marco de referencia: $\frac{\partial g(\phi^s, \theta)}{\partial \theta}$ o bien $\frac{\partial g(\phi^r, \theta)}{\partial \theta}$.

Se puede plantear entonces la siguiente conclusión parcial:

CP5: *La derivada de la permeancia de un TFE tiene dos términos, uno atribuible a la variación del área enfrentada por los dientes, y el otro a la variación de su distancia radial. Esas variaciones son, respectivamente, la deformación longitudinal y transversal del TFE.*

En una MI con ELU, la derivada de la permeancia de un TFE es atribuible sólo a la variación del área enfrentada por los dientes. En una máquina de reluctancia, en cambio, lo es sólo a la variación de su distancia radial. En la MI en general, están presentes los dos términos.

Las expresiones (3.77) y (3.78) para el cálculo de las permeancias y sus derivadas

operan sólo con la función del entrehierro ocupado por el TFE correspondiente, con bajo costo computacional. Luego, se puede plantear la conclusión parcial:

CP6: *Con el CME es posible implementar el cálculo analítico, incluso modelando el ranurado.*

3.4.4 Derivada de la ventana de un diente

Las derivadas de la ventana de un diente i del estator expresada en un MR y de un diente j del rotor expresada en un ME, para evaluar (3.78), se obtienen a partir de sus respectivas primitivas (3.74) y (3.76), resultando:

$$\frac{\partial h_s(i, \phi^r, \theta)}{\partial \theta} = -\delta \left\{ \phi^r - \left[\phi_{st}^r(i, \theta) - \frac{1}{2} \tau_s \right] \right\} + \delta \left\{ \phi^r - \left[\phi_{st}^r(i, \theta) + \frac{1}{2} \tau_s \right] \right\}, \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial h_r(j, \phi^s, \theta)}{\partial \theta} = -\delta \left\{ \phi^s - \left[\phi_{rt}^s(j, \theta) - \frac{1}{2} \tau_r \right] \right\} + \delta \left\{ \phi^s - \left[\phi_{rt}^s(j, \theta) + \frac{1}{2} \tau_r \right] \right\}, \quad (3.80)$$

donde el operador δ simboliza el impulso delta de Dirac, $\phi_{st}^r(i, \theta)$ está dada por (3.73) y $\phi_{rt}^s(j, \theta)$ por (3.75).

La inversión de signos en los términos de (3.79) y (3.80) respecto de sus primitivas (3.74) y (3.76) se debe a que la derivación se hace respecto de la variable θ , que opera restando en los argumentos de las funciones de Heaviside.

3.4.5 Derivada de la función del entrehierro

La derivada de la función del entrehierro, para evaluar (3.78), se obtiene a partir de su primitiva (2.68), siendo nulo el término correspondiente al valor constante g_0 , único presente en ausencia de irregularidades:

$$\frac{\partial g_0}{\partial \theta} = 0. \quad (3.81)$$

Si las posiciones angulares se refieren a un ME, también se anulan los términos correspondientes a la excentricidad estática y al ranurado del estator, los cuales en una posición fija sobre el estator ($\phi^s = cte$) no dependen de la posición θ del rotor, resultando entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ee}(\phi^s)}{\partial \theta} &= \frac{\partial g_s(\phi^s)}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial g(\phi^s, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial g_{ed}(\phi^s, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_r(\phi^s, \theta)}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{3.82}$$

En cambio, si las posiciones angulares se refieren a un MR, se anulan los términos correspondientes a la excentricidad dinámica y al ranurado del rotor, los cuales en una posición fija sobre el rotor ($\phi^r = cte$) no dependen de la posición θ , resultando entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ed}(\phi^r)}{\partial \theta} &= \frac{\partial g_r(\phi^r)}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial g(\phi^r, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial g_{ee}(\phi^r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_s(\phi^r, \theta)}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{3.83}$$

La variación de las irregularidades del entrehierro en uno u otro marco de referencia da lugar a una clasificación. La excentricidad dinámica y el ranurado del rotor son variables en un marco estatórico (**IVME**), mientras que la excentricidad estática y el ranurado del estator lo son en un marco rotórico (**IVMR**). Se puede plantear entonces la siguiente conclusión parcial:

CP7: *La permeancia de un TFE no depende de marco de referencia adoptado, aunque sí los términos del cálculo analítico de sus derivadas.*

Al sustituir (3.82) o (3.83) en (3.78), se puede además plantear la siguiente conclusión parcial:

CP8: *Las IVME producen variaciones de las permeancias de los TFE frente a los dientes del estator, y las IVMR frente a los dientes del rotor.*

3.5 Sumario

En este capítulo se presentaron los fundamentos del modelado con CME, y su aplicación al caso particular de la MI. Se planteó la analogía entre la red magnética del CME y un circuito eléctrico, en la cual se estableció una correspondencia entre el tubo de flujo y su símil eléctrico el condensador, la permeancia y la capacidad, el flujo magnético y la carga eléctrica, la DPM y la diferencia de potencial eléctrico.

Se compararon las restricciones para la aplicación del CME y del método AFB para el cálculo de las inductancias presentado en el Cap. 2, así como sus respectivos parámetros de operación: la función ventana y la permeancia con la distribución y la función de bobinados.

Se planteó la derivación analítica en reemplazo de la numérica, con el propósito inmediato de aumentar la resolución del modelo.

De la derivación de la función de entrehierro surgió que las irregularidades pueden clasificarse en dos grupos:

- las IVME, como la excentricidad dinámica y el ranurado del rotor,
- las IVMR, como la excentricidad estática y el ranurado del estator.

Por último, se analizó la viabilidad del cálculo analítico de las permeancias y sus derivadas con el CME, atendiendo a su costo computacional.

Capítulo 4

Resultados del cálculo de parámetros

4.1 Introducción

En este capítulo se presentarán los resultados del cálculo de los parámetros obtenidos con el método AFB y el CME, correspondientes a la MI presentada en el Cap. 3.

Para el cálculo de las inductancias aplicando el método AFB, se discretizó la posición θ del rotor, y para cada valor de esa variable se resolvieron con métodos numéricos las expresiones desarrolladas en el Cap. 2. De este modo, las distribuciones y funciones de bobinados, así como las inductancias, resultaron también discretizadas. Finalmente, las derivadas de estas funciones se obtuvieron también en forma numérica.

En el cálculo de las permeancias y sus derivadas para resolver el CME, se desarrolló una expresión analítica de la función del entrehierro, la cual se sustituyó en las expre-

siones desarrolladas en el Cap. 3. Las expresiones resultantes fueron implementadas en un programa de cálculo simbólico.

4.2 Distribución y función de bobinados de las fases del estator

La Fig. 4.1 muestra las gráficas de la distribución y la función de bobinados de la fase a del estator representado en la Fig. 3.3 con ELU. La primera es similar a la de la Fig. 2.3(b), con las diferencias de tener cuatro polos y ser escalonada en vez de rectangular, debido a la distribución del arrollamiento trifásico del estator. La gráfica de la función de bobinados es igual a la de su distribución desplazada en ordenadas, de modo que el valor medio es cero en ausencia de irregularidades del entrehierro; o más precisamente y como se analizó en la Sec. 2.3.3, de aquellas que no estén simétricamente distribuidas respecto de los planos neutros de las bobinas de la fase a , como la excentricidad o un ranurado que no cumpliera con esa condición. La gráfica de la función de bobinados es, entonces, similar a la de la Fig. 2.11(b), pero con cuatro ciclos espaciales en vez de dos y presenta el escalonado debido a la distribución del arrollamiento trifásico del estator.

4.3 Análisis de Fourier

El arrollamiento trifásico distribuido con bobinas concéntricas y cuatro ranuras por polo y por fase mostrado en la Fig. 3.3, si bien es simétrico, produce distorsión armónica en las FMM inducidas por las fases. Los doce dientes del estator centrados

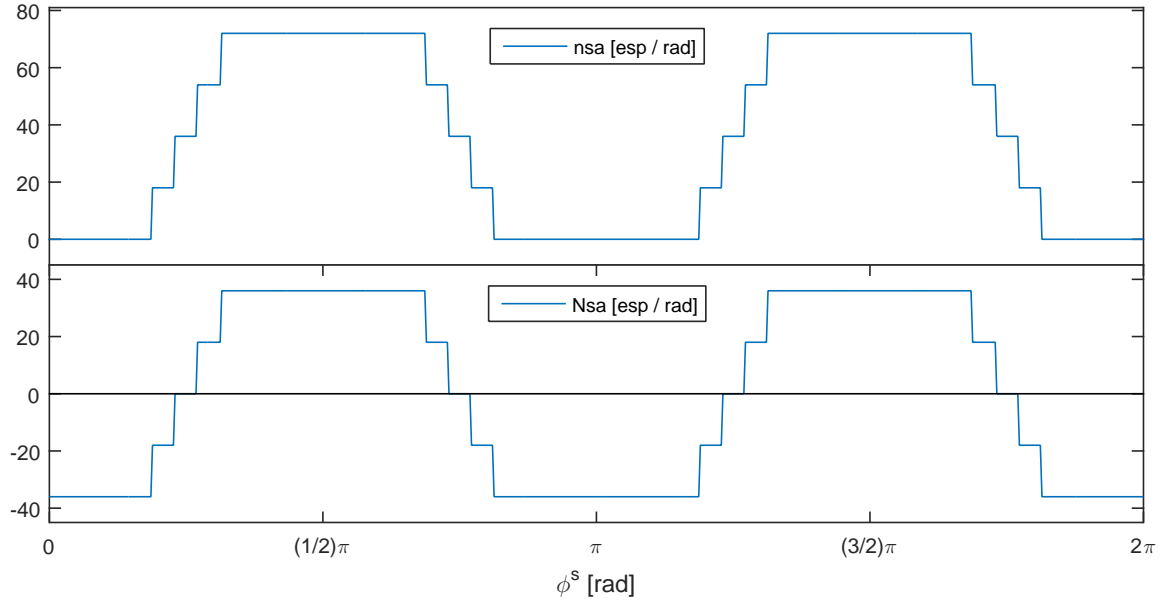
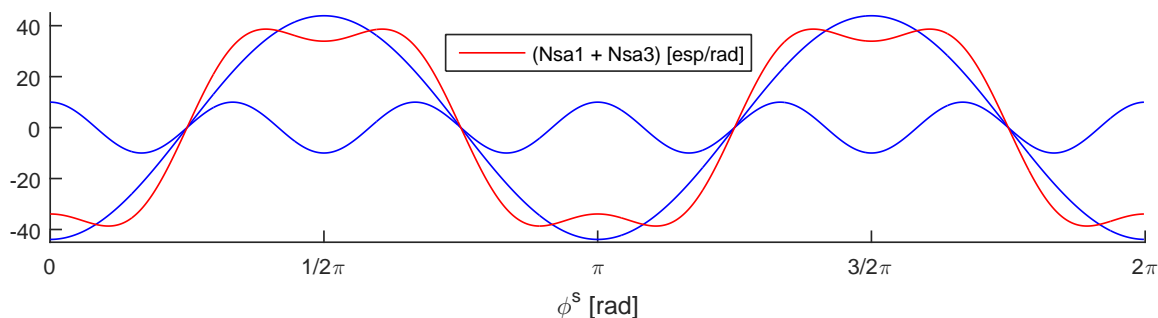


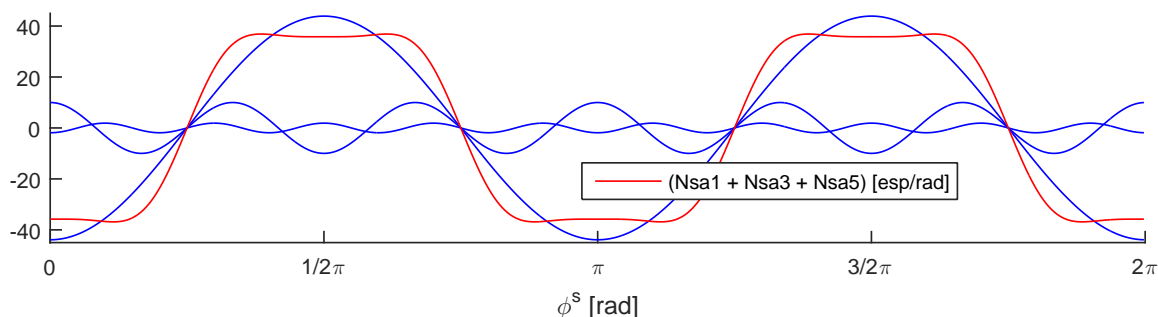
Figura 4.1: Distribución y función de bobinados de la fase a del estator con ELU.

en cada uno de los polos están enlazados por las bobinas interna y externa de un mismo polo de cada una de las tres fases. Por su parte, los doce dientes ubicados en los planos neutros entre polos adyacentes de una misma fase no están enlazados por ninguna bobina de ésta, y sí lo están por la bobina interna y externa de un mismo polo de cada una de las otras dos fases. Los restantes veinticuatro dientes están enlazados sólo por la bobina externa de un polo de una fase y por las bobinas interna y externa de un mismo polo de las otras dos. En consecuencia, los dientes centrados en los polos tienen la mayor amplitud de FMM inducida, los ubicados en los planos neutros tienen la menor amplitud, y los restantes tienen un valor intermedio.

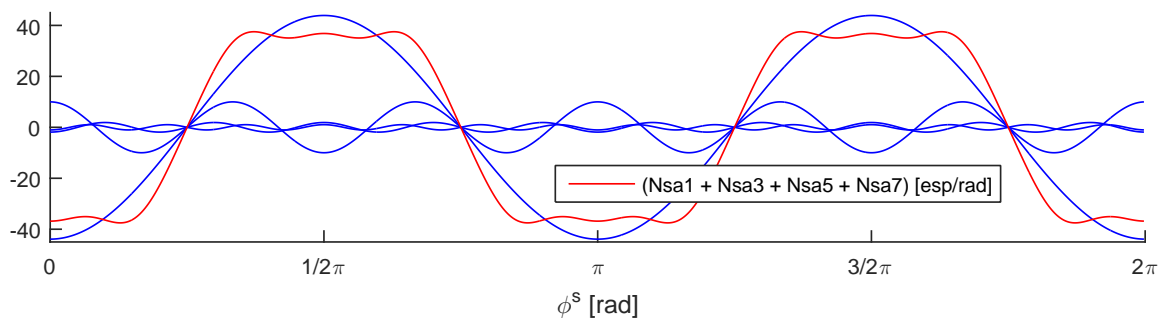
La Fig. 4.2 muestra la síntesis de Fourier de la función de bobinados de la fase a con ELU graficada en la Fig. 4.1, desarrollada hasta sus armónicos tercero, quinto y séptimo en un paso polar (radianes eléctricos), que corresponden al sexto, décimo y



(a) Desarrollo hasta el tercer armónico espacial.



(b) Desarrollo hasta el quinto armónico espacial.



(c) Desarrollo hasta el séptimo armónico espacial.

Figura 4.2: Síntesis de Fourier de la función de la fase a con ELU, dada en la Fig. 4.1.

decimocuarto en un giro completo (radianes geométricos) respectivamente, de acuerdo a lo propuesto en [7]. Con la referencia de posición angular ϕ^s centrada en un polo de la fase a , la función de bobinados de esa fase admite sólo armónicos cosenoidales, de los cuales el fundamental, el quinto y el séptimo están invertidos. Debido a que las

bobinas de paso entero inducen FMM con simetría de media onda, el espectro admite sólo armónicos de orden impar.

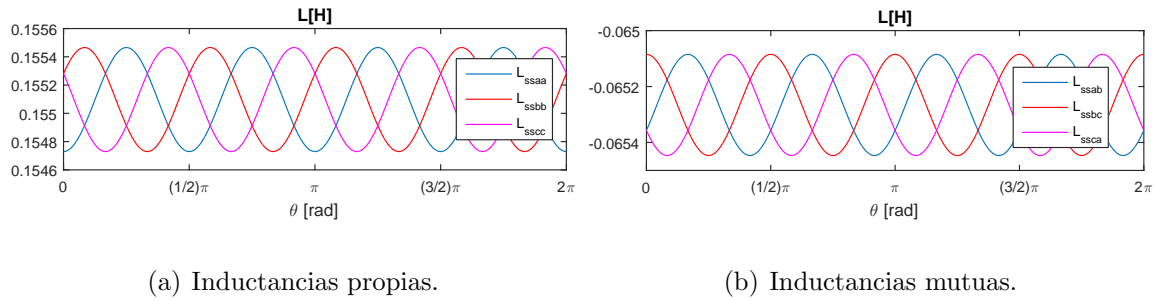
En cuanto a los lazos del rotor, el desarrollo armónico de su distribución y función de bobinados, no graficado, es el de una onda espacial rectangular, por tratarse de una jaula de ardilla.

Por otro lado, para atenuar el rizado del par, es práctica usual evitar que el número de ranuras del rotor sea múltiplo de tres [11], lo cual es en sí mismo una asimetría constructiva. Si bien cada par de sectores enfrentados del estator y del rotor, forma un patrón de enfrentamiento repetitivo, los dientes de los distintos sectores del estator están enlazados por combinaciones de bobinas de las fases que sólo se repiten en el sector diametralmente opuesto, es decir, en el siguiente par de polos.

La distorsión armónica debida a la distribución del arrollamiento trifásico y la asimetría debida al número de ranuras del rotor no múltiplo de tres están presentes incluso en ausencia de irregularidades geométricas en el entrehierro.

4.4 Inductancias propias y mutuas de las fases del estator y sus derivadas

Según se concluyó en la CP 8, entre las irregularidades geométricas del entrehierro sólo las IVME producen variación de las inductancias propias y mutuas de las fases del estator al cambiar el rotor de posición. Por eso, los resultados de cálculo presentados en esta sección serán los del modelado de las IVME, mientras que sólo se comentarán algunos de las IVMR.



(a) Inductancias propias.

(b) Inductancias mutuas.

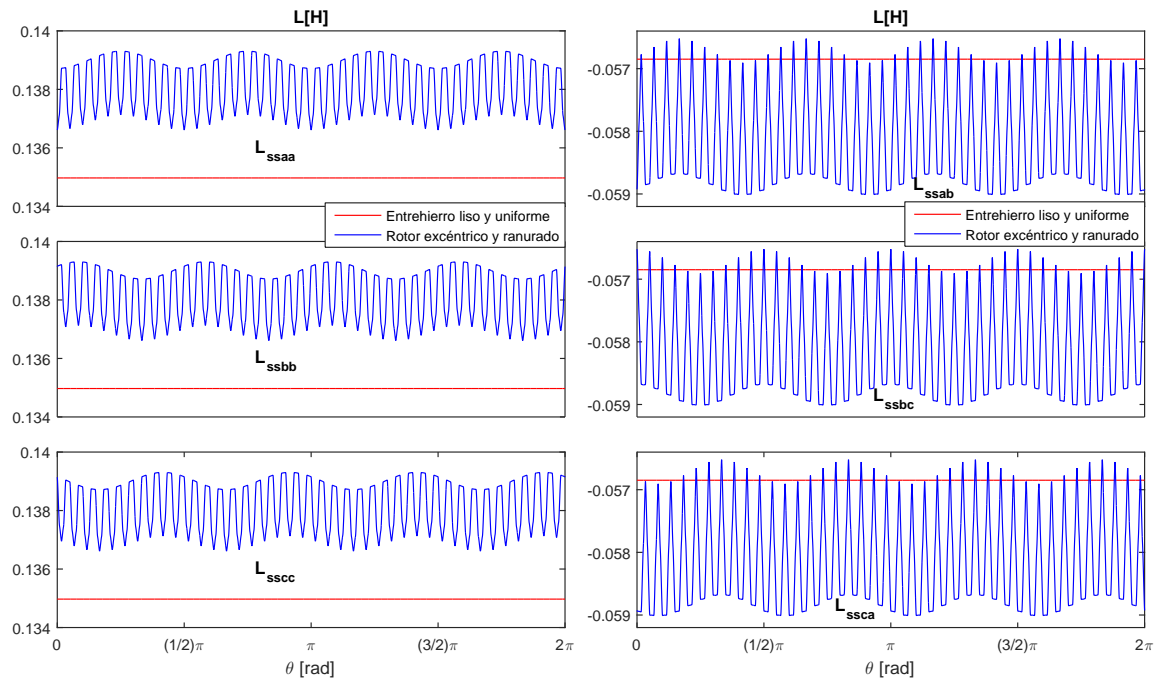
Figura 4.3: Efectos de la excentricidad dinámica sobre las inductancias propias y mutuas de las fases del estator.

Excentricidad dinámica: Las Fig. 4.3(a) y 4.3(b) muestran las gráficas de las inductancias propias de las tres fases del estator y mutuas entre los tres pares de fases respectivamente, con excentricidad dinámica del 50 % ($ed = 0,5$), en la posición $\theta = 0$, en la cual el punto más próximo del rotor está centrado en el polo $S2$ de la fase a .

Como se observa, la excentricidad dinámica introduce una variación periódica con una frecuencia espacial igual al número de polos, desfasada un tercio de ciclo eléctrico o un sexto de vuelta geométrica entre las tres inductancias propias y las tres mutuas (las gráficas se ven con secuencia inversa porque están desfasadas un doceavo de vuelta, al haber tres fases con cuatro ciclos por revolución).

Un segundo efecto de la excentricidad dinámica es el aumento de los valores absolutos de las inductancias propias y mutuas por sobre los correspondientes a un ELU. El valor constante de inductancia propia de cualquier fase con ELU es 0.1350 H, y el de inductancia mutua entre cualquier par de fases es -0.0568 H.

Las cuatro posiciones de máxima inductancia propia en cada fase son aquellas en las que el punto más próximo del rotor pasa frente a los lados activos de las bobinas; y las de mínima, en las que pasa frente al centro de un polo. Las cuatro posiciones



(a) Inductancias propias.

(b) Inductancias mutuas.

Figura 4.4: Efectos de la excentricidad dinámica combinada con el ranurado del rotor sobre las inductancias propias y mutuas de las fases del estator.

de máxima inductancia mutua (mínimo valor absoluto) entre cada par de fases son aquellas en las que el punto más próximo del rotor pasa frente a polos *Norte* o *Sur* en las dos fases del par; y las de mínima (máximo valor absoluto), en las que pasa frente al *Norte* de una fase y al *Sur* de otra.

Ranurado del rotor y excentricidad dinámica: Las Fig. 4.4(a) y 4.4(b) corresponden al mismo valor de excentricidad dinámica, combinada ahora con una apertura de 2 mm en las ranuras del rotor. En esas dos figuras se muestran, además, las gráficas correspondientes a las inductancias constantes de un ELU.

El ranurado del rotor introduce una segunda variación cíclica, con una frecuencia

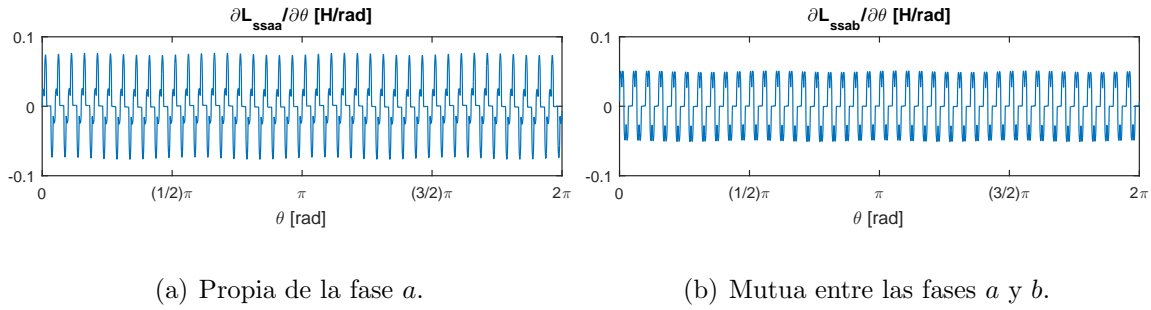


Figura 4.5: Efectos de la excentricidad dinámica y el ranurado del rotor sobre las derivadas de las inductancias propias y mutuas de las fases del estator.

espacial igual al número de dientes del rotor.

La distancia entre dos polos adyacentes, medida en ranuras, aunque sean de fases distintas, es igual al número de ranuras por polo y por fase:

$$q = \frac{S_s}{2P} \frac{1}{m} = \frac{48}{4} \frac{1}{3} = 4[\text{ranuras}], \quad (4.1)$$

donde P es el número de pares de polos y m el número de fases del estator.

Entonces, la posición relativa de los dientes del rotor enfrentados a un polo se repite frente al polo siguiente al cabo de un giro de $\frac{4}{48}$ de vuelta. Como este giro es igual a $3\frac{1}{3}$ pasos de diente del rotor, que es un número no entero, cambia la posición relativa de los dientes enfrentados al primero de estos dos polos, introduciendo el desfase de un tercio de paso de diente observable en las figuras.

Además, el ranurado del rotor aumenta el entrehierro medio, con lo que disminuye el valor absoluto de las inductancias propias y mutuas de las fases del estator, aproximando las gráficas de las Fig. 4.3(a) y 4.3(b) a las correspondientes a un ELU, que son constantes.

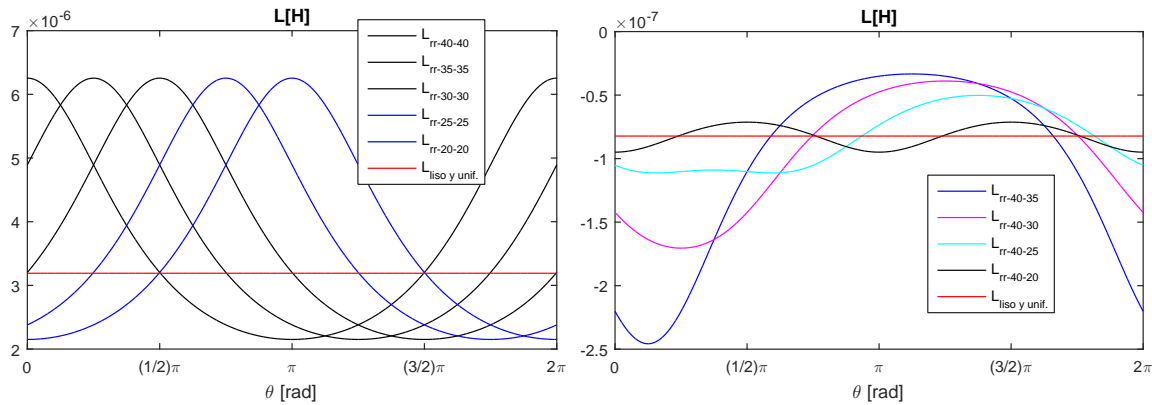
Las Fig. 4.5(a) y 4.5(b) muestran, respectivamente, los efectos de los mismos valores de excentricidad dinámica y apertura de las ranuras del rotor sobre la derivada

de la inductancia propia de la fase a y mutua entre las fases a y b . En la escala de estas gráficas, sólo se aprecia el efecto dominante del ranurado, ya que en las Fig. 4.4(a) y 4.4(b) los flancos debidos al ranurado tienen más pendiente que la ondulación del valor medio.

Efecto de las IVMR: La excentricidad estática tiene el mismo efecto sobre las inductancias de las fases del estator que la excentricidad dinámica en la posición $\theta = 0$. Entonces, la excentricidad estática produce entre las inductancias propias, así como entre las mutuas de las fases del estator, desigualdades constantes, iguales a las producidas por la excentricidad dinámica en la posición $\theta = 0$. En cuanto al ranurado del estator, al igual que el del rotor, aumenta el entrehierro medio, con lo que disminuye el valor medio absoluto de las inductancias propias y mutuas de las fases del estator respecto al correspondiente a un ELU, sin introducir variación cíclica.

4.5 Inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor y sus derivadas

Según se concluyó en la CP 8, entre las irregularidades geométricas del entrehierro sólo las IVMR producen variación de las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor al cambiar éste de posición. Por eso, los resultados de cálculo presentados en esta sección serán los del modelado de las IVMR, mientras que sólo se comentarán algunos de las IVME.



(a) Inductancias propias.

(b) Inductancias mutuas.

Figura 4.6: Efectos de la excentricidad estática sobre las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor.

Excentricidad estática: Las Fig. 4.6(a) y 4.6(b) muestran, respectivamente, las gráficas de las inductancias propias de los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor, regularmente distribuidos en la mitad de la extensión angular del entrehierro, y de la inductancia mutua entre el lazo 40 y los otros otros mencionados anteriormente. La irregularidad modelada es la excentricidad estática en un valor del 50 % ($ed = 0,5$), por la cual la posición angular de entrehierro mínimo está centrada en el polo $S2$ de la fase a . En esas dos figuras se muestran además las gráficas rectas de las inductancias constantes correspondientes a un ELU.

Como se observa, la excentricidad estática introduce una variación cíclica con frecuencia espacial de una revolución. Las inductancias propias de los lazos están desfasadas entre ellas un paso de diente. Las inductancias mutuas entre los pares de lazos separados por dos pasos de diente, están desfasadas entre ellas ese mismo valor, y así sucesivamente. En general, a medida que aumenta la separación entre los pares de lazos, sus inductancias mutuas tienden a la simetría de media onda, alcanzándola

entre aquellos diametralmente opuestos, como el 40 y el 20 en la Fig. 4.6(b), entre los que pasa a tener un desfase espacial de media vuelta.

Un segundo efecto de la excentricidad estática es el aumento del valor medio absoluto de las inductancias propias y mutuas, que para estas últimas es progresivamente menor a medida que aumenta la separación entre los lazos.

La posición de máxima inductancia propia en cada lazo es aquella en la que el respectivo diente del rotor más se aproxima al estator, y la posición de mínima inductancia es la diametralmente opuesta, en la que más se aleja. La posición de máxima inductancia mutua entre cada par de lazos depende del ángulo formado por éstos. Si ese ángulo es agudo, como el formado por el par 40-35 en la Fig. 4.6(b), o recto, como el formado por el par 40-30, el valor máximo se da en la posición en la que el arco entre los dos lazos está centrado frente al punto más próximo del estator. Si el ángulo es obtuso, como el formado por el par 40-25, el valor máximo no se da en esa posición ya que la amplitud del ángulo aparta los lazos hacia posiciones en las que el entrehierro es más ancho, y de esta forma surge un mínimo relativo del valor absoluto. El máximo, que ha sido desplazado de su posición por la aparición de ese mínimo, se aparta del centro del arco entre los dos lazos.

Ranurado del estator y excentricidad estática: Las Fig. 4.7(a) y 4.7(b) corresponden al mismo valor de excentricidad estática, combinada ahora con una apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator. En esas dos figuras también se muestran las gráficas correspondientes a las inductancias constantes de un ELU.

El ranurado del estator introduce una segunda variación cíclica, ésta con una frecuencia espacial igual a su número de dientes.

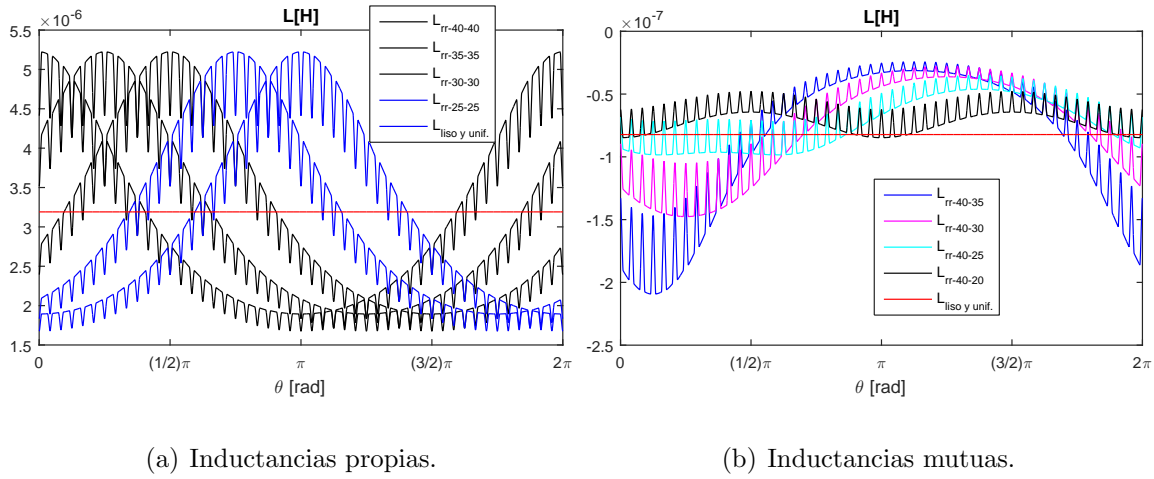


Figura 4.7: Efectos de la excentricidad estática combinada con el ranurado del estator sobre las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor.

Los núcleos del estator y del rotor se dividen en ocho sectores, de seis y cinco dientes respectivamente. La cantidad de sectores resulta de aplicar el máximo común divisor a los números de dientes del estator y del rotor:

$$\text{mcd}(S_s, S_r) = \text{mcd}(48, 40) = 8.$$

Las combinaciones entre sectores del estator y del rotor tienen el mismo patrón de enfrentamiento, como se representa en la Fig. 3.3. Las gráficas de inductancias mostradas en las Fig. 4.7(a) y 4.7(b) corresponden a dientes del rotor espaciados entre sí por un sector. Como se observa, las muescas de esas gráficas están en fase, lo que no sucedería con las de otros dientes con distinta separación.

Además, el ranurado del estator aumenta el entrehierro medio, con lo que disminuye el valor medio absoluto de las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor, aproximando las gráficas de las Fig. 4.7(a) y 4.7(b) a las correspondientes a un ELU, que son constantes.

Las Fig. 4.8(a) y 4.8(b) muestran los efectos de los mismos valores de excentricidad

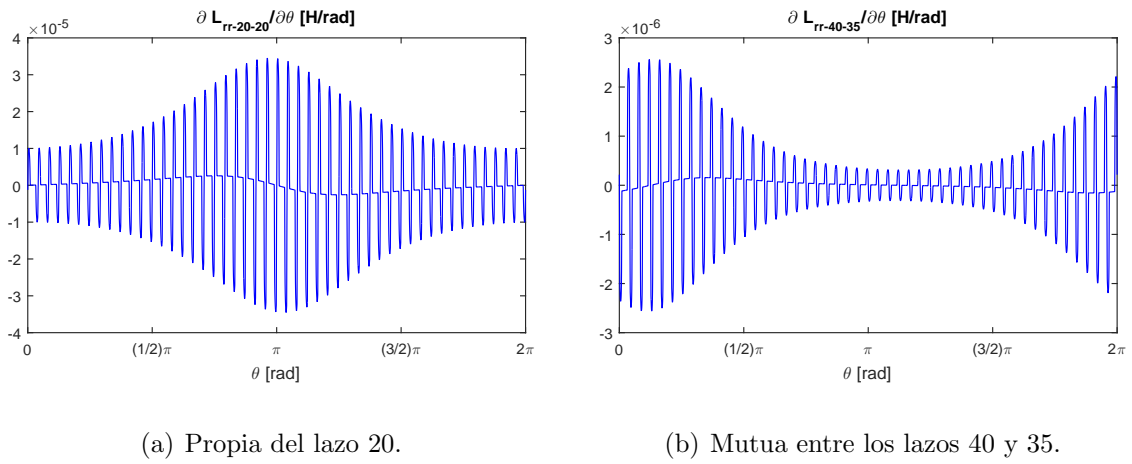


Figura 4.8: Efectos de la excentricidad estática y el ranurado del estator sobre las derivadas de las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor.

estática y apertura de las ranuras del estator sobre la derivada de la inductancia propia del lazo 20 y mutua entre los lazos 40 y 35, respectivamente. En la escala de esas gráficas, sólo se aprecia el efecto dominante del ranurado, ya que en las Fig. 4.7(a) y 4.7(b), correspondientes a sus primitivas, los flancos debidos al ranurado tienen más pendiente que la ondulación del valor medio.

Efecto de las IVME: La excentricidad dinámica tiene el mismo efecto sobre las inductancias de los lazos del rotor que la excentricidad estática en la posición $\theta = 0$. Entonces, la excentricidad dinámica produce entre las inductancias propias, así como entre las mutuas de los lazos del rotor, desigualdades constantes, iguales a las producidas por la excentricidad estática en la posición $\theta = 0$. En cuanto al ranurado del rotor, al igual que el del estator, aumenta el entrehierro medio, con lo que disminuye el valor medio absoluto de las inductancias propias y mutuas de los lazos del rotor respecto al correspondiente a un ELU, sin introducir variación cíclica.

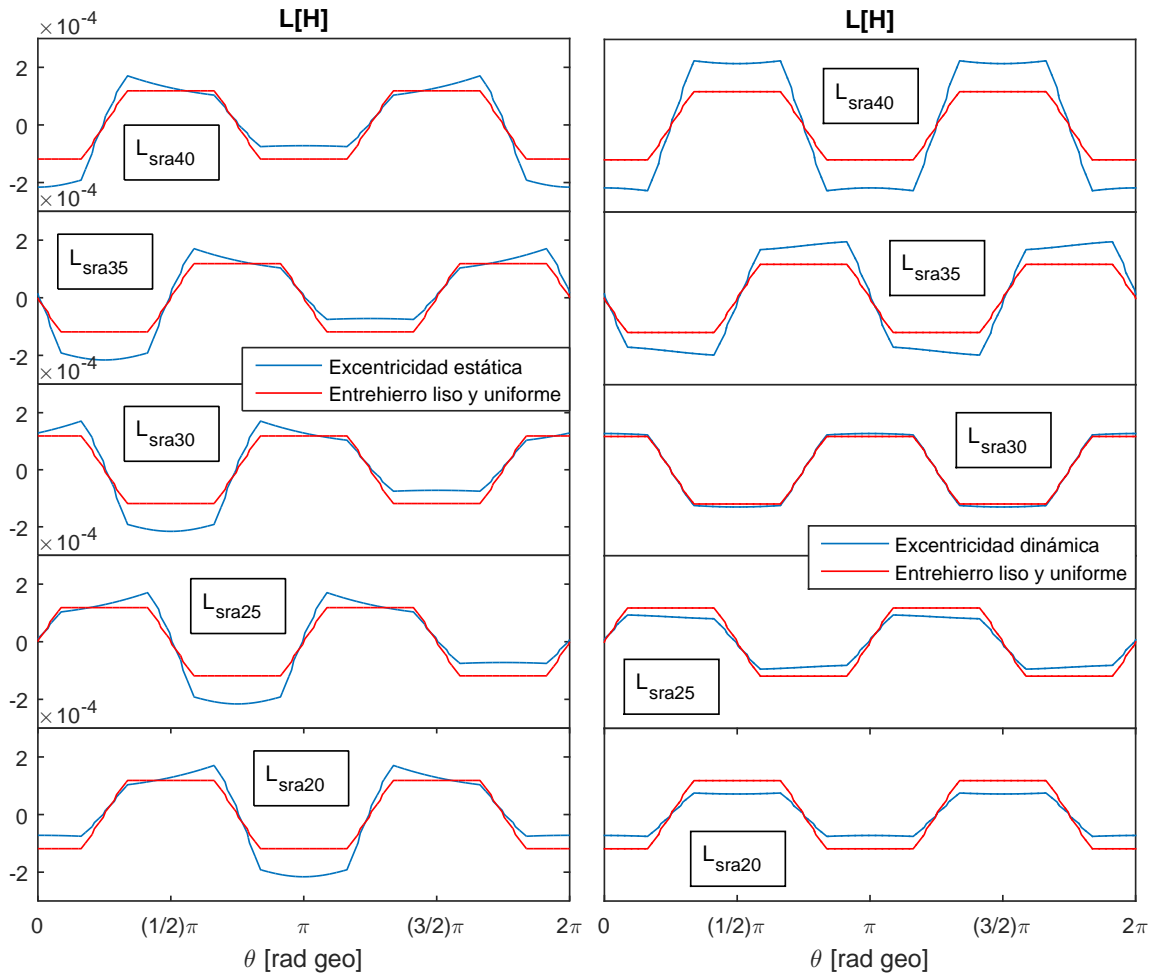
4.6 Inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor y sus derivadas

Las inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor son afectadas tanto por las IVME como por las IVMR. A continuación, se presentarán los resultados del cálculo de las inductancias mutuas y sus derivadas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor, distribuidos regularmente en la mitad de la periferia del rotor,.

Excentricidad: La Fig. 4.9(a) y 4.9(b) muestran las gráficas de las inductancias mencionadas, con excentricidad estática y dinámica respectivamente, ambas con un valor del 50 % ($ee = 0,5$ y $ed = 0,5$) y considerando al entrehierro liso. La excentricidad estática aproxima al rotor al centro del polo $S2$ de la fase a , y la dinámica hace que el rotor ocupe esa misma posición en $\theta = 0$. En esas figuras se ven, además, las gráficas correspondientes a un ELU, con forma de trapecio.

Con ELU, la inductancia mutua entre una fase del estator y un lazo del rotor tiene una variación cíclica de dos períodos por revolución, debido al enfrentamiento sucesivo del lazo a los cuatro polos alternados de esa fase. La inductancia mutua es positiva en las posiciones en las que el lazo está frente a un polo *Norte*, y negativa en las que está frente a un polo *Sur*, debido al sentido positivo de referencia adoptado para la inducción, indicado en la Fig. 3.2.

Debido a que la referencia de posición angular sobre el estator ϕ^s está centrada en un polo de la fase a , y que la referencia de posición angular sobre el rotor ϕ^r está centrada en el lazo 40, las inductancias mutuas entre esa fase y los lazos 40, 30 y 20



(a) Excentricidad estática y entrehierro liso. (b) Excentricidad dinámica y entrehierro liso.

Figura 4.9: Efectos de las excentricidades estática y dinámica, con entrehierro liso, sobre las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.

son funciones pares, mientras que entre la misma fase y los lazos 35 y 25 son impares.

Por otra parte, las excentricidades estática o dinámica aportan una segunda variación cíclica de un período por revolución.

Debido a que la excentricidad estática, así como la dinámica en la posición $\theta = 0$, están alineadas con el centro de un polo de la fase a , las inductancias mutuas entre

esa fase y los lazos 40, 30 y 20 para ambas excentricidades son también funciones pares, mientras que entre la misma fase y los lazos 35 y 25 son impares.

Como en las posiciones $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ el rotor tiene la misma ubicación en la cavidad del estator con cualquiera de las dos excentricidades, los valores de la inductancia mutua entre la fase a y cada lazo son los mismos en los extremos de abscisas de las dos gráficas.

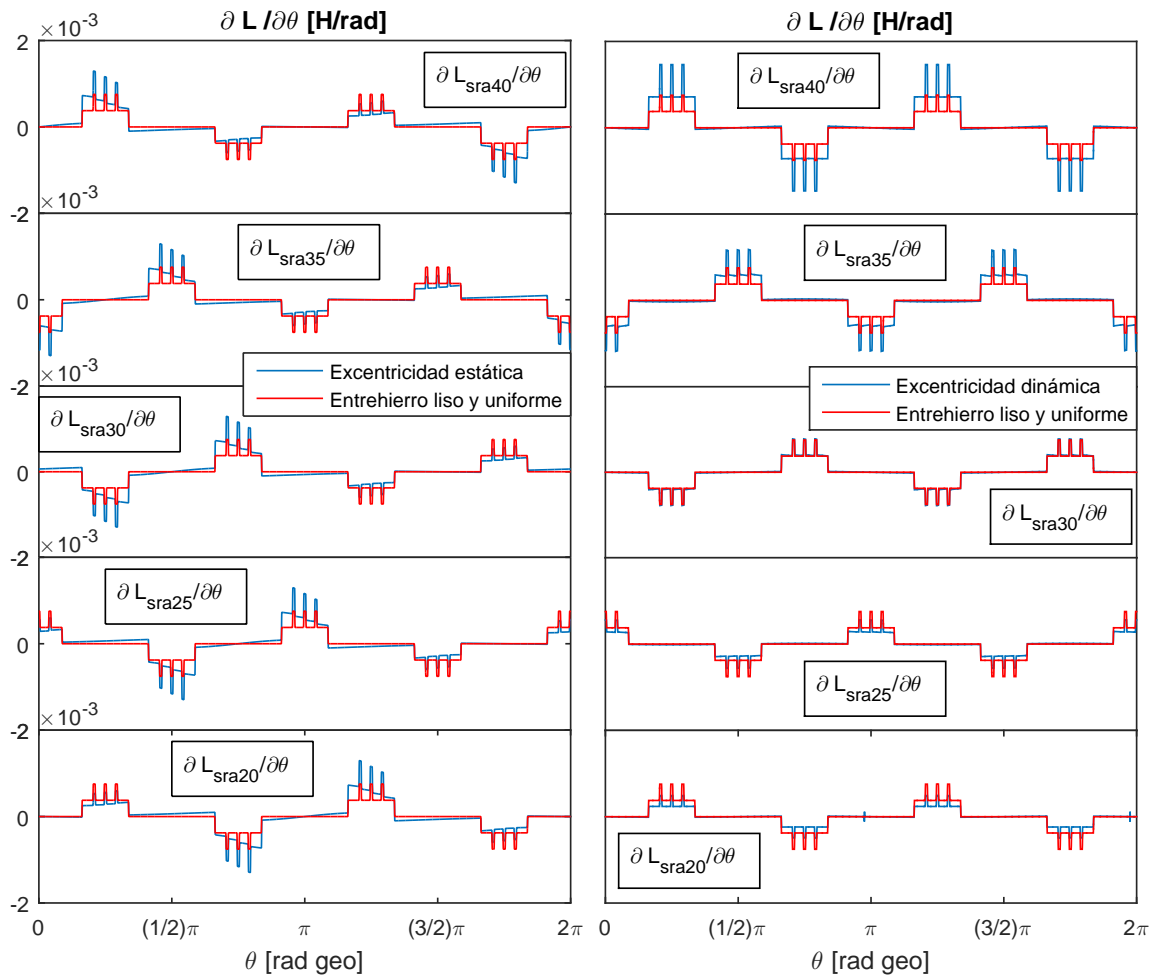
Pueden hacerse, además, otras observaciones comparativas entre las Fig. 4.9(a) y 4.9(b). Con respecto a la excentricidad estática, se puede mencionar:

1. las inductancias mutuas entre la fase a (también es válido para las fases b y c) y los distintos lazos del rotor tienen el mismo valor en posiciones θ del rotor separadas entre sí un paso de sus dientes;
2. la inductancia mutua entre la fase a (también es válido para las fases b y c) y cada lazo del rotor es una función trapezoidal de valor medio nulo, modulada por su distancia angular al punto de entrehierro mínimo;
3. la inductancia mutua entre la fase a y cada lazo del rotor tiene máximo valor absoluto en la posición en que el lazo más se aproxima al estator;
4. la inductancia mutuas entre la fase a (también es válido para las fases b y c) y cada lazo del rotor alcanza su valor absoluto máximo frente a cada polo en uno de sus bordes, o ambos si el polo es el más próximo o más alejado del rotor, y pasa por un mínimo relativo en las posiciones frente al interior de los polos, excepto frente al polo más cercano al rotor, donde pasa por un máximo absoluto.

Análogamente, en la Fig. 4.9(b), que corresponde excentricidad dinámica, se puede enunciar que:

1. las inductancias mutuas entre la fase a (también es válido para las fases b y c) y los distintos lazos del rotor tienen distintas amplitudes, mayores hacia el lazo 40, el más próximo al estator, y menores hacia el lazo 20, diametralmente opuesto;
2. la inductancia mutua entre la fase a y los lazos 40, 30 y 20 del rotor, ortogonales en un MR, tienen el mismo valor en las dos posiciones extremas frente a cada polo; en cambio la inductancia mutua entre la misma fase y los lazos 35 y 25, oblicuos en el mismo marco de referencia, tienen valor absoluto respectivamente creciente y decreciente en todo el paso de esos lazos frente a cada polo;
3. la inductancia mutua entre la fase a y los lazos del rotor tiene amplitud máxima con el lazo 40, que se mantiene más próximo al estator, y disminuye progresivamente con los otros lazos hasta el 20, diametralmente opuesto;
4. la inductancia mutua entre la fase a y cada lazo del rotor alcanza su valor absoluto máximo frente a cada polo en uno de sus bordes, o en ambos si el lazo es ortogonal en un MR.

La Fig. 4.10 muestra las gráficas de las derivadas de las inductancias de la Fig. 4.9. Como las inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor son positivas con aquellos lazos ubicados frente a los polos *Norte* y negativas con los ubicados frente a los polos *Sur*, los pulsos rectangulares de las derivadas son positivos



(a) Excentricidad estática y entrehierro liso. (b) Excentricidad dinámica y entrehierro liso.

Figura 4.10: Efectos de las excentricidades estática y dinámica, con entrehierro liso, sobre la derivada de las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.

en las posiciones en las que los lazos del rotor pasan desde el enfrentamiento a un polo *Sur* hacia el enfrentamiento a un polo *Norte* y viceversa.

Al revés que las inductancias mutuas entre la fase a y los lazos 40, 30 y 20 del rotor, sus derivadas son funciones impares, mientras que entre la misma fase y los lazos 35 y 25 son pares.

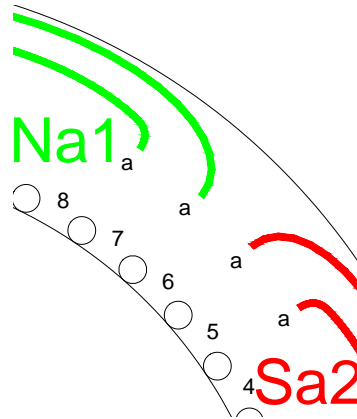
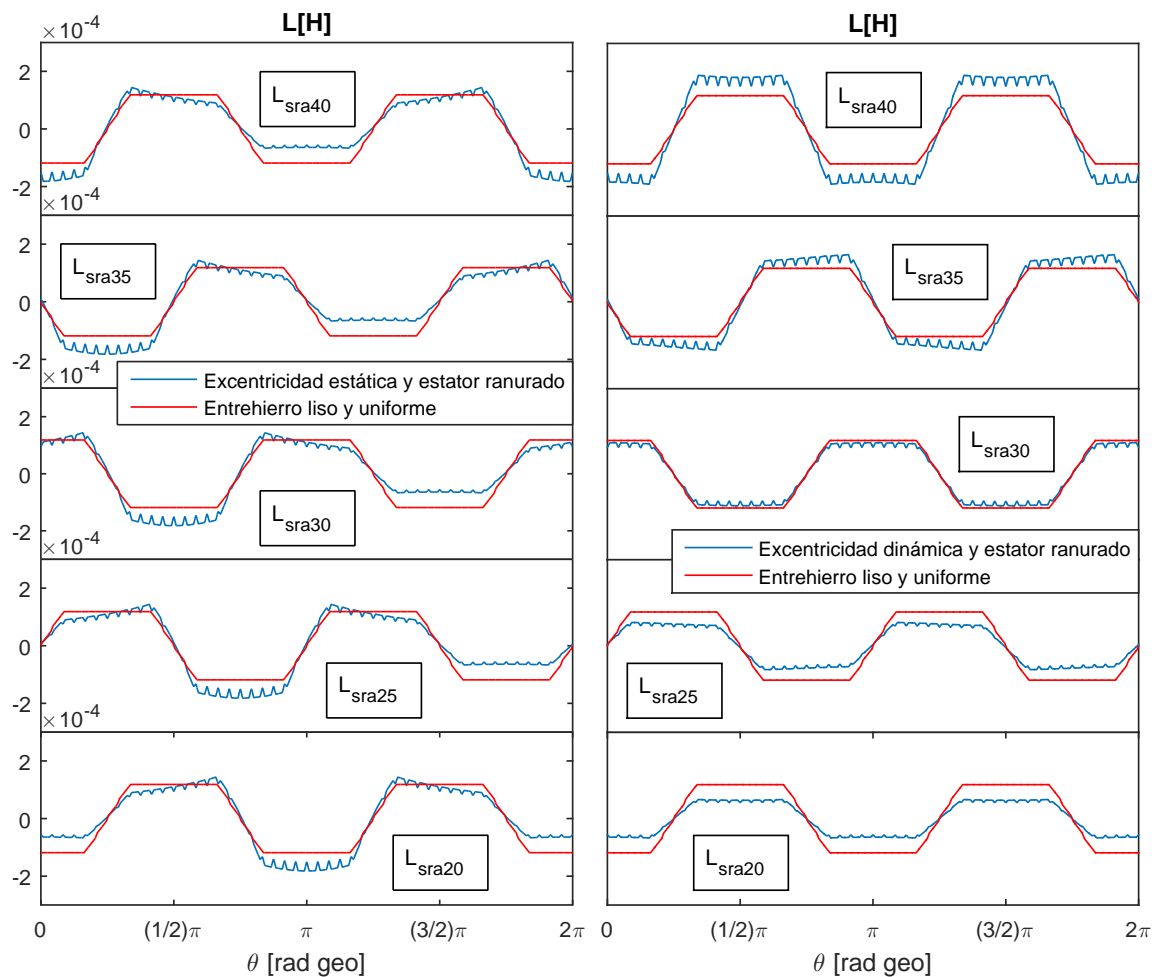


Figura 4.11: Zona de transición entre los polos $S2$ y $N1$ de la fase a .

Los valores de las derivadas son los mismos en los extremos de abscisas de las dos gráficas, de la misma forma que para las inductancias.

Los tres pulsos en forma de tridente en el paso de un polo a otro se deben a la distribución de los bobinados. Con el movimiento del rotor, cada una de las dos ranuras de un lazo pasan escalonadamente de enfrentarse a una o a las dos bobinas que forman cada uno de los polos. La Fig. 4.11, en la que las ranuras del estator se representan como círculos superpuestos al núcleo, muestra por ejemplo la zona de transición por la que pasa un lazo del rotor desde su enfrentamiento al polo $S2$ hasta el $N1$ de la fase a . Al moverse el rotor en sentido antihorario, cada ranura de ese lazo enfrenta a los dientes 4 a 8 del estator, en orden creciente de numeración. El diente 4 es enlazado por las dos bobinas del polo $Sa2$, el diente 5 por una sola, el 6 por ninguna, el 7 por una bobina del polo $Na1$ y finalmente el 8 por las dos bobinas del $Na1$.

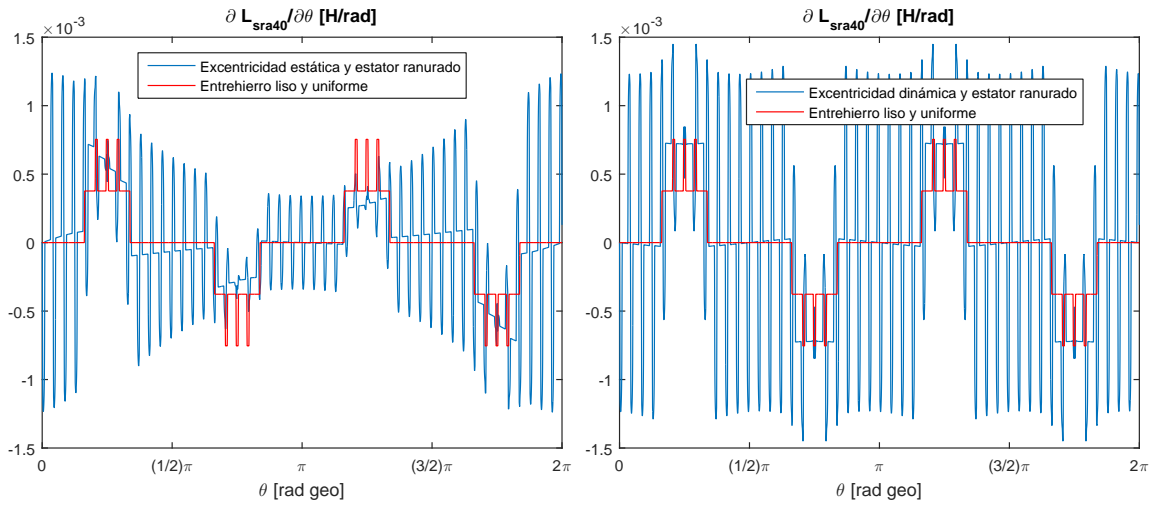


(a) Excentricidad estática y estator ranurado. (b) Excentricidad dinámica y estator ranurado.

Figura 4.12: Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del estator, sobre las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.

Ranurado del estator: La Fig. 4.12 muestra las gráficas de las mismas inductancias mutuas de la Fig. 4.9, también correspondientes a las excentricidades estática y dinámica de valores $ee = 0,5$ y $ed = 0,5$, a los que ahora se suma una apertura de 2,7 mm en las ranuras del estator, manteniendo el rotor liso.

El ranurado del estator, al igual que la excentricidad estática, hace variar periódicamente



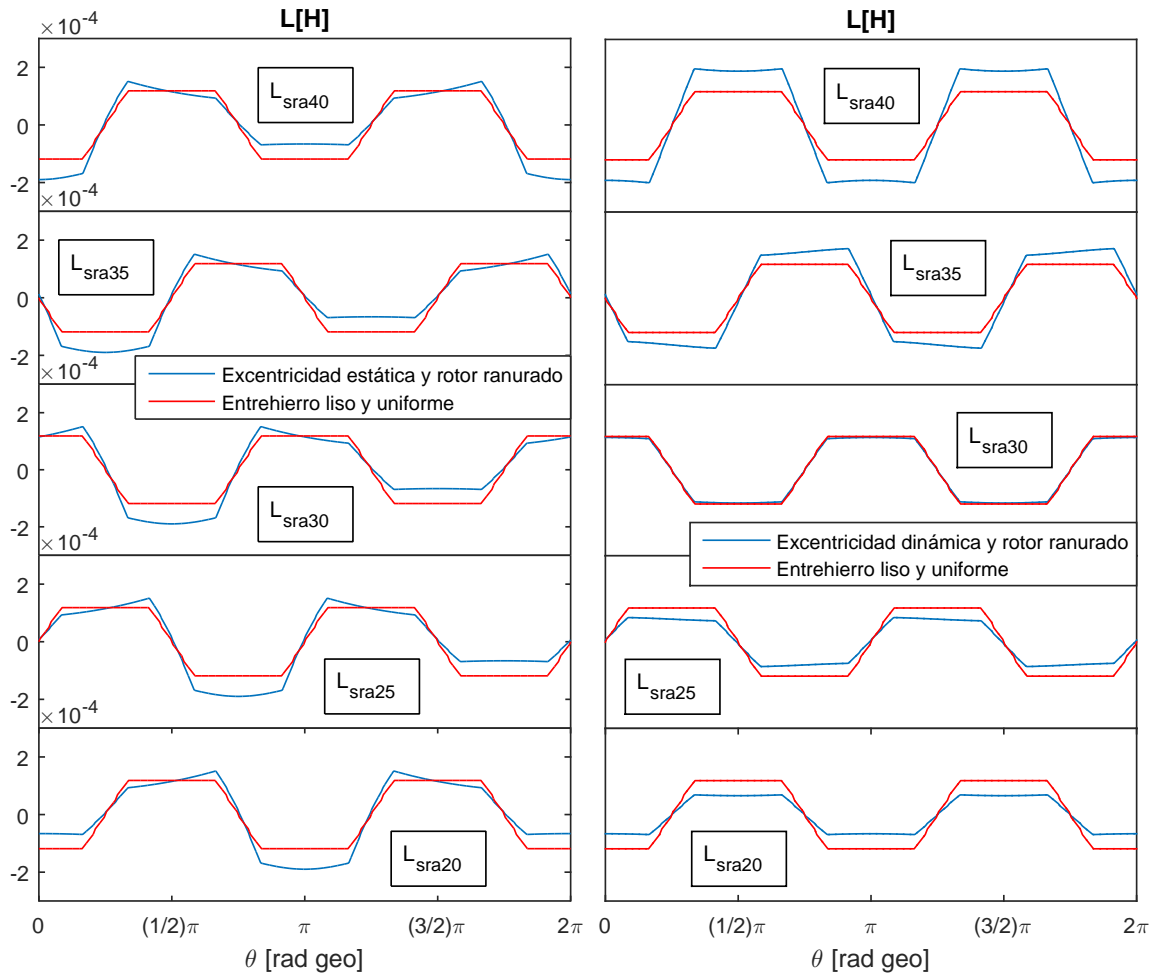
(a) Excentricidad estática y estator ranurado. (b) Excentricidad dinámica y estator ranurado.

Figura 4.13: Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del estator, sobre las derivadas de las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.

amente el valor del entrehierro frente a cada una de las dos ranuras del lazo j , en su paso frente a la fase a . Introduce, entonces, una tercera variación cíclica en las inductancias mutuas, cuya frecuencia espacial es igual al número de dientes del estator, que se ve como un rizado en la Fig. 4.12, diferenciándose de la Fig. 4.9, correspondiente a los mismos valores de excentricidad pero con entrehierro liso.

Debido a que la referencia de posición angular sobre el estator ϕ^s , al estar centrada en un polo de la fase a , también lo está en el diente 48 (ver Fig. 3.3), también los rizados de las inductancias mutuas entre esa fase y los lazos 40, 30 y 20 son funciones pares, mientras que los de las inductancias mutuas entre la misma fase y los lazos 35 y 25 son impares.

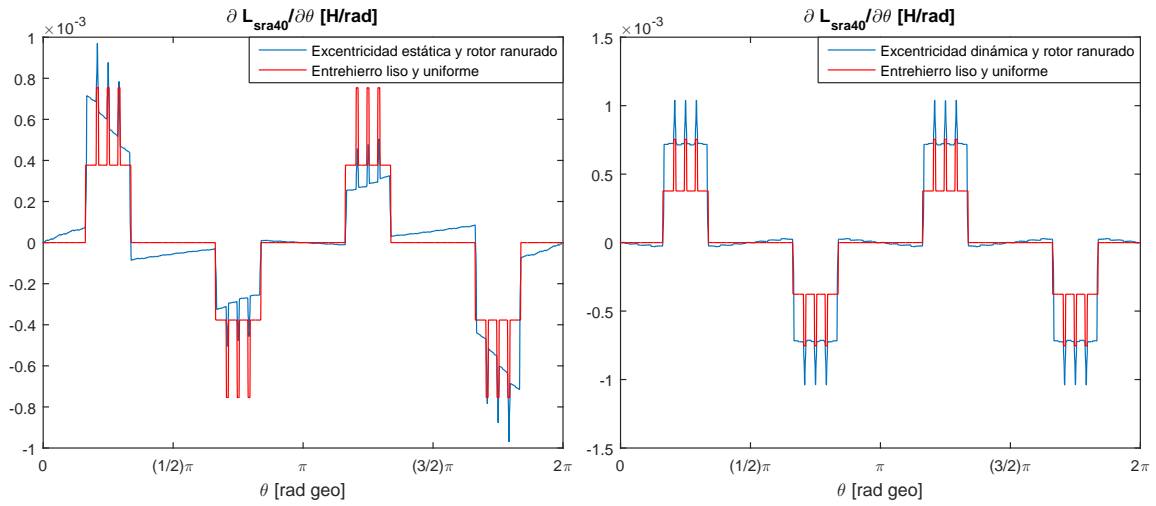
Igual a como sucede en la Fig. 4.9 con las excentricidades pero sin ranurado, en la Fig. 4.12 los valores en los extremos de abscisas de las dos gráficas son iguales.



(a) Excentricidad estática y rotor ranurado. (b) Excentricidad dinámica y rotor ranurado.

Figura 4.14: Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del rotor, sobre las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.

La Fig. 4.13 muestra la gráfica de la derivada de la inductancia mutua entre la fase a y el lazo 40, a la que el ranurado del estator aporta rizado, distinguiéndola de la Fig. 4.10, que corresponde a los mismos valores de excentricidad pero con entrehierro liso. Esa derivada, así como las de las inductancias mutuas entre la misma fase y los lazos 30 y 20 son funciones impares, mientras que las derivadas de las inductancias



(a) Excentricidad estática y rotor ranurado. (b) Excentricidad dinámica y rotor ranurado.

Figura 4.15: Efectos de las excentricidades estática y dinámica, y del ranurado del rotor, sobre las derivadas de las inductancias mutuas entre la fase a del estator y los lazos 40, 35, 30, 25 y 20 del rotor.

mutuas con los lazos 35 y 25 son pares.

Ranurado del rotor: La Fig. 4.14 muestra las gráficas de las mismas inductancias mutuas de la Fig. 4.9, correspondientes a las excentricidades estática y dinámica de valores $ee = 0,5$ y $ed = 0,5$, a los que ahora se suma una apertura de 2,0 mm en las ranuras del rotor, manteniendo el estator liso.

El ranurado del rotor aumenta el valor del entrehierro medio frente a un lazo j , disminuyendo entonces la amplitud de la inductancia mutua entre éste y las fases. Ésto se nota fácilmente comparando los valores de $L_{sra40}(\theta = 0)$ en las gráficas de la Fig. 4.14 con los de la Fig. 4.9 correspondientes a entrehierro liso.

La Fig. 4.15 muestra la gráfica de la derivada de la inductancia mutua entre la fase a y el lazo 40, a la que el ranurado del rotor disminuye su amplitud en comparación

con la gráfica de la Fig. 4.10 que corresponde a los mismos valores de excentricidad para entrehierro liso. Esa derivada, así como las de las inductancias mutuas entre la misma fase y los lazos 30 y 20 son funciones impares, mientras que las derivadas de las inductancias mutuas con los lazos 35 y 25 son pares.

4.7 Permeancias de los tubos de flujo del entrehierro y sus derivadas

Según se concluyó en la CP 5, la derivada de la permeancia de un TFE tiene dos términos, uno atribuible a la variación del área enfrentada por los dientes, y el otro a la variación de su distancia radial. Además, según la CP 7, la permeancia de un TFE no depende del marco de referencia, aunque sí sus derivadas.

De acuerdo a esas conclusiones, los resultados del cálculo de las permeancias presentados en esta sección serán únicos, y los de sus derivadas se discriminarán en la componente debida a la variación del área enfrentada (**VAE**) y de la distancia radial (**VDR**), tanto en un ME como en un MR.

Según la CP 8, las IVME producen variaciones de las permeancias de los TFE frente a los dientes del estator, y las IVMR frente a los dientes del rotor. Dicho de otra forma, en un ME (variable ϕ^s), sólo las IVME aportan variación de la permeancia de un TFE por VDR, mientras que en un MR (variable ϕ^r), sólo lo hacen las IVMR. Por eso, en esta sección a cada irregularidad corresponden tres gráficas de derivadas de las permeancias de los TFE: una por VAE en cada marco de referencia más una derivada por VDR.

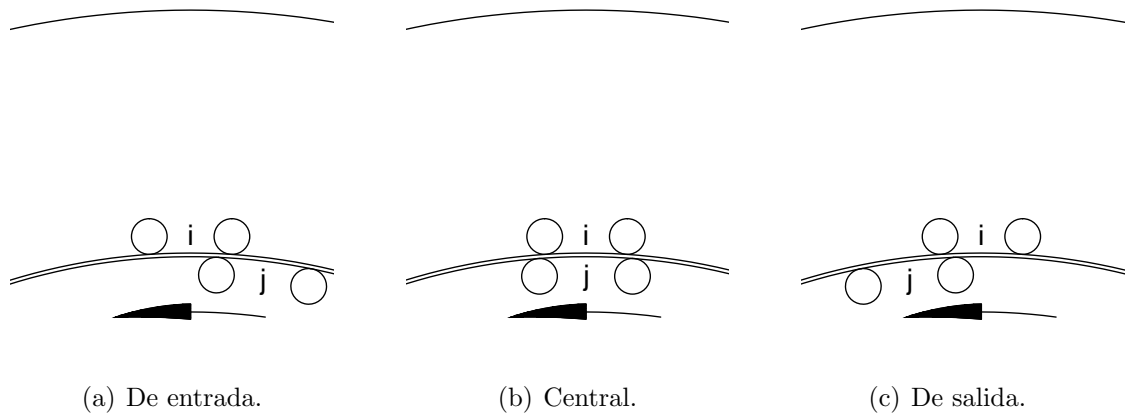


Figura 4.16: Intervalos de enfrentamiento entre dos dientes, entrehierro liso.

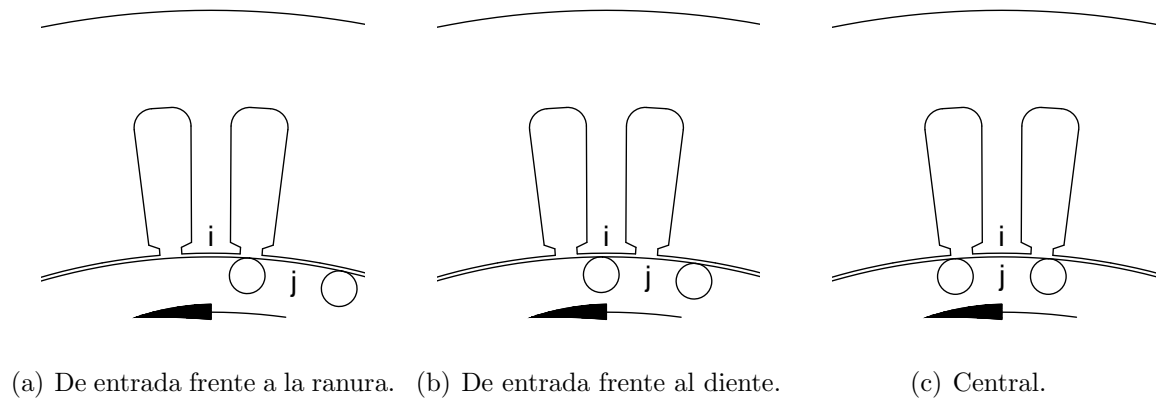


Figura 4.17: Intervalos de enfrentamiento entre dos dientes, estator ranurado.

La Fig. 4.16 muestra los tres intervalos angulares en que se puede dividir el paso de un diente j del rotor frente a un diente i del estator, considerando liso al entrehierro. El primer intervalo es el representado en la Fig. 4.16(a), en el que sólo la ranura adelantada del diente j enfrenta al diente i . El segundo intervalo es el representado en la Fig. 4.16(b), en el que el diente j enfrenta las dos ranuras del diente i . El tercer intervalo es el representado en la Fig. 4.16(c), en el que sólo la ranura atrasada del diente j enfrenta al diente i .

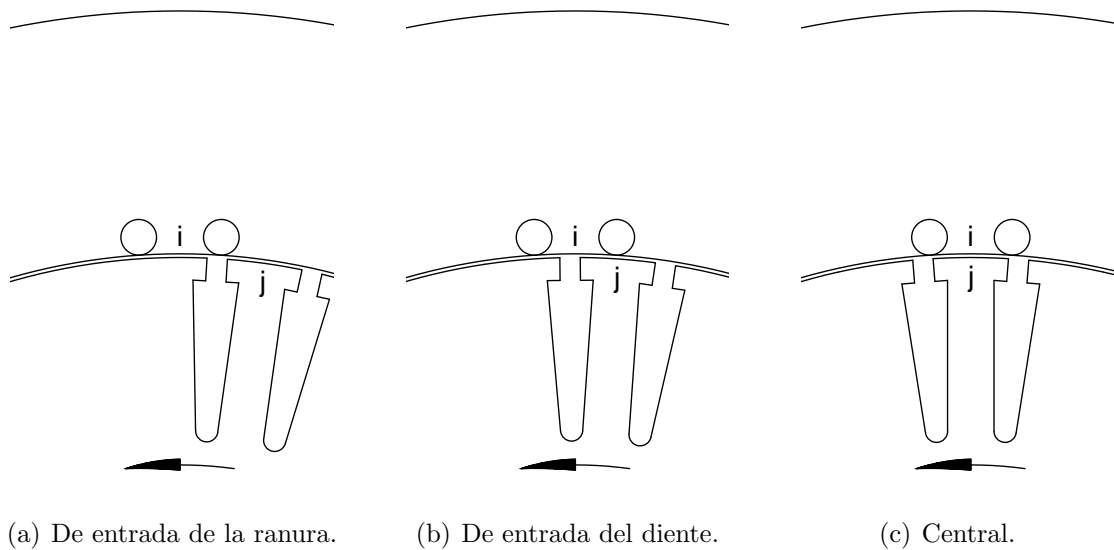


Figura 4.18: Intervalos de enfrentamiento entre dos dientes, rotor ranurado.

En esta sección, esos tres intervalos angulares de enfrentamiento se designarán como de entrada, central y de salida respectivamente.

La Fig. 4.17 muestra los tres primeros entre los cinco intervalos angulares en que se puede dividir el paso de un diente j del rotor frente a un diente i del estator, considerando al estator ranurado y al rotor liso. El primer intervalo es el representado en la Fig. 4.17(a), en el que la ranura adelantada del diente j enfrenta la ranura anterior del diente i . El segundo intervalo es el representado en la Fig. 4.17(b), en el que la ranura adelantada del diente j enfrenta al diente i . El tercer intervalo es el representado en la Fig. 4.17(c), en el que el diente j enfrenta a las dos ranuras del diente i .

En esta sección, esos tres intervalos angulares de enfrentamiento se designarán como de entrada frente a la ranura, de entrada frente al diente y central respectivamente. Los intervalos cuarto y quinto, no representados, son el de salida frente al

diente y de salida frente a la ranura.

La Fig. 4.18 muestra los tres primeros entre los cinco intervalos angulares en que se puede dividir el paso de un diente j del rotor frente a un diente i del estator, considerando al estator liso y al rotor ranurado. El primer intervalo es el representado en la Fig. 4.18(a), en el que la ranura adelantada del diente j enfrenta la ranura anterior del diente i . El segundo intervalo es el representado en la Fig. 4.18(b), en el que la ranura adelantada del diente j enfrenta al diente i . El tercer intervalo es el representado en la Fig. 4.18(c), en el que las dos ranuras del diente j enfrentan a las del diente i .

En esta sección, esos tres intervalos angulares de enfrentamiento se designarán como de entrada de la ranura, entrada del diente y central respectivamente. Los intervalos cuarto y quinto, no representados, son el de salida del diente y de la ranura.

Excentricidad estática: La Fig. 4.19 muestra las gráficas de las permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 40 del rotor y los dientes del estator, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Debido a la excentricidad, las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia tienen como envolvente una función coseno, mientras que la gráfica de la derivada por VDR en un MR tiene como envolvente una función seno.

El diente 40 del rotor enfrenta al 48 del estator, ante el cual el entrehierro es mínimo debido a la excentricidad, en las posiciones $\theta = 0 \equiv 2\pi$. En el TFE proyectado por el enfrentamiento de ese par de dientes, la permeancia y sus derivadas por VAE en ambos marcos de referencia alcanzan su valor máximo, mientras que la derivada por VDR es nula. El mismo diente del rotor enfrenta al 24 del estator, ante el cual

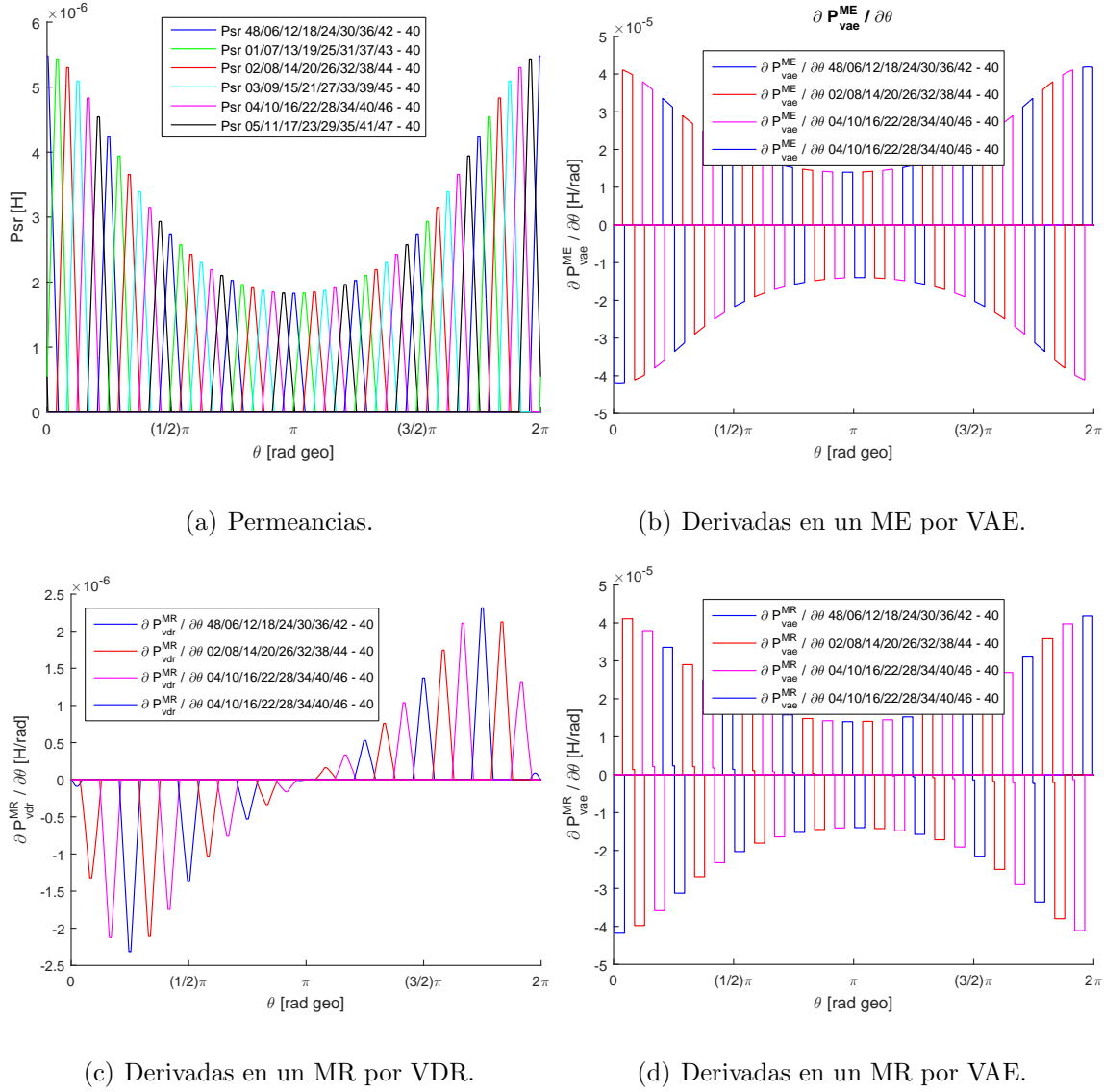


Figura 4.19: Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre los dientes del estator y el diente 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

el entrehierro es máximo, en la posición $\theta = \pi$. En el TFE proyectado por el enfren-tamiento de ese par de dientes, la permeancia y sus derivadas por VAE en ambos marcos de referencia alcanzan su valor mínimo y la derivada por VDR es nula.

En las posiciones $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$, el diente 40 del rotor enfrenta a los dientes

12 y 36 del estator, teniendo máximo valor absoluto la derivada por VDR.

Como se concluyó en la CP 7, los términos del cálculo analítico de las derivadas de las permeancias dependen del marco de referencia. Como la derivada total, cuyo valor es igual al que se obtendría por cálculo numérico, es independiente del marco de referencia, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vae}^{ME}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vdr}^{ME}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vae}^{MR}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vdr}^{MR}}{\partial \theta}, \quad (4.2)$$

donde los subíndices *vae* y *vdr* corresponden a los términos por variación del área enfrentada y de la distancia radial respectivamente, y los superíndices al marco de referencia.

Dado que las gráficas de la Fig. 4.19 corresponden a excentricidad estática, que es una IVMR, el segundo término en (4.2) es nulo y ésta se reduce a:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vae}^{ME}}{\partial \theta} \right|_{IVMR} = \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vae}^{MR}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vdr}^{MR}}{\partial \theta}. \quad (4.3)$$

La relación entre los términos de (4.3) es la que presentan las gráficas de las Fig. 4.19(b), 4.19(c) y 4.19(d), en el mismo orden.

La Fig. 4.20 muestra una ampliación de la 4.19 con sólo las gráficas correspondientes al TFE entre los dientes 12 del estator y 40 del rotor.

El enfrentamiento entre ese par de dientes comienza en la posición θ en que la ranura adelantada del diente 40 del rotor cruza la ranura anterior del diente 12 del estator, posición en que las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia presentan un flanco vertical ascendente. En las posiciones anteriores a ese cruce, no hay enfrentamiento entre este par de dientes y tanto la permeancia como sus derivadas son nulas. En la Fig. 4.20 pueden reconocerse los intervalos angulares representados en la Fig. 4.16.

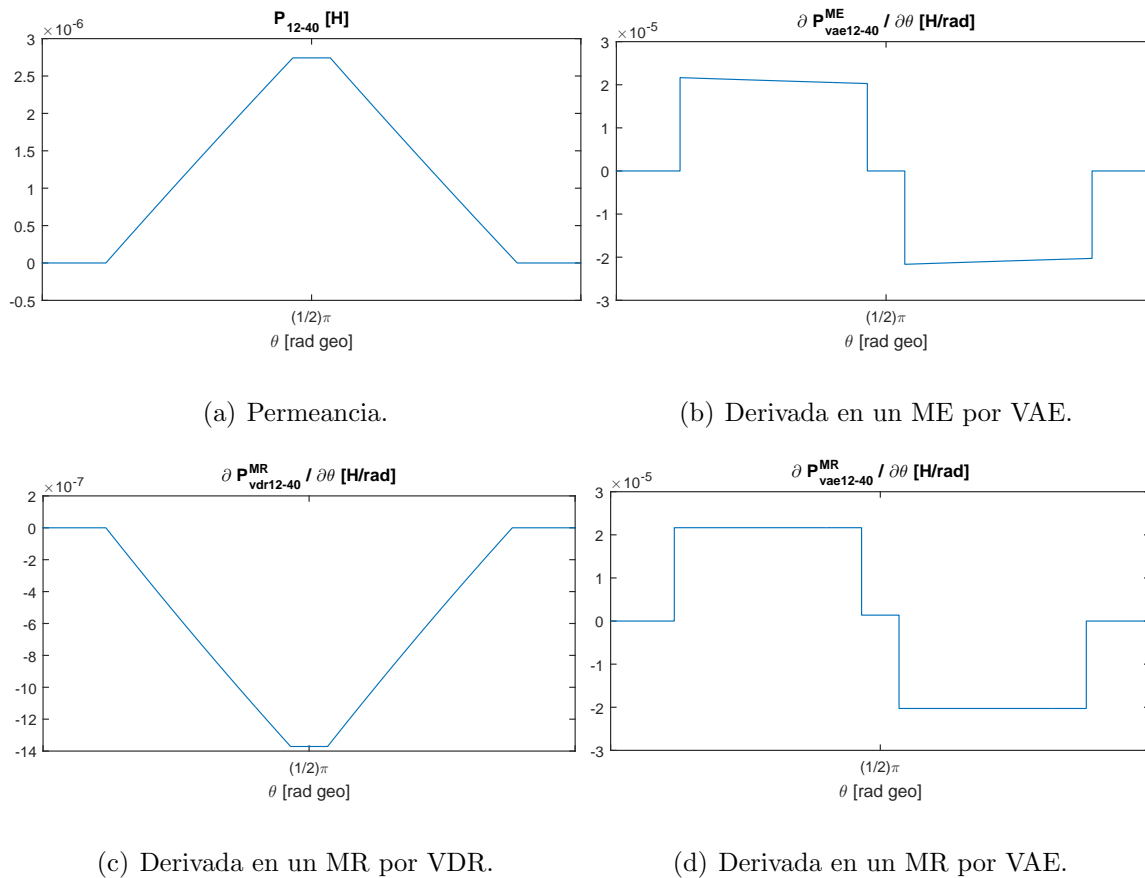


Figura 4.20: Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 12 del estator y el 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Intervalo de entrada, Fig. 4.20(a): en las posiciones inmediatas siguientes, el área enfrentada avanza cruzando líneas de inducción progresivamente más largas debido a la excentricidad. Como resultado, la permeancia continúa aumentando porque lo hace el área enfrentada, aunque ya más lentamente.

Intervalo de entrada, Fig. 4.20(b): dado que con excentricidad estática el valor del entrehierro frente a cada ranura del rotor aumenta en su paso frente al diente 12 del estator, disminuye el valor de la derivada por VAE en un ME.

Intervalo de entrada, Fig. 4.20(c): el aumento de longitud de las líneas de inducción

ganadas por el área enfrentada hace disminuir la derivada por VDR en un MR.

Intervalo de entrada, Fig. 4.20(d): dado que con excentricidad estática el valor del entrehierro frente a cada ranura del estator es constante, también lo es el valor de la derivada por VAE en un MR.

En la posición θ en que la ranura adelantada del diente 40 del rotor enfrenta la ranura posterior del diente 12 del estator, hay un flanco vertical descendente en las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia.

Intervalo central, Fig. 4.20(a): en posiciones θ del rotor posteriores a ese cruce de ranuras, dado que el paso de diente del rotor es mayor al del estator, este último queda totalmente enfrentado y la gráfica de permeancia alcanza su valor máximo.

Intervalo central, Fig. 4.20(b): con los dientes totalmente enfrentados, la derivada por VAE en un ME es nula, al igual que la total.

Intervalo central, Fig. 4.20(c) y 4.20(d): los dos términos de la derivada en un MR tienen el mismo valor absoluto pero signo opuesto, de modo que su suma es nula.

En la posición θ en que la ranura adelantada del diente 40 del rotor enfrenta la ranura posterior del diente 12 del estator, hay un flanco vertical descendente en las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia.

En las posiciones inmediatas siguientes comienza el intervalo de salida del diente 40 del rotor en su paso frente al 12 del estator, al que se puede extender la interpretación hecha para los intervalos anteriores.

Ranurado del estator: La Fig. 4.21 muestra las gráficas de las permeancias de los TFE entre los dientes del estator y el diente 40 del rotor, con el mismo valor de excentricidad estática del 50 %, al que se suma una apertura de 2.7 mm en las ranuras

del estator.

La variación de la longitud de las líneas de inducción en una posición fija sobre el rotor ϕ^r debida al ranurado del estator supera la variación de longitud debida a la excentricidad estática. Entonces, la envolvente de las gráficas de las derivadas por VDR en un MR tiene la forma de la envolvente de las gráficas de las permeancias, en vez de su derivada, como sucede en la Fig. 4.19.

Las Fig. 4.22 y 4.23 corresponden al estator ranurado y rotor liso, sin excentricidad y con excentricidad estática respectivamente.

El enfrentamiento entre ese par de dientes comienza en la posición θ en que la ranura adelantada del diente 40 del rotor cruza al centro de la ranura anterior del diente 12 del estator, que está abierta, posición en que las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia presentan un flanco vertical ascendente. En las posiciones anteriores a ese cruce, no hay enfrentamiento entre este par de dientes y tanto la permeancia como sus derivadas son nulas. En las Fig. 4.22 y 4.23 pueden reconocerse los intervalos angulares representados en la Fig. 4.17.

Intervalo de entrada frente a la ranura anterior del diente 12 del estator, Fig. 4.22(a) y 4.23(a): a partir de la posición de inicio del enfrentamiento, el área enfrentada avanza cruzando líneas de inducción frente a la ranura anterior del diente 12 del estator, que está abierta. Como esas líneas son progresivamente más cortas, la permeancia aumenta en forma creciente y su gráfica en ese intervalo tiene curvatura cóncava hacia arriba.

Intervalo de entrada frente a la ranura anterior del diente 12 del estator, Fig. 4.22(b) y 4.22(c): el acortamiento progresivo de las líneas de inducción produce una curvatura

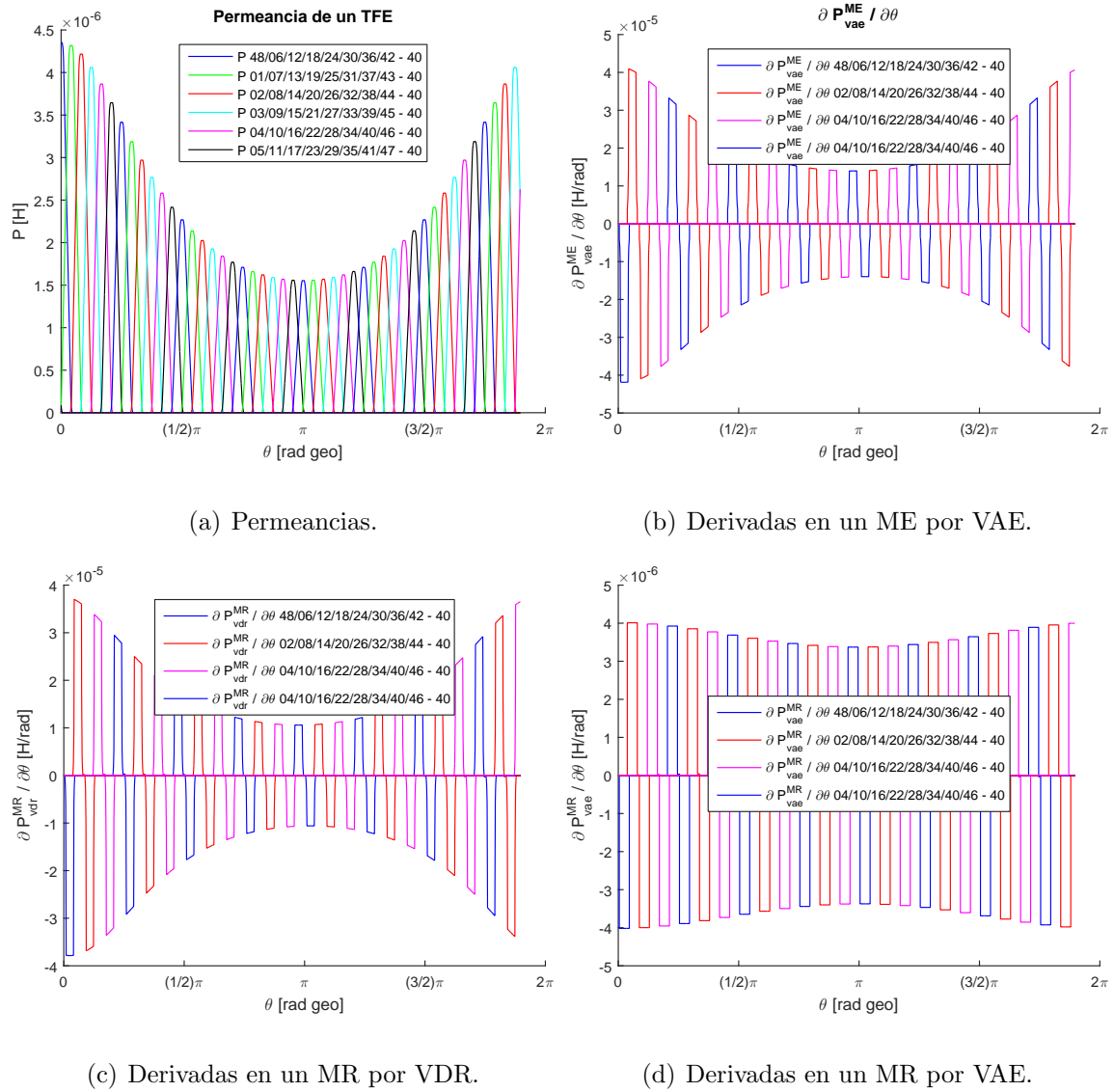


Figura 4.21: Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre los dientes del estator y el diente 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 %, apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator y rotor liso.

cóncava hacia arriba en las derivadas por VAE en un ME y por VDR en un MR.

Intervalo de entrada frente a la ranura anterior del diente 12 del estator, Fig. 4.22(d) y 4.23(d): dado que con excentricidad estática el valor del entrehierro frente a cada ranura del estator es constante, también lo es el valor de su derivada por VAE en un

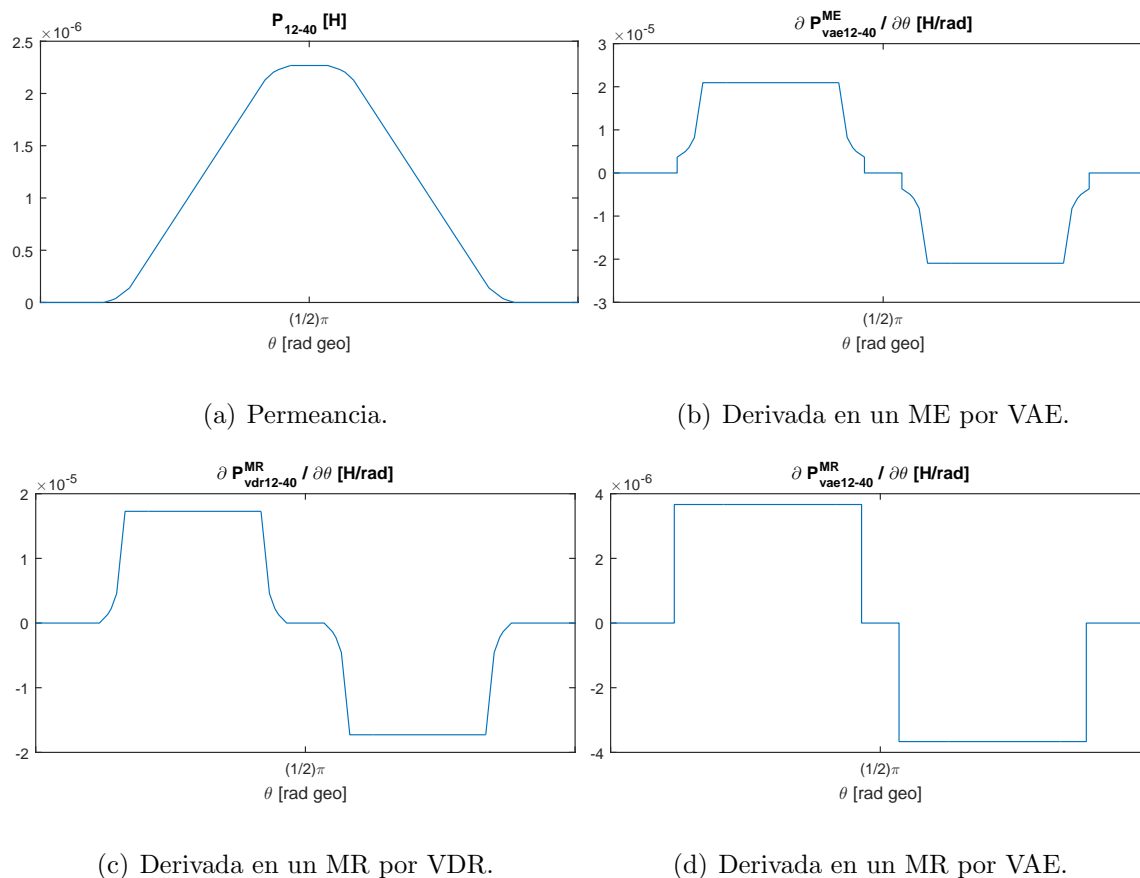


Figura 4.22: Permeancia del entrehierro y su derivada, entre el diente 12 del estator y el 40 del rotor, sin excentricidad, apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator y rotor liso.

MR.

Intervalo de entrada frente al diente 12 del estator: una vez que la ranura adelantada del diente 40 del rotor cruza la arista anterior del diente 12 del estator, el área enfrentada cruza líneas de inducción entre ambos dientes. Si no hay excentricidad, esas líneas son de longitud constante, la permeancia aumenta linealmente y sus derivadas en un MR tienen valor constante. Si en cambio hay excentricidad estática, las líneas cruzadas por el avance del área enfrentada ante el diente son progresivamente más largas y las derivadas por VAE en un MR y por VDR en un ME disminuyen su

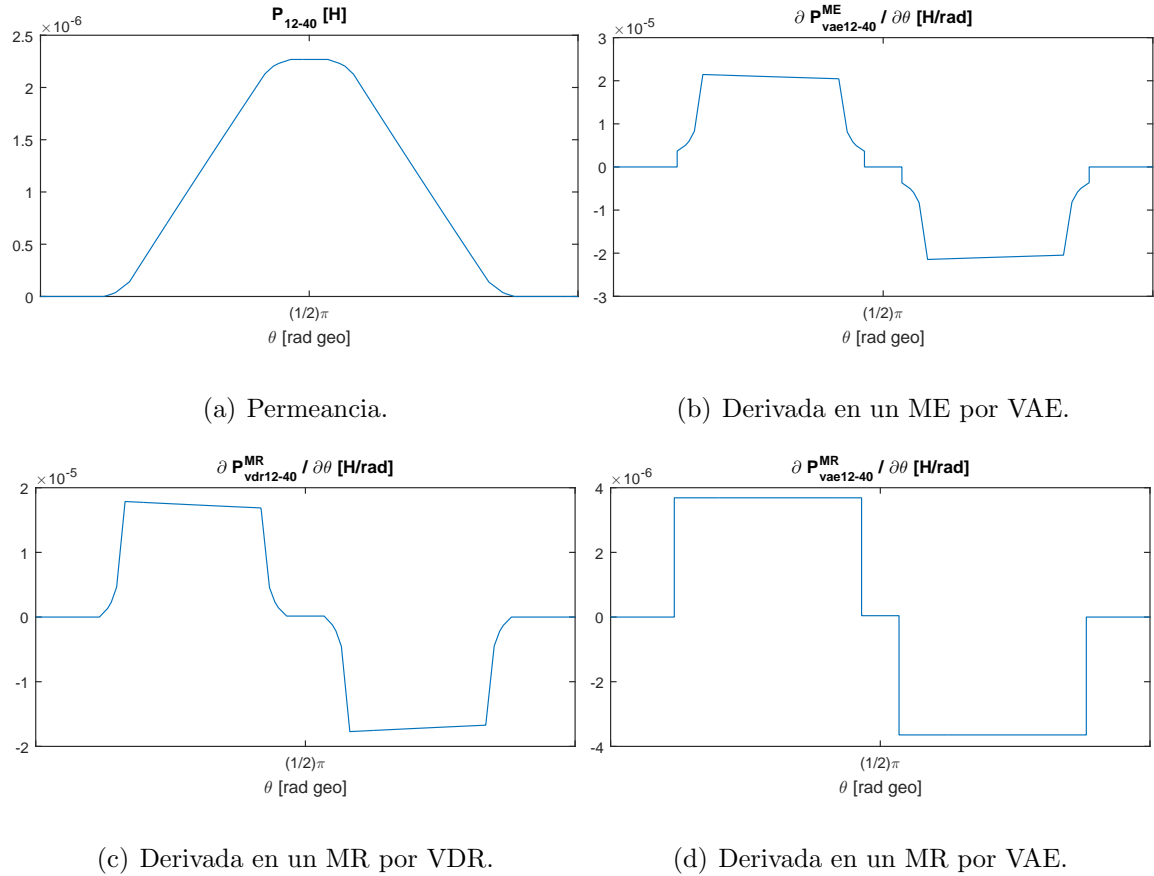


Figura 4.23: Permeancia del entrehierro y su derivada, entre el diente 12 del estator y el 40 del rotor, con excentricidad estática del 50 %, apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator y rotor liso.

valor.

Intervalo de entrada frente al diente 12 del estator, Fig. 4.22(b), 4.23(b), 4.22(c) y 4.23(c): en las posiciones en que ambas ranuras abiertas del diente 12 del estator son enfrentadas por el diente 40 del rotor, las líneas de inducción que inciden sobre la anterior se acortan con el aumento de posición, mientras que en la posterior se alargan. Según sea la tendencia dominante, las gráficas de la derivada por VAE en un ME y por VDR en un MR presentan curvatura cóncava hacia abajo o hacia arriba en torno a la posición de alineación de los centros de ambos dientes.

Intervalo de entrada frente al diente 12 del estator, Fig. 4.22(d) y 4.23(d): en la posición θ en que el centro de la ranura posterior del diente 12 del estator, que está abierta, es enfrentada por la ranura adelantada del diente 40 del rotor, las derivadas por VAE en un MR se anulan porque ninguno de los dos centros de las ranuras abiertas del diente del rotor enfrenta al diente 48 del estator.

Esta interpretación se puede extender a los intervalos de salida del diente 40 del rotor en su paso frente al diente 12 del estator y su ranura posterior.

Puede observarse que la amplitud de la derivada por VAE en un MR en las Fig. 4.22(c) y 4.23(c) es mucho mayor que la misma amplitud en la Fig. 4.20(c), porque la variación de longitud de las líneas de inducción que inciden sobre el diente 40 del rotor debida al ranurado, es mucho mayor que la debida a la excentricidad estática.

Excentricidad dinámica: La Fig. 4.24 muestra las gráficas de las permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y los dientes del rotor, con excentricidad dinámica del 50 % y entrehierro liso.

El diente 48 del estator es enfrentado por el 40 del rotor, ante el cual el entrehierro es mínimo debido a la excentricidad, en las posiciones $\theta = 0 \equiv 2\pi$. En el TFE proyectado por el enfrentamiento de ese par de dientes, la permeancia y sus derivadas por VAE en ambos marcos de referencia alcanzan su valor máximo, mientras que la derivada por VDR es nula. El mismo diente del estator es enfrentado por el 20 del rotor, ante el cual el entrehierro es máximo, en la posición $\theta = \pi$. En el TFE proyectado por el enfrentamiento de ese par de dientes, la permeancia y sus derivadas por VAE en ambos marcos de referencia alcanzan su valor mínimo y la derivada por

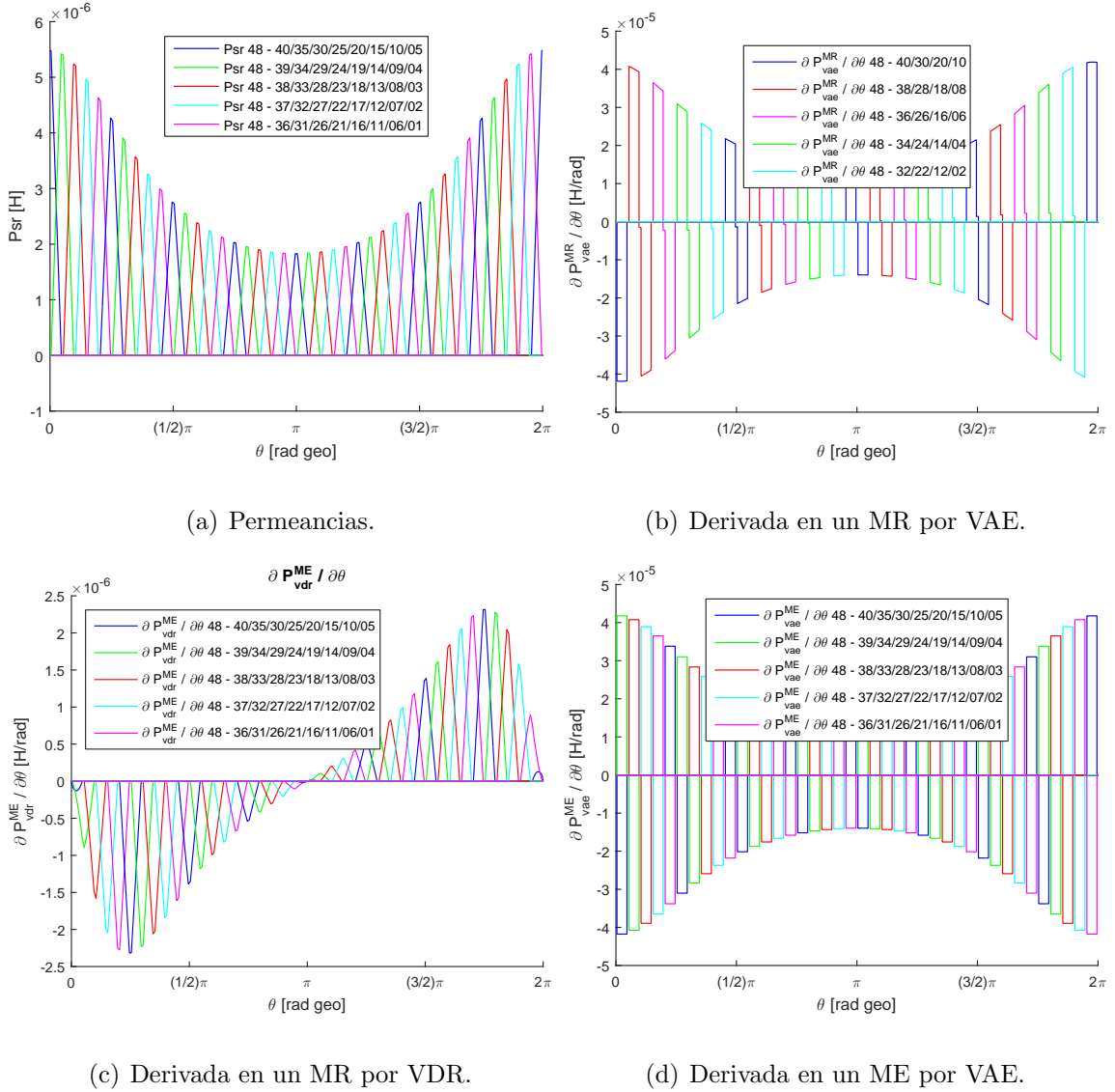


Figura 4.24: Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y los dientes del rotor, con excentricidad dinámica del 50 % y entrehierro liso.

VDR es nula.

En las posiciones $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$, en las que el diente 48 del estator es enfrentado por los dientes 10 y 30 del rotor, la derivada por VDR tiene máximo valor absoluto.

Dado que las gráficas de la Fig. 4.24 corresponden a excentricidad dinámica, que

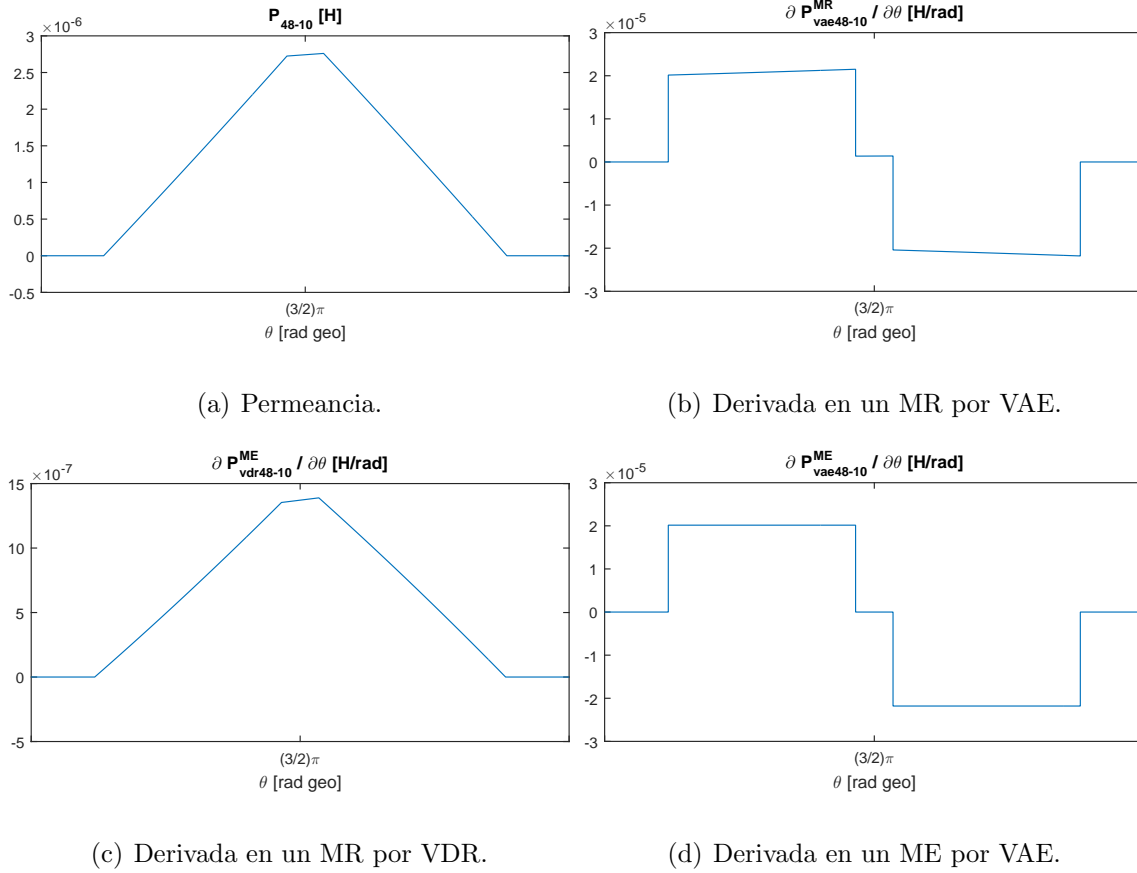


Figura 4.25: Permeancia del entrehierro y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y el 10 del rotor, con excentricidad dinámica del 50 % y entrehierro liso.

es una IVME, el cuarto término en (4.2) es nulo y ésta se reduce a:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vae}^{MR}}{\partial \theta} \right|_{IVME} = \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vae}^{ME}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{P}_{sr\ vdr}^{ME}}{\partial \theta}. \quad (4.4)$$

La relación entre los términos de (4.4) es la que presentan las gráficas de las Fig. 4.24(b), 4.24(c) y 4.24(d), en el mismo orden.

La Fig. 4.25 muestra una ampliación de la 4.24 con sólo las gráficas correspondientes al TFE entre los dientes 48 del estator y el 10 del rotor.

El enfrentamiento entre ese par de dientes comienza en la posición θ en que la ranura adelantada del diente 10 del rotor cruza la ranura anterior del diente 48 del

estator, posición en que las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia presentan un flanco vertical ascendente. En las posiciones anteriores a ese cruce, no hay enfrentamiento entre este par de dientes y tanto la permeancia como sus derivadas son nulas. En la Fig. 4.25 pueden reconocerse los intervalos angulares representados en la Fig. 4.16.

Intervalo de entrada, Fig. 4.25(a): en las posiciones inmediatas siguientes, el área enfrentada avanza cruzando líneas de inducción progresivamente más cortas debido a la excentricidad. Como resultado, la permeancia aumenta más rápidamente.

Intervalo de entrada, Fig.4.25(b): dado que con excentricidad dinámica el valor del entrehierro frente a cada ranura del estator disminuye al pasar frente a ella el diente 10, aumenta el valor de la derivada por VAE en un MR.

Intervalo de entrada, Fig. 4.25(c): la disminución de longitud de las líneas de inducción sobre las que avanza el área enfrentada hace aumentar la derivada por VDR en un ME.

Intervalo de entrada, Fig.4.25(d): dado que con excentricidad dinámica el valor del entrehierro frente a cada ranura del rotor es constante, también lo es el valor de la derivada por VAE en un ME.

En la posición θ en que la ranura adelantada del diente 10 del rotor enfrenta la ranura posterior del diente 48 del estator, hay un flanco vertical descendente en las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia.

Intervalo de enfrentamiento total, Fig. 4.25(a): en posiciones θ del rotor posteriores a ese cruce, dado que el paso de diente del rotor es mayor al del estator, este último queda totalmente enfrentado y la gráfica de permeancia alcanza su valor máximo.

Intervalo de enfrentamiento total, Fig.4.25(b): con los dientes totalmente enfrentados, la derivada por VAE en un MR es nula, al igual que la total.

Intervalo de enfrentamiento total, 4.25(c) y 4.25(d): los dos términos de la derivada en un ME tienen el mismo valor absoluto y signo opuesto, de modo que su suma es nula.

En la posición θ en que la ranura adelantada del diente 10 del rotor enfrenta la ranura posterior del diente 48 del estator, hay un flanco vertical descendente en las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia.

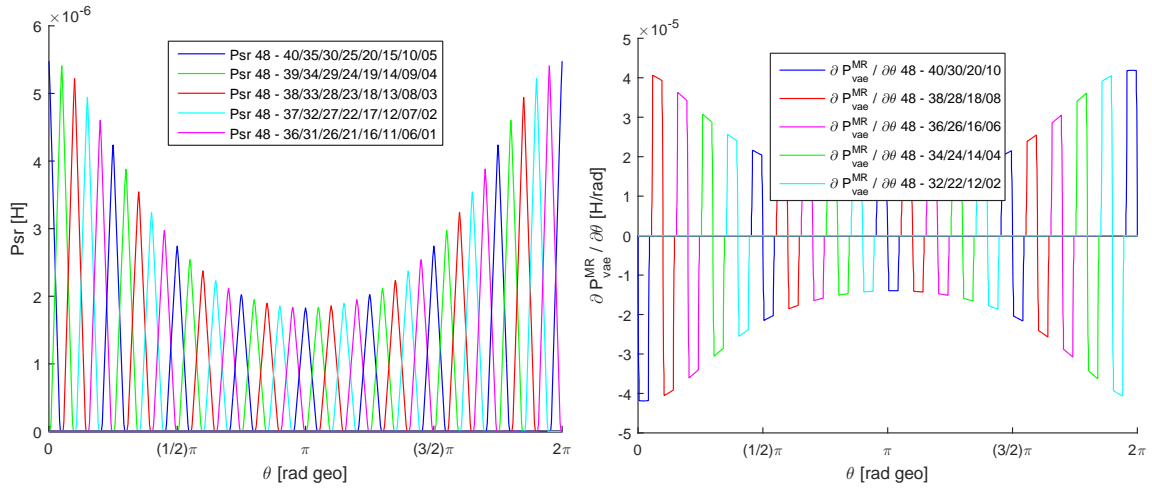
En las posiciones inmediatas siguientes comienza el intervalo de salida del diente 10 del rotor en su paso frente al 48 del estator, al que se puede extender la interpretación hecha para los intervalos anteriores.

Ranurado del rotor: La Fig. 4.26 muestra las gráficas de las permeancias de los TFE entre el diente 48 del estator y los dientes del rotor, con el mismo valor de excentricidad dinámica del 50 %, al que se suma una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.

La variación de la longitud de las líneas de inducción en una posición fija sobre el estator ϕ^s debida al ranurado del rotor supera la variación de longitud debida a la excentricidad dinámica. Entonces, la envolvente de las gráficas de las derivadas por VDR en un ME tiene la forma de la envolvente de las gráficas de las permeancias, en vez de su derivada, como sucede en la Fig. 4.24.

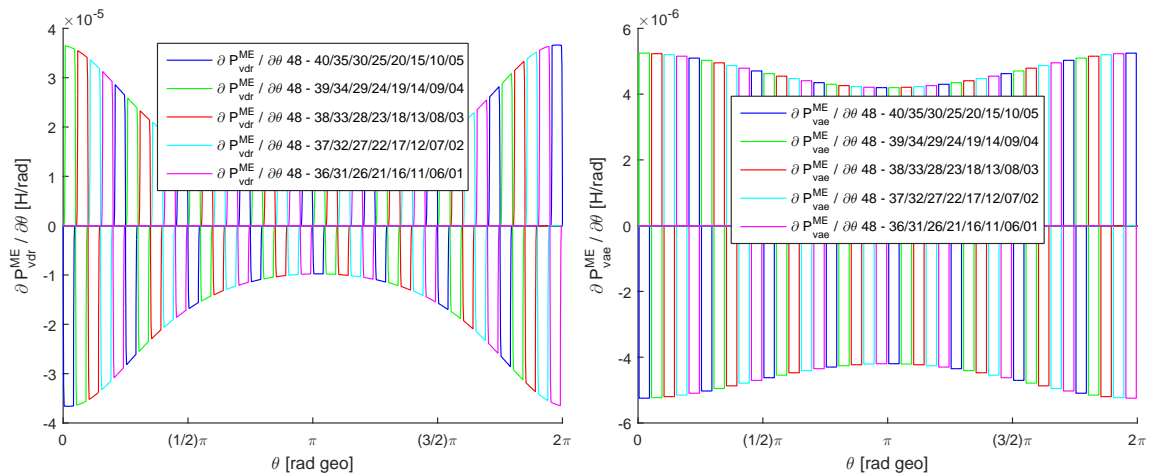
Las Fig. 4.27 y 4.28 corresponden al estator liso y rotor ranurado, sin excentricidad y con excentricidad dinámica respectivamente.

El enfrentamiento entre ese par de dientes comienza en la posición θ en que el



(a) Permeancias.

(b) Derivada en un MR por VAE.



(c) Derivada en un MR por VDR.

(d) Derivada en un ME por VAE.

Figura 4.26: Permeancias de los TFE y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y los dientes del rotor, con excentricidad dinámica del 50 %, estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.

centro de la ranura adelantada del diente 10 del rotor, que está abierta, cruza la ranura anterior del diente 48 del estator, posición en que las gráficas de las derivadas por VAE en ambos marcos de referencia presentan un flanco vertical ascendente. En las posiciones anteriores a ese cruce, no hay enfrentamiento entre este par de dientes

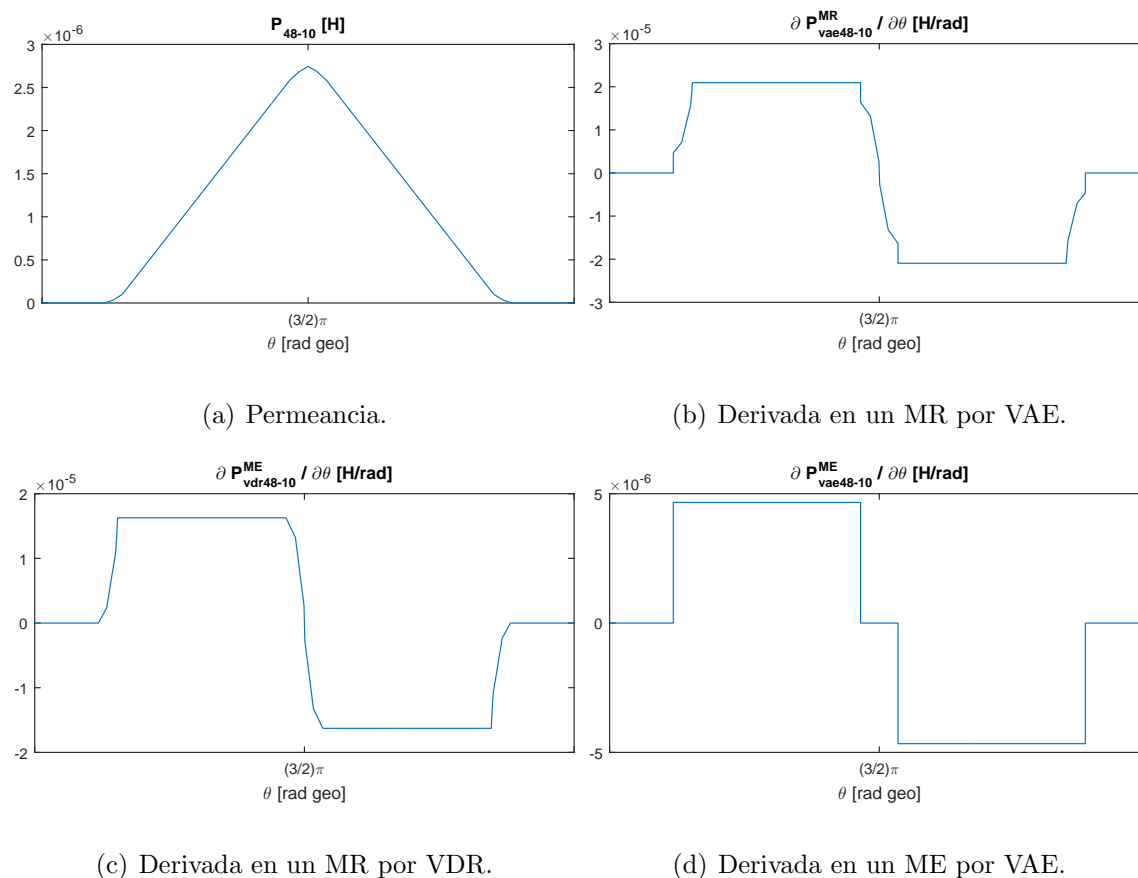


Figura 4.27: Permeancia del entrehierro y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y el 10 del rotor, sin excentricidad, con estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.

y tanto la permeancia como sus derivadas son nulas. En las Fig. 4.27 y 4.28 pueden reconocerse los intervalos angulares representados en la Fig. 4.18.

Intervalo de entrada de la ranura adelantada del diente 10 del rotor, Fig. 4.27(a) y 4.28(a): a partir de la posición de inicio del enfrentamiento, sobre la ranura adelantada del diente 10 del rotor, que está abierta, inciden líneas de inducción frente al diente 48 del estator. Como esas líneas son progresivamente más cortas, la permeancia aumenta en forma creciente y sus gráficas en ese intervalo tiene curvatura cóncava hacia arriba.

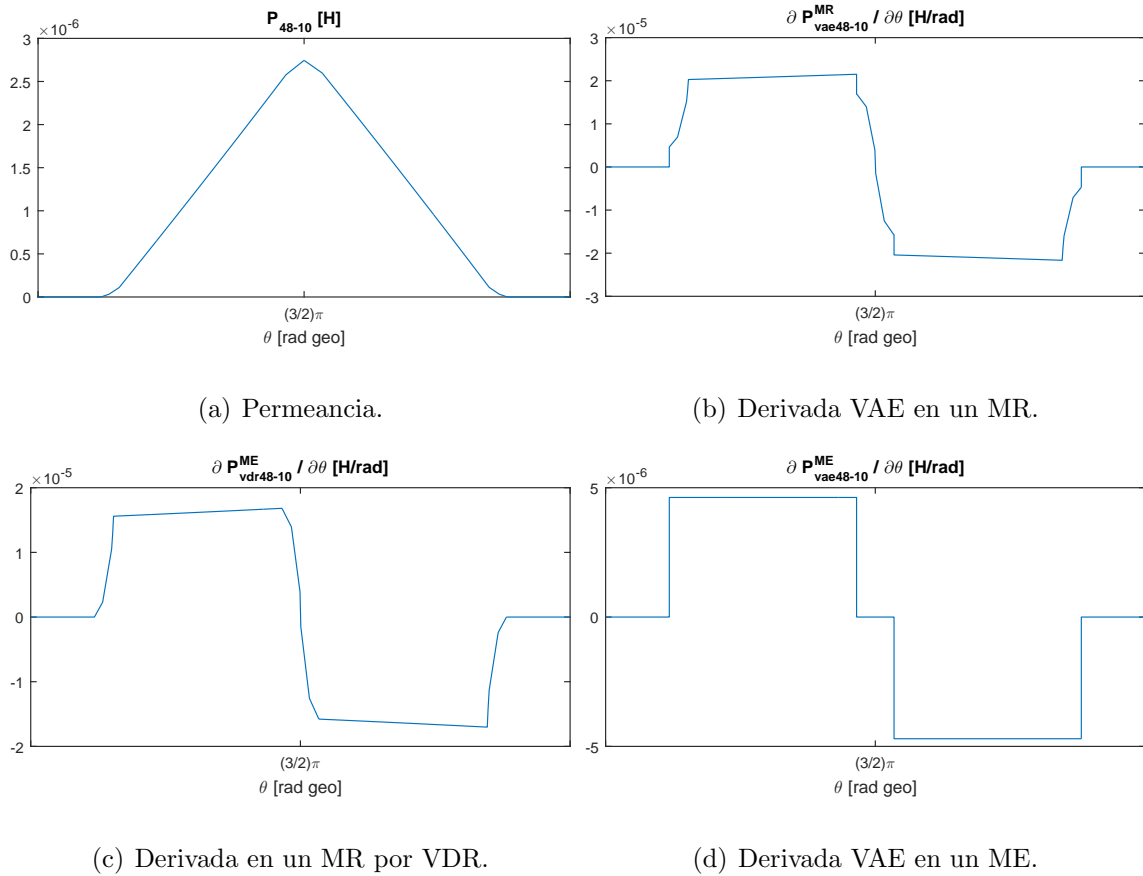


Figura 4.28: Permeancia del entrehierro y sus derivadas, entre el diente 48 del estator y el 10 del rotor, con excentricidad dinámica del 50 %, estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.

Intervalo de entrada de la ranura adelantada del diente 10 del rotor, Fig. 4.27(b) y 4.27(c): el acortamiento progresivo de las líneas de inducción produce una curvatura cóncava hacia arriba en las derivadas por VAE en un MR y por VDR en un ME.

Intervalo de entrada de la ranura adelantada del diente 10 del rotor, Fig. 4.27(d) y 4.28(d): dado que con excentricidad dinámica el valor del entrehierro frente a cada ranura del rotor es constante, también lo es el valor de su derivada por VAE en un ME.

Intervalo de entrada del diente 10 del rotor: una vez que la arista adelantada del

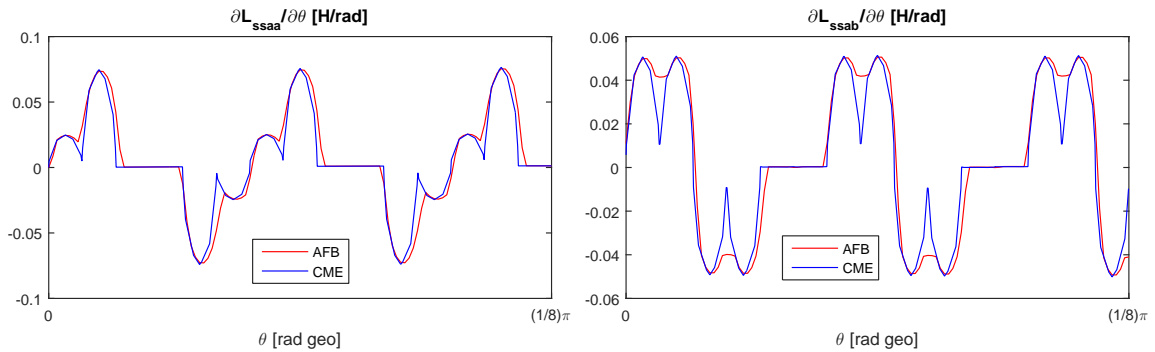
diente 10 del rotor cruza la ranura anterior del diente 48 del estator, el área enfrentada avanza cruzando líneas de inducción entre ambos dientes. Si no hay excentricidad, las líneas son de longitud constante, la permeancia aumenta linealmente y sus derivadas en un ME tienen valor constante. Si en cambio hay excentricidad dinámica, esas líneas sobre las que se avanza ante el diente son progresivamente más cortas y las derivadas por VAE en un MR y por VDR en un ME aumentan su valor.

Intervalo de entrada del diente 10 del rotor, Fig. 4.27(b), 4.27(c), 4.28(b) y 4.28(c): en las posiciones en que ambas ranuras abiertas del diente 10 del rotor enfrentan al 48 del estator, las líneas de inducción que inciden sobre la adelantada se acortan con el aumento de posición, mientras que en la atrasada se alargan. Según sea la tendencia dominante, la curvatura de las gráficas de la derivada por VAE en un MR y por VDR en un ME presentan curvatura cóncava hacia abajo o hacia arriba en torno a la posición de alineación de los centros de ambos dientes.

Intervalo de entrada del diente 10 del rotor, Fig. 4.27(d) y 4.28(d): en la posición θ en que el centro de la ranura adelantada del diente 10 del rotor, que está abierta, enfrenta la ranura posterior del diente 48 del estator, la derivada por VAE en un ME se anula porque ninguno de los dos centros de las ranuras abiertas del primero enfrenta al diente 48 del estator.

Esta interpretación se puede extender a los intervalos de salida del diente 10 del rotor y de su ranura atrasada en su paso frente al 48 del estator.

Puede observarse que la amplitud de la derivada por VAE en un ME en las Fig. 4.27(c) y 4.28(c) es mucho mayor que la misma amplitud en la Fig. 4.25(c), porque la variación de longitud de las líneas de inducción que inciden sobre el diente



(a) De la Fig. 4.5(a).

(b) De la Fig. 4.5(b).

Figura 4.29: Comparación entre resultados de cálculo analítico y numérico.

48 del estator debida al ranurado, es mucho mayor que a la debida a la excentricidad dinámica.

4.8 Resolución analítica

En esta sección se presentarán algunos ejemplos de cálculo de las inductancias y sus derivadas a partir del CME, aplicando el método propuesto en [10].

En la Fig. 4.5 se mostraron las gráficas de las derivadas de la inductancia propia de la fase a del estator y mutua entre las fases a y b , cuyas primitivas fueron calculadas con el método AFB. Esas gráficas corresponden a un entrehierro con excentricidad dinámica del 50 %, estator liso y una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor. Las mismas gráficas se muestran ampliadas en la Fig. 4.29, superpuestas con las obtenidas a partir del CME.

Según se concluyó en la CP 3, el cálculo analítico de las inductancias con el método AFB es inviable si se modela el ranurado, salvo que se trate de una MI con

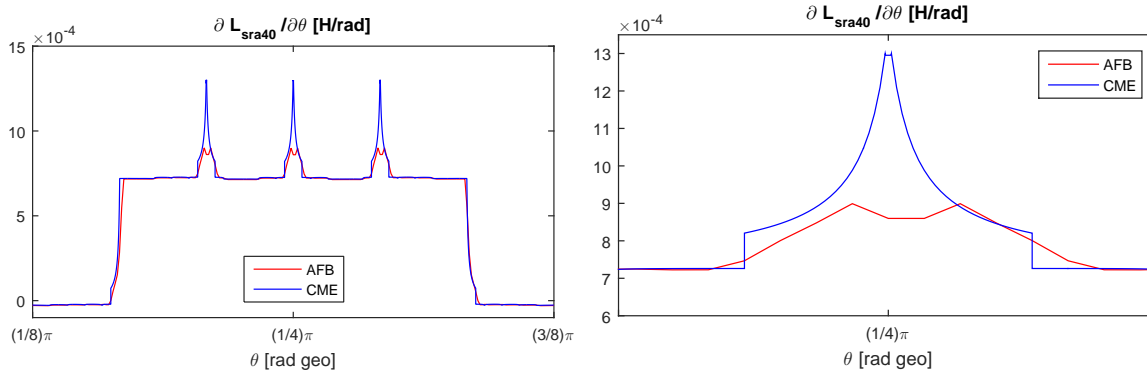
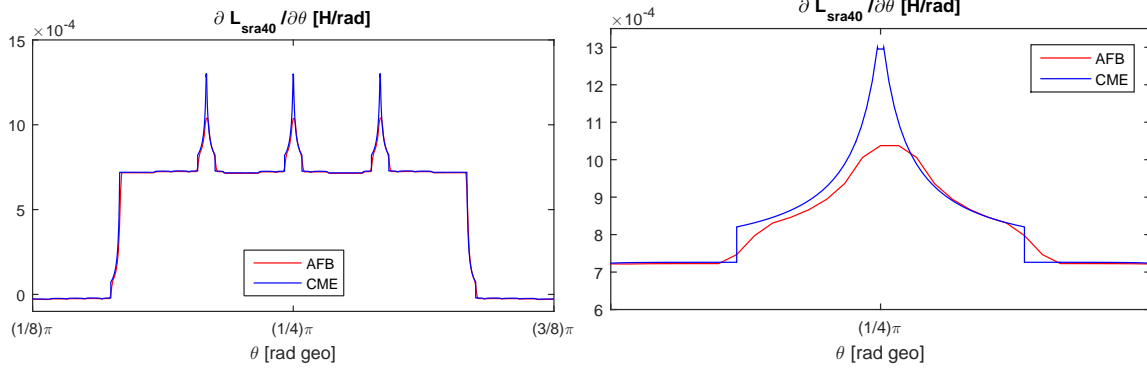
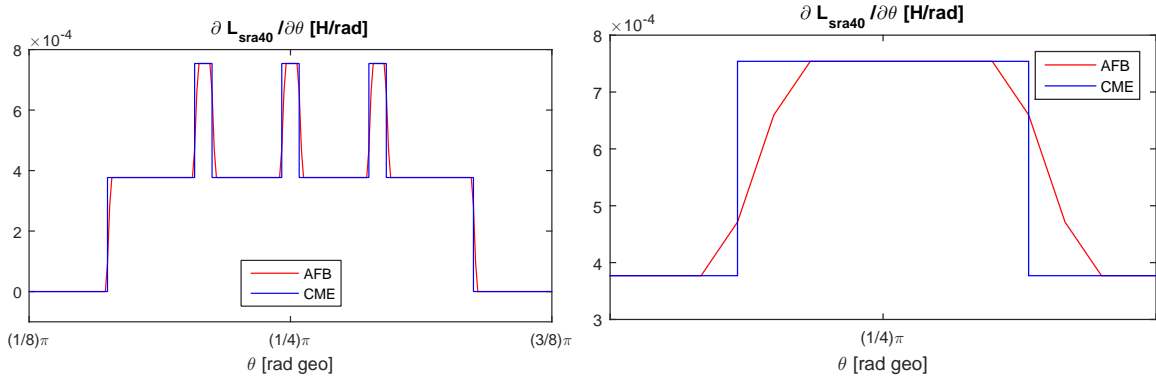
(a) $(S_s \times S_r)$ posiciones discretizadas.(b) Detalle de (a) en $\theta = \frac{1}{4}\pi$ rad.(c) $(2 \times S_s \times S_r)$ posiciones discretizadas.(d) Detalle de (c) en $\theta = \frac{1}{4}\pi$ rad.

Figura 4.30: Comparación entre resultados de cálculo analítico y numérico.

pocas ranuras. Como las inductancias graficadas corresponden a un entrehierro con 40 ranuras en el rotor, fue necesaria la aplicación de métodos de aproximación numérica. En ese procedimiento, la posición θ del rotor se discretizó en $(S_s \times S_r)$ valores.

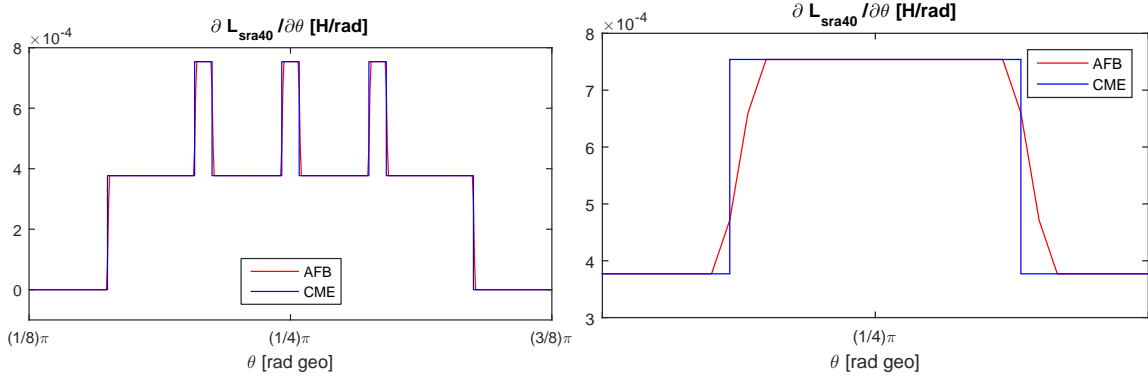
En cambio, las inductancias y sus derivadas obtenidas a partir del CME se calcularon en función de las permeancias y derivadas de este último, obtenidas a su vez con las expresiones analíticas (3.77) y (3.78).

En la Fig. 4.30 se puede apreciar la diferencia entre las gráficas superpuestas,



(a) ($S_s \times S_r$) posiciones discretizadas.

(b) Detalle de (a) en $\theta = \frac{1}{4}\pi$ rad.



(c) ($2 \times S_s \times S_r$) posiciones discretizadas.

(d) Detalle de (c) en $\theta = \frac{1}{4}\pi$ rad.

Figura 4.31: Comparación entre resultados de cálculo analítico y numérico.

debida a la aproximación numérica del método AFB.

En la Fig. 4.15(b) se mostró la gráfica de la derivada de la inductancia mutua entre la fase a del estator y el lazo 40 del rotor, cuya primitiva fue calculada con el método AFB. Esa gráfica corresponde a los mismos valores de excentricidad dinámica y apertura de las ranuras del rotor, junto con la de un ELU para compararlas. La misma gráfica se muestra ampliada en la Fig. 4.30, superpuesta con la obtenida a partir del CME.

La derivada cuya primitiva se calculó con el método AFB está graficada para la posición θ del rotor discretizada en $(S_s \times S_r)$ y $(2 \times S_s \times S_r)$ valores. Las cuatro subfiguras muestran la ampliación de la Fig. 4.15(b) en un intervalo centrado en la posición $\theta = \frac{1}{4}\pi$, en el cual se encuentran los tres pulsos en forma de tridente debidos a la distribución de los bobinados.

Esa comparación se repite en la Fig. 4.31, donde se muestran las mismas derivadas en el caso de un ELU.

Luego, se puede plantear la siguiente conclusión parcial:

CP9: *El cálculo analítico de las inductancias y sus derivadas utilizando programas de cálculo simbólico es posible con el CME, posibilitando a su vez resolver el MCMA con el mismo programa.*

Queda así salvada la limitación del método AFB expresada en la CP 3, según la cual el cálculo analítico de las inductancias con el método AFB es inviable si se modela el ranurado, salvo que se trate de una MI con pocas ranuras, debiendo entonces calcularse las derivadas de la misma forma.

4.9 Sumario

Para completar el conjunto de las irregularidades que afectan a los parámetros de la MI, se han considerado aquellas que no son del entrehierro y están presentes incluso en caso de un ELU. Estas son la distorsión armónica debida a la distribución del arrollamiento trifásico y la asimetría debida al número de ranuras del rotor no múltiplo de tres.

Se han presentado los resultados de cálculo de las inductancias obtenidas con el método AFB aplicando integración numérica, y de su posterior derivación, considerando distintas irregularidades geométricas del entrehierro.

Se han presentado los resultados de cálculo de las permeancias y sus derivadas obtenidas con el modelo CME aplicando cálculo analítico, considerando las mismas irregularidades que en el cálculo anterior de las inductancias.

Se han interpretado en forma cualitativa los resultados presentados, que pueden relacionarse con las expresiones matemáticas desarrolladas en los capítulos anteriores.

Se ha observado cómo las irregularidades del estator afectan los parámetros del rotor y viceversa, y cómo aquellos que no afectados mantienen las mismas relaciones que guardan en caso de un ELU. Por ejemplo, con excentricidad estática, la función y la inductancia de cada fase del estator es una copia desfasada de las funciones e inductancias de las otras dos fases, y con excentricidad dinámica sucede lo mismo con esos parámetros en el rotor.

Se han reconocido los patrones característicos de las alteraciones de los parámetros afectados por las irregularidades geométricas del entrehierro. Dado que este efecto hace identificables a las irregularidades causantes, es aprovechable para el diagnóstico de fallas.

Por último, se compararon las resoluciones del cálculo analítico y numérico de los parámetros de la MI.

Capítulo 5

Resultados de simulación

5.1 Introducción

En el Cap. 4 se presentaron los resultados de cálculo de los parámetros obtenidos con el método AFB y el CME, correspondientes a la MI de uso práctico presentada en el Cap. 3. En este capítulo se presentarán algunos resultados de simulación del MCMA y el CME resueltos con los parámetros anteriores.

Las simulaciones corresponden a los ensayos estándar con rotor bloqueado y en vacío, un ensayo a velocidad impuesta de valor variable y al arranque de la MI en régimen motor sin carga. En todos se compararán los resultados obtenidos con ambos modelos.

El MCMA se puede simular con las inductancias y sus derivadas tanto calculadas con el método AFB como obtenidas a partir del CME, equivalentes entre ellas. Las aplicadas en las simulaciones cuyos resultados se mostrarán, son las presentadas en el Cap. 4, calculadas con el método AFB.

Las derivadas de las permeancias del modelo CME, obtenidas por cálculo analítico están discriminadas en los términos por VAE y VDR.

En ambos modelos, la evolución de las variables en el tiempo se obtiene por métodos numéricos.

Al igual que en el Cap. 4, se harán interpretaciones cualitativas de los resultados presentados, para lo cual se limitará el modelado de las irregularidades del entrehierro a la agrupación de las IVME y las IVMR por separado, evitando las combinaciones de ambas, cuyos resultados tendrían efectos superpuestos.

Tales interpretaciones se limitarán al dominio del tiempo, para validar por comparación ambos modelos y dar una visión de su utilidad como herramienta.

5.1.1 Estimación cualitativa de las variables

En las simulaciones que se comentarán en este capítulo, la tensión aplicada a la fase a es aproximadamente¹ una función temporal seno con ángulo de fase cero:

$$v_{sa}(t) \approx U_{sa \text{ máx}} \text{sen } \omega t. \quad (5.1)$$

Alcanzado el régimen estacionario, el flujo inducido por cada fase atrasa aproximadamente² un cuarto de ciclo a la tensión eléctrica, en cumplimiento de la Ley de Faraday. El flujo inducido por la fase a puede estimarse con la expresión:

$$\Phi_{sa}(t) \Big|_{\text{régimen estacionario}} \approx -\Phi_{sa \text{ máx}} \cos \omega t. \quad (5.2)$$

¹La aproximación se debe al centro de estrella flotante.

²La aproximación se debe a la caída de tensión en la resistencia e inductancia de dispersión del arrollamiento de cada fase del estator.

En los ensayos con rotor bloqueado y en vacío, dado que la MI no entrega potencia mecánica y en ausencia de pérdidas en los núcleos, las corrientes que circulan por las fases del estator son aproximadamente iguales a sus componentes magnetizantes, siendo para la fase a :

$$i_{sa}(t) \Big|_{\text{régimen estacionario}} \approx -I_{sa \text{ máx}} \cos \omega t. \quad (5.3)$$

Al inicio de cada ciclo, la tensión en la fase a pasa por el valor cero en sentido ascendente y el flujo inducido por ella, una vez en régimen estacionario, tiene amplitud máxima y valor negativo, siendo entrante por los polos *Sur* y saliente por los *Norte* de esa fase, como se representa en la Fig. 5.1. En esos mismos inicios de ciclo, los flujos inducidos por las fases b y c tienen valor igual a la mitad de su amplitud y sentido positivo, entrantes por los polos *Norte* y salientes por los *Sur* de esas fases, contribuyendo en dirección oblicua al flujo total resultante de las tres. Este último, no representado, tendrá en los inicios de ciclo la misma dirección del flujo inducido por la fase a , con mayor amplitud.

La corriente que circula por cada una de las tres fases induce a su vez en el entrehierro una DPM que tendrá el contenido armónico temporal de esa corriente y espacial de la función de bobinados de esa fase. Continuando con el ejemplo de la fase a , su función de bobinados, en caso de un ELU, será la graficada en la Fig. 4.1, afectada por la distribución de las bobinas como única irregularidad, y su desarrollo armónico espacial será el de la Fig. 4.2.

Las combinaciones de los distintos armónicos temporales de corriente en las tres fases con los armónicos espaciales de sus funciones de bobinados, inducen en el entre-

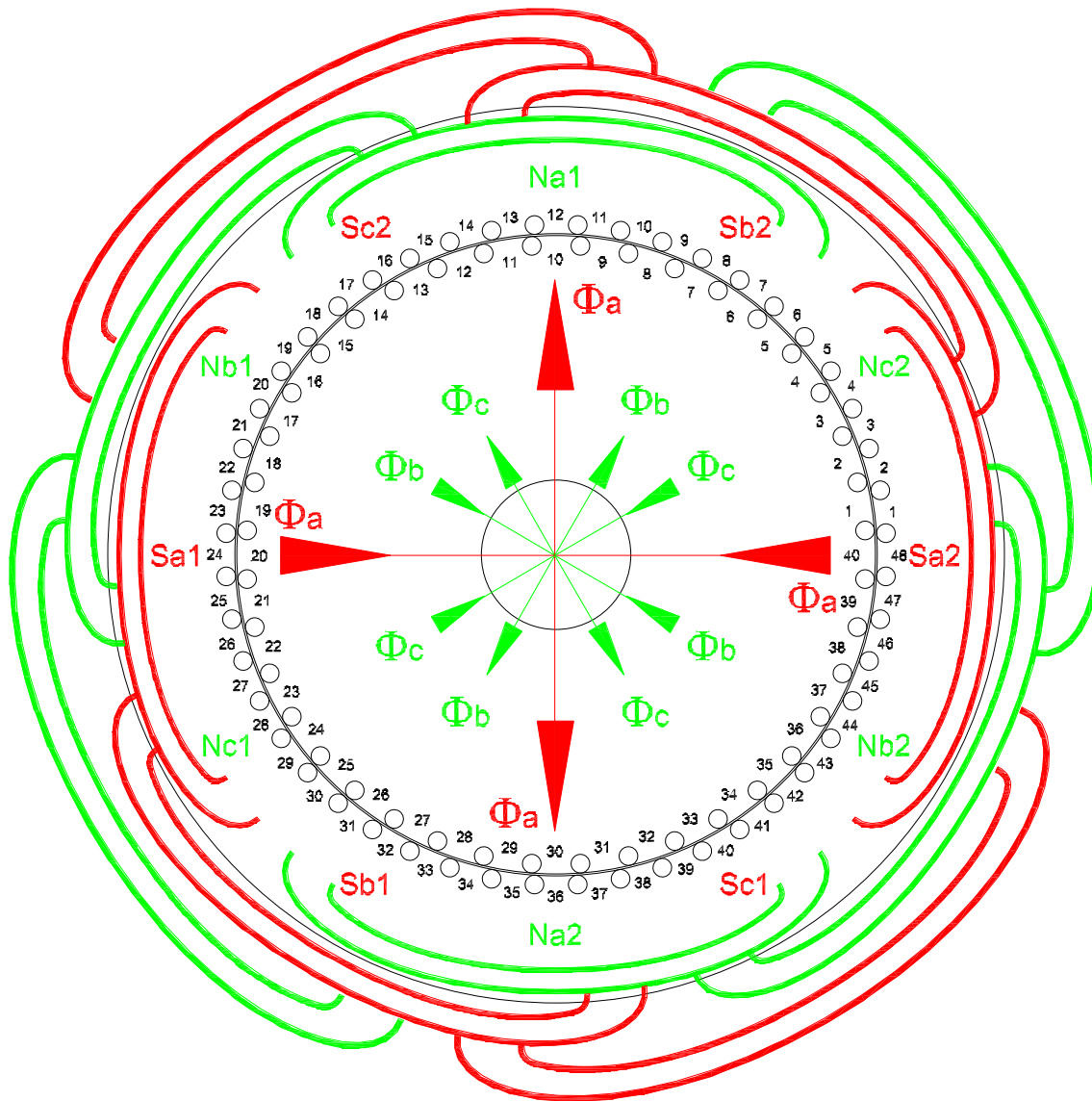


Figura 5.1: Flujo inducido por cada fase en los inicios de ciclo.

hierro DPM rotantes en uno u otro sentido a distintas velocidades, o bien se cancelan mutuamente [102].

Alimentando la MI a la frecuencia de red (sin utilizar fuentes conmutadas) y omitiendo la saturación de los núcleos del estator y del rotor, las corrientes son práctica-

mente sinusoidales, a excepción de la componente aperiódica en régimen transitorio, como se verá en los resultados de simulación, pudiendo desestimarse sus armónicos superiores.

Las combinaciones de las corrientes en las fases del estator, consideradas sin armónicos temporales, con los armónicos espaciales fundamentales de sus respectivas funciones de bobinados, inducen en conjunto una DPM rotante que puede estimarse^{1 2} con la expresión³:

$$\Delta\mathcal{U}_{s1-1}(\phi^s, t) \approx \Delta\mathcal{U}_{s1 \text{ máx}} \cos(\omega t - 2\phi^s), \quad (5.4)$$

y con los armónicos espaciales superiores, las DPM:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U}_{s1-3}(\phi^s, t) &\approx 0, & \Delta\mathcal{U}_{s1-5}(\phi^s, t) &\approx \Delta\mathcal{U}_{s5 \text{ máx}} \cos(5\omega t + 10\phi^s), \\ \Delta\mathcal{U}_{s1-7}(\phi^s, t) &\approx \Delta\mathcal{U}_{s7 \text{ máx}} \cos(7\omega t - 14\phi^s). \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2 Ensayo con el rotor bloqueado

En este ensayo se alimenta la MI con una tensión reducida del 5 % de su valor nominal y se impide el movimiento del rotor, manteniéndolo fijo en la posición $\theta = 0$. La irregularidad del entrehierro modelada es la excentricidad en un valor del 50 %, que produce una variación de la función del entrehierro dada por (2.66) o (2.67), según sea estática o dinámica respectivamente. Ambas expresiones son equivalentes estando el rotor en la posición $\theta = 0$, y en ausencia de otra irregularidad, la función del entrehierro es la misma con una u otra. Un ensayo con el rotor bloqueado en esa

³La diferencia de signo con (5.2) se debe a que el sentido de referencia positivo del flujo inducido por la fase *a* es entrante por sus polos *Norte*, mientras que el sentido de referencia positivo del flujo inducido por las tres fases en (5.4) es entrante en $\phi^s = 0$, $t = 0$, y esa posición está centrada en un polo *Sur* de la fase *a*.

posición hecho con cualquiera de las dos excentricidades arroja entonces los mismos resultados en las variables eléctricas y magnéticas, aunque no en el par.

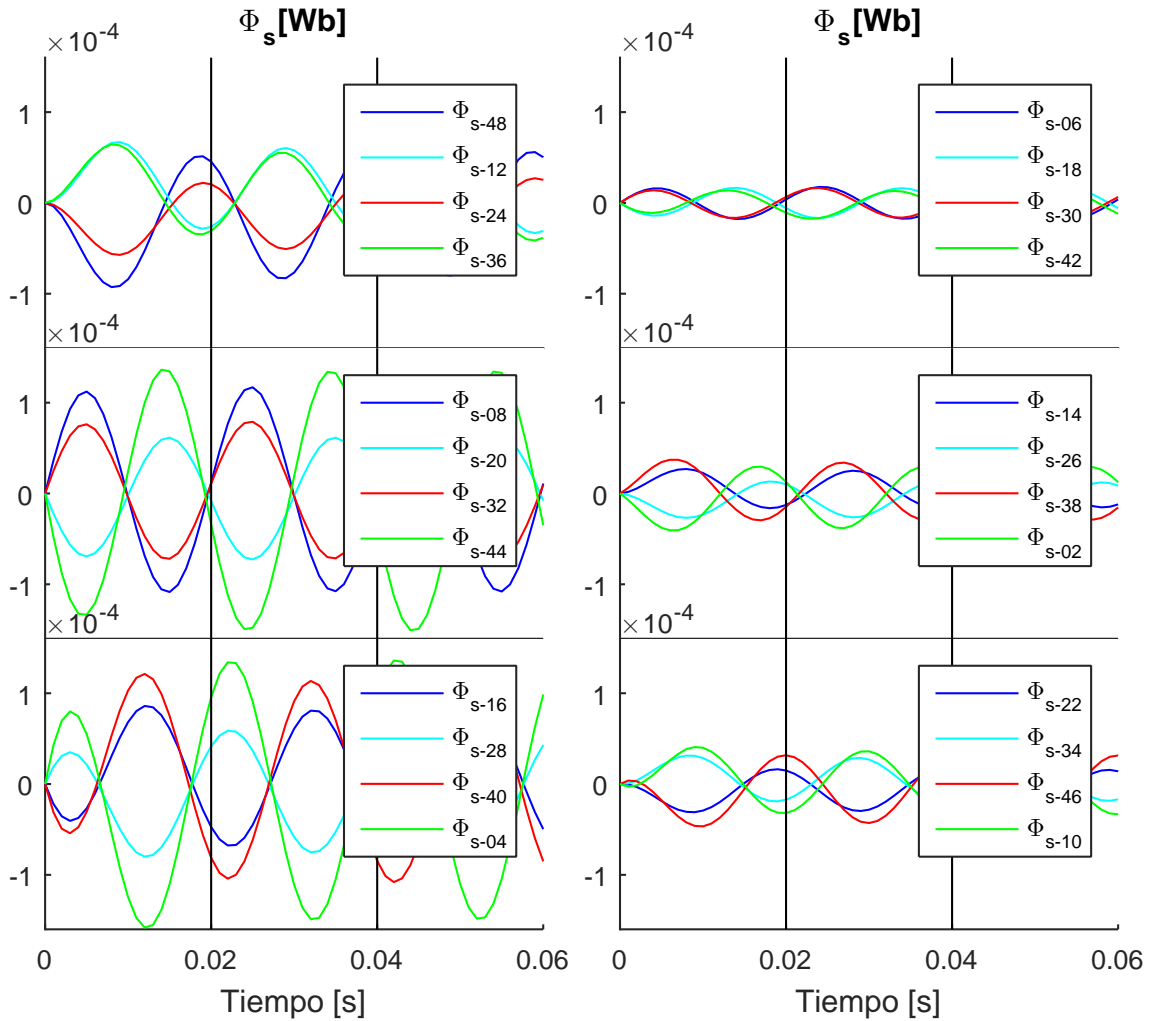
5.2.1 Flujos

La Fig. 5.2 muestra las gráficas de los flujos en los dientes del estator, obtenidos por simulación del modelo CME. Entre éstos, los de la Fig. 5.2(a) están centrados en los polos, y los de la 5.2(b) están ubicados en los planos neutros entre polos adyacentes de una misma fase, notándose la diferencia de amplitud entre los de una y otra figura debido a la distribución del arrollamiento trifásico.

Las dos figuras superiores corresponden a los dientes centrados en los polos y ubicados en los planos neutros de la fase a , las dos figuras centrales corresponden a los dientes de la fase b y las dos inferiores a los de la fase c .

En las gráficas, el tiempo de simulación se divide en tres intervalos de 20 ms delimitados por las líneas verticales negras. En cada uno de estos intervalos, la alimentación de 50 Hz cumple un ciclo y el campo inductor rotante avanza media vuelta geométrica.

En fase con la DPM rotante inducida en el entrehierro por las tres fases del estator, dada por (5.4), el flujo en el diente 48 del estator, ubicado en la posición $\phi^s = 2\pi \equiv 0$, es aproximadamente una función temporal coseno una vez alcanzado el régimen estacionario, como se ve en la Fig. 5.2(a). El flujo en el diente 6, ubicado en $\phi^s = \frac{\pi}{4}$, es una función seno, como se ve en la Fig. 5.2(b). En el diente 12, ubicado en $\phi^s = \frac{\pi}{2}$, es una función coseno invertida, como se ve nuevamente en la Fig. 5.2(a), y así sucesivamente.



(a) Dientes centrados en los polos.

(b) Dientes en los planos neutros.

Figura 5.2: Flujos en los dientes del estator en el modelo CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

Puede notarse también el efecto de la excentricidad. Entre los dientes centrados en los polos de la fase a , el 48, ubicado frente al entrehierro mínimo, es el que tiene mayor amplitud de flujo; el 24, frente al entrehierro máximo, menor amplitud; mientras que en los dientes 12 y 36, con iguales valores de entrehierro, las amplitudes son

aproximadamente iguales. Pasando a los dientes centrados en los polos de las fases b y c , los diametralmente opuestos, cuyos flujos están en fase, están enfrentados a distintos valores de entrehierro, dando lugar a cuatro gráficas bien diferenciadas.

En cuanto a los dientes ubicados en los planos neutros, los de la fase a están enfrentados de a pares a iguales valores de entrehierro, a lo que corresponden dos pares de gráficas casi coincidentes, mientras que los de las otras dos fases están enfrentados a cuatro valores distintos de entrehierro, dando lugar a cuatro gráficas bien diferenciadas.

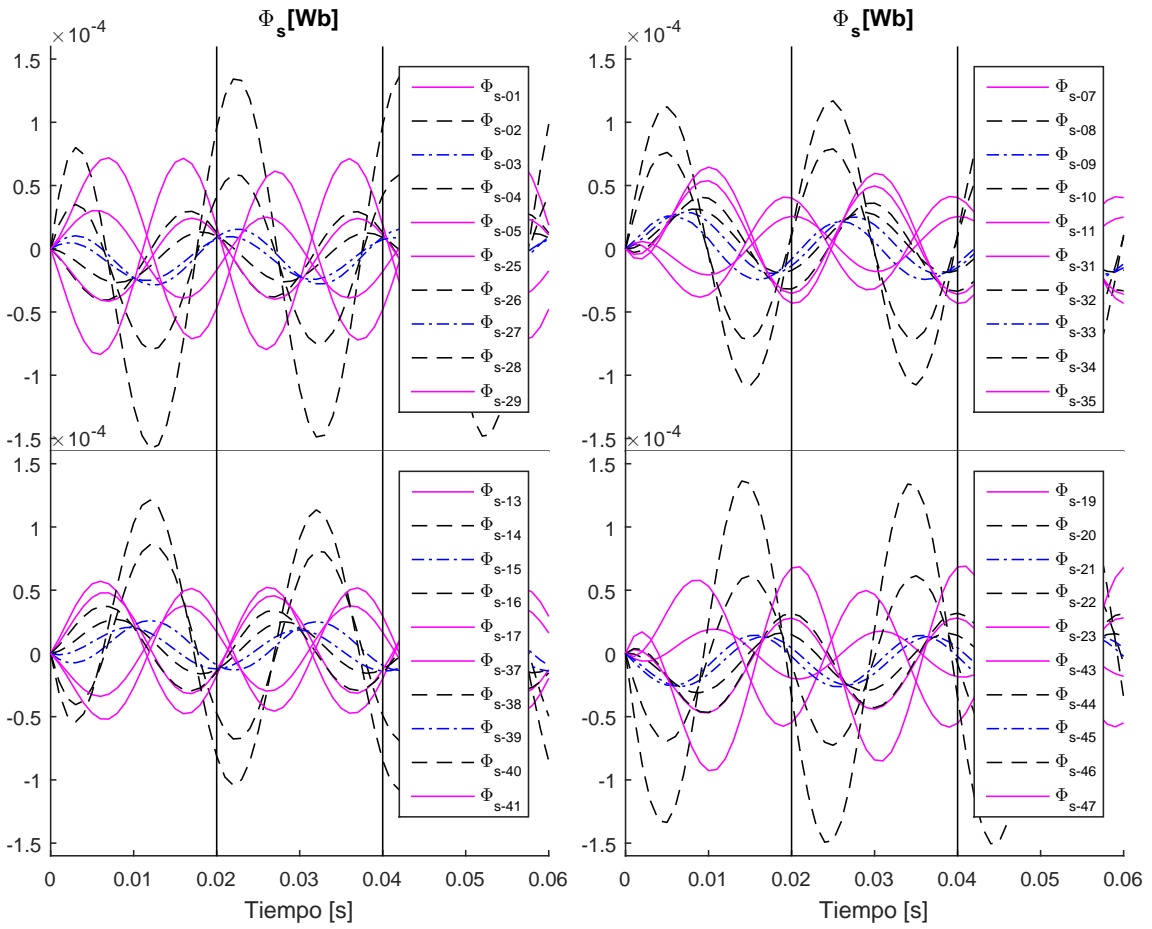
Los doce pares de gráficas de la Fig. 5.2 son coincidentes en caso de un ELU.

Los veinticuatro dientes restantes son aquellos enlazados sólo por la bobina externa de un polo de una fase y por las bobinas interna y externa de un mismo polo de las otras dos. Las gráficas de los flujos en estos últimos dientes están incluidas en las mostradas en la Fig. 5.3, junto con otras repetidas de la Fig. 5.2.

El flujo en estos dientes es el más afectado por la asimetría debida al número de ranuras del rotor no múltiplo de tres, no pudiendo agruparlos por fase como a los anteriores, sino sólo con un criterio que considera la distribución del bobinado y el dentado del rotor.

En la Fig. 3.3 se ve que los sectores del estator con numeración impar empiezan en el centro de un polo y terminan en un plano neutro, mientras que en los sectores con numeración par es al revés. Los flujos en los dientes de los sectores impares están graficados en la Fig. 5.3(a), y en los pares en la 5.3(b).

Cada sector tiene un diente centrado en un polo y otro ubicado en un plano neutro entre dos polos, cuyos flujos ya fueron graficados en la Fig. 5.2 y se repiten en línea de



(a) Sectores impares.

(b) Sectores pares.

Figura 5.3: Flujo en los dientes del estator en el modelo CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

trazos. Estas cuatro gráficas del mismo tipo de línea se distinguen por su amplitud, aprovechando el hecho de que la asimetría debida a la distribución es dominante sobre la debida a la excentricidad. Por ejemplo, los flujos en los dientes 2 y 4 del sector 1, y en los dientes 28 y 26 del sector 5, se distinguen ordenando de mayor a menor sus amplitudes con sólo ver la Fig. 3.3:

$$\Phi_{s4} > \Phi_{s28} > \Phi_{s2} > \Phi_{s26},$$

donde Φ_{s4} y Φ_{s28} tienen mayor amplitud por estar centrados en los polos, el primero mayor que el segundo por estar ubicado en una zona con menor entrehierro, mientras que Φ_{s2} y Φ_{s26} tienen menor amplitud por estar ubicados en planos neutros entre polos, también distinguidos por la excentricidad. En el caso de un ELU, esas gráficas negras son coincidentes en los cuatro grupos de la Fig. 5.3.

En cada uno de esos cuatro grupos hay además dos gráficas en línea de trazos y puntos y cuatro en trazo continuo, totalizando los veinticuatro dientes. Las gráficas en línea de trazos y puntos corresponden a los dientes centrales de cada sector, y las de trazo continuo al anterior y posterior, todos estos enlazados por cinco bobinas.

Continuando con los sectores 1 y 5, las gráficas en línea de trazos y puntos y en trazo continuo se distinguen por la excentricidad y ángulo de fase. Las primeras, correspondientes a los flujos en los dientes centrales 3 y 27, se distinguen porque el primero tiene mayor amplitud, mientras que las de trazo continuo, correspondientes a los dientes 1, 5, 25 y 29, se distinguen porque el flujo en el diente 1 es el adelantado de mayor magnitud, en el diente 3 es el atrasado de mayor amplitud, en el 25 es el adelantado de menor amplitud y en el 29 es el atrasado de menor amplitud.

En el caso de un ELU, esas gráficas coinciden de a pares, distinguiéndose sólo por el desfasaje y no por la amplitud.

Como tanto los sectores pares como los impares están distanciados entre sí por un cuarto de vuelta geométrica, que el armónico fundamental de flujo recorre al cabo de medio ciclo eléctrico, los flujos en sus dientes análogos se encuentran en oposición de fase. Ésto se nota la Fig. 5.3(a), en la que las gráficas de las dos figuras superiores son aproximadamente iguales a las de las inferiores, en oposición de fase. En el caso

de un ELU, esta oposición es precisa.

Por último, en la Fig. 5.3(a) se ve que el flujo en los dientes de los sectores 1, 8, 4 y 5, correspondientes a las zonas de menor y mayor entrehierro respectivamente, tienen mayor amplitud, cosa que no sucede en caso de un ELU.

El análisis de flujos hecho hasta este punto es realizable sólo con el modelo CME. A continuación se va a probar su equivalencia con el MCMA, aplicando las inductancias calculadas por el método AFB. Los dos modelos se resuelven teniendo como datos a las tensiones de línea:

$$v_{sab} = v_{sa} - v_{sb}, \quad v_{sbc} = v_{sb} - v_{sc}, \quad v_{sca} = v_{sc} - v_{sa},$$

las cuales forman un conjunto que contiene menos información que el formado por las tres tensiones de fase, porque no determina la posición del centro de estrella. Las tensiones de línea se pueden calcular a partir de las tensiones de fase, pero no inversamente.

Al cumplirse que

$$v_{sab} + v_{sbc} + v_{sca} = 0,$$

conociendo los valores de dos tensiones de línea, por ejemplo v_{sab} y v_{sbc} , se puede calcular el tercero.

También en los flujos enlazados por las fases del estator, las diferencias

$$\lambda_{sab} = \lambda_{sa} - \lambda_{sb}, \quad \lambda_{sbc} = \lambda_{sb} - \lambda_{sc}, \quad \lambda_{sca} = \lambda_{sc} - \lambda_{sa},$$

pueden calcularse conociendo λ_{sa} , λ_{sb} y λ_{sc} , pero no inversamente.

Al cumplirse que:

$$\lambda_{sab} + \lambda_{sbc} + \lambda_{sca} = 0,$$

conociendo los valores de dos diferencias, por ejemplo λ_{sab} y λ_{sbc} , se puede calcular la tercera.

En (2.1) al operar con las tensiones v_{sab} y v_{sbc} como datos, resulta una expresión en función de las diferencias λ_{sab} y λ_{sbc} . Estas diferencias se relacionan a su vez en (2.4) con las corrientes i_{sa} , i_{sb} e i_{sc} .

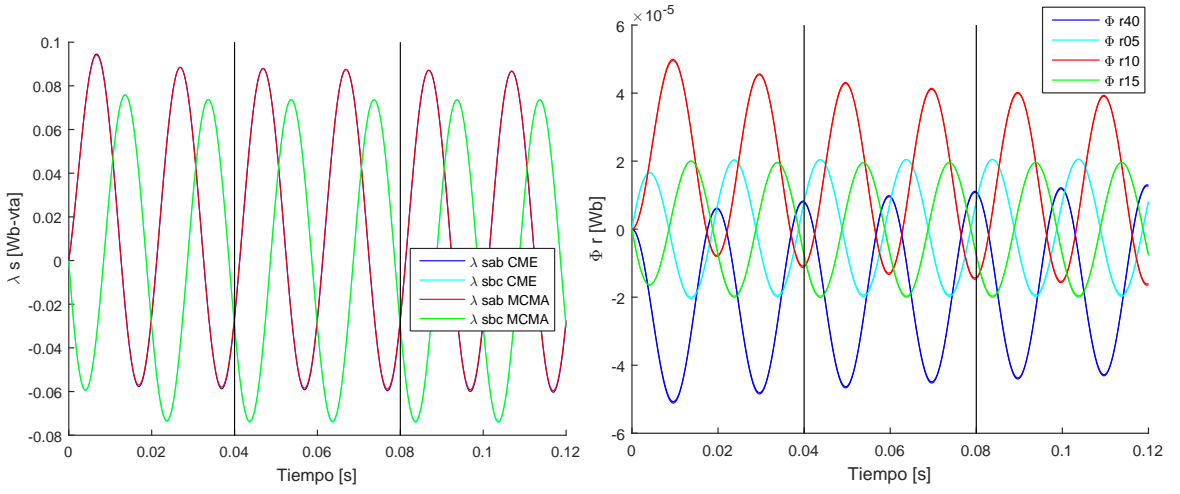
Para resolver el modelo es necesario determinar los valores del flujo enlazado por cada fase λ_{sa} , λ_{sb} y λ_{sc} , que no pueden entonces obtenerse conociendo sólo los valores de sus diferencias λ_{sab} y λ_{sbc} , faltando una ecuación. Ésta ya no será de flujos enlazados sino de corrientes, aportada por la conexión estrella (aplicable sólo en ausencia de fallas de aislación entre los arrollamientos y la carcasa) [11]:

$$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0.$$

En resumen, el MCMA utiliza las tensiones v_{sab} y v_{sbc} como datos, y las diferencias de flujos enlazados λ_{sab} y λ_{sbc} junto con las corrientes i_{sa} , i_{sb} e i_{sc} , como incógnitas, aplicando la suma nula de las corrientes. No opera con los flujos enlazados por cada fase λ_{sa} , λ_{sb} y λ_{sc} , aunque sí los puede obtener con un cálculo adicional una vez resueltas las variables anteriores.

Obviando ese cálculo adicional, la Fig. 5.4(a) muestra las gráficas de las diferencias entre los flujos enlazados λ_{sab} y λ_{sbc} , obtenidas directamente de la operación del MCMA, superpuestas con estas mismas diferencias calculadas a partir del modelo CME, que no opera con ellas.

La obtención de estas diferencias entre flujos enlazados a partir de las variables con que opera el modelo CME, se hace enlazando el flujo Φ_s en los dientes del estator con los arrollamientos de las fases, previa suma del flujo disperso en éstas.



(a) Diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator.

(b) Flujo en los dientes del rotor.

Figura 5.4: Diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator y flujo en los dientes 40, 05, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

En cuanto al flujo enlazado por cada lazo del rotor, en el MCMA se calcula como el aporte de las corrientes de cada fase del estator y de los demás lazos del rotor a través de sus respectivas inductancias mutuas con el lazo en cuestión, más el aporte de la corriente hecho por el propio lazo a través de su autoinducción. Por ejemplo, para el lazo 40, el flujo enlazado por éste se calcula con la expresión:

$$\begin{aligned} \lambda_{r40} = & L_{sra40}I_{sa} + L_{srb40}I_{sb} + L_{src40}I_{sc} \\ & + L_{rr40\ 01}I_{r01} + L_{rr40\ 02}I_{r02} + \dots + (L_{rr40\ 40} + 2L_e)I_{r40}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ese mismo flujo enlazado, operando con las variables del modelo CME, se obtiene enlazando al flujo Φ en el diente 40 del rotor, previa suma del flujo disperso:

$$\lambda_{r40} = \Phi_{r40} + 2\mathcal{P}_e I_{r40}, \quad (5.7)$$

donde \mathcal{P}_e es la permeancia de dispersión de un segmento de anillo de cortocircuito.

La Fig. 5.4(b) muestra las gráficas de los flujos en los dientes 40, 05, 10 y 15 del rotor en ambos modelos. El flujo en el primero, ubicado en la posición $\phi^s = 2\pi \equiv 0$, tiene su ángulo de fase impuesto por (5.4), siendo entonces aproximadamente una función temporal coseno una vez en régimen estacionario, y los flujos en los lazos 5, 10 y 15 le atrasan a intervalos acumulativos de un cuarto de ciclo eléctrico. En los dientes 40 y 10, en los que el flujo es una función cosenoidal y cosenoidal invertida respectivamente, dada la condición inicial nula, la componente aperiódica es máxima, mientras que en los dientes 5 y 15, en los que es una función sinusoidal y sinusoidal invertida respectivamente, es nula.

La Fig. 5.5 muestra las gráficas de los flujos en el entrehierro entre algunos de los dientes enfrentados en el ensayo, que pueden obtenerse sólo con el modelo CME, en las que son observables los efectos de las asimetrías.

Debido a la distribución del arrollamiento trifásico, los flujos con mayor amplitud entre los graficados se almacenan entre el diente 4 del estator, centrado en un polo, y los dientes del rotor que los enfrentan.

En segundo lugar debido a la excentricidad, les siguen los flujos almacenados entre el diente 8 del estator, también centrado en un polo, y los dientes del rotor que los enfrentan.

El flujo de menor amplitud es el almacenado entre el diente 6 del estator, ubicado en un plano neutro, y el diente del rotor que lo enfrenta. Los flujos almacenados entre los dientes 5 y 7 del estator, enlazados por cinco bobinas, y los del rotor que los enfrentan, tienen amplitudes de valor intermedio entre los anteriores.

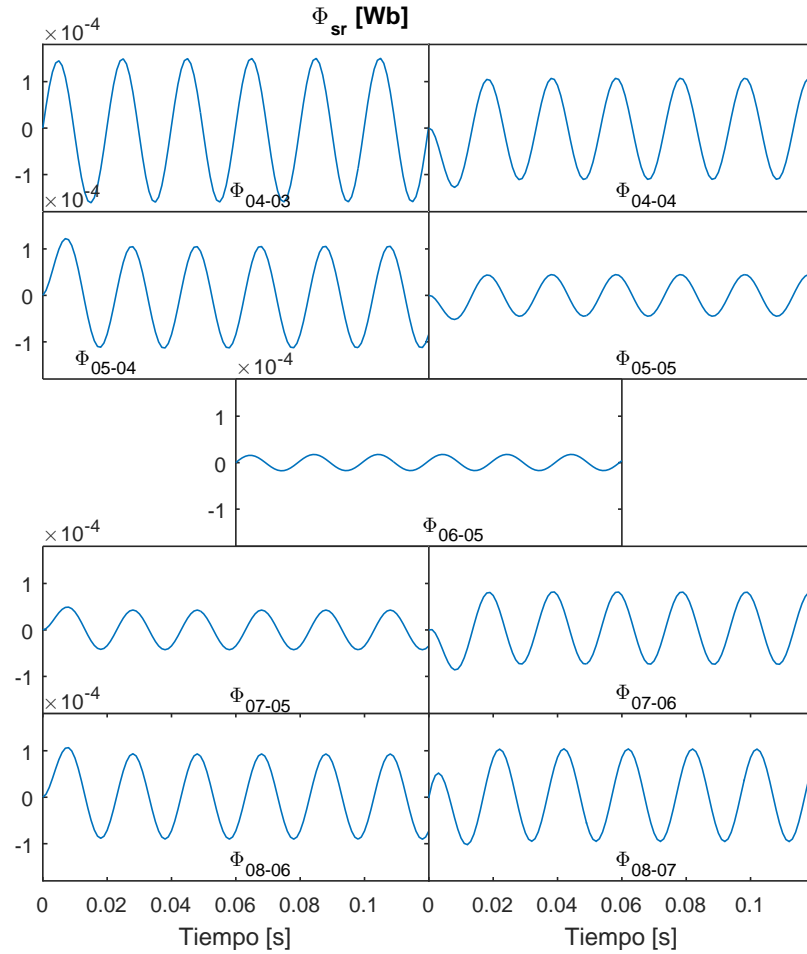
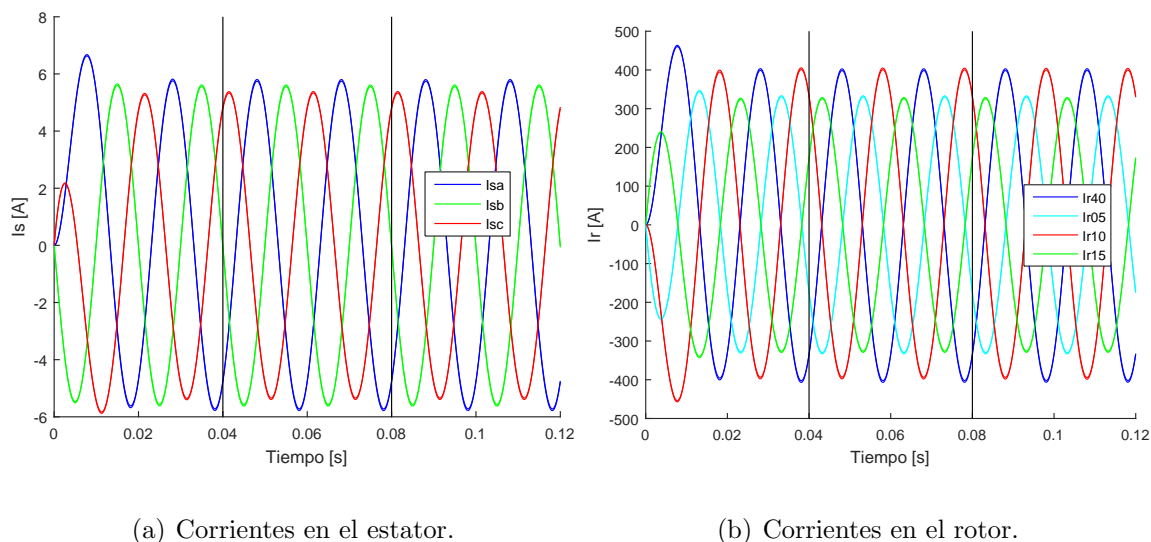


Figura 5.5: Flujo entre dientes enfrentados durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

Debido a la proporción de áreas enfrentadas y la longitud radial del entrehierro, el diente 4 del estator almacena flujo de mayor amplitud en su enfrentamiento con el diente 4 del rotor que con el 3, criterio que es fácil extender a las demás gráficas de la figura.

Debido al número de dientes del rotor no múltiplo de tres, hay un desfase acentuado entre los flujos que derivan de un mismo diente del estator: Φ_{sr43} y Φ_{sr44} , Φ_{sr54} y Φ_{sr55} , Φ_{sr75} y Φ_{sr76} , Φ_{sr86} y Φ_{sr87} .



(a) Corrientes en el estator.

(b) Corrientes en el rotor.

Figura 5.6: Corrientes en el estator y en los lazos 40, 05, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

5.2.2 Corrientes

La Fig. 5.6 muestra las gráficas de las corrientes en el estator y en los lazos 40, 05, 10 y 15 del rotor en ambos modelos.

Con cualquiera de las dos excentricidades, la posición ϕ^s de entrehierro mínimo está centrada frente al polo $S2$ de la fase a , por lo que la inductancia propia de esa fase es la menor de las tres, a lo que corresponde, en la Fig. 5.6(a), mayor amplitud de corriente a esa fase que a las otras dos. Como se estimó en (5.3), en este ensayo y el de vacío la corriente en la fase a , una vez alcanzado el régimen estacionario, se aproxima a una función temporal coseno invertida.

En cuanto a las corrientes en los lazos del rotor, tienen un régimen transitorio correspondiente al de las componentes alternas de los flujos en los mismos dientes, mostrados en la Fig. 5.4(b). Además, muestran el efecto de la asimetría debida a la

distribución del arrollamiento trifásico del estator, teniendo mayor intensidad en los lazos alineados con cada uno de los doce polos. Entre las corrientes graficadas, la del lazo 40, centrado frente al polo $S2$ de la fase a , y del lazo 10, centrado frente al polo $N1$ de la misma fase, tienen mayor amplitud. Las corrientes en los lazos 5 y 15, que están ubicados en los planos neutros, también de la fase a , tienen menor amplitud.

Las corrientes en los lazos del rotor están en oposición de fase con los flujos en sus dientes, dados en la Fig. 5.4(b), en cumplimiento de la Ley de Lenz.

5.2.3 Potencial magnético en el yugo del estator

La Fig. 5.7 muestra la gráfica del PM en el yugo del estator obtenida con la simulación del modelo CME durante 1 s. Comparándola con las gráficas de la Fig. 5.6(a), se puede ver que el PM en el yugo del estator está en fase con la corriente de la fase a . Como surge de (A.4) y sus conclusiones siguientes, ésto se debe a que la excentricidad

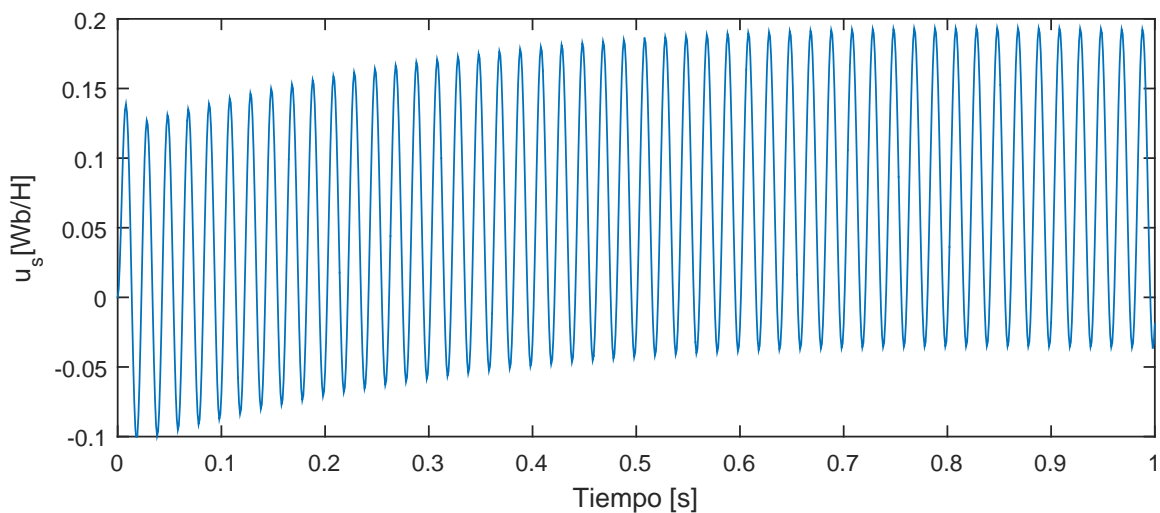


Figura 5.7: PM en el yugo del estator durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

aproxima el rotor a uno de los polos *Sur* de la fase *a*, y en menor medida a uno de los polos *Norte* de las fases *b* y *c*.

Si se hicieran doce ensayos con el rotor bloqueado, uno frente a cada uno de los doce polos del arrollamiento trifásico del estator, la gráfica del PM en el yugo del estator estaría sucesivamente en fase y contrafase con las tres corrientes.

5.2.4 Par

En la posición $\theta = 0$, el rotor tiene la misma ubicación en la cavidad del estator con cualquiera de las dos excentricidades tratadas en esta tesis. Por eso, los resultados de simulación del ensayo con el rotor bloqueado en esa posición son iguales en ambos casos para las variables eléctricas y magnéticas.

No sucede lo mismo con los resultados del par, debido a que los puntos de apoyo del eje con excentricidad estática están ubicados en el centro del rotor, mientras que con excentricidad dinámica lo están en el centro del estator.

El par en el modelo CME está dado por (3.49) en función de las derivadas de las permeancias. Ahora bien, como se concluyó en la CP 7, esas derivadas dependen del marco de referencia. Si se considera que la excentricidad en este ensayo es estática, los términos del cálculo analítico de las derivadas están dados por (4.3) y si es dinámica, por (4.4).

En el primer caso, sustituyendo (4.3) en la ecuación para el cálculo del par (3.49) resulta:

$$T_e \Big|_{IVMR} = T_{sr\ vae}^{ME} \Big|_{IVMR} = T_{sr\ vae}^{MR} \Big|_{IVMR} + T_{sr\ vdr}^{MR} \Big|_{IVMR}, \quad (5.8)$$

donde los subíndices *vae* y *vdr* corresponden a los términos por variación del área

enfrentada y de la distancia radial respectivamente, y los superíndices corresponden al marco de referencia.

Si en cambio se considera que la excentricidad sea dinámica, sustituyendo (4.4) en (3.49) resulta:

$$T_e \Big|_{IVME} = T_{sr\ vae}^{MR} \Big|_{IVME} = T_{sr\ vae}^{ME} \Big|_{IVME} + T_{sr\ vdr}^{ME} \Big|_{IVME}. \quad (5.9)$$

Como en la posición $\theta = 0$, el rotor tiene la misma ubicación en la cavidad del estator con cualquiera de las dos excentricidades, el valor del entrehierro frente a cada ranura del estator o del rotor es también el mismo. Entonces, también lo son los valores de las derivadas de las permeancias por VAE en un mismo marco de referencia, así como los pares calculados con ellas:

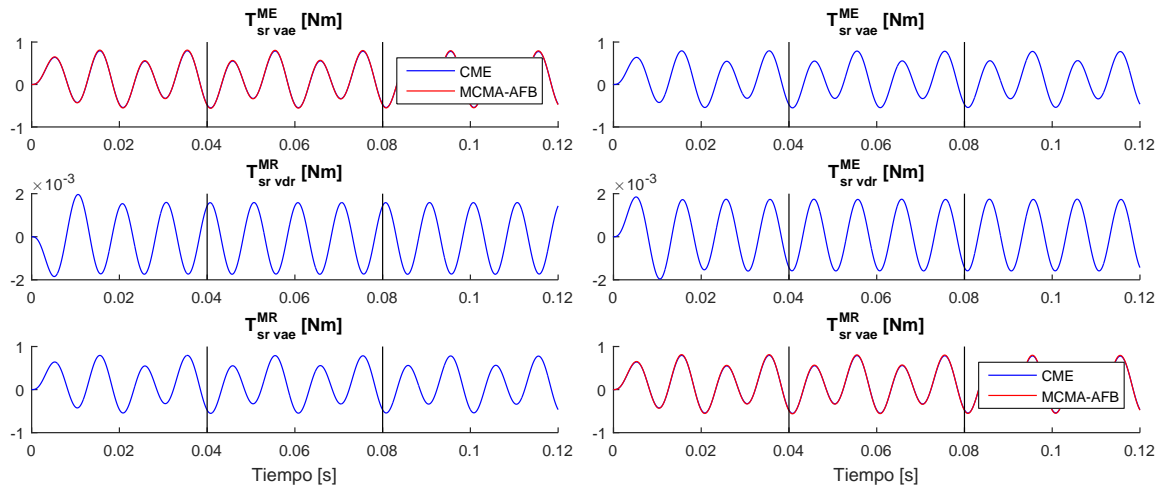
$$T_{sr\ vae}^{ME} \Big|_{ee, \theta=0} = T_{sr\ vae}^{ME} \Big|_{ed, \theta=0}, \quad T_{sr\ vae}^{MR} \Big|_{ee, \theta=0} = T_{sr\ vae}^{MR} \Big|_{ed, \theta=0}. \quad (5.10)$$

Teniendo en cuenta que la excentricidad estática es una IVMR y la dinámica una IVME, de (5.8), (5.9) y (5.10) surge:

$$T_{sr\ vdr}^{ME} \Big|_{ed, \theta=0} = -T_{sr\ vdr}^{MR} \Big|_{ed, \theta=0}. \quad (5.11)$$

La Fig. 5.8(a) muestra las gráficas de las componentes del par obtenidas con el modelo CME para excentricidad estática, correspondientes a los términos de (5.8). La gráfica superior representa al par total y está superpuesta con la del par obtenido con el MCMA.

La Fig. 5.8(b) muestra las gráficas de las componentes del par obtenidas con el modelo CME para excentricidad dinámica, correspondientes a los términos de (5.9).



(a) Excentricidad estática.

(b) Excentricidad dinámica.

Figura 5.8: Par durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

La gráfica inferior representa al par total y está superpuesta con la del par obtenido con el MCMA.

Se puede visualizar (5.10) en la coincidencia de las gráficas superiores de la Fig. 5.8(a), correspondientes a la excentricidad estática, con la gráfica superior de la Fig. 5.8(b), correspondiente a la excentricidad dinámica; y de la gráfica inferior de la Fig. 5.8(a), con las inferiores de la Fig. 5.8(b).

Se puede visualizar (5.11) como la inversión que relaciona las gráficas centrales de las Fig. 5.8(a) y 5.8(b).

En cada intervalo entre dos líneas verticales negras transcurren 20 ms, en los cuales la alimentación de 50 Hz cumple un ciclo y el campo rotante inducido por el estator avanza media vuelta geométrica.

En un ME, un movimiento del rotor con excentricidad estática sólo cambia el área enfrentada entre sus dientes y los del estator. En el mismo marco de referencia, un

movimiento con excentricidad dinámica cambia además la longitud de las líneas de inducción que cruzan el entrehierro en una posición fija sobre el estator ϕ^s .

La Fig. 5.9 muestra, en el orden en que se mencionan, la gráfica de la tensión de alimentación v_{sa} , del flujo Φ_{48-40} almacenado en el entrehierro entre los dientes 48 del estator y 40 del rotor y su derivada $\frac{\partial \Phi_{48-40}}{\partial \theta}$, la DPM $\Delta \mathcal{U}_{48-40}$ producida por ese flujo y su función cuadrática, y finalmente los pares en un ME por VDR (sólo para excentricidad dinámica) y por VAE ejercidos por la energización del TFE entre esos dientes durante el ensayo.

La tensión v_{sa} es la estimada en (5.1), y el flujo Φ_{48-40} tiene su ángulo de fase impuesto por (5.4). Su derivada está adelantada un cuarto de ciclo, resultando una función temporal seno invertida. La FEM inducida en el lazo 40 del rotor, no representada, que estará en oposición de fase a la derivada del flujo, en cumplimiento de la Ley de Lenz, resultará en fase con la tensión eléctrica.

Dada la relación entre la inductancia de dispersión y la resistencia de los lazos, la corriente i_{r40} en el lazo 40 del rotor atrasa casi un cuarto de ciclo a su FEM, tal como la corriente i_{sa} en la fase a del estator lo hace a su tensión, resultando ambas corrientes aproximadamente en fase, como se ve en las Fig. 5.6(a) y 5.6(b).

La DPM producida por el flujo almacenado en el TFE entre los dientes $s48$ y $r40$ está dada por la Ley de Hopkinson: $\Delta \mathcal{U}_{48-40} = \frac{\Phi_{48-40}^2}{\mathcal{P}_{48-40}}$, y los pares en un ME por VDR (sólo para la excentricidad dinámica) y por VDR ejercidos por su energización, deducidos por del método de coenergía [61], está dados por:

$$T_{48-40 \ vdr}^{ME} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{P}_{48-40}^{ME \ vdr}}{\partial \theta} \Delta \mathcal{U}_{48-40}^2, \quad T_{48-40 \ vae}^{ME} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{P}_{48-40}^{ME \ vae}}{\partial \theta} \Delta \mathcal{U}_{48-40}^2. \quad (5.12)$$

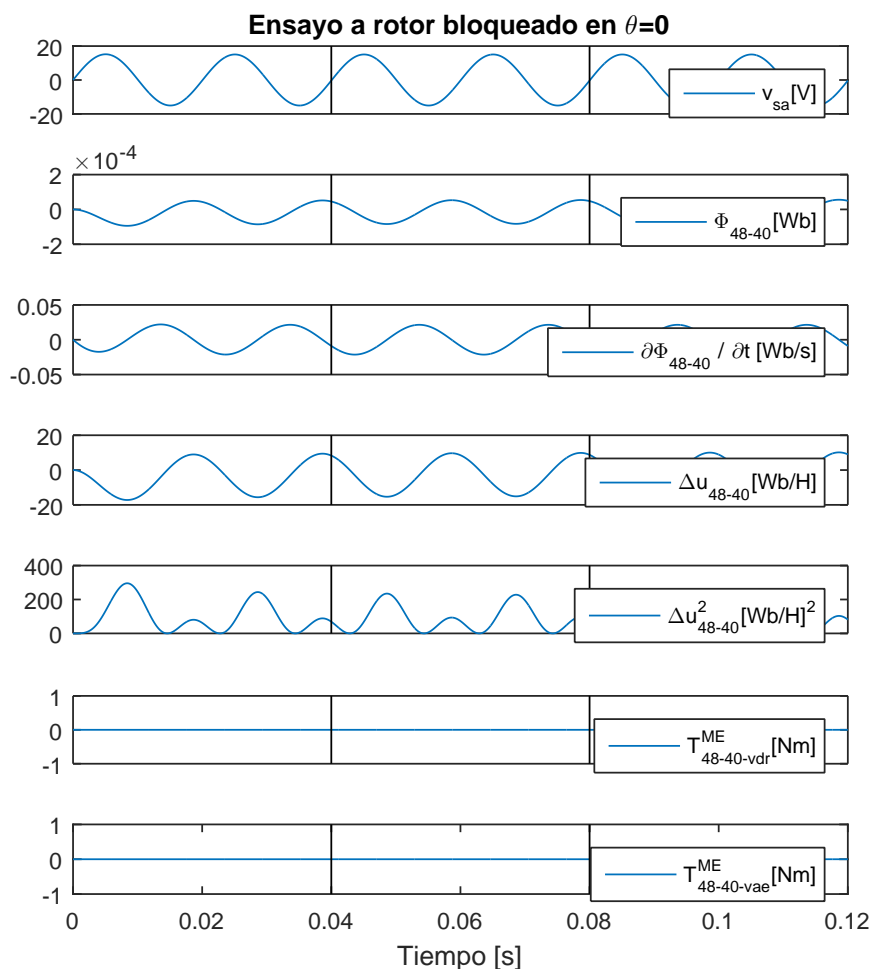
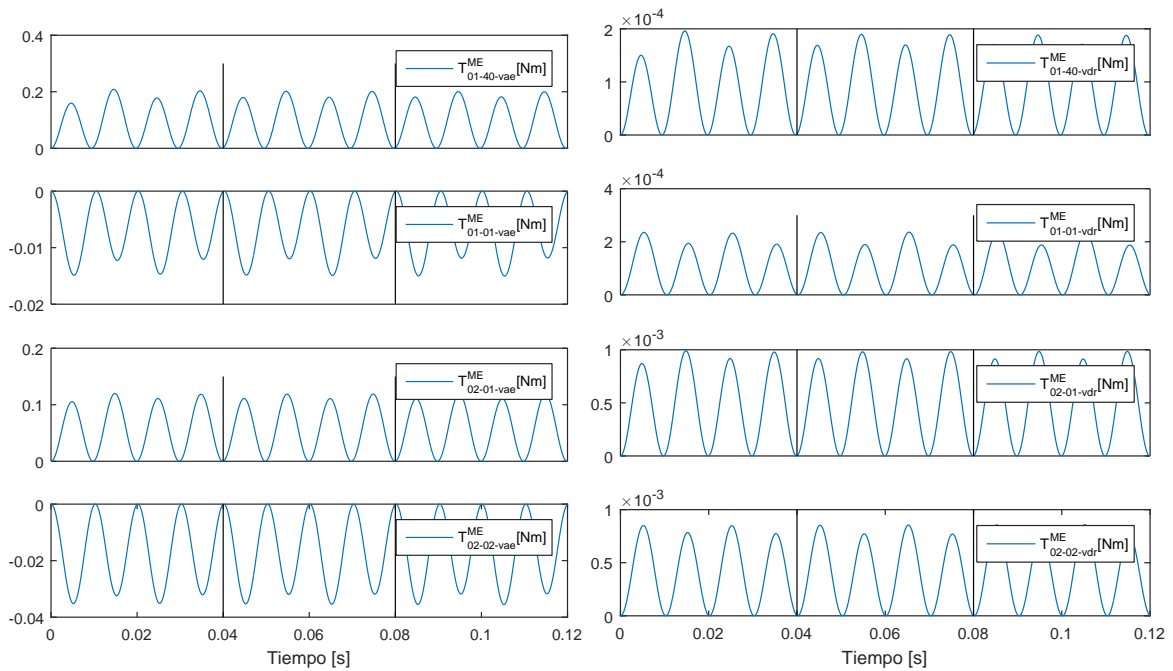


Figura 5.9: Relación entre variables del modelo CME para el cálculo del par entre el diente 48 del estator y el 40 del rotor, durante un ensayo con el rotor bloqueado y excentricidad estática o dinámica del 50 % y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$.

Dado que esos dos dientes están alineados en la posición $\theta = 0$, el par por VAE y su derivada son nulos. En el caso de excentricidad dinámica, como la posición ϕ^s de entrehierro mínimo está centrada en el diente 48 del estator, el entrehierro aumenta simétricamente respecto de los ejes coincidentes de ambos dientes y el par por VDR, así como la derivada para calcularlo también son nulos.

La Fig. 5.10 muestra las gráficas de las componentes del par ejercido por otras



(a) Por VAE.

(b) Por VDR, sólo para excentricidad dinámica.

Figura 5.10: Pares ejercidos por otras combinaciones de dientes durante un ensayo con el rotor bloqueado y entrehierro liso, en la posición $\theta = 0$, obtenidos con la misma relación de variables mostrada en la Fig. 5.9.

combinaciones de dientes, obtenidas de la misma forma que en la Fig. 5.9. En esas combinaciones están presentes los dientes 1 y 2 del estator, que como puede verse en la Fig 5.11, están ubicados a una distancia angular aguda y antihoraria de la posición de entrehierro mínimo $\phi^s = 0$. En caso de excentricidad dinámica, su distancia radial hasta el rotor disminuye si éste se mueve en sentido antihorario. Luego, los pares un ME por VDR ejercidos entre esos dientes y los del rotor tienen sentido antihorario, adoptado como positivo. El signo de estos pares, según la CP 4, es el mismo de las derivadas de las parmeancias con que se calculan.

En cuanto a las componentes del par por VAE y las derivadas para calcularlas,

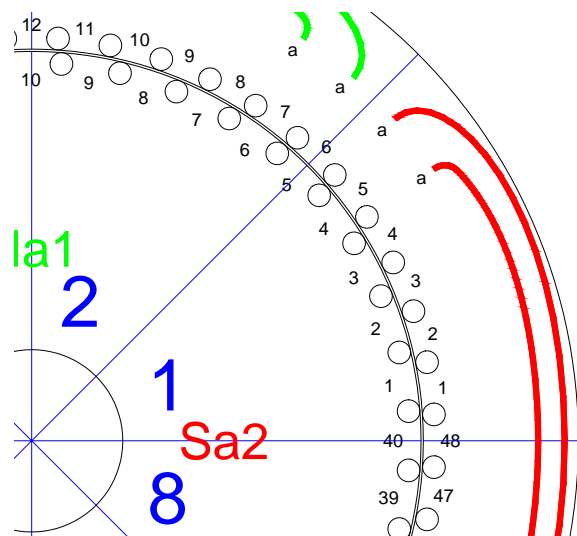


Figura 5.11: Posición del rotor $\theta = 0$ con entrehierro liso.

tienen el mismo valor considerando cualquiera de las dos excentricidades. En las combinaciones (1, 40) y (2, 1) esos pares son positivos porque, como se ve en la Fig. 5.11, sólo la ranura adelantada de los dientes 40 y 1 del rotor enfrentan a los dientes 1 y 2 del estator. En cambio, en las combinaciones (1, 1) y (2, 2) son negativos, porque sólo la ranura atrasada de los dientes 1 y 2 del rotor enfrentan a los dientes 1 y 2 del estator.

Puede hacerse en un MR un planteo dual al presentado para un ME.

5.3 Cruces de ranuras

Al moverse el rotor, sus dientes se enfrentan a las distintas bobinas y dientes del estator, produciendo discontinuidades en las derivadas de las inductancias del MCMA y de las permeancias del modelo CME.

El análisis de los enfrentamientos entre los dientes se simplifica aplicando la des-

composición del estator y del rotor en ocho sectores de seis y cinco dientes respectivamente. Ésta se representó en la Fig. 3.3 con el entrehierro ranurado, y se repite en las Fig. 5.11 a 5.14 con el entrehierro liso, para no confundir los cruces de las ranuras con los de sus aristas.

Las Fig. 5.11 a 5.13 muestran una fracción de la sección transversal de la MI ocupada por los sectores 1 del estator y del rotor, y sus adyacentes 2 y 8, en sucesivas posiciones θ del rotor. Una de esas posiciones, la de la Fig. 5.12(b), está repetida en la Fig. 5.14 en la sección transversal completa y con las ranuras enfrentadas resaltadas. Como puede verse, en cada posición de cruces de ranuras (**PCR**), hay ocho cruces simultáneos.

En la Fig. 5.11, correspondiente a la posición $\theta = 0$, los sectores del rotor están alineados con los de su misma numeración en el estator, y no hay enfrentamiento de ranuras. La Fig. 5.12(a) muestra la primera PCR, en la posición $\theta = 0.0131$ rad, en la que se enfrenta la quinta ranura de cada sector del rotor con la sexta de cada sector del estator con la misma numeración. La Fig. 5.12(b) muestra la segunda PCR, en la posición $\theta = 0.0393$ rad, en la que se enfrenta la cuarta ranura de cada sector del rotor con la quinta de cada sector del estator con la misma numeración. Las figuras siguientes mantienen la tendencia, hasta que la 5.13(b) muestra la sexta PCR, en la posición $\theta = 0.1440$ rad, en al que se enfrenta por segunda vez la quinta ranura de cada sector del rotor, pero esta vez con la primera de cada sector del estator con la numeración inmediata superior.

Desde la posición θ de la Fig. 5.12(a) hasta la de la Fig. 5.13(b), el rotor avanzó un paso de diente del estator, habiendo pasado por cinco PCR, cada una con ocho cruces

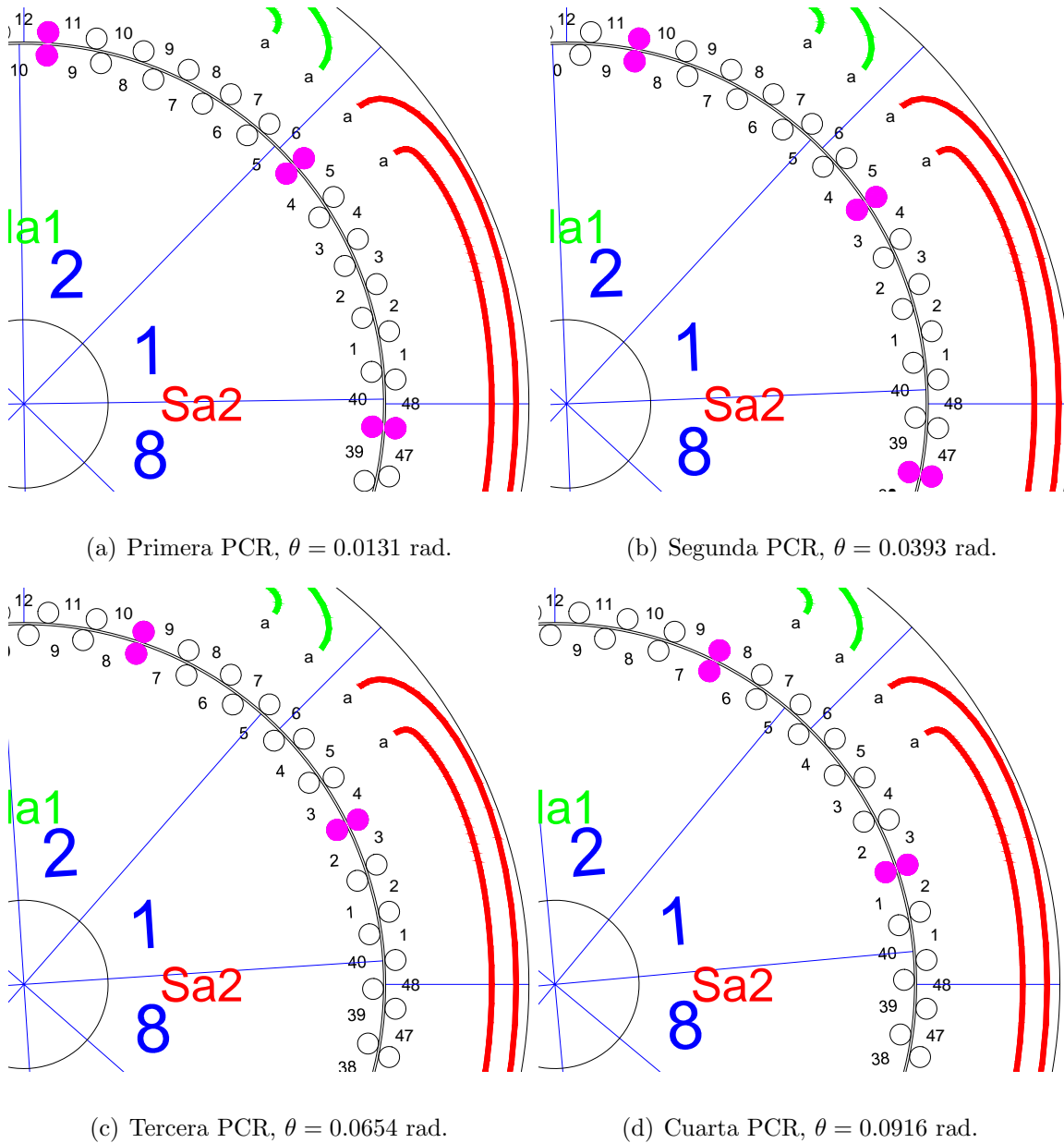


Figura 5.12: Primera a cuarta PCR.

simultáneos. Cuando el rotor avance un sector del estator, que tiene seis dientes, habrá pasado por treinta PCR, y cuando haya completado la vuelta, que tiene ocho sectores, habrá pasado por doscientos cuarenta PCR.

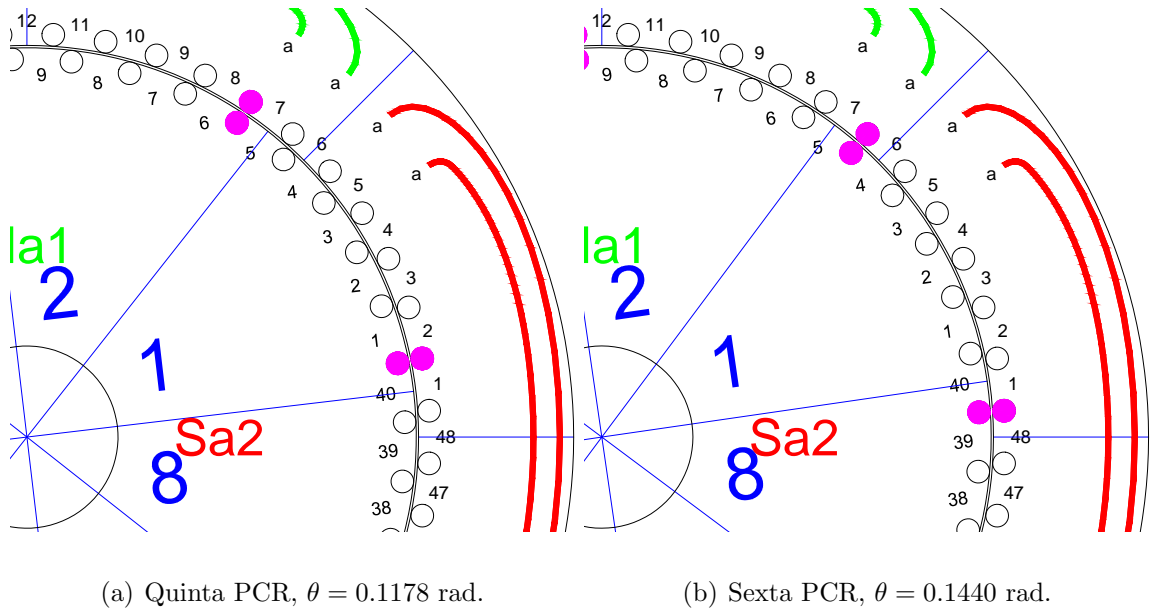


Figura 5.13: Quinta y sexta PCR.

La posición θ del rotor correspondiente a una PCR genérica se obtiene con la expresión:

$$\theta_{PCR} = \left(pcr - \frac{1}{2} \right) (\tau_r - \tau_s) [\text{rad}] + 2k\pi [\text{rad}] = \left(pcr - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{48} \right) 2\pi [\text{rad}] + 2k\pi [\text{rad}], \quad (5.13)$$

donde $pcr = 1, 2, 3, \dots$ y k es un número entero de vueltas geométricas.

5.4 Ensayo a velocidad variable

En este ensayo se alimenta a la MI con una tensión reducida del 5 % del valor nominal, y se impone al rotor una velocidad de giro linealmente creciente desde cero hasta alcanzar un valor de $100 \frac{pcr}{s} \approx 2.62 \frac{\text{rad}}{s}$ al cabo de 5 s, a partir del reposo en posición inicial $\theta_0 = 0$.

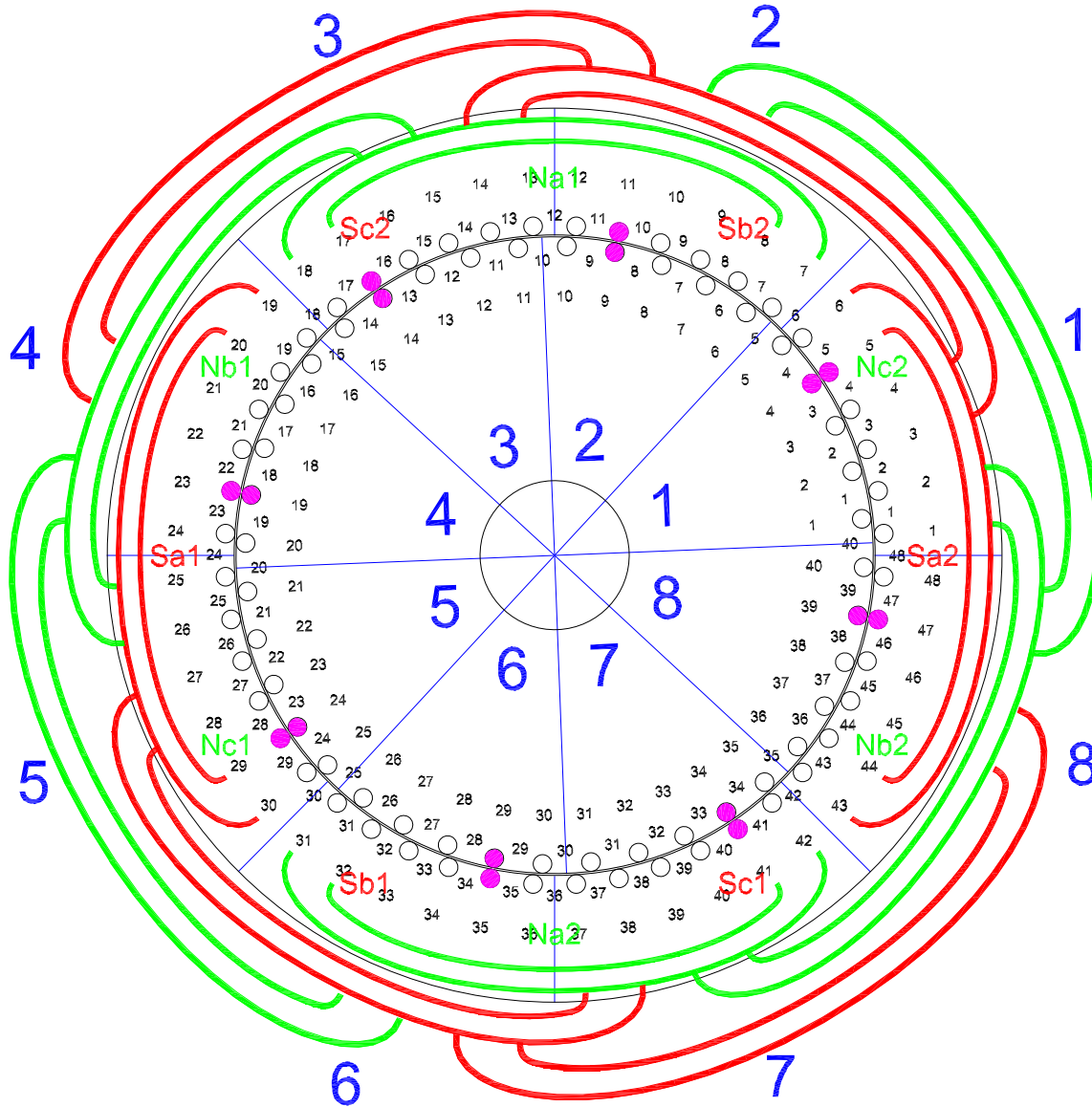


Figura 5.14: Segunda PCR, $\theta = 0.0393$ rad.

La posición en que se encuentra el rotor en un instante t se obtiene con la expresión:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} t^2 = 0 + \frac{1}{2} \frac{100}{5} \left[\frac{\text{pcr}}{\text{s}} \right] \frac{2\pi}{240} \left[\frac{\text{rad}}{\text{pcr}} \right] t^2 [\text{s}]^2. \quad (5.14)$$

Una primera ventaja de este tipo de ensayos es la de permitir representar la evolución de las variables a distintas velocidades en una misma gráfica. Además, como

el movimiento del rotor genera eventos repetitivos, si éstos tuvieran una periodicidad constante, aún siendo múltiplo o submúltiplo no entero del período de un ciclo eléctrico, producirían variaciones cíclicas en las variables que se podrían confundir con los efectos de las irregularidades geométricas.

La irregularidad del entrehierro modelada en la MI de este ensayo es la excentricidad estática, en el mismo valor del 50 % adoptado en el ensayo con el rotor bloqueado, para comparar sus resultados.

5.4.1 Flujos

La Fig. 5.15 muestra las gráficas de los flujos en algunos dientes del estator, que pueden obtenerse sólo con el modelo CME. Tal como en el ensayo con el rotor bloqueado, se pueden observar los efectos de las asimetrías.

Debido a la distribución del arrollamiento trifásico, el diente 4 del estator, que está centrado en un polo, es el que tiene mayor amplitud de flujo entre los graficados. En segundo lugar debido a la excentricidad, le sigue el diente 8, también centrado en un polo. El diente 6, ubicado en un plano neutro, es el que tiene menor amplitud de flujo. Los dientes 5 y 7, enlazados por cinco bobinas cada uno, tienen amplitud de flujo de valor intermedio entre los anteriores.

Como se observó en el ensayo con el rotor bloqueado (Fig. 5.5), la diferencia de amplitud y fase de los flujos almacenados entre un mismo diente del estator y los distintos dientes del rotor que lo enfrentan, cambia cíclicamente debido al número de dientes del rotor no múltiplo de tres. Esos flujos parciales, sumados, resultan en el total de cada diente del estator, que tiene entonces la variación cíclica mostrada en

las gráficas de la Fig. 5.15.

Aplicando (5.13) y (5.14), se encuentra que las amplitudes mínimas de los flujos en los dientes del estator tienen lugar en los intervalos entre dos PCR consecutivas en los que esos dientes están totalmente enfrentados por un mismo diente del rotor. En la Fig. 5.15, en la que cada línea vertical negra corresponde a una PCR, esos intervalos son los comprendidos entre pares de líneas más próximas.

El primer mínimo de amplitud en la gráfica del flujo en el diente 4 del estator tiene lugar entre las posiciones de la segunda PCR, en $t = 0,3873$ s, y la tercera en

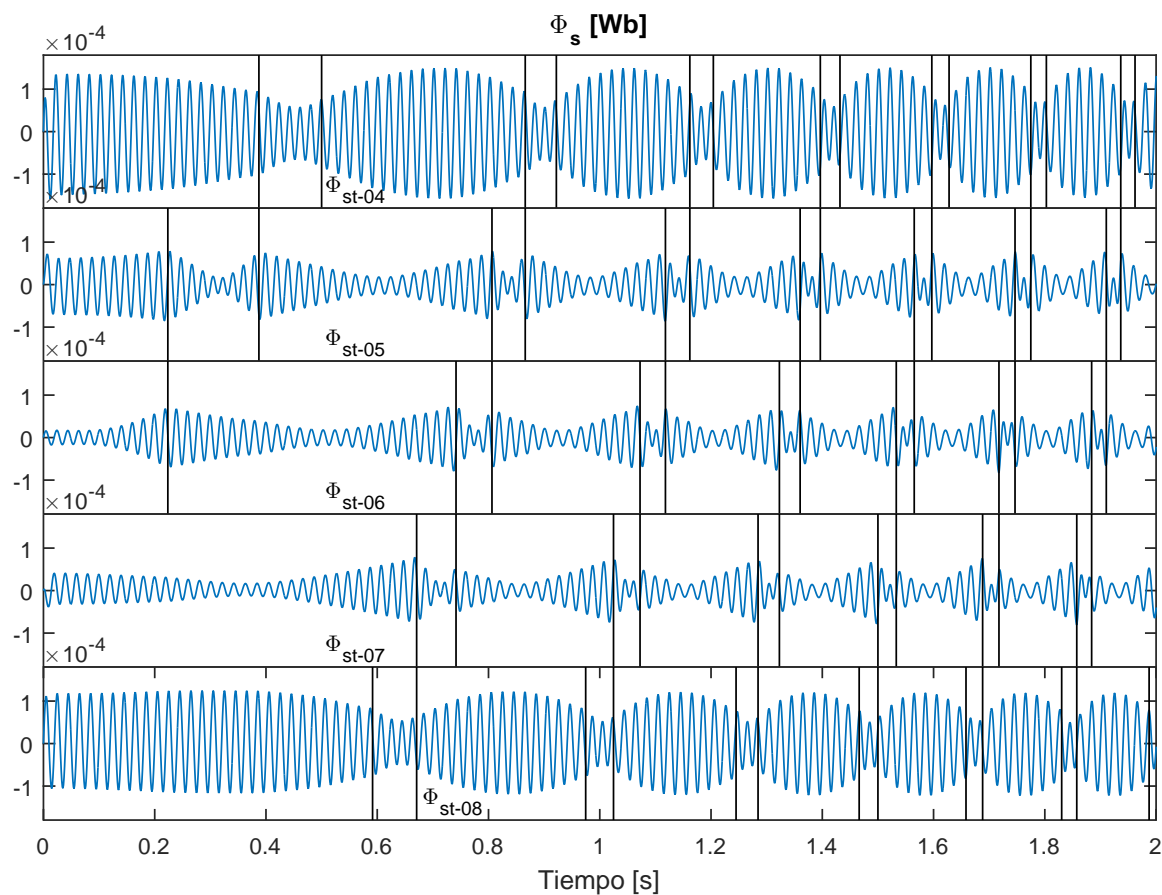


Figura 5.15: Flujo en los dientes del estator, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

$t = 0,5$ s, entre las cuales, como se ve en las Fig. 5.12(b) y 5.12(c), se encuentra totalmente enfrentado por el diente 3 del rotor. El segundo mínimo de amplitud tiene lugar entre las posiciones de la octava PCR, en $t = 0.8660$ s, y la novena en $t = 0.9220$ s, entre las cuales se encuentra totalmente enfrentado por el diente 2 del rotor, y así sucesivamente.

El primer mínimo de amplitud en la gráfica del flujo en el diente 5 del estator tiene lugar entre las posiciones de la primera PCR, en $t = 0,2236$ s, y la segunda en $t = 0,3873$ s, entre las cuales, como se ve en las Fig. 5.12(a) y 5.12(b), se encuentra totalmente enfrentado por el diente 4 del rotor. El segundo mínimo de amplitud tiene lugar entre las posiciones de la séptima PCR, en $t = 0,8062$ s, y la octava en $t = 0.8660$ s, entre las cuales se encuentra totalmente enfrentado por el diente 3 del rotor, y así sucesivamente.

El primer mínimo de amplitud en la gráfica del flujo en el diente 6 del estator tiene lugar en la posición $\theta = 0$, en el instante $t = 0$, en la cual, como se ve en la Fig. 5.11, se encuentra totalmente enfrentado por el diente 5 del rotor. El segundo mínimo de amplitud tiene lugar entre las posiciones de la sexta PCR, en $t = 0,7416$ s, y la séptima en $t = 0,8062$ s, entre las cuales, como se ve en la Fig. 5.13(b), se encuentra totalmente enfrentado por el diente 4 del rotor, y así sucesivamente.

El primer mínimo de amplitud en la gráfica del flujo en el diente 7 del estator tiene lugar entre las posiciones de la quinta PCR, en $t = 0,6708$ s, y la sexta, en $t = 0,7416$ s, entre las cuales, como se ve en las Fig. 5.13(a) y 5.13(b), se encuentra totalmente enfrentado por el diente 5 del rotor. El segundo mínimo de amplitud tiene lugar entre las posiciones de la decimoprimer PCR, en $t = 1,0247$ s, y la

decimosegunda en $t = 1,0724$ s, entre las cuales se encuentra totalmente enfrentado por el diente 4 del rotor, y así sucesivamente.

El primer mínimo de amplitud en la gráfica del flujo en el diente 8 del estator tiene lugar entre las posiciones de la cuarta PCR, en $t = 0,5916$ s, y la quinta, en $t = 0,6708$ s, entre las cuales, como se ve en las Fig. 5.12(d) y 5.13(a), se encuentra totalmente enfrentado por el diente 6 del rotor. El segundo mínimo de amplitud tiene lugar entre las posiciones de la décima PCR, en $t = 0,9747$ s, y la decimoprimer, en $t = 1,0247$ s, entre las cuales se encuentra totalmente enfrentado por el diente 5 del rotor, y así sucesivamente.

Hay una diferencia entre la forma de las gráficas de los flujos en los dientes 4 y 8 del estator, centrados en polos, y de los flujos en los dientes 5, 6 y 7. Mientras que las amplitudes de las dos primeras presentan un máximo en las posiciones en las que el diente del estator es enfrentado en partes iguales por dos dientes adyacentes del rotor, las otras tres presentan un mínimo relativo próximo a esas posiciones. Ese patrón es compatible con el hecho de que un diente del rotor, al enfrentarse a dos del estator con distintas amplitudes de flujo, opone un efecto desmagnetizante intermedio entre los que opone a cada uno en forma individual, aunque sólo es aplicable a los dientes 4 y 8 del estator, centrados en polos, y sus adyacentes 5 y 7.

La Fig. 5.16 muestra las gráficas de los flujos en los dientes 5 y 40 del rotor, durante los primeros tres segundos de simulación. Igual a como sucede en el ensayo con el rotor bloqueado (Fig. 5.4(b)), el flujo en el diente 40, una vez en régimen estacionario, es una función temporal coseno, mientras que en el diente 5 es una función seno, por lo que el primero tiene una componente aperiódica negativa máxima mientras que el

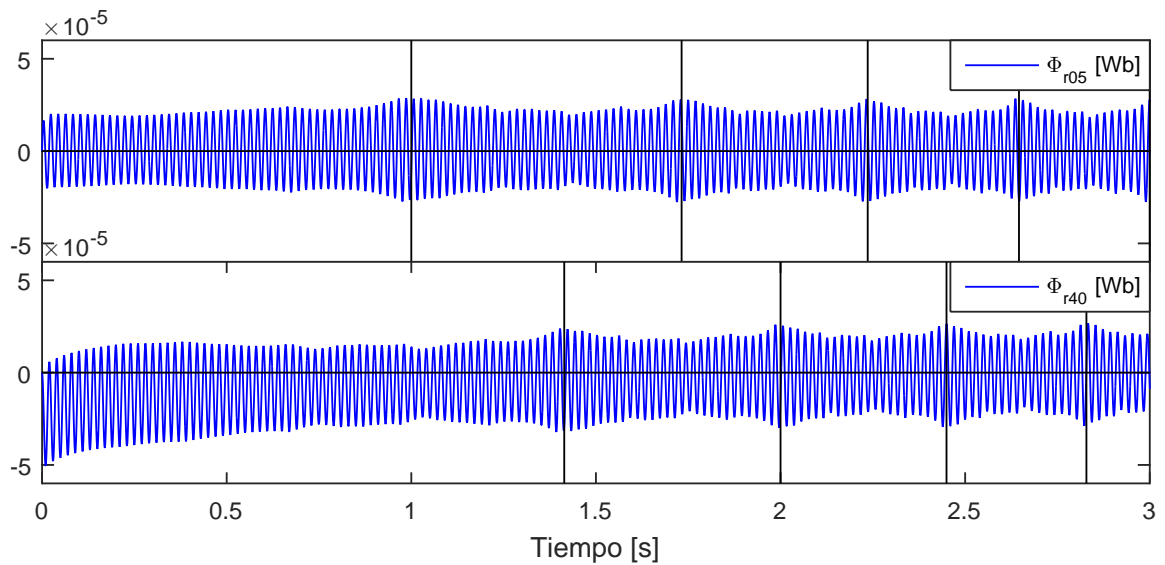


Figura 5.16: Flujo en los dientes 5 y 40 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

segundo no la tiene. Las amplitudes de los flujos en los dos dientes son máximas en las posiciones en las que cada uno está alineado con el centro de un polo, indicadas con las líneas verticales negras, sin presentar un patrón atribuible a la excentricidad.

La Fig. 5.17 muestra la gráfica de la corriente en el lazo 40 del rotor, con un régimen transitorio correspondiente al de la componente alterna del flujo en ese mismo diente, mostrada en la Fig. 5.16.

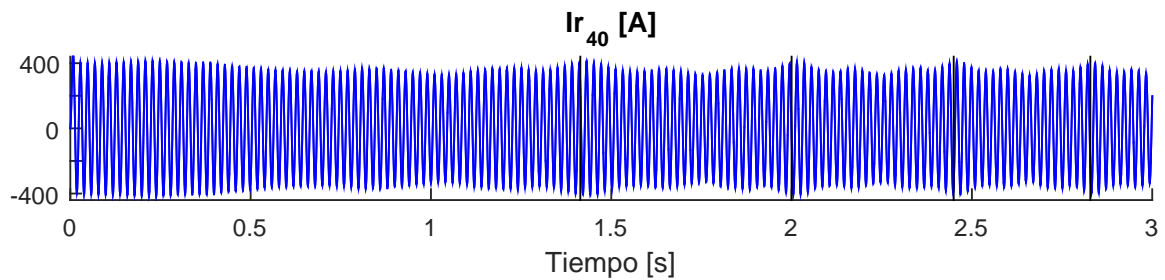
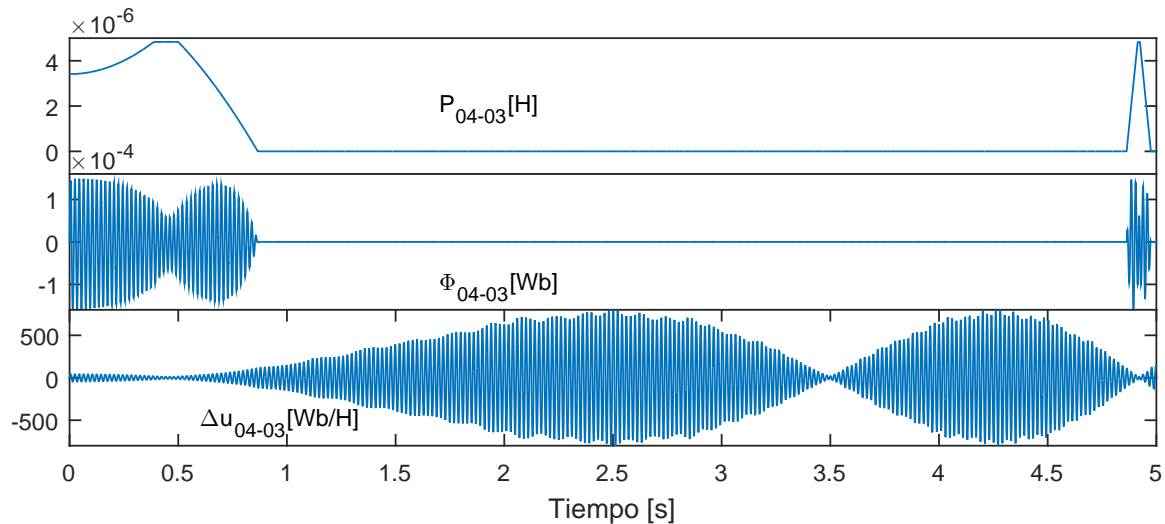
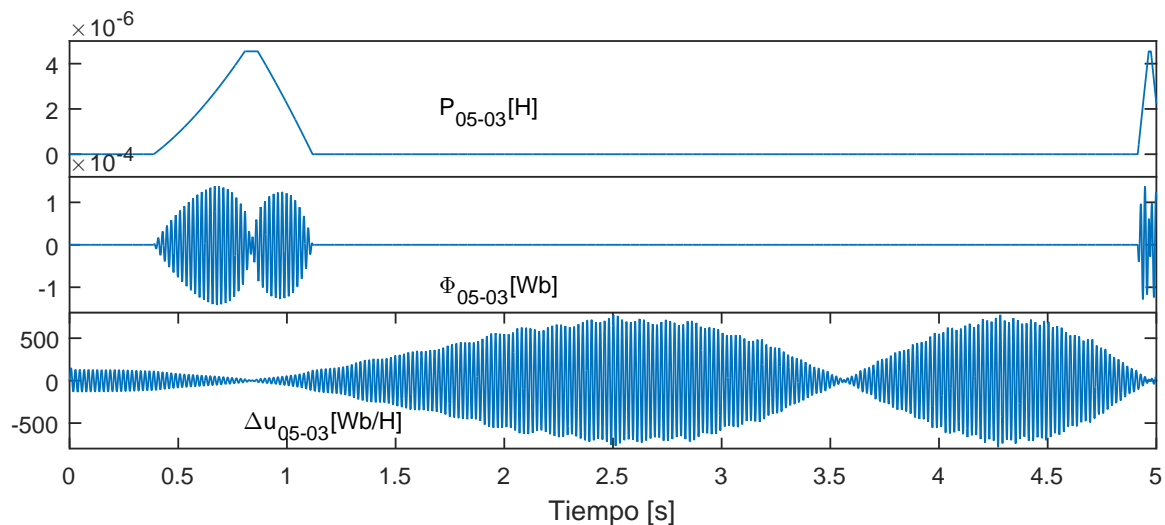


Figura 5.17: Corriente en el lazo 40 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Las Fig. 5.18 a 5.20 muestran las gráficas de las permeancias, flujos y PM entre los dientes 4 a 8 del estator y el diente 3 del rotor. En la Fig. 5.18(a), la primera gráfica corresponde a la permeancia entre el diente 4 del estator y el 3 del rotor, que



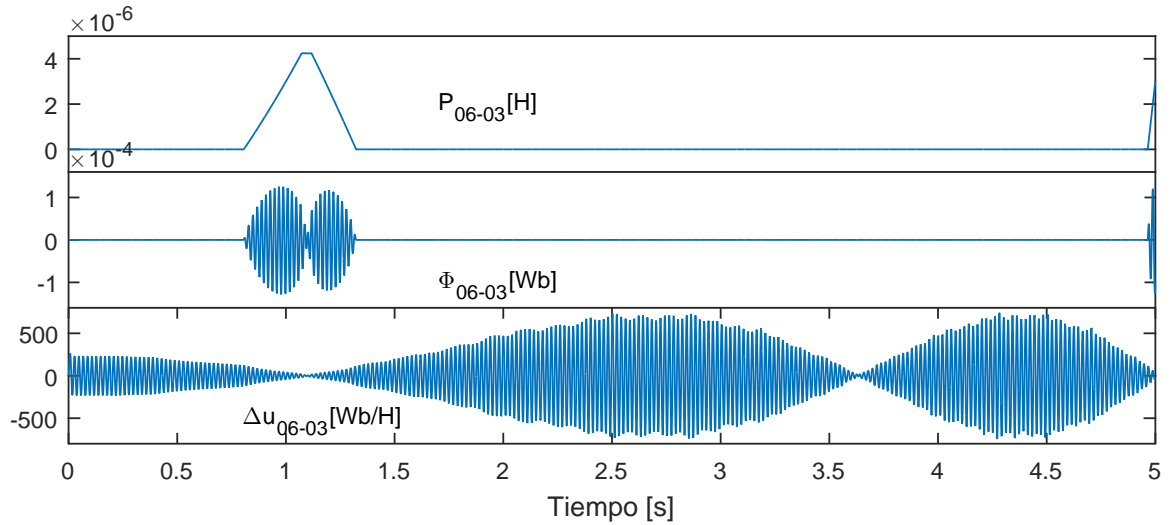
(a) Entre el diente 4 del estator y el 3 del rotor.



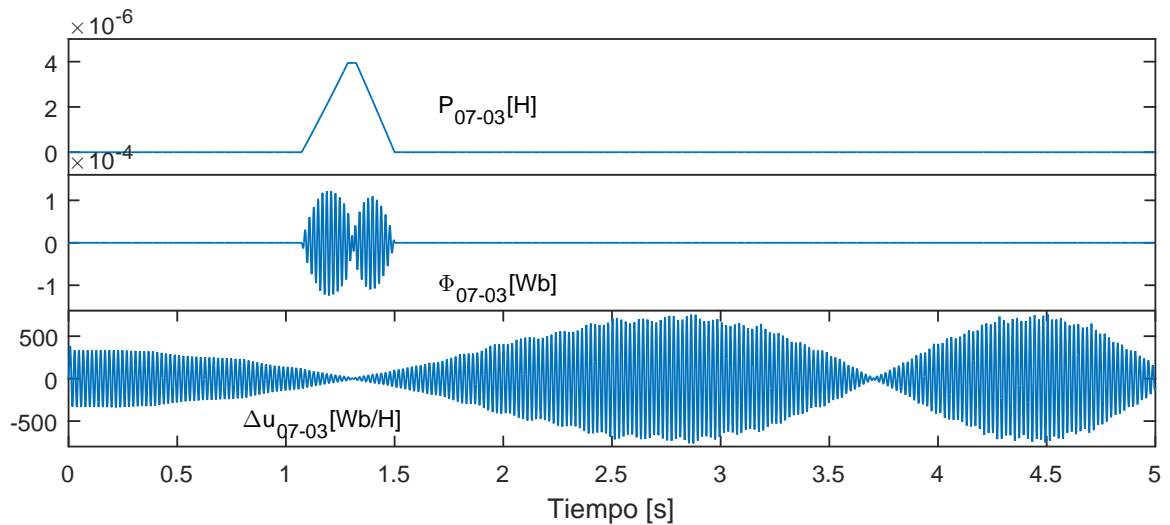
(b) Entre el diente 5 del estator y el 3 del rotor.

Figura 5.18: Permeancia, flujo y PM entre los dientes del estator y del rotor, durante un ensayo a velocidad impuesta de 1 rev/s, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

tiene su valor máximo entre la segunda y tercera PCR (Fig. 5.13(a)), en $t = 0,3873$ s, y $t = 0,5$ s respectivamente, y se anula en la octava, en $t = 0.8660$ s. La segunda gráfica corresponde al flujo entre esos mismos dientes, cuya amplitud es mínima en las



(a) Entre el diente 6 del estator y el 3 del rotor.



(b) Entre el diente 7 del estator y el 3 del rotor.

Figura 5.19: Permeancia, flujo y PM entre los dientes del estator y del rotor, durante un ensayo a velocidad impuesta de 1 rev/s, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

posiciones de enfrentamiento total, igual a lo que sucede con el flujo en los dientes del estator. La tercera gráfica corresponde al PM entre los extremos de esos dos dientes, cuya amplitud es mínima durante su enfrentamiento, y durante el enfrentamiento entre el diente 4 del estator y el 27 del rotor, diametralmente opuesto al 3. Dado que la vuelta completa tiene 240 PCR, este enfrentamiento tiene lugar 120 PCR después, entre la 122 y la 123, en $t = 3,4857$ s y $t = 3,5$ s, respectivamente.

En el paso del diente 3 del rotor frente a los dientes del estator posteriores al 4, graficados en las Fig. 5.18(b) a 5.20, se aprecia el efecto de la excentricidad en la diferencia de las amplitudes de flujo, disminuyendo progresivamente en el orden de presentación de las gráficas. No se percibe, en cambio, el efecto de la asimetría debida a la distribución del arrollamiento trifásico. En el caso de un ELU, las amplitudes de los flujos en estas gráficas son las mismas a simple vista. En el ensayo con el rotor bloqueado, en cambio, las amplitudes de flujo entre los dientes enfrentados en

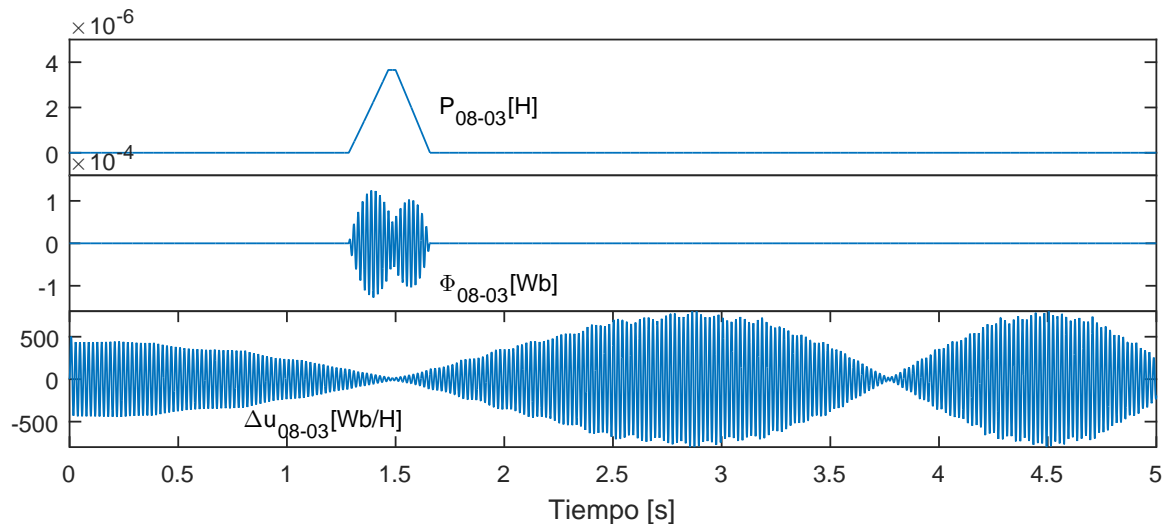


Figura 5.20: Permeancia, flujo y PM entre el diente 8 del estator y 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad impuesta de 1 rev/s, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

la posición fija $\theta = 0$ tienen distintos valores, como se mostró en la Fig. 5.5.

5.4.2 Par

En la Fig. 5.12(b) se representó la sección transversal de la MI en la segunda PCR. Como el rotor gira en sentido antihorario, el lazo 3 de la jaula de ardilla empieza a enfrentarse sólo parcialmente a la bobina interna del polo $S2$ de la fase a . Aplicando (5.13) y (5.14), la segunda PCR tiene lugar en el instante $t = 0,3873$ s, indicado con el número 2 en la gráfica superior de la Fig. 5.21, que representa los valores de la derivada de la inductancia mutua entre la fase a del estator y el lazo 3 del rotor con los que opera el MCMA durante la simulación del ensayo. Como el polo enfrentado es Sur , la inductancia $L_{sra3}(\theta)$ mutua es negativa. A partir de esta segunda PCR, el enfrentamiento del lazo 3 del rotor a la bobina interna es sólo parcial, disminuyendo el valor absoluto de la inductancia mutua, teniendo entonces un valor positivo su derivada.

En cuanto a las permeancias del modelo CME, en la segunda PCR el diente 3 del rotor alcanza a enfrentarse completamente al diente 4 del estator, y empieza además a enfrentarse al 5. La permeancia del TFE proyectado por el enfrentamiento al diente 4 deja de aumentar, anulándose su derivada, y al diente 5 empieza a aumentar, tomando su derivada un valor positivo, lo que se ve en la segunda y tercera gráfica de la Fig. 5.21, respectivamente.

La Fig. 5.12(c) corresponde a la tercera PCR. El lazo 3 del rotor continúa enfrentando parcialmente a la bobina interna del polo $S2$ de la fase a , sin producir ningún evento en la derivada de la inductancia mutua $L_{sra3}(\theta)$. Esta PCR tiene lugar en el

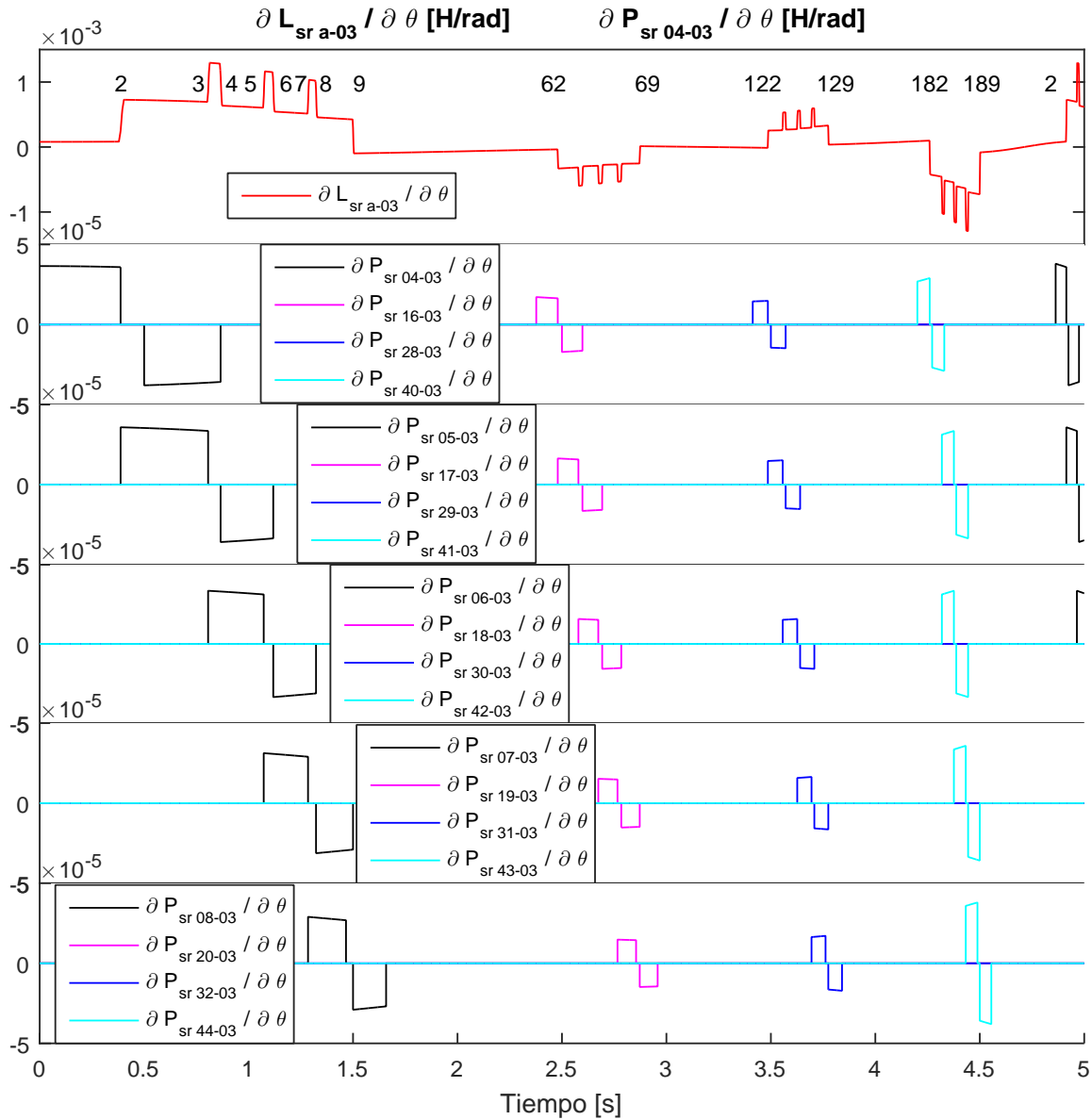


Figura 5.21: Derivada de la inductancia mutua entre la fase a del estator y el lazo 3 del rotor, y de las permeancias en un ME entre los dientes del estator relacionados con la distribución de esa fase y el diente 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

instante $t = 0,5$ s, indicado con el número 3 en la gráfica de la derivada de inductancia mutua.

Este planteo puede extenderse a los restantes cruces de ranura de la Fig. 5.21, en

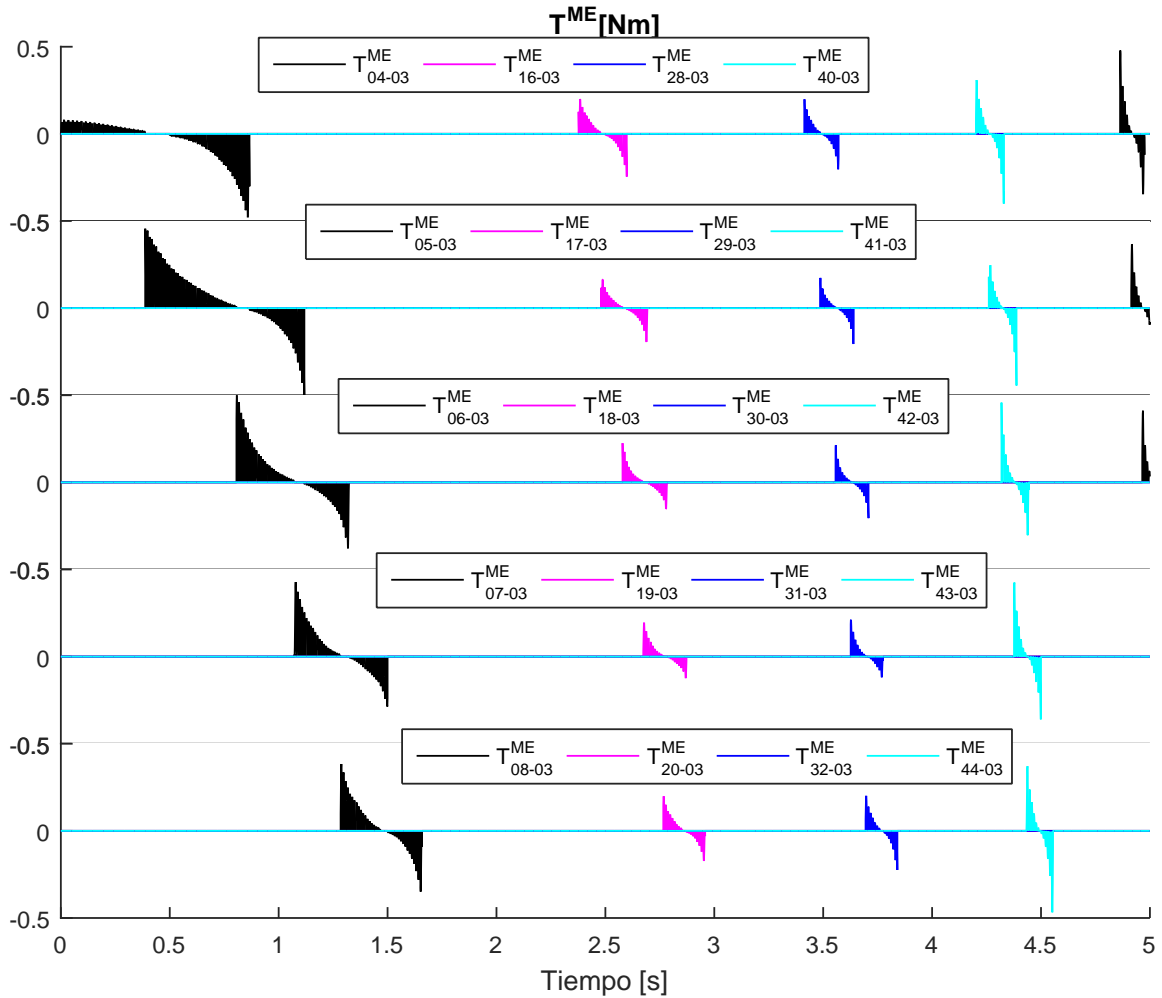


Figura 5.22: Pares calculados con las derivadas de permeancias de la Fig. 5.21, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

los que el diente 3 del rotor enfrenta a los dientes del estator entre los cuales están las ranuras en las que se alojan los lados activos del arrollamiento de la fase *a*. Estos dientes son los únicos relacionados con la derivada de la inductancia mutua en caso de un ELU, ya que sus únicos eventos son los cruces de las barras del lazo frente a los lados activos de la fase. Habiendo irregularidades, todos los dientes del estator están relacionados con esta derivada, debido a la variación del entrehierro.

La Fig. 5.22 muestra las gráficas de los pares en un ME por VAE calculados con

las mismas derivadas de permeancias de la Fig. 5.21. En el caso de un ELU, la suma de estos pares es igual al par calculado con la derivada de la inductancia mutua entre la fase a y el lazo 3. Pero en la MI modelada en este ensayo, que tiene excentricidad estática, el flujo inducido por la fase a y enlazado por el lazo 3 es además modulado por el entrehierro variable en todos los dientes del estator.

En el sentido de giro antihorario (positivo) del rotor adoptado en el ensayo, el inicio del enfrentamiento parcial de un diente del rotor a uno del estator, representado en la Fig. 4.16(a), ejerce par motor en ese mismo sentido y el final del enfrentamiento, representado en la Fig. 4.16(c), ejerce par de frenado en sentido horario. Si el rotor girase en sentido horario (negativo), el inicio del enfrentamiento entre los dientes ejercería par de frenado en sentido horario y el final, par motor en sentido antihorario. En cualquiera de los dos sentidos de giro, el par es motor al inicio del enfrentamiento y de frenado al final. En correspondencia con esto, en la Fig. 5.21 se ve que las derivadas de las permeancias entre los dientes del estator y del rotor pasan de un valor positivo a uno negativo con el aumento de la posición θ del rotor, y viceversa.

La envolvente de la componente de 50 Hz en cada gráfica de par en la Fig. 5.22 presenta dos flancos verticales ascendentes, entre los que hay un flanco oblicuo descendente. El primer flanco vertical se debe al incremento finito del par motor que tiene lugar al inicio del enfrentamiento, y el segundo a la anulación del par de frenado que tiene lugar al final. El flanco oblicuo descendente es una conexión entre los anteriores ya que, como se concluyó en la CP 4, el signo del par entre dos dientes es el mismo de la derivada de su permeancia. Este flanco descendente oblicuo de la envolvente de la componente de 50 Hz hace que ésta encierre contra el eje de abscisas un área

positiva al inicio del enfrentamiento, y una negativa al final, correspondientes a los pares motor y de frenado respectivamente. El área positiva es mayor a la negativa, resultando entonces positivo el valor medio de par entre cada par de dientes. Esa diferencia surge de la forma de las gráficas de flujo en las Fig. 5.18 a 5.20, el cual, en cumplimiento de la Ley de Hopkinson, es proporcional a la DPM en el entrehierro durante el enfrentamiento. Las envolventes de esas gráficas de flujo forman una silueta con doble convexidad, la primera en el intervalo en que la permeancia se encuentra en su flanco ascendente y la segunda en el descendente. Como la primera es mayor a la segunda, también la DPM y el par son mayores al inicio del enfrentamiento que al final.

En la Fig. 5.22 puede notarse, además, el efecto de la excentricidad en la diferencia de amplitud entre los pares.

El par total es la suma de los pares calculados con las combinaciones entre las tres fases y los cuarenta lazos, y en el caso de la MI modelada en este ensayo, que tiene excentricidad estática, el par además es modulado por las derivadas de las inductancias propias y mutua de los lazos del rotor.

La Fig. 5.23 muestra las gráficas del par total en ambos modelos, que presentan los flancos verticales ascendentes y oblicuos descendentes, a semejanza de los pares ejercidos por cada combinación de dientes. En el MCMA, sólo las derivadas de las inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor producen flancos verticales ascendentes, ya que la modulación aportada por las derivadas de las inductancias propias de los lazos del rotor y mutuas entre lazos, graficadas en la Fig. 4.8, no presenta variaciones bruscas, tal como se espera producto de la excentricidad.

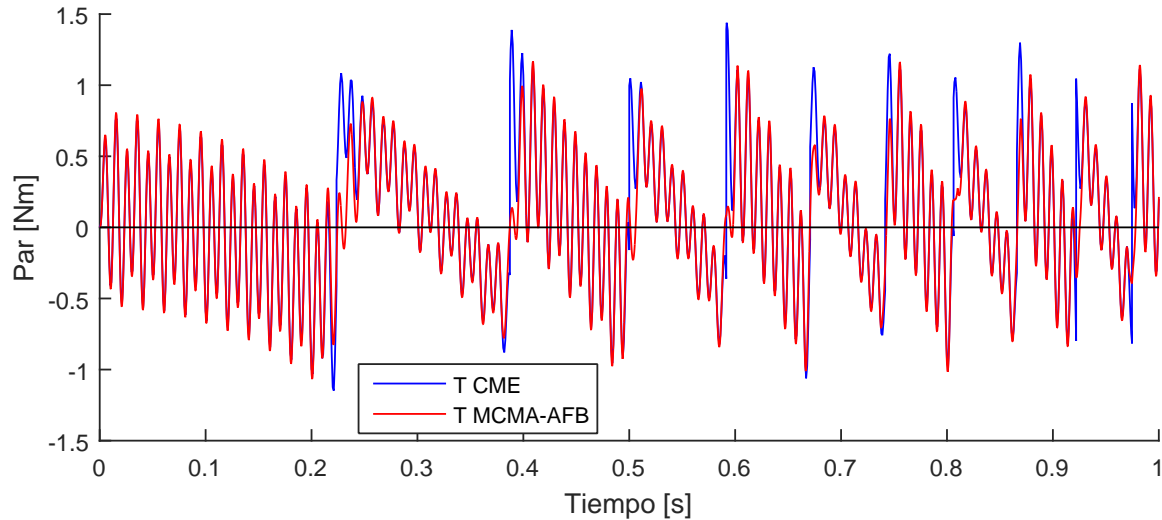


Figura 5.23: Par en el MCMA y el CME, durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

El primer flanco vertical se produce en la primera PCR, en $t = 0,2236$ s, en la cual el diente 5 del rotor deja de enfrenar al 5 del estator, a la vez que el 4 del rotor empieza a enfrenar al 6 del estator (Fig. 5.12(a)). Similares conmutaciones de enfrentamiento se dan en el segundo flanco vertical en la segunda PCR, en $t = 0,3873$ s, el tercero en la posición de la tercera en $t = 0,5$ s, y así sucesivamente. En cada uno de esos flancos, se observa una diferencia entre los pares calculados por ambos modelos, que será analizada en la próxima sección.

5.4.3 Error por interpolación en el cálculo numérico

Como se concluyó en la CP 3, el cálculo analítico de las inductancias con el método AFB es inviable si se modela el ranurado, salvo que se trate de una MI con pocas ranuras. Las derivadas deben, entonces, obtenerse también por métodos numéricos. Dado que la MI modelada tiene 48 ranuras en el estator y 40 en el rotor, se aplicó

entonces el método AFB mediante cálculo numérico. Las inductancias y sus derivadas así obtenidas forman vectores cuyos elementos corresponden a valores discretos de posición, los cuales a su vez forman un vector del mismo orden.

Esos vectores después deben ser leídos por el simulador del MCMA al cabo de cada paso de integración, para actualizar los valores de las inductancias y sus derivadas a los correspondientes a la última posición calculada del rotor, interpolando entre sus elementos.

La interpolación introduce un error que se puede atenuar aumentando el número de posiciones discretizadas, con el consiguiente aumento del costo computacional. Como dato orientativo, los resultados de cálculo de las inductancias de la MI y sus derivadas a partir del método AFB presentados en el Cap. 4, tienen 1921 valores.

Atenuación del rizado en el par calculado

La Fig. 5.14 representa la sección de la MI en la segunda PCR, resaltando las ranuras enfrentadas, una en cada sector del estator y del rotor. De los ocho cruces de ranuras, cuatro corresponden a la fase *a* y cuatro a la fase *c*.

En la Fig. 5.21 se analizó la derivada de la inductancia mutua entre la fase *a* del estator y el lazo 3 del rotor, y de las permeancias del entrehierro entre los dientes del estator relacionados con la distribución del arrollamiento de esa fase y el diente 3 del rotor. Continuando con ese análisis, la Fig. 5.24 muestra el detalle de la segunda PCR en esa misma derivada y en las de las permeancias que conmutan, agregando además la gráfica del par total.

Puede notarse la diferencia entre el flanco ascendente de la derivada de la induc-

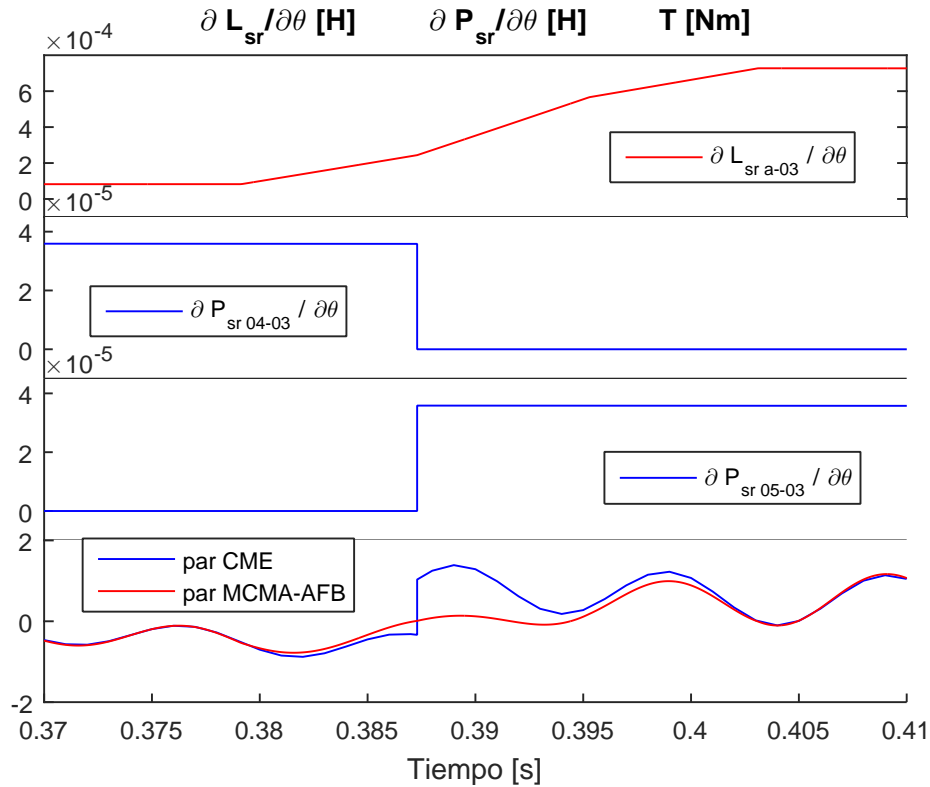


Figura 5.24: Detalle de la segunda PCR en la derivada de la inductancia mutua entre la fase a del estator y el lazo 3 del rotor, de las permeancias en un ME entre los dientes 4 y 5 del estator y ese mismo lazo, y del par total durante un ensayo a velocidad variable, con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

tancia, que presenta un aumento progresivo en los valores interpolados, y los flancos de las derivadas de las permeancias, obtenidas por cálculo analítico, que presentan un aumento instantáneo.

El error por interpolación, que atenúa la derivada de la inductancia mutua entre la fase a del estator y el lazo 3 del rotor, produce el mismo efecto en el flanco ascendente del par calculado con ella. Como esta situación se repite en las otras tres conmutaciones de la fase a , y en las cuatro de la fase c , todas éstas resaltadas en la Fig. 5.14, el flanco ascendente del par total también resulta atenuado. Lo mismo sucede en todas las PCR, como se ve en la Fig. 5.23.

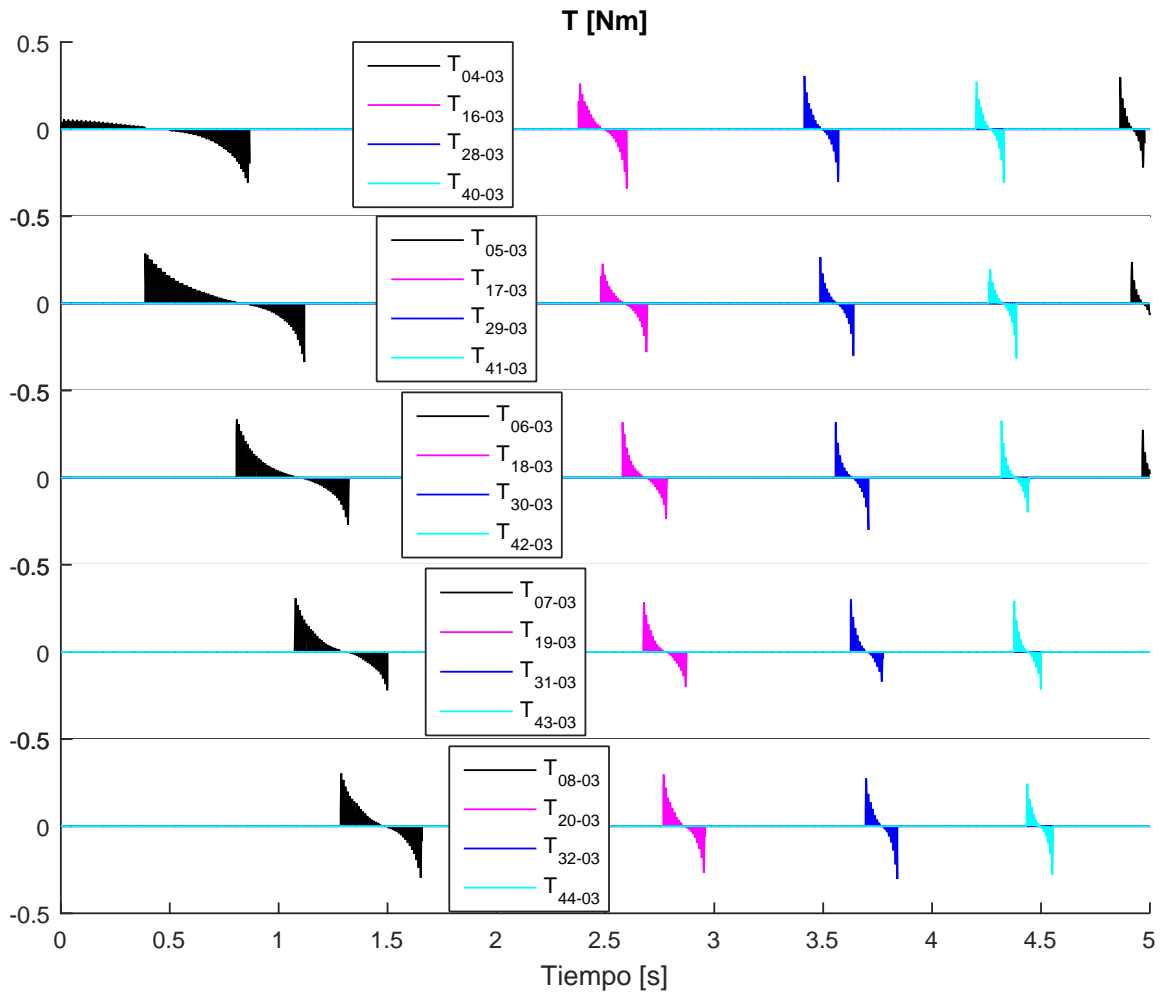


Figura 5.25: Pares calculados con las mismas derivadas de permeancias de la Fig. 5.22 para el caso de una MI con ELU.

Luego, se puede plantear la siguiente conclusión parcial:

CP10: *La interpolación del cálculo numérico suprime las discontinuidades que las derivadas de las inductancias presentan en las PCR, error que se propaga al cálculo del par.*

Disminución del valor medio del par calculado

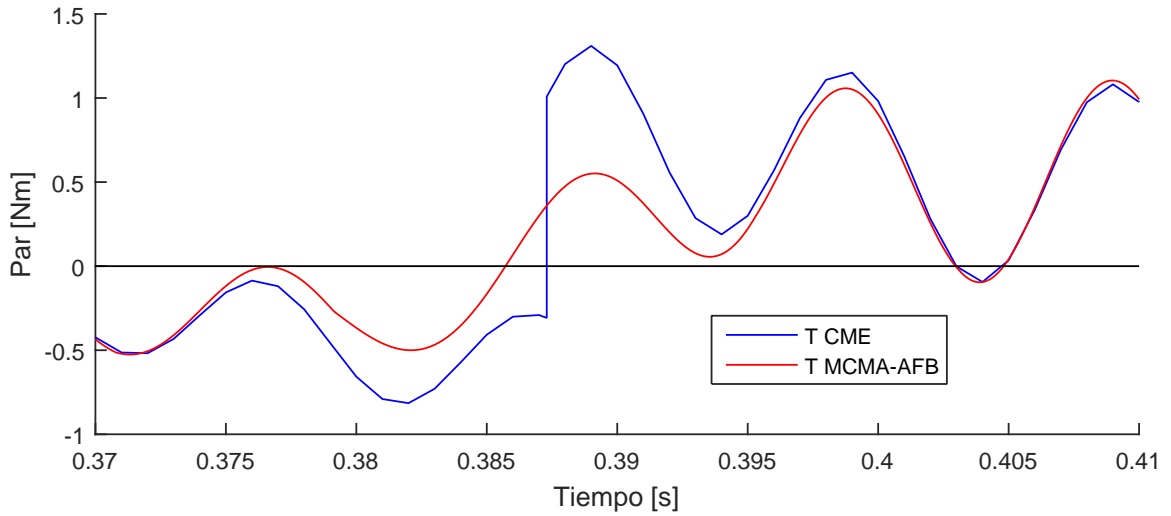
La Fig. 5.25 muestra las gráficas de los pares calculados con las mismas derivadas de permeancias de la Fig. 5.22, esta vez para el caso de una MI con ELU, con el cual esas derivadas tienen todas igual valor absoluto. En las gráficas se visualiza que los flancos verticales de los pares motor y de frenado, ubicados al comienzo y al final de cada enfrentamiento entre dientes, tienen la misma amplitud.

Si bien esas gráficas son obtenidas mediante la simulación del modelo CME con cálculo analítico, en ellas puede verse que en caso de aplicar el cálculo numérico, el error por interpolación que éste produce atenúa por igual a los flancos verticales de los pares motor y de frenado, sin alterar el valor medio del par total. A partir de esto, se puede plantear la siguiente conclusión parcial:

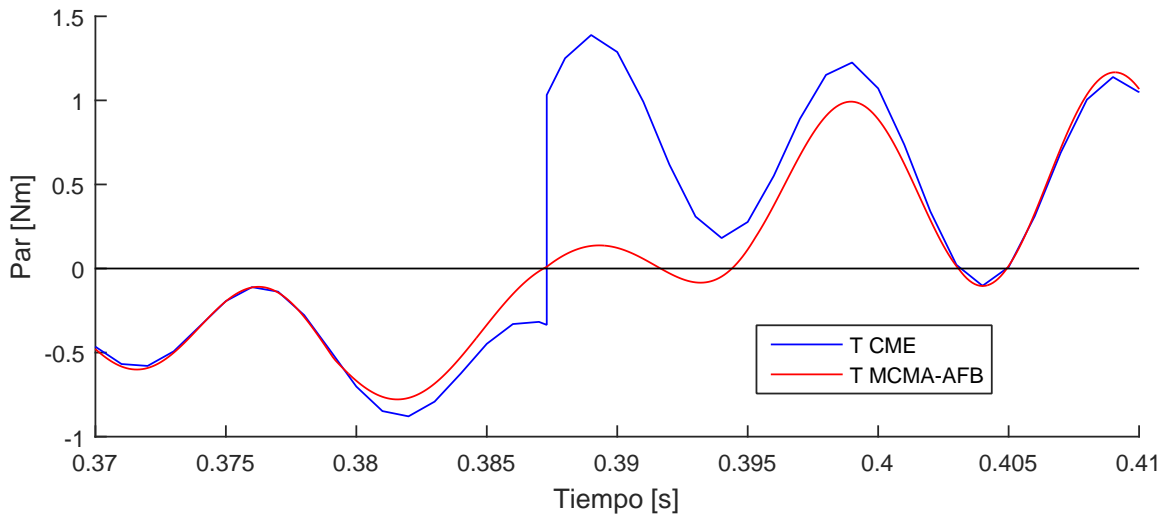
CP11: *El error por interpolación del cálculo numérico no altera el valor medio del par calculado en caso de modelar una MI con ELU.*

Excentricidad estática: La Fig. 5.26(a) muestra el detalle de las gráficas de los pares totales obtenidos con ambos modelos en la segunda PCR, considerando ELU. En ellas puede verse la atenuación del flanco ascendente del par calculado con el MCMA, y la igualdad de su valor medio con el del par calculado con el modelo CME. La Fig. 5.26(b) muestra las gráficas de esos mismos pares, considerando una excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso. Con esta irregularidad, si bien la atenuación del flanco ascendente del par calculado con el MCMA es la misma, el valor medio de ese par es menor.

Las Fig. 5.27(a) y 5.27(b) muestran nuevamente las gráficas de las Fig. 5.26(a)



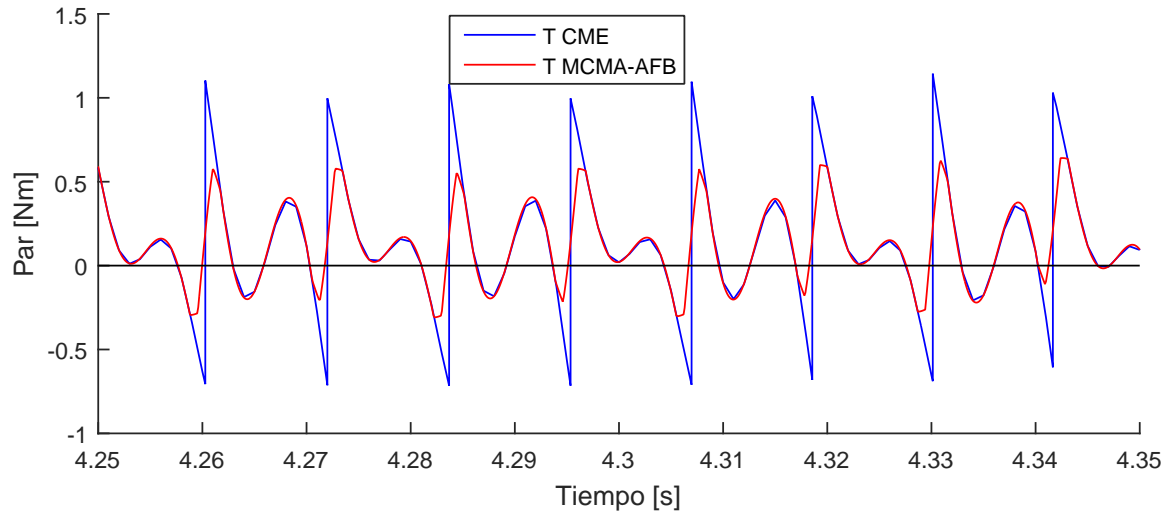
(a) Con ELU.



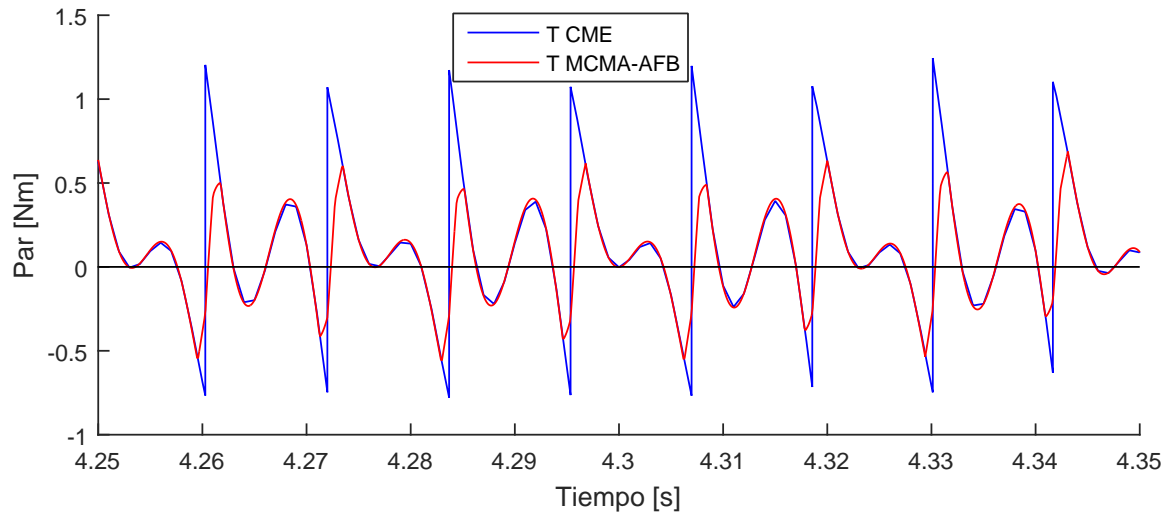
(b) Con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Figura 5.26: Detalle de la segunda PCR del par total en el MCMA y el CME, durante un ensayo a velocidad variable.

y 5.26(b) en un intervalo de tiempo mayor, que comprende ocho PCR. En ellas puede verse la atenuación de los flancos ascendentes del par calculado con el MCMA, la igualdad de su valor medio con el del par calculado con el modelo CME considerando ELU y su disminución con excentricidad estática. Tal disminución también es visible



(a) Con ELU.



(b) Con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Figura 5.27: Atenuación del rizado y variación del valor medio en el par calculado con el MCMA, durante un ensayo a velocidad variable.

en la Fig. 5.23, correspondiente a la misma irregularidad. Este efecto producirá diferencias de velocidad en las simulaciones de marcha, tal como se presentarán en la Sec. 5.6.

Continuando con el análisis de la segunda PCR, mostrada en la Fig. 5.14, las

fases que conmutan son, alternadamente, la a y la c , con derivadas de signos también alternados. La barra 4 del rotor, que pasa frente a la ranura 5 del estator en sentido antihorario, deja de enfrentar a la bobina interna del polo $S2$ de la fase a , teniendo los lazos 3 y 4 derivada positiva de inductancia mutua con esa fase; y la barra 14, que pasa frente a la ranura 17 del estator, deja de enfrentar a la bobina interna del polo $N1$, teniendo los lazos 13 y 14 derivada negativa de inductancia mutua. Las barras 24 y 34, que están pasando frente a las ranuras 29 y 41 del estator, repiten la secuencia anterior.

La disminución del valor absoluto interpolado de la derivada de las inductancias mutuas entre la fase a y los ocho lazos del rotor con los que está conmutando produce un recorte de las áreas encerradas entre sus respectivas gráficas y el eje de abscisas. Este recorte de área es mayor en las derivadas con los lazos ubicados en la zona de entrehierro mínimo, de los cuales dos tienen derivada positiva y los otros dos negativa, y menor en los ubicados en la zona de entrehierro máximo, también dos con derivada de cada signo. Si bien esta alternancia de signos tiende a compensar los errores por interpolación de la derivada de las inductancias mutuas entre la fase a y los ocho lazos del rotor con los que está conmutando, como la disposición de esos lazos es asimétrica respecto del desvío excéntrico del rotor, la cancelación es sólo parcial.

En síntesis, el error por interpolación del cálculo numérico se propaga como una disminución del valor medio del par calculado considerando excentricidad estática.

Excentricidad dinámica: Las Fig. 5.28 y 5.29 muestran la gráfica del par calculado con la derivada de la permeancia entre el diente 8 del estator y el 3 del rotor, con ELU y con distintas irregularidades del entrehierro, respectivamente. Comparando la

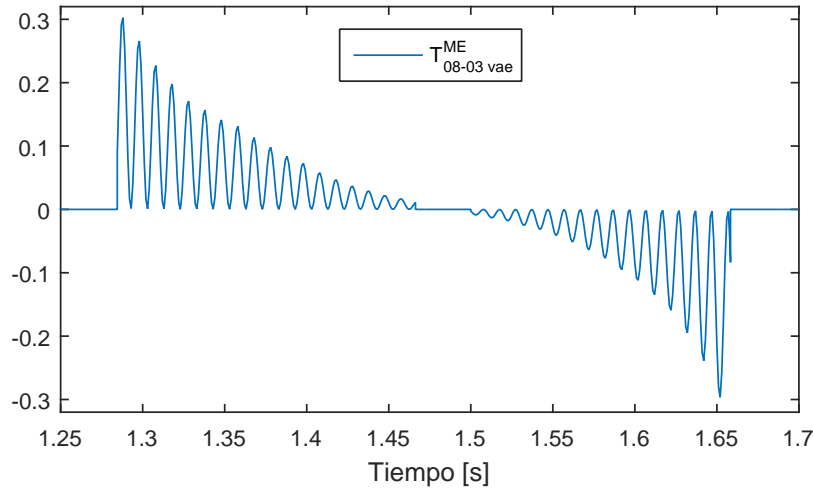
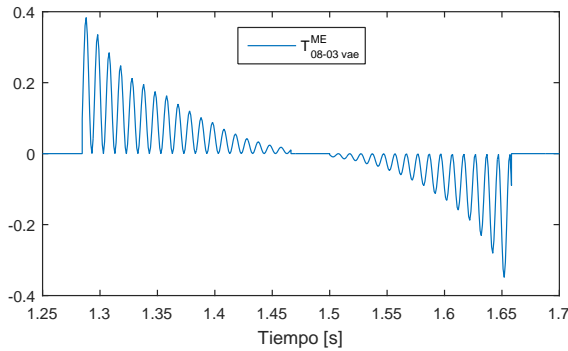


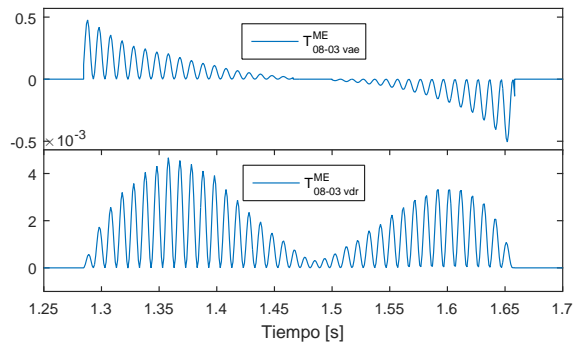
Figura 5.28: Par ejercido en el TFE entre el diente 8 del estator y el 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable, con ELU.

Fig. 5.28, correspondiente a un ELU, con la 5.29(a), correspondiente a excentricidad estática del 50 %, y la 5.29(b), correspondiente a excentricidad dinámica del mismo valor, la amplitud del par en un ME por VAE ejercido en el TFE (8,3) alcanza un valor mayor con cualquiera de las dos excentricidades que con ELU, ya que con las excentricidades el entrehierro entre esos dientes tiene valor inferior a su media g_0 . Comparando a su vez las amplitudes del par por VAE con una y otra excentricidad, es mayor con la dinámica debido a que el movimiento del rotor no aleja al diente 3 de la zona de entrehierro mínimo.

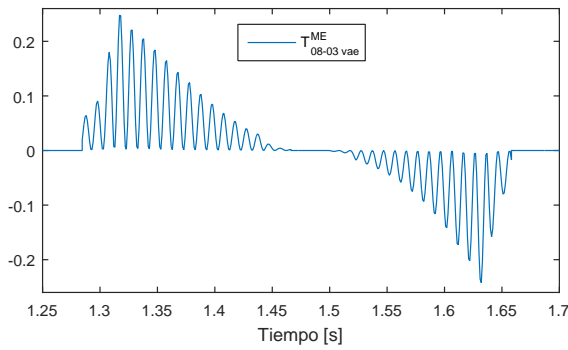
Con excentricidad dinámica, además se ejerce par en un ME por VDR, aunque éste tiene una amplitud tres órdenes inferior a la del par por VAE. Las líneas de inducción entre el par de dientes (8,3) se acortan en todo el intervalo de enfrentamiento, ejerciendo un par por VDR siempre positivo. La envolvente de la gráfica del par por VDR tiene flancos más suaves que las de los pares por VAE con una y otra excentricidad, diferencia proveniente de las respectivas derivadas de las permeancias, como



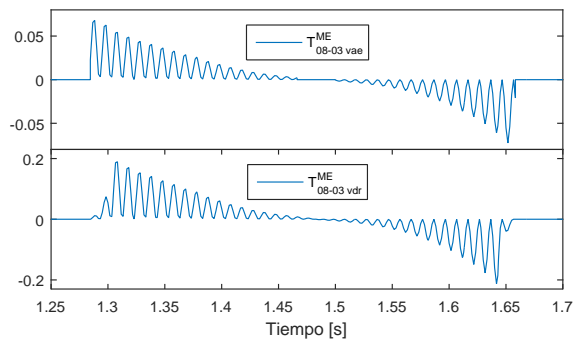
(a) Excentricidad estática del 50 %.



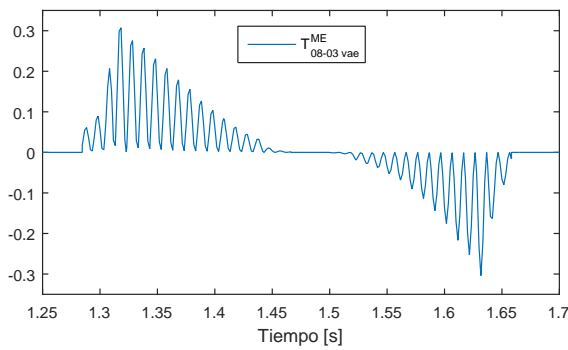
(b) Excentricidad dinámica del 50 %.



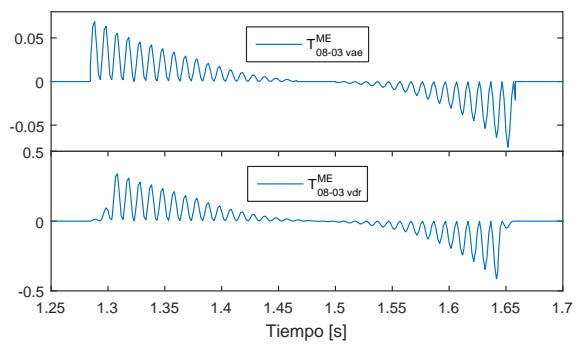
(c) Apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator.



(d) Apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor.



(e) IVMR 5.29(a) y 5.29(c).



(f) IVME 5.29(b) y 5.29(d).

Figura 5.29: Par ejercido en los TFE entre el diente 8 del estator y el 3 del rotor, durante un ensayo a velocidad variable.

se ve en las Fig. 4.20(b), 4.25(c) y 4.25(d), aunque correspondientes a otros pares de dientes. En las distintas combinaciones de dientes, las derivadas de sus permeancias

para calcular el par por VDR aportan términos con flancos suaves, lo cual suaviza a su vez los flancos de las gráficas de las derivadas de las inductancias mutuas entre las fases del estator y los lazos del rotor que utiliza el MCMA, atenuando su error por interpolación. Aunque en el caso de la excentricidad dinámica, siendo despreciable el par por VDR frente al par por VAE, también lo es la atenuación del error, como se verá en la Sec. 5.6.

En síntesis, el error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado en caso de modelar excentricidad dinámica, en una cantidad comparable a como lo hace al modelar excentricidad estática.

Ranurado del estator: Comparando ahora la Fig. 5.28, correspondiente a un ELU, con la 5.29(c), correspondiente a una apertura de 2.7 mm en las ranuras del estator, el par en un ME por VAE ejercido por el par de dientes (8, 3) alcanza un valor menor con el ranurado por el aumento del entrehierro medio. Además, la envolvente de las gráficas del par con ranurado presenta flancos menos escarpados, tanto al inicio como al final del enfrentamiento. Esta diferencia proviene de las derivadas de las permeancias, como se ve en la Fig. 4.22(b), aunque en otro par de dientes, ya que en esas posiciones las líneas de inducción inciden sobre las ranuras, y están extendidas con arcos de circunferencia, como muestra la Fig. 2.9, las cuales se acortan o alargan progresivamente con el movimiento del rotor. También en ese caso resulta atenuado el error por interpolación del MCMA, esta vez en forma apreciable.

En síntesis, el error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado en caso de modelar el ranurado del estator, en una cantidad menor que en el caso de modelar excentricidad.

Ranurado del rotor: En la Fig. 5.29(d), correspondiente a una apertura de 2.0 mm en las ranuras del rotor, puede verse que el par por VDR tiene mayor amplitud que el par por VAE, diferencia proveniente de las derivadas de las permeancias, como se ve en las Fig. 4.27(c) y 4.27(d), aunque en otro par de dientes, alcanzando la suma de ambos pares valores próximos a los de los del par con el ranurado del estator. La disminución del par por VAE se debe a la extensión de las líneas de inducción que inciden en el centro de las ranuras del rotor. Como esas líneas tienen longitud constante, la derivada de la permeancia para calcular el par por VAE mantiene los flancos escarpados, (Fig. 4.27(d)), al igual que la envolvente del par por VAE (Fig. 5.29(d)). Ahora bien, las demás líneas de inducción incidentes en las ranuras del rotor se acortan progresivamente con el avance de la arista adelantada del diente del rotor, para después alargarse con la salida de la arista atrasada, ejerciendo par motor y de frenado por VDR, respectivamente. Como el acortamiento y posterior alargamiento son progresivos, la derivada de la permeancia para calcular el par por VDR tiene flancos suaves (Fig. 4.27(c)), y también la envolvente de la gráfica del par por VDR (Fig. 4.27(d)), atenuando el error por interpolación del MCMA, esta vez en forma considerable.

En síntesis, el error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado en caso de modelar el ranurado del rotor, en una cantidad menor que en el caso de modelar excentricidad.

Ranurado del estator y excentricidad estática: Comparando la Fig. 5.29(c), correspondiente al estator ranurado sin excentricidad, con la 5.29(e), correspondiente a ese mismo ranurado, al que se suma excentricidad estática, ambas IVMR, el agregado de la última aumenta el par por VAE entre esos dientes, aproximando su amplitud

a la que tiene con un ELU. La diferencia proviene de las derivadas de las permeancias, aunque no se ve entre las Fig. 4.22(b) y 4.23(b), porque corresponden a dos dientes ubicados aproximadamente en cuadratura durante el tiempo de simulación, en vez de la zona de entrehierro mínimo. El alargamiento de las líneas de inducción que inciden en las ranuras es proporcionalmente mayor cuanto más anchas son éstas en relación al entrehierro. La excentricidad hace aumentar esta relación en la zona de entrehierro mínimo y disminuir en la de entrehierro máximo, acentuando y atenuando respectivamente el efecto de disminución del error por interpolación del MCMA debido al ranurado. De las dos tendencias, es dominante la primera por tener mayor incidencia en el par total.

En síntesis, el error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado en caso de modelar el ranurado del estator y excentricidad estática, en una cantidad mayor a como lo hace al modelar sólo el ranurado.

Ranurado del rotor y excentricidad dinámica: Comparando la Fig. 5.29(d), correspondiente al rotor ranurado sin excentricidad, con la 5.29(f), correspondiente al rotor ranurado más excentricidad dinámica, el agregado de esta otra IVME introduce una diferencia imperceptible entre los pares por VAE en la escala de las gráficas, y en cambio una diferencia apreciable entre los pares por VDR. La diferencia imperceptible entre los pares por VAE proviene de sus derivadas de permeancia, como se ve en las Fig. 4.27(d) y 4.28(d), aunque en otro par de dientes. Como la apertura de las ranuras del rotor es un orden mayor al entrehierro medio, la variación de longitud relativa producida por la excentricidad dinámica en las líneas de inducción que inciden en el centro de las ranuras del rotor es despreciable, siéndolo también la variación del

par por VAE. En cuanto a la diferencia apreciable entre los pares por VDR, también proviene de las derivadas de sus permeancias, aunque no se aprecia en las Fig. 4.27(c) y 4.28(c), ya que corresponden a dos dientes ubicados aproximadamente en cuadratura durante el tiempo de simulación, en vez de estar en la zona de entrehierro mínimo. Los mayores valores de las derivadas de permeancia en la zona de entrehierro mínimo, son alcanzados en el mismo intervalo de tiempo que si hubiera sólo ranurado sin excentricidad, acentuando la pendiente de los flancos de la envolvente de la gráfica del par, con el consecuente aumento del error por interpolación del MCMA.

En síntesis, el error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado en caso de modelar el ranurado del rotor y la excentricidad dinámica, en una cantidad mayor a como lo hace al modelar sólo el ranurado.

Comparando los pares calculados al modelar las distintas irregularidades geométricas del entrehierro, se puede plantear la siguiente conclusión parcial:

CP12: *El error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado en caso de modelar irregularidades geométricas del entrehierro. Con los valores considerados, tal disminución es mínima para los ranurados del estator o del rotor, máxima para la excentricidad estática o dinámica y tiene valor intermedio para sus combinaciones.*

5.5 Ensayo en vacío

En este ensayo se alimentó la MI con su tensión nominal y se impuso al rotor la velocidad de sincronismo, a partir de la posición inicial $\theta_0 = 0$.

La posición en que se encuentra el rotor en un instante t se puede determinar con la expresión:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{P} 2\pi f t = 0 + \frac{1}{2} 2\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{ciclo}} \right] 50 \left[\frac{\text{ciclo}}{\text{s}} \right] t[\text{s}] = 50\pi t, \quad (5.15)$$

donde P es el número de pares de polos y f la frecuencia de la alimentación eléctrica.

5.5.1 Flujos y corrientes

La Fig. 5.30 muestra las gráficas de corriente en el estator y en los lazos 40, 5, 10 y 15 del rotor, y la Fig. 5.31 muestra la diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator en ambos modelos, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Como se estimó con (5.3), en este ensayo y el de rotor bloqueado la corriente en la fase a , una vez alcanzado el régimen estacionario, se aproxima a una función temporal

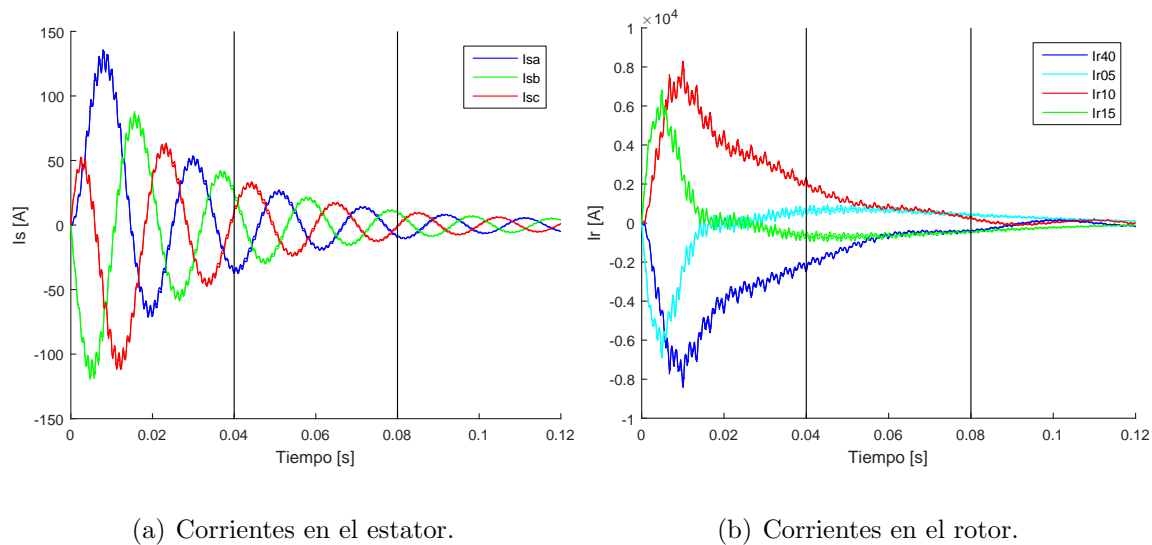


Figura 5.30: Corrientes en el estator y en los lazos 40, 5, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

coseno invertida. Ésto se verifica en la gráfica mostrada en la Fig. 5.30(a), la cual pasa por un mínimo en $t = 0$ que está desplazado hasta el origen de coordenadas debido a la condición inicial nula.

Iniciando el ensayo en la posición $\theta = 0$, la misma se repite cada dos inicios de ciclo eléctrico, en los instantes indicados por las líneas verticales negras. En esas posiciones, el lazo 40 del rotor está alineado con el polo $S2$ de la fase a .

Como se ve en la la Fig. 5.30(a) en un intervalo inmediato siguiente a $t = 0$, la corriente en la fase a , que toma valores positivos debido al régimen transitorio, induce un campo entrante por los polos $Norte$ y saliente por los Sur , tanto en esa fase como en el lazo 40.

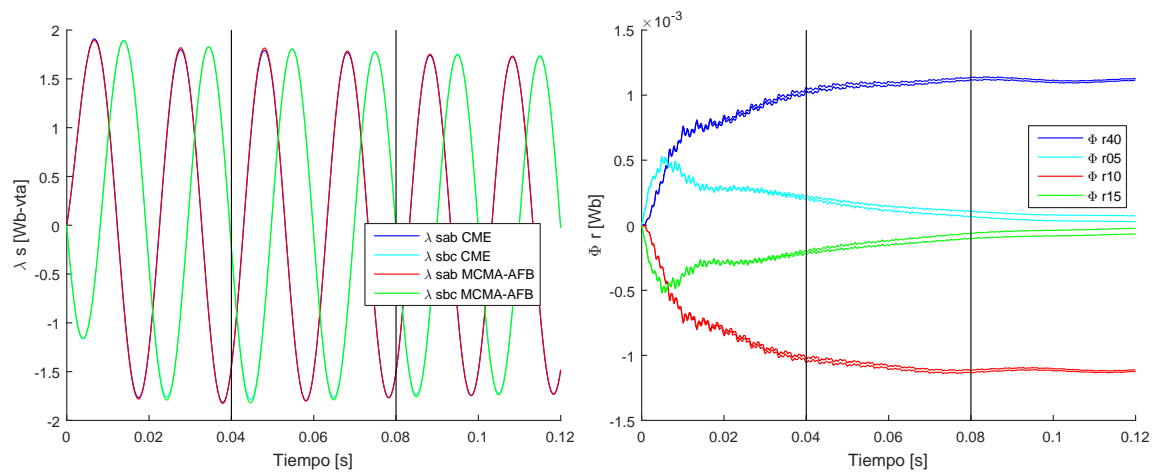
En ese mismo intervalo, como se ve en la Fig. 5.31(b), parte del flujo inducido se almacena en el lazo 40, con un valor transitoriamente creciente.

El crecimiento transitorio de Φ_{r40} induce una FEM desmagnetizante, también transitoria, en ese lazo del rotor, que hace circular la corriente i_{r40} mostrada en la Fig. 5.30(b), de signo contrario a la magnetizante i_{sa} .

Como se ve en la la Fig. 5.31(b), el flujo Φ_{r40} mantiene su polaridad una vez alcanzado el régimen estacionario, debido a que el rotor gira en sincronismo con la inducción rotante. Este flujo positivo tiene valor máximo porque está espacialmente alineado con la inducción resultante de las tres fases.

Un proceso similar ocurre en el diente 10 del rotor, que está en cuadratura con el 40, con la variante de que el flujo almacenado en él es negativo porque en el instante $t = 0$ ese diente está alineado con un polo $Norte$.

Los dientes 5 y 15, en cambio, en el instante $t = 0$ se encuentran en los planos



(a) Diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator.

(b) Flujo en los dientes del rotor.

Figura 5.31: Diferencia entre los flujos enlazados por dos pares de fases del estator y flujo en los dientes 40, 5, 10 y 15 del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

neutros entre los polos de la fase a . En ese instante, la inducción rotante que resulta de las tres fases tiene la dirección de la inducida por la fase a , coincidiendo las posiciones de sus planos neutros. En su rotación, los dientes 5 y 15 se mantienen en los planos neutros de la inducción rotante, por lo que el flujo en estos dientes, en régimen estacionario, tiende a un valor fluctuante de poca amplitud, debido sólo a la excentricidad, con una periodicidad de un ciclo por vuelta. Tal fluctuación se aprecia para todos los dientes del rotor en la Fig. 5.32.

Una vez establecido este régimen estacionario del flujo fluctuante en todos los dientes del rotor, la FEM que se induce en los lazos y la corriente en éstos tiene el mismo comportamiento, como se ve en la Fig. 5.30(b).

Comparando las Fig. 5.30(a) y 5.31(a), se observa un régimen transitorio que es acentuado en las gráficas de las corrientes que circulan por las fases del estator, y que

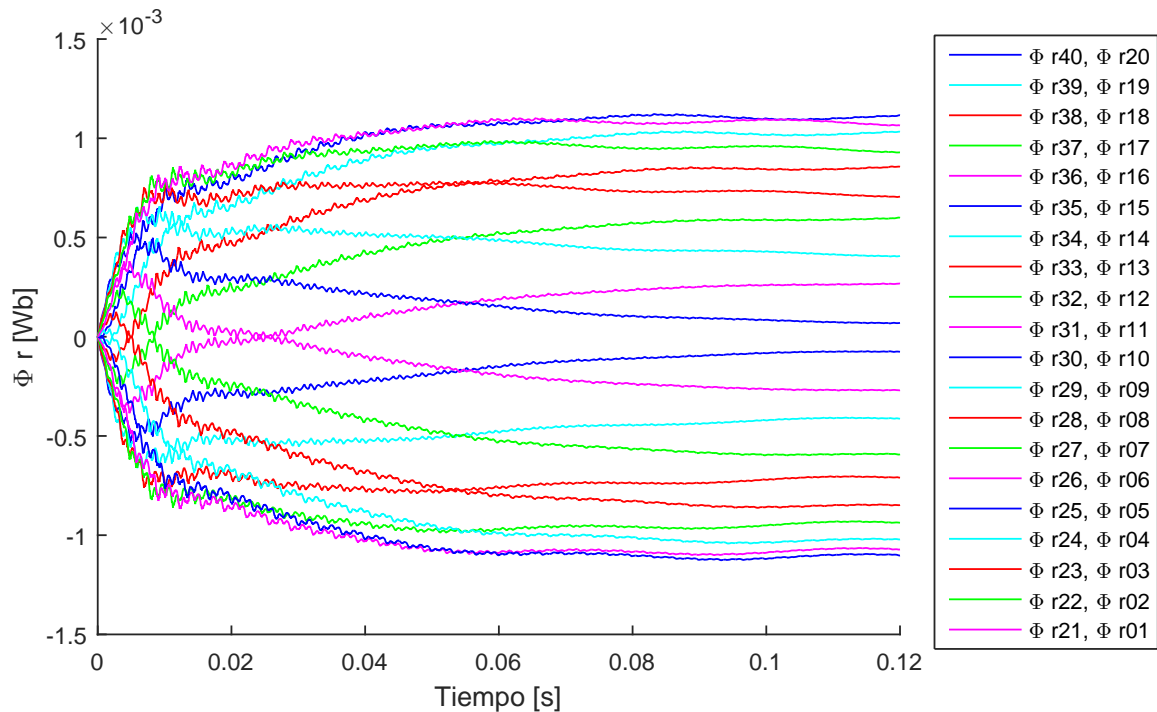
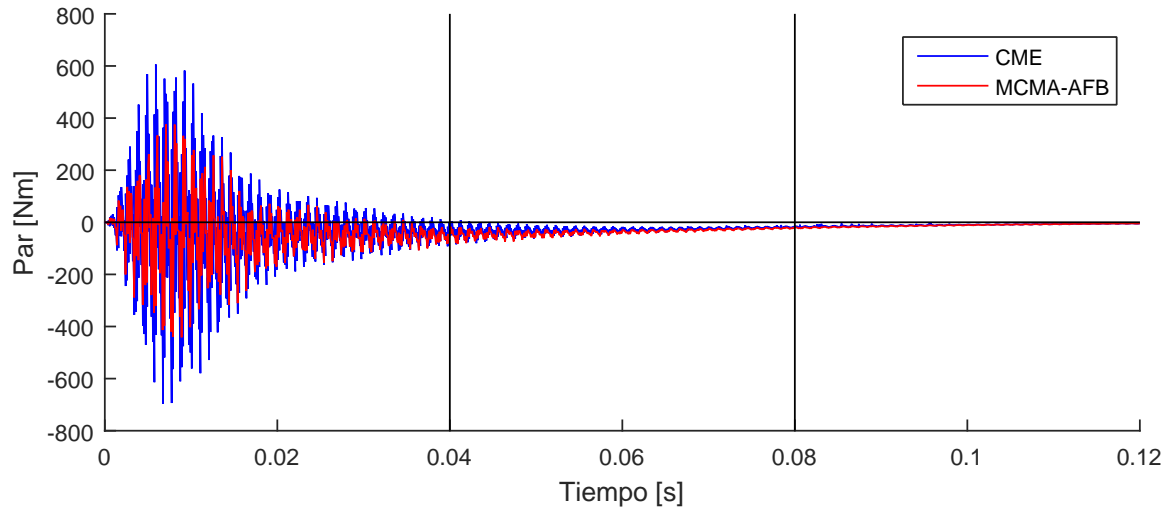


Figura 5.32: Flujo en todos los dientes del rotor en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

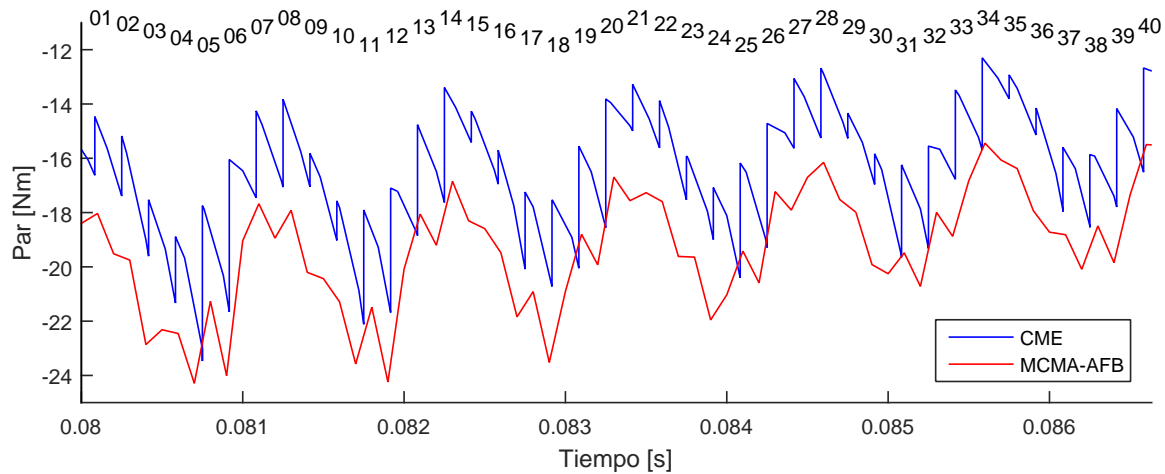
en cambio es atenuado en las gráficas de los flujos enlazados por ellas. Ésto se debe a que las corrientes del estator son compensadas por las corrientes desmagnetizantes en el rotor. Ese aumento transitorio en las corrientes del estator tras la conexión de la fuente de alimentación trifásica es inevitable, porque al ser inalterable la tensión de la fuente, la corriente es la única variable de potencia adaptativa.

5.5.2 Par

La Fig. 5.33 muestra las gráficas del par en ambos modelos. En la 5.33(a), correspondiente a la simulación completa, se ve que el par, como variable dependiente de las corrientes del estator y del rotor, tiende a anularse en régimen estacionario. En toda la simulación, y en mayor medida durante el régimen transitorio, la amplitud



(a) Simulación completa.



(b) Detalle del inicio de la tercera vuelta del rotor.

Figura 5.33: Par en el MCMA y el CME, durante un ensayo en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

del rizado del par es menor para el MCMA, como se vio en la Sec. 5.4.3.

Iniciando el ensayo en la posición $\theta = 0$, la misma se repite cada dos inicios de ciclo eléctrico, en los instantes indicados por las líneas verticales negras, en los cuales las PCR reinician su numeración. La Fig. 5.33(b) muestra el detalle del inicio de la

tercera vuelta del rotor, a partir del instante $t = 80$ ms, indicando el número de PCR correspondiente a cada flanco ascendente del par, obtenido con (5.13) y (5.15).

En las gráficas se reconoce un primer patrón repetitivo cada veinte PCR, cantidad al cabo de la cual la componente fundamental del flujo pasa de estar alineado con el centro de un polo o con un plano neutro a estarlo con el centro del polo o con el plano neutro siguiente. Por ejemplo, el polo *Sur* inducido en $\theta = 0$, $t = 0$ mostrado en la Fig. 5.1, ha de mantenerse solidario al diente 40 del rotor, inicialmente alineado con el polo *S2* de la fase *a*, entre la PCR número 240 y la 1. Veinte PCR después, entre la número 20 y 21, estará alineado con el polo *N2* de la fase *c*. El período espacial de veinte PCR abarca un doceavo de vuelta, que es la distancia entre dos centros de polos consecutivos.

Un segundo patrón repetitivo divide al anterior en tres, cada uno con un período de $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ *pcr*. Por ejemplo, los flancos de valor máximo entre los de su entorno se dan en las PCR 1, 21, etc. Los siguientes, se dan en las PCR

$$1 + 6\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3} \approx 8, \quad 21 + 6\frac{2}{3} = 27\frac{2}{3} \approx 28,$$

etc. Los siguientes en las PCR

$$1 + 2 \times 6\frac{2}{3} = 14\frac{1}{3} \approx 14, \quad 21 + 2 \times 6\frac{2}{3} = 34\frac{1}{3} \approx 34,$$

etc. Esos patrones repetitivos en la gráfica del par también son efecto de la distribución del arrollamiento trifásico, al que es entonces aplicable el análisis de Fourier utilizando las expresiones de los armónicos de la DPM, dados en (5.5).

5.6 Arranque sin carga

En estos arranques se alimenta la MI con su tensión nominal sin carga mecánica acoplada al rotor, dejándolo en libertad de movimiento a partir del reposo en la posición inicial $\theta = 0$.

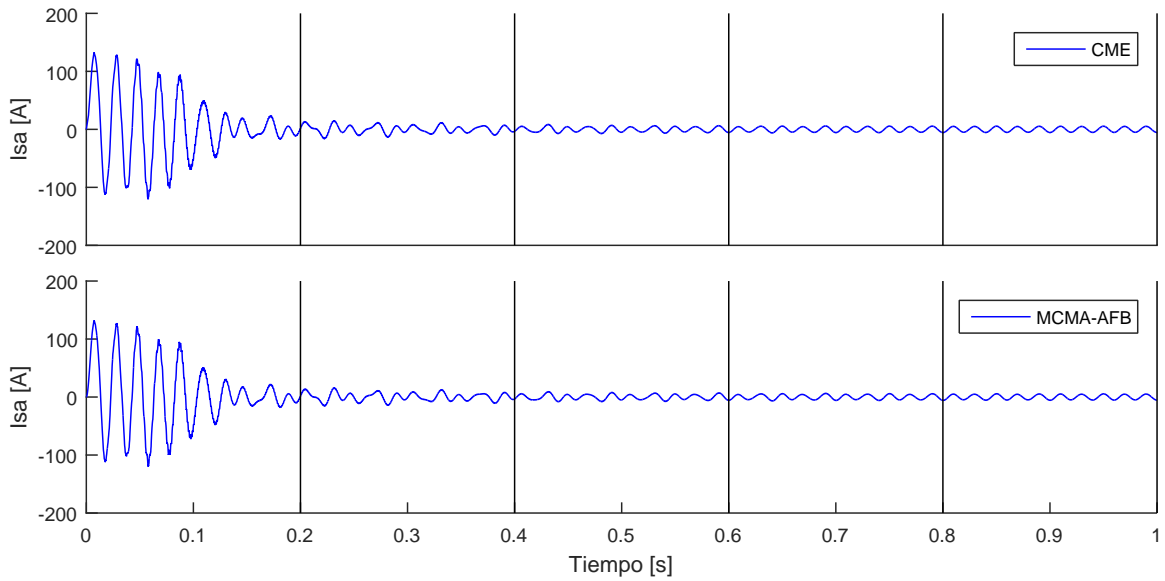
5.6.1 Entrehierro liso y uniforme

La Fig. 5.34 muestra las gráficas de la corriente en la fase a del estator y en el lazo 40 del rotor en ambos modelos, durante un arranque en vacío con ELU, en las que pueden distinguirse los regímenes transitorio y estacionario. Las dos corrientes disminuyen su amplitud y la del rotor, además, disminuye la frecuencia debido a la aproximación de la velocidad del rotor a la velocidad de sincronismo.

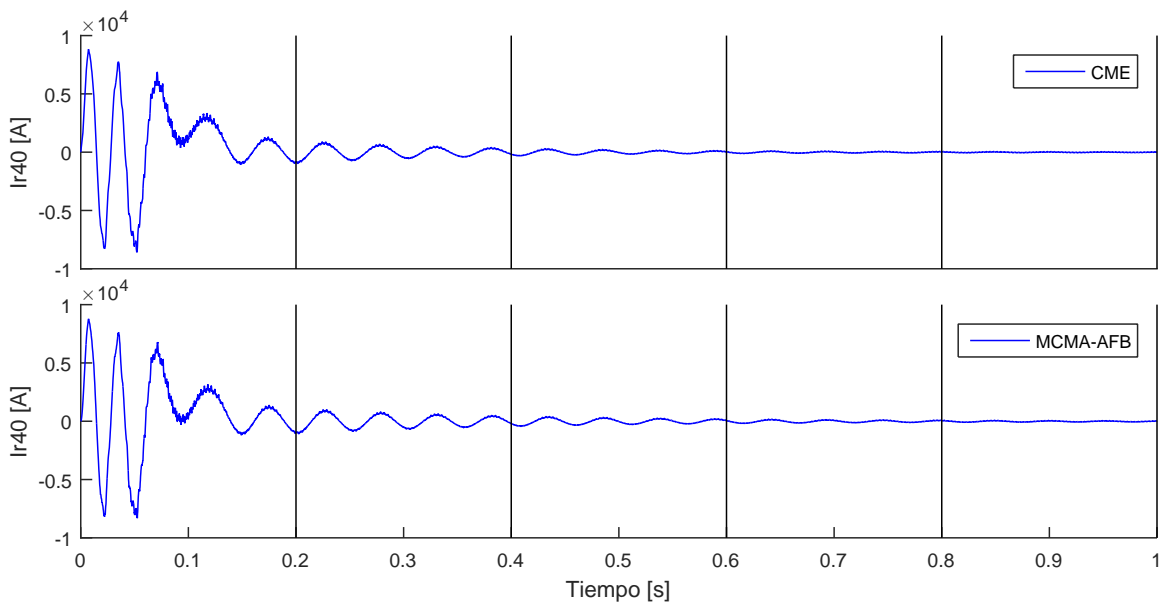
En las corrientes del estator se observan las características del régimen transitorio de arranque: amplitud un orden superior a la corriente de marcha sin carga y desfase de la tensión predominantemente reactivo, ya que su componente alterna se aproxima a una función cosenoidal invertida, mientras que la tensión en esa fase es una función senoidal.

En la corriente del rotor se observa el efecto desmagnetizante. En el comienzo del arranque, la corriente I_{r40} está aproximadamente en fase con la corriente I_{sa} , tal como se explicó en la Sec. 5.5.

La Fig. 5.35 muestra la gráfica de la diferencia entre los flujos enlazados por las fases a y b del estator y la del flujo en el diente 40 del rotor en ambos modelos, durante el mismo arranque. La primera tiene la frecuencia de la fuente de alimentación y la segunda, al igual que la de corriente en el lazo de ese diente, tiene una frecuencia

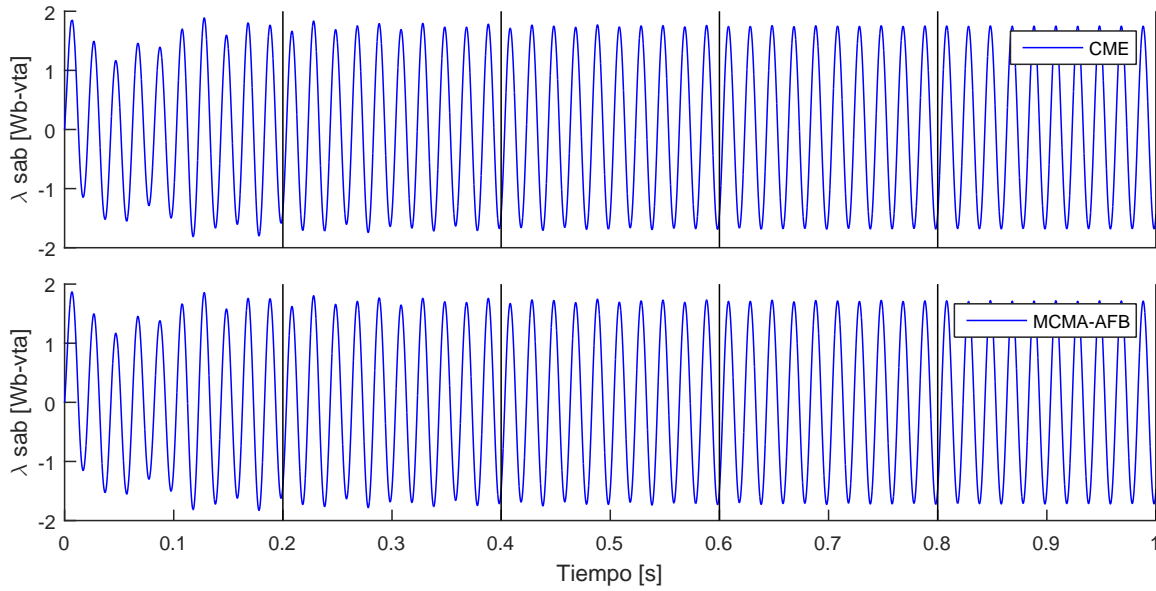


(a) Corrientes en la fase *a* del estator.

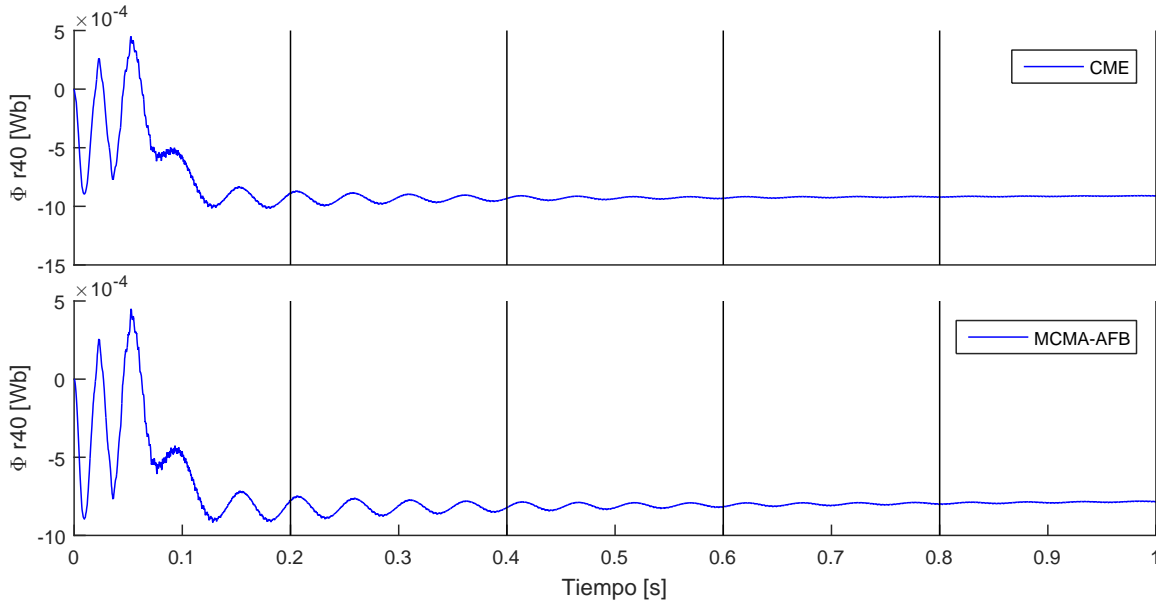


(b) Corriente en el lazo 40 del rotor.

Figura 5.34: Corriente en la fase *a* del estator y en el lazo 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.



(a) Diferencia entre los flujos enlazados por dos fases del estator.



(b) Flujo en el diente 40 del rotor.

Figura 5.35: Diferencia entre los flujos enlazados por dos fases del estator y flujo en el diente 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.

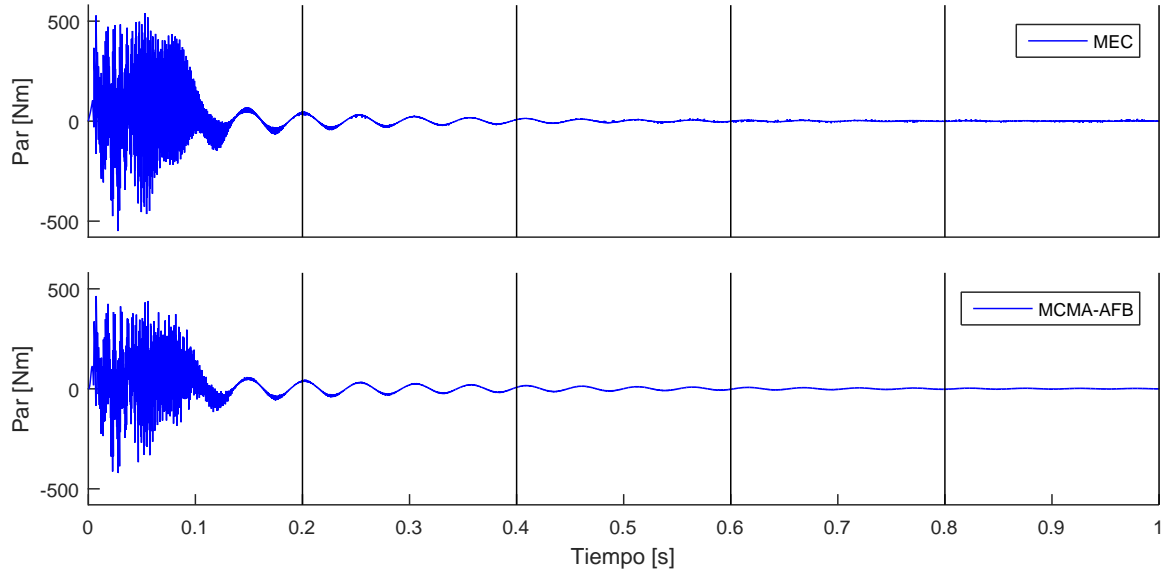


Figura 5.36: Par en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.

progresivamente menor, no así su amplitud, que en vez de fluctuar en torno del eje de abscisas toma valores que varían lentamente por el deslizamiento, aunque ésto no llega a apreciarse al cabo del tiempo de simulación. Como en la posición inicial del rotor el lazo 40 está alineado con el polo $S2$ de la fase a , cuya inducción es saliente en un intervalo inmediato siguiente a $t = 0$, el flujo Φ_{r40} toma valores negativos.

La Fig. 5.36 muestra las gráficas del par en ambos modelos, con un rizado considerable durante el régimen transitorio, el cual es menor para el MCMA, como se justificó en la Sec. 5.4.3. Aunque en la escala de esas gráficas su valor medio resulta imperceptible, se deduce que éste debe necesariamente ser no nulo para que el rotor acelere.

La Fig. 5.37 muestra las gráficas de la velocidad en ambos modelos, durante un arranque en vacío con ELU. La gráfica sin escala con forma de diente de sierra representa la posición limitada al rango $0 \leq \theta < 2\pi$, de modo que a cada diente corresponde

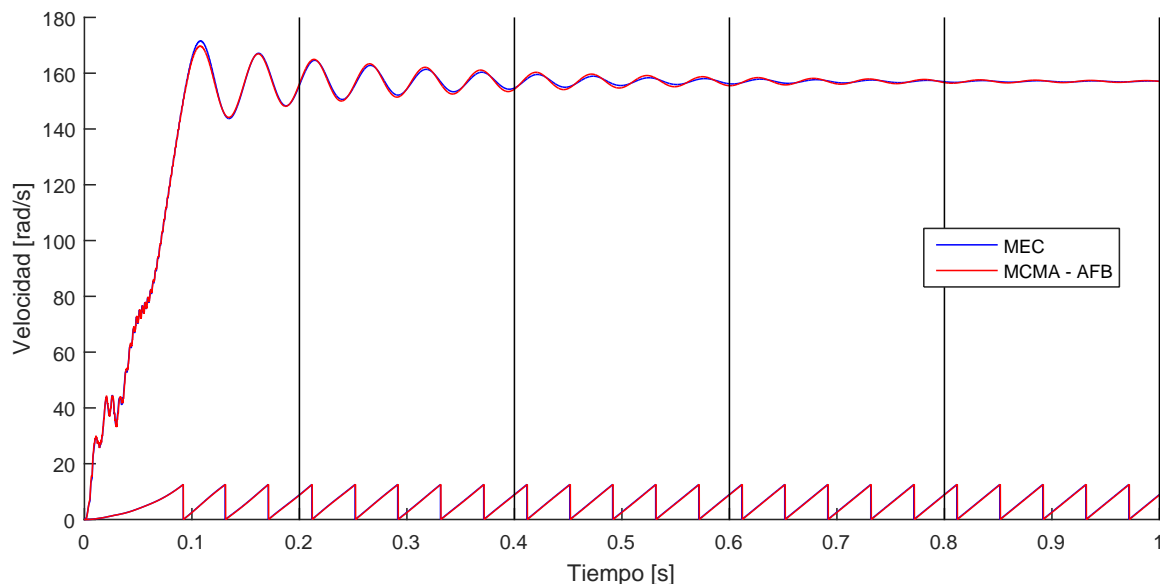


Figura 5.37: Velocidad en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con ELU.

una vuelta del rotor.

En cada intervalo entre dos líneas verticales negras, transcurren diez ciclos eléctricos. En ese lapso, mientras que el campo rotante gira cinco vueltas, el rotor gira una cantidad no entera igual al número de dientes de sierra contenido entre las dos líneas verticales negras. Con un deslizamiento mayor, como el que tendría lugar por ejemplo en estado de carga, el desfase progresivo de los dientes de sierra respecto de las líneas verticales negras destacaría el atraso acumulativo del rotor respecto del campo rotante.

Según la CP 10, el error por interpolación en el MCMA atenúa el rizado del par calculado. Sin embargo, no tiene incidencia visible sobre la gráfica de la velocidad, ya que ese rizado es de todos modos filtrado por la inercia de la masa rotante.

5.6.2 Entrehierro con irregularidades geométricas

La Fig. 5.38 muestra las gráficas de la velocidad en ambos modelos con distintas irregularidades del entrehierro durante los primeros 300 ms de simulación.

Igualmente a las mostradas en la Fig. 5.37 correspondientes a un ELU, la atenuación del rizado del par calculado con el MCMA debida al error por interpolación no tiene incidencia visible sobre las gráficas de velocidad.

Pero contrariamente a las gráficas correspondientes a un ELU, estas presentan diferencias de resultados entre uno y otro modelo. La causa de tales diferencias es atribuible al error por interpolación del MCMA, que según la CP 12 disminuye el valor medio del par calculado, siendo esa disminución mínima para los ranurados del estator o del rotor, máxima para la excentricidad estática o dinámica y de valor intermedio si se combinan las IVMR o IVME anteriores.

En todas las gráficas de la Fig. 5.38 se ve que ambos modelos calculan la misma velocidad en los primeros instantes del arranque, y a partir de un momento dado el MCMA comienza a retrasarse, decayendo su evolución hacia fluctuaciones que una vez superadas, asemeja la del modelo CME, como se ve en la Fig. 5.39 en la que se muestra el tiempo completo de simulación.

Las gráficas sin escala con forma de diente de sierra representan la posición limitada al rango $0 \leq \theta < 2\pi$, de modo que a cada diente corresponde una vuelta del rotor.

Comparando las gráficas de la velocidad en ambos modelos correspondientes a las distintas irregularidades del entrehierro mostradas en la Fig. 5.38, puede relacionarse el retraso inicial en el arranque con el error por interpolación del MCMA.

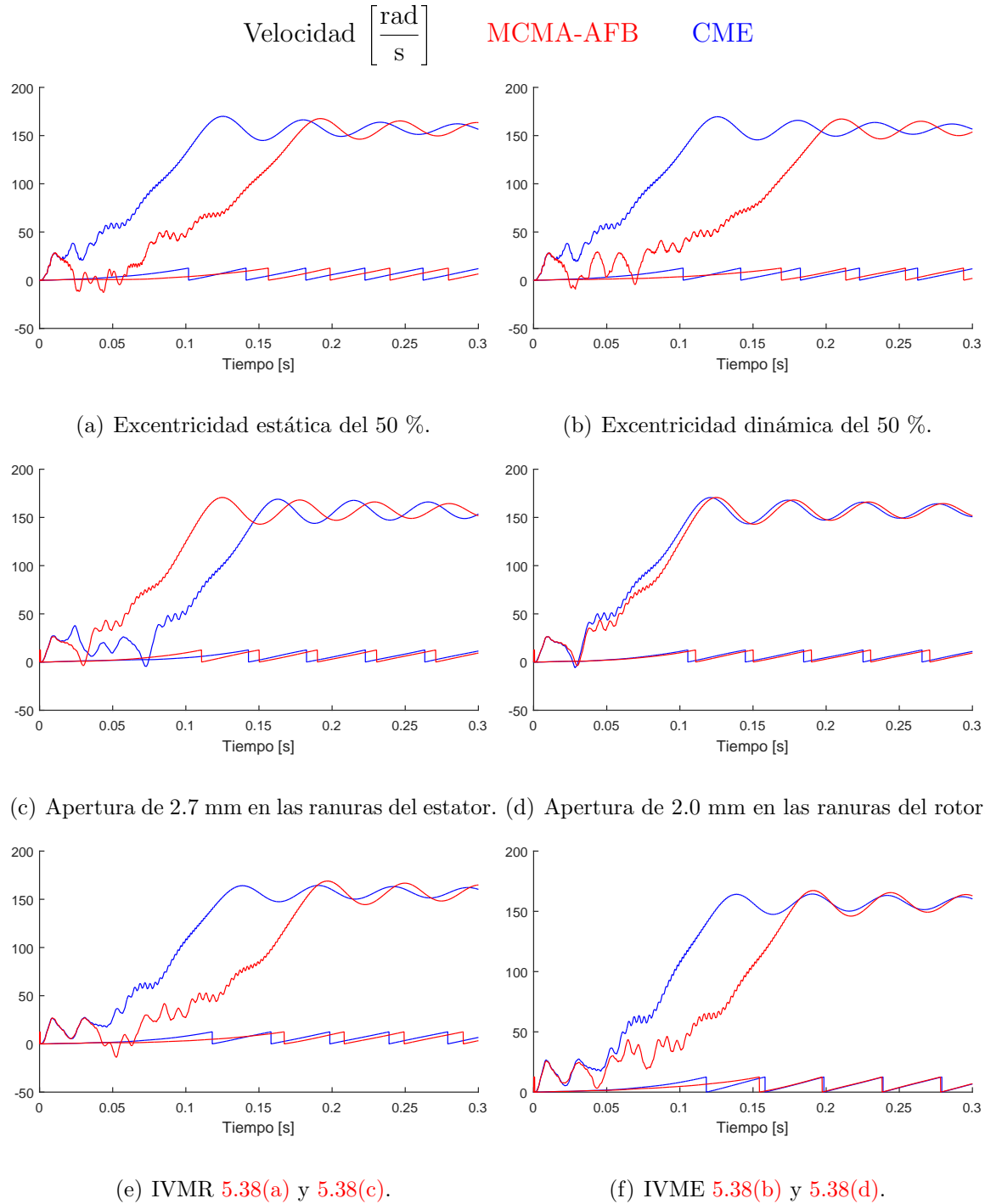


Figura 5.38: Velocidad en el MCMA y el CME con distintas irregularidades del entrehierro durante un arranque en vacío.

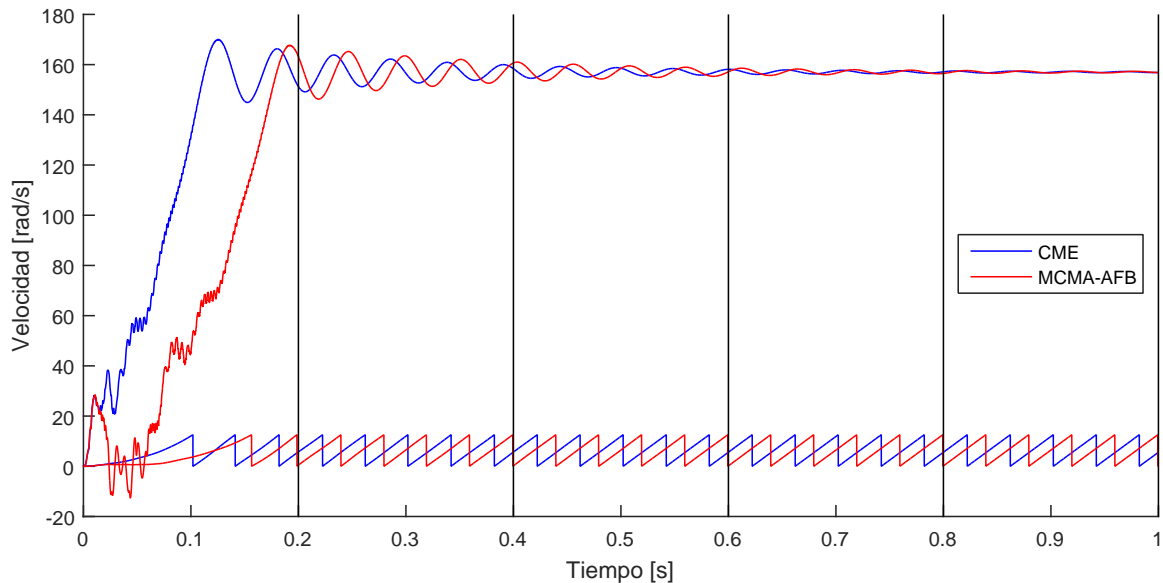
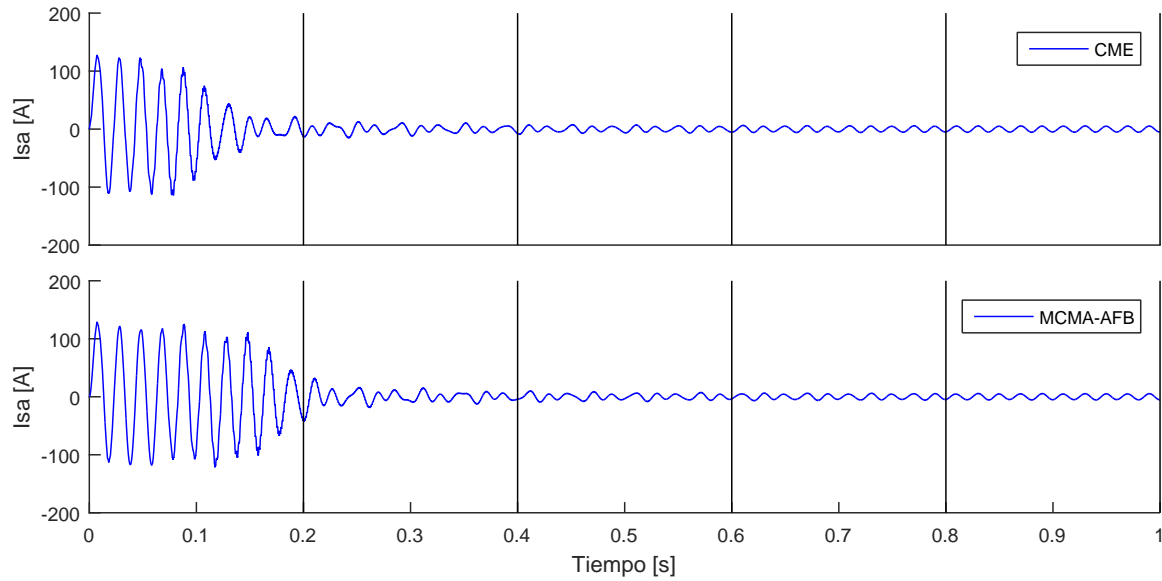
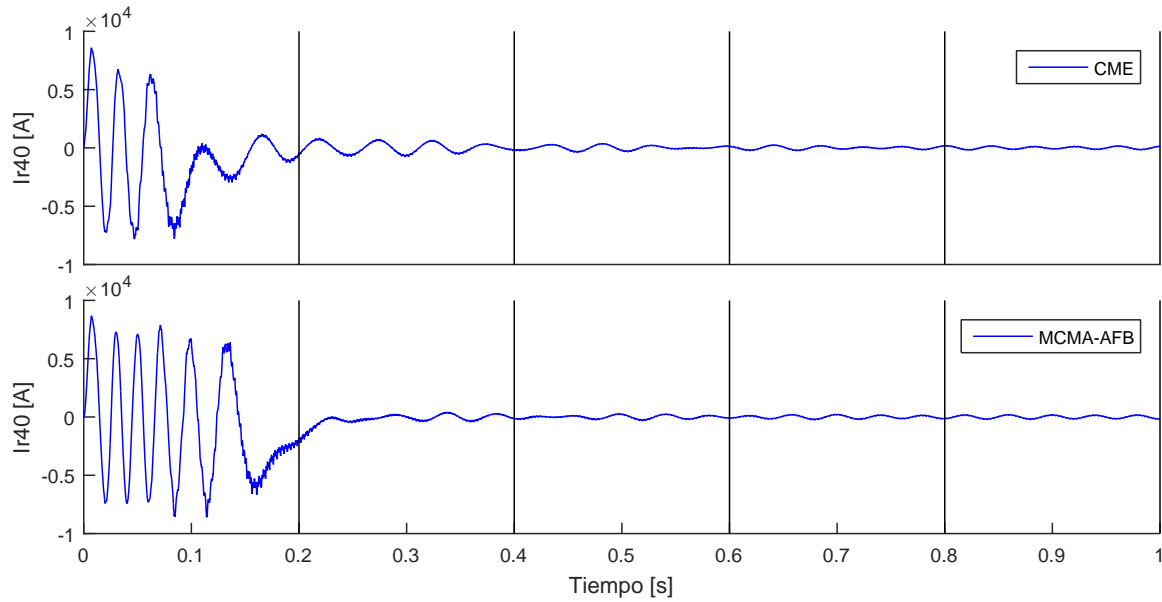


Figura 5.39: Velocidad en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

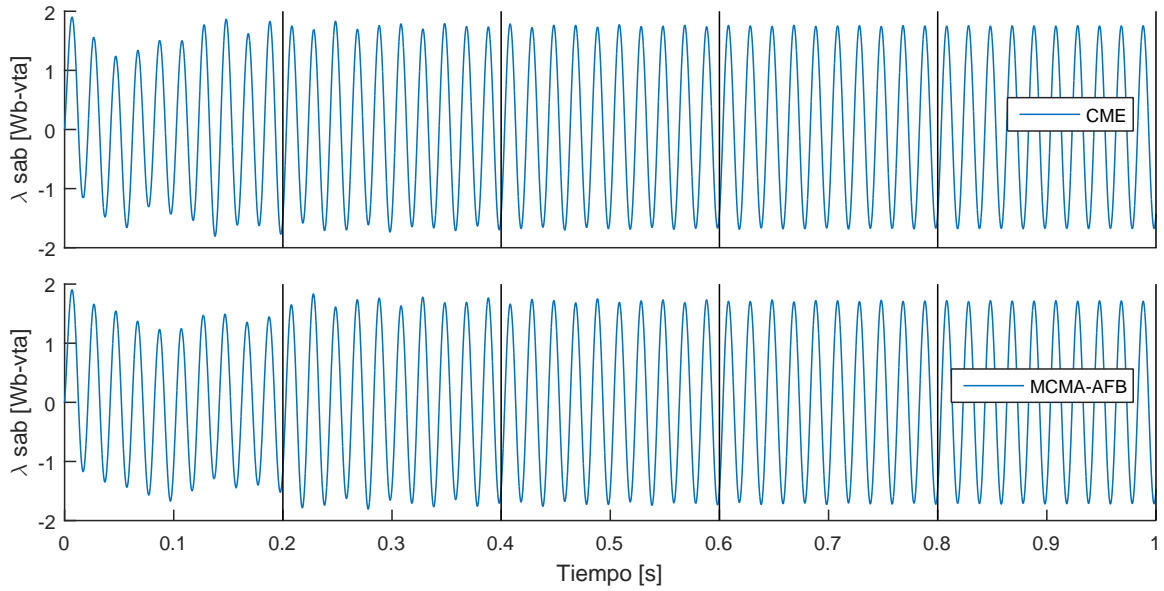
Las Fig. 5.40 a 5.42 muestran la misma serie de gráficas comentadas para el arranque con ELU, pero en este caso correspondientes al modelado de excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

Comparando las Fig. 5.34(b) y 5.35(b), que muestran las gráficas de corriente y flujo en el lazo 40 del rotor en la simulación con ELU, con las Fig. 5.40(b) y 5.41(b), análogas para la simulación con excentricidad estática y entrehierro liso, se ve que las últimas, alcanzado el régimen estacionario, presentan una ondulación de casi cinco períodos en los intervalos entre dos líneas verticales negras. Cada uno de esos intervalos comprende diez ciclos eléctricos, en los que el campo estático rota cinco vueltas y el rotor, en régimen estacionario, casi esa cantidad. La ondulación, entonces, es atribuible a la variación cíclica del entrehierro frente al lazo 40 del rotor.

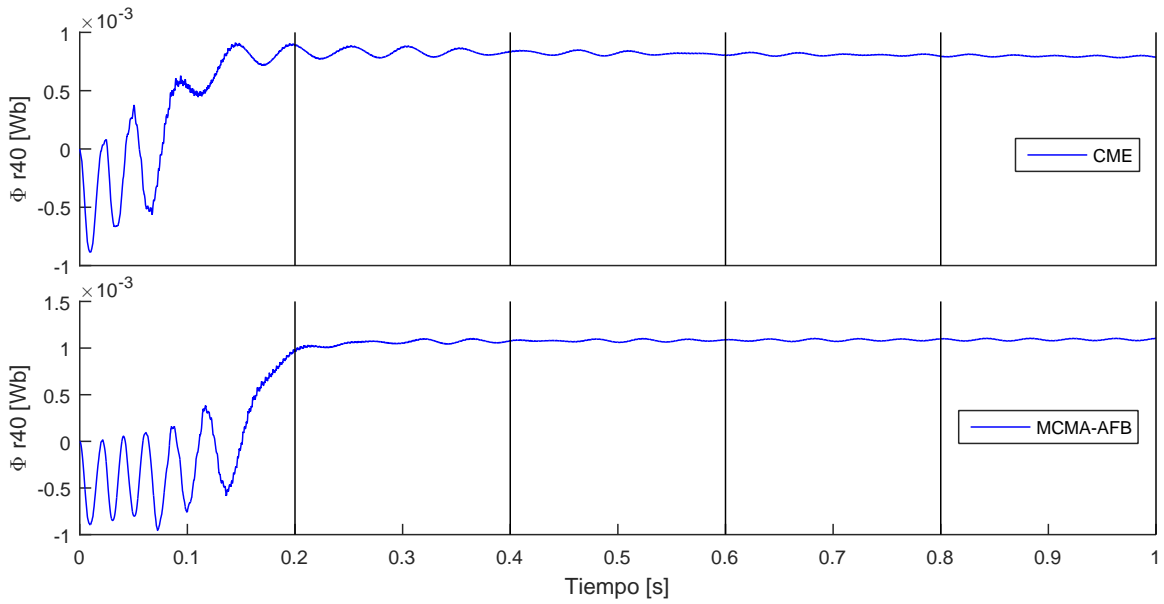
(a) Corriente en la fase *a* del estator.

(b) Corriente en el lazo 40 del rotor.

Figura 5.40: Corriente en la fase *a* del estator y en el lazo 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.



(a) Diferencia entre los flujos enlazados por dos fases del estator.



(b) Flujo en el diente 40 del rotor.

Figura 5.41: Diferencia entre los flujos enlazados por dos fases del estator y flujo en el diente 40 del rotor en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

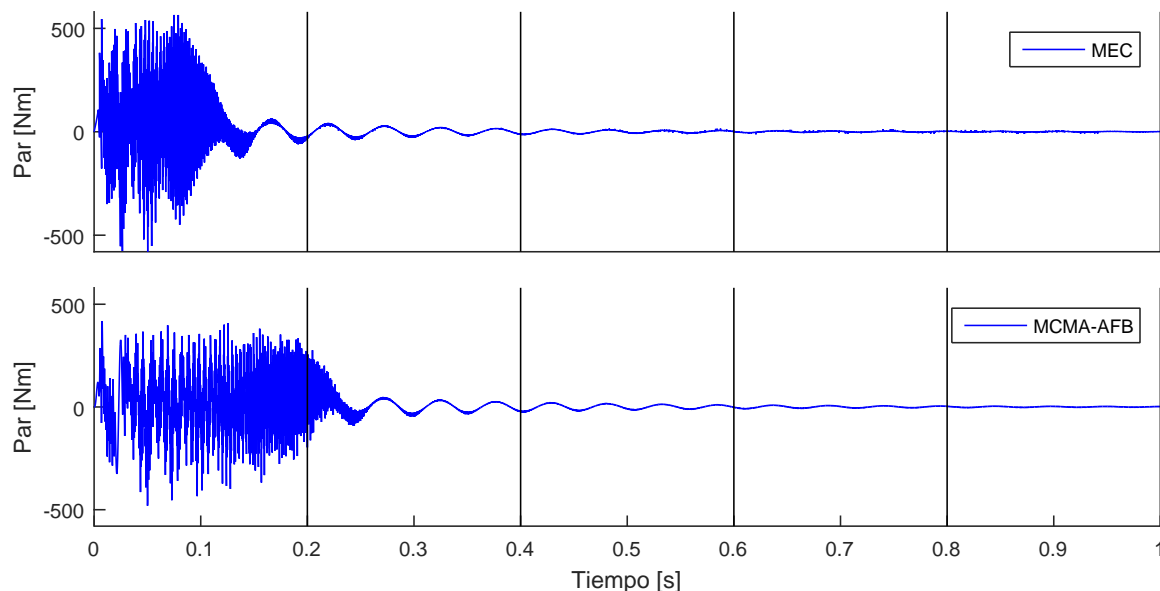


Figura 5.42: Par en el MCMA y el CME, durante un arranque en vacío con excentricidad estática del 50 % y entrehierro liso.

5.7 Sumario

Se presentaron resultados de simulaciones de ensayos con rotor bloqueado, a velocidad variable y en vacío, y de arranques sin carga, algunos modelando ELU y otros irregularidades en el entrehierro.

Se analizó la evolución temporal de las variables de la MI, cotejándolos con una estimación cualitativa previa, validando la coherencia de los sentidos de referencia adoptados.

En los ensayos, la coincidencia de resultados entre las variables eléctricas y magnéticas de ambos modelos probó su equivalencia en estos dominios, y validó la analogía entre un TFE y un condensador eléctrico. En cuanto a los resultados del par, se encontró coincidencia entre los resultados de ambos modelos sólo en las posiciones del rotor en que no hay cruces de ranuras, surgiendo en cambio diferencias en las PCR.

Se aprovechó la capacidad del modelo CME para representar variables como los flujos y las DPM entre los dientes y se mostró su alcance como herramienta de análisis.

Mediante la utilización del CME, se encontró que la causa de las diferencias entre los resultados del par es el error por interpolación en el MCMA, consecuencia del cálculo numérico de las inductancias y sus derivadas en lugar del cálculo analítico. Esas diferencias se propagan a todas las variables en las simulaciones de un arranque en vacío, aunque sólo en aquellas en que se modelan irregularidades del entrehierro, y a su vez se transmiten hacia el valor medio del par.

Se validó el cálculo analítico de las derivadas de las permeancias del modelo CME.

Se expuso la relación entre los resultados de las simulaciones con los del análisis de Fourier, analizando las gráficas del flujo en los dientes del estator y de la DPM entre los yugos de los núcleos del estator y del rotor, en las cuales es notorio el efecto de la distorsión armónica debida a la distribución del arrollamiento trifásico.

Capítulo 6

Conclusiones y propuesta de trabajos futuros

6.1 Conclusiones parciales

En el Cap. 2 se presentaron el MCMA y el método AFB para cálculo de las inductancias con las que se resuelve ese modelo. Sobre el método AFB resultaron intrínsecamente impuestas dos restricciones: la R1, según la cual la permeabilidad de los núcleos del estator y del rotor debe considerarse infinita, y la R2, según la cual las direcciones de los lados de la trayectoria de Ampere que cruzan el entrehierro deben ser las mismas de la línea de inducción en la posición angular que ocupa cada uno.

Además de esas dos restricciones intrínsecas de la concepción del método, se adoptó la R3, según la cual el entrehierro se considera axialmente uniforme para reducir el análisis de la MI a dos dimensiones, omitiendo irregularidades como el cruzamiento de las ranuras o la desalineación del eje.

Se presentaron las interpretaciones físicas de los parámetros del método AFB, concluyendo en la CP 1 en que la función de bobinados es proporcional a la DPM inducida en el entrehierro. Analizando la gráfica de la función de bobinados se dedujo la CP 2, según la cual su valor absoluto disminuye en la zona de menor entrehierro.

Completando la presentación del método AFB, se desarrollaron las expresiones para cálculo de las inductancias. Al analizar el costo computacional que demanda su cálculo analítico, se encontró que éste es inviable modelando el ranurado, salvo que se trate de una MI con pocas ranuras, como lo expresa la CP 3.

La propuesta del cálculo analítico en busca una relación cualitativa entre las irregularidades del entrehierro y sus efectos sobre las variables del modelo se retomó en el Cap. 3, esta vez aplicada a las permeancias del CME y sus derivadas.

Se compararon los parámetros del método AFB con los del CME, estableciendo un paralelismo entre la distribución de bobinados y la ventana de un diente, y entre la función de bobinados y la permeancia de un TFE.

Entre esas dos últimas, la función de bobinados es portadora de información referente a toda la extensión angular del entrehierro, adquirida en un giro completo del lado radial móvil de la trayectoria de Ampere. Ésto permite que con esa función se pueda calcular la DPM inducida en cualquier lugar del entrehierro y posición del rotor, como se concluyó en la CP 1. En cambio, la permeancia de un TFE contiene sólo la información geométrica del arco de entrehierro que éste ocupa, complementándose con las demás en una red magnética.

Comparando las ecuaciones para cálculo del par en ambos modelos, se llegó a la CP 4, según la cual en la del CME el signo de los pares ejercidos por las permeancias

de los TFE es el mismo de sus derivadas, que son parámetros predecibles con la posición θ del rotor, mientras que en la del MCMA el signo del par depende además de variables temporales.

En el desarrollo del cálculo analítico de la derivada de la permeancia de un TFE se llegó a la CP 5, según la cual ésta tiene dos términos, uno atribuible a la variación del área enfrentada por los dientes, y otro a la variación de su distancia radial. Esas variaciones son, respectivamente, la deformación longitudinal y transversal del TFE.

Se analizó el costo computacional que demanda el cálculo analítico del CME, cuyas permeancias y sus derivadas operan con la función del entrehierro ocupado por el TFE correspondiente. Como el costo computacional de esa operación es bajo, se concluyó en la CP 6 en que sí es posible implementar el cálculo analítico con el CME, incluso modelando el ranurado.

En la CP 7 se concluyó en que la permeancia de un TFE no depende de marco de referencia adoptado, aunque sí los términos del cálculo analítico de sus derivadas.

En la CP 8 se concluyó en que las IVME producen variaciones de las permeancias de los TFE proyectados por los dientes del estator, y las IVMR de los TFE proyectados por los dientes del rotor.

En el Cap. 4 se presentaron los resultados de cálculo de los parámetros obtenidos con el método AFB y el CME. Calculando las inductancias de la MI y sus derivadas a partir de las permeancias del CME y sus derivadas, se llegó a la CP 9, según la cual el cálculo analítico de las primeras es posible con el CME, posibilitando a su vez resolver el MCMA con software de cálculo simbólico, quedando así salvada la limitación del método AFB expresada en la CP 3.

En el Cap. 5 se presentaron los resultados de simulación en distintas condiciones de operación y con diferentes asimetrías en el entrehierro. En el MCMA se aplicaron las inductancias y sus derivadas obtenidas por cálculo numérico, en cambio en el modelo CME se aplicaron las permeancias y sus derivadas obtenidas por cálculo analítico. Al comparar los resultados de ambos, se encontró que la interpolación en el cálculo numérico suprime las discontinuidades que las derivadas de las inductancias presentan en las PCR, error que se propaga al cálculo del par, como lo expresa la CP 10.

En base a esos resultados, se dedujo que el error por interpolación altera el valor medio del par calculado con una magnitud que depende de las irregularidades geométricas modeladas. Tratándose de un ELU, tal incidencia es nula, como lo expresa la CP 11.

Si en cambio se modelan irregularidades geométricas del entrehierro, el error por interpolación del MCMA disminuye el valor medio del par calculado. Como se expresa en la CP 12, con los valores de irregularidades considerados tal disminución es mínima para el ranurado del estator o del rotor, máxima para la excentricidad estática o dinámica y tiene valor intermedio si se combinan entre sí esas IVMR o IVME.

6.2 Conclusiones finales

Habiendo aplicado voluntariamente al CME las restricciones del método AFB para analizarlos en igualdad de condiciones, los resultados de simulación obtenidos en los Cap. 4 y 5 conducen a la conclusión final:

CF1: *Si bien con distintos alcances de aplicación, el CME es coherente con el método AFB y el MCMA.*

Esos resultados fueron obtenidos con cálculo analítico y numérico, de cuya comparación surge:

CF2: *El cálculo analítico de los parámetros del modelo permite aumentar su resolución y reproducir las discontinuidades de las derivadas de las permeancias e inductancias, evitando el error por interpolación del cálculo numérico.*

Del desarrollo de método AFB y el modelo CME se deduce:

CF3: *Debido al costo computacional, sólo es posible implementar el cálculo analítico en el CME y no en el método AFB.*

6.3 Trabajos futuros

Del alcance del modelo CME como herramienta de análisis surgen propuestas inmediatas.

Su capacidad para representar el flujo tangencial en el entrehierro permite aplicarlo al análisis del efecto de las cuñas magnéticas en las ranuras.

Su capacidad para representar el flujo y el PM en los dientes del estator y entre cada par de dientes del estator y del rotor, así como el par ejercido por estos últimos, permite aplicarlo al análisis de la distorsión armónica debida a la distribución del arrollamiento trifásico.

Su capacidad para representar variaciones en la permeabilidad de los núcleos, permite aplicarlo al análisis de los efectos de la saturación.

Por su parte, la capacidad del método AFB para el análisis de las irregularidades axiales como la desalineación, flexión del eje, etc., así como la representación de las

variables en el dominio de la frecuencia propuestas en [11], se pueden extender al modelo CME bidimensional presentado en esta tesis.

Finalmente, los dos modelos se pueden aplicar al análisis de la rotura de barras y anillos de cortocircuito, las fallas de aislación entre espiras del estator, y entre éstas y la carcasa. Vinculando los modelos a un dominio mecánico con desarrollo más elaborado que los represente, también se pueden aplicar al análisis de fenómenos como las vibraciones y el desbalance.

Bibliografía

- [1] P. Donolo, C. Pezzani, C. Verucchi, and G. Bossio, “Efectos del desequilibrio de tensión en los motores de inducción con cuñas magnéticas,” *XVI Encuentro Regional Iberoamericano de Cigré (XVI ERIAC). Puerto Iguazú, Argentina. Mayo 2015.*, 2015.
- [2] A. Berset and M. Ogara, “Sistemas accionados por motores eléctricos en observación,” *Saber Como, Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI)*, vol. 85, pp. 3, 2010, 2010.
- [3] M. C. Cherta, *La Máquina Eléctrica en General*. Editores Técnicos Asociados, 1994.
- [4] *DIN 66201, Genormte Begriffe: Maschinebau*, Deutsches Institut für Normung Std.
- [5] A. Singh, B. Grant, R. DeFour, C. Sharma, and S. Bahadoorsingh, “A review of induction motor fault modeling,” *Electric Power Systems Research*, vol. 133, pp. 191 – 197, 2016.
- [6] C. P. Steinmetz, “The alternating current induction motor,” *Transactions of*

- the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XIV, no. 1, pp. 183–217, Jan 1897.
- [7] P. Krause, O. Wasynczuk, S. Sudhoff, and S. Pekarek, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*, ser. IEEE Press Series on Power Engineering. Wiley, 2013.
- [8] P. Krause, O. Wasynczuk, T. O’Connell, and M. Hasan, “Tesla’s contribution to electric machine analysis,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2016.
- [9] T. Lipo, *Introduction to AC Machine Design*. Wisconsin Power Electronics Research Center, University of Wisconsin, 1996.
- [10] H. Toliyat, S. Nandi, S. Choi, and H. Meshgin-Kelk, *Electric Machines: Modeling, Condition Monitoring, and Fault Diagnosis*. Taylor & Francis, 2012.
- [11] G. Bossio, “Modelado de las irregularidades del motor de inducción. aplicaciones en la estimación de posición y el diagnóstico de fallas.” Ph.D. dissertation, UNLP, 2004.
- [12] M. Amrhein and P. T. Krein, “Induction machine modeling approach based on 3-d magnetic equivalent circuit framework,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 25, no. 2, pp. 339–347, June 2010.
- [13] M. Friswell and J. Mottershead, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, ser. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 2013.

-
- [14] D. V. Ramana and S. Baskar, “Diverse fault detection techniques of three-phase induction motor - a review,” in *2016 International Conference on Emerging Technological Trends (ICETT)*, Oct 2016, pp. 1–8.
- [15] A. J. F. Gómez, A. Dziechciarz, and T. J. Sobczyk, “Mathematical modeling of eccentricities in induction machines by the mono-harmonic model,” in *2013 9th IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives (SDEMPED)*, Aug 2013, pp. 317–322.
- [16] A. Bellini, F. Filippetti, C. Tassoni, and G. A. Capolino, “Advances in diagnostic techniques for induction machines,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 12, pp. 4109–4126, Dec 2008.
- [17] F. Filippetti, A. Bellini, and G. A. Capolino, “Condition monitoring and diagnosis of rotor faults in induction machines: State of art and future perspectives,” in *2013 IEEE Workshop on Electrical Machines Design, Control and Diagnosis (WEMDCD)*, March 2013, pp. 196–209.
- [18] J. M. Aller, *Máquinas Eléctricas Rotativas: Introducción a la Teoría General*. Editorial Equinoccio, 2007.
- [19] S. Chapman, *Máquinas eléctricas (5a. ed.)*. Mc Graw Hill, 2012.
- [20] M. Iordache, L. Dumitriu, R. Voiculescu, D. Nicolae, N. Galan, S. Deleanu, and D. Carpenter, “Saturated induction machine steady-state performance assessment through simulations,” in *2014 International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM)*, May 2014, pp. 369–374.

-
- [21] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, and S. Umans, *Electric Machinery*. Mc Graw Hill, 2003.
- [22] T. F. Chan and L. L. Lai, "Phase balancing for a self-excited induction generator," in *DRPT2000. International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies. Proceedings (Cat. No.00EX382)*, 2000, pp. 602–607.
- [23] T. Blalock, "Monocyclic power: a novel but short-lived power distribution system," *IEEE Power and Energy Magazine*, vol. 3, no. 3, pp. 84–89, May 2005.
- [24] D. W. Novotny and T. Lipo, *Vector Control and Dynamics of AC Drives*, ser. Monographs in electrical and electronic engineering. Clarendon Press, 1996.
- [25] S. Williamson and K. Mirzoian, "Analysis of cage induction motors with stator winding faults," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104, no. 7, pp. 1838–1842, July 1985.
- [26] G. Gentile, N. Rotondale, M. Martelli, and C. Tassoni, "Harmonic analysis of induction motors with stator faults," *Electric Machines & Power Systems*, vol. 22, no. 2, pp. 215–231, 1994.
- [27] A. Bellini, F. Filippetti, G. Franceschini, C. Tassoni, and G. B. Kliman, "Quantitative evaluation of induction motor broken bars by means of electrical signature analysis," in *Conference Record of the 2000 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Fifth IAS Annual Meeting and World Conference on Indus-*

- trial Applications of Electrical Energy (Cat. No.00CH37129)*, vol. 1, Oct 2000, pp. 484–491 vol.1.
- [28] —, “Quantitative evaluation of induction motor broken bars by means of electrical signature analysis,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 37, no. 5, pp. 1248–1255, Sep 2001.
- [29] C. Concari, G. Franceschini, C. Tassoni, and A. Toscani, “Validation of a faulted rotor induction machine model with an insightful geometrical interpretation of physical quantities,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 9, pp. 4074–4083, Sept 2013.
- [30] A. R. Munoz and T. A. Lipo, “Complex vector model of the squirrel-cage induction machine including instantaneous rotor bar currents,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 35, no. 6, pp. 1332–1340, Nov 1999.
- [31] J. L. Rullán, “Diagnóstico de fallas en la máquina de corriente alterna utilizando bond graph,” Master’s thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico - México, 2006.
- [32] B. Bose, *Modern Power Electronics and AC Drives*, ser. Eastern Economy Edition. Prentice Hall PTR, 2002.
- [33] C. Caruana, G. M. Asher, K. J. Bradley, and M. Woolfson, “Flux position estimation in cage induction machines using synchronous hf injection and kalman filtering,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 39, no. 5, pp. 1372–1378, Sept 2003.

- [34] M. Marchesoni, P. Segarich, and E. Soressi, “A simple approach to flux and speed observation in induction motor drives,” in *Industrial Electronics, Control and Instrumentation, 1994. IECON '94., 20th International Conference on*, vol. 1, Sep 1994, pp. 305–310 vol.1.
- [35] B. S. and V. V. Thomas, “Characteristic signature identification of air-gap eccentricity faults using extended d-q model for three phase induction motor,” in *2015 International Conference on Condition Assessment Techniques in Electrical Systems (CATCON)*, Dec 2015, pp. 157–162.
- [36] S. Bachir, “Contribution au diagnostic de la machine asynchrone par estimation paramétrique,” Ph.D. dissertation, University of Poitiers, 2002, thèse de doctorat dirigée par Trigeassou, Jean-Claude Champenois, Gérard et Tnani, Slim Automatique Poitiers 2002.
- [37] C. Nohra, “ μ -analysis control adaptation for online stator and rotor fault diagnosis in induction machines,” in *The 26th Chinese Control and Decision Conference (2014 CCDC)*, May 2014, pp. 2875–2880.
- [38] R. M. Tallam, T. G. Habetler, and R. G. Harley, “Transient model for induction machines with stator winding turn faults,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 38, no. 3, pp. 632–637, May 2002.
- [39] I. Ouachtouk, S. E. Hani, S. Guedira, and K. Dahi, “Detection and classification of broken rotor bars faults in induction machine using k-means classifier,” in *2016 International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT)*, May 2016, pp. 180–185.

-
- [40] P. M. de la Barrera, G. R. Bossio, J. A. Solsona, and G. O. Garcia, “Model for three-phase induction motors with stator core faults,” *IET Electric Power Applications*, vol. 4, no. 8, pp. 591–602, Sept 2010.
- [41] H. A. Toliyat, T. A. Lipo, and J. C. White, “Analysis of a concentrated winding induction machine for adjustable speed drive applications. i. motor analysis,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 6, no. 4, pp. 679–683, Dec 1991.
- [42] —, “Analysis of a concentrated winding induction machine for adjustable speed drive applications. ii. motor design and performance,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 6, no. 4, pp. 684–692, Dec 1991.
- [43] J. M. Gojko, D. D. Momir, and O. B. Aleksandar, “Skew and linear rise of mmf across slot modelling-winding function approach,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 14, no. 3, pp. 315–320, Sep 1999.
- [44] G. Bossio, C. D. Angelo, J. Solsona, G. Garcia, and M. I. Valla, “A 2-d model of the induction machine: an extension of the modified winding function approach,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 19, no. 1, pp. 144–150, March 2004.
- [45] H. A. Toliyat, L. Xu, and T. A. Lipo, “A five-phase reluctance motor with high specific torque,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 28, no. 3, pp. 659–667, May 1992.
- [46] S. Nandi, “Modeling of induction machines including stator and rotor slot ef-

- fects,” *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 40, no. 4, pp. 1058–1065, July 2004.
- [47] G. Bossio, C. D. Angelo, G. Garcia, J. Solsona, and M. I. Valla, “Analysis of a position estimation strategy using a multiple-coupled circuits model of the induction motor,” in *IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society. IECON 02*, vol. 1, Nov 2002, pp. 822–827 vol.1.
- [48] H. A. Toliyat, M. S. Arefeen, and A. G. Parlos, “A method for dynamic simulation of air-gap eccentricity in induction machines,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 32, no. 4, pp. 910–918, Jul 1996.
- [49] S. Nandi, H. A. Toliyat, and A. G. Parlos, “Performance analysis of a single phase induction motor under eccentric conditions,” in *Industry Applications Conference, 1997. Thirty-Second IAS Annual Meeting, IAS '97., Conference Record of the 1997 IEEE*, vol. 1, Oct 1997, pp. 174–181 vol.1.
- [50] G. M. Joksimovic, M. D. Durovic, J. Penman, and N. Arthur, “Dynamic simulation of dynamic eccentricity in induction machines-winding function approach,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 15, no. 2, pp. 143–148, June 2000.
- [51] S. Nandi, R. M. Bharadwaj, and H. A. Toliyat, “Performance analysis of a three-phase induction motor under mixed Eccentricity condition,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 17, no. 3, pp. 392–399, Sep 2002.
- [52] N. A. Al-Nuaim and H. Toliyat, “A novel method for modeling dynamic air-

- gap eccentricity in synchronous machines based on modified winding function theory,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 13, no. 2, pp. 156–162, Jun 1998.
- [53] G. Bossio, C. D. Angelo, J. Solsona, G. O. Garca, and M. I. Valla, “Application of an additional excitation in inverter-fed induction motors for air-gap eccentricity diagnosis,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 21, no. 4, pp. 839–847, Dec 2006.
- [54] X. Luo, Y. Liao, H. Toliyat, A. El-Antably, and T. Lipo, “Multiple coupled circuit modeling of induction machines,” *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. 31, no. 2, pp. 311–318, Mar 1995.
- [55] H. A. Toliyat and T. A. Lipo, “Transient analysis of cage induction machines under stator, rotor bar and end ring faults,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 10, no. 2, pp. 241–247, Jun 1995.
- [56] R. Wieser, C. Kral, F. Pirker, and M. Schagginger, “On-line rotor cage monitoring of inverter-fed induction machines by means of an improved method,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 14, no. 5, pp. 858–865, Sep 1999.
- [57] S. J. Manolas and J. A. Tegopoulos, “Analysis of squirrel cage induction motors with broken bars and rings,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 14, no. 4, pp. 1300–1305, Dec 1999.
- [58] S. Nandi and H. A. Toliyat, “Novel frequency-domain-based technique to detect stator interturn faults in induction machines using stator-induced voltages after

- switch-off,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 38, no. 1, pp. 101–109, Jan 2002.
- [59] G. R. Bossio, C. H. D. Angelo, G. O. Garcia, J. A. Solsona, and M. I. Valla, “Effects of rotor bar and end-ring faults over the signals of a position estimation strategy for induction motors,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 41, no. 4, pp. 1005–1012, July 2005.
- [60] M. Salah, K. Bacha, and A. Chaari, “Stator current analysis of a squirrel cage motor running under mechanical unbalance condition,” in *10th International Multi-Conferences on Systems, Signals Devices 2013 (SSD13)*, March 2013, pp. 1–6.
- [61] V. Ostovic, *Dynamics of Saturated Electric Machines*. Springer - Verlag, 1989.
- [62] E. R. Lwithwaite, “Magnetic equivalent circuits for electrical machines,” *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 114, no. 11, pp. 1805–1809, November 1967.
- [63] C. J. Carpenter, “Magnetic equivalent circuits,” *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, vol. 115, no. 10, pp. 1503–1511, October 1968.
- [64] V. Ostovic, “A novel method for evaluation of transient states in saturated electric machines,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 25, no. 1, pp. 96–100, Jan 1989.
- [65] —, “A method for evaluation of transient and steady state performance in sa-

- turated squirrel cage induction machines,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. EC-1, no. 3, pp. 190–197, Sept 1986.
- [66] —, “A simplified approach to magnetic equivalent-circuit modeling of induction machines,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 24, no. 2, pp. 308–316, Mar 1988.
- [67] H. Meshgin-Kelk, J. Milimonfared, and H. A. Toliyat, “A comprehensive method for the calculation of inductance coefficients of cage induction machines,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 18, no. 2, pp. 187–193, June 2003.
- [68] L. Silva, P. de la Barrera, and G. Bossio, “Modelado de dispositivos electromagnéticos usando diagramas de enlaces,” *XIX Congreso Argentino de Control Automático*, 2010.
- [69] L. I. Silva, P. M. de la Barrera, G. R. Bossio, C. H. D. Angelo, G. O. García, and R. Leidhold, “Modeling of electromagnetic devices using bond graph: An application to faults in ac machines,” in *2010 9th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications - INDUSCON 2010*, Nov 2010, pp. 1–6.
- [70] M. Mirzayee, M. Mirsalim, H. Gholizad, and S. J. arani, “Combined 3d numerical and analytical computation approach for analysis and design of high speed solid iron rotor induction machines,” in *6th International Conference on Computational Electromagnetics*, April 2006, pp. 1–2.
- [71] P. Naderi, “Saturable cage-rotor induction machine modeling by nonlinear mag-

- netic equivalent circuit method,” in *IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Oct 2016, pp. 1738–1743.
- [72] J. Kappatou, C. Gyftakis, and A. Safacas, “A study of the effects of the stator slots wedges material on the behavior of an induction machine,” in *2008 18th International Conference on Electrical Machines*, Sept 2008, pp. 1–6.
- [73] Y. Anazawa, A. Kaga, H. Akagami, S. Watabe, and M. Makino, “Prevention of harmonic torques in squirrel cage induction motors by means of soft ferrite magnetic wedges,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 18, no. 6, pp. 1550–1552, Nov 1982.
- [74] H. Mikami, K. Ide, K. Arai, M. Takahashi, and K. Kajiwara, “Dynamic harmonic field analysis of a cage type induction motor when magnetic slot wedges are applied,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 12, no. 4, pp. 337–343, Dec 1997.
- [75] S. Wang, Z. Zhao, L. Yuan, and B. Wang, “Investigation and analysis of the influence of magnetic wedges on high voltage motors performance,” in *2008 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*, Sept 2008, pp. 1–6.
- [76] R. Curiac and H. Li, “Improvements in energy efficiency of induction motors by the use of magnetic wedges,” in *2011 Record of Conference Papers Industry Applications Society 58th Annual IEEE Petroleum and Chemical Industry Conference (PCIC)*, Sept 2011, pp. 1–6.
- [77] K. N. Gyftakis, P. A. Panagiotou, and J. Kappatou, “The influence of semi-

- magnetic wedges on the electromagnetic variables and the harmonic content in induction motors,” in *2012 XXth International Conference on Electrical Machines*, Sept 2012, pp. 1469–1474.
- [78] G. Madescu, M. Greconici, M. Biriescu, and M. Mot, “Effects of stator slot magnetic wedges on the induction motor performances,” in *2012 13th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM)*, May 2012, pp. 489–492.
- [79] E. Giraldo, C. Ruschetti, C. Verucchi, G. Bossio, and J. Bossio, “Optimización de la eficiencia en motores de inducción de ranuras semiabiertas mediante empleo de cuñas magnéticas,” in *2016 IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON)*, June 2016, pp. 1–6.
- [80] D. Gómez, A. Rodríguez, I. Villar, A. L. de Heredia, I. Etxeberria-Otadui, and Z. Zhu, “Experimental validation of an enhanced permeance network model for embedded magnet synchronous machines,” *Electric Power Systems Research*, vol. 140, pp. 836 – 845, 2016.
- [81] S. Sudhoff, B. Kuhn, K. Corzine, and B. Branecky, “Magnetic equivalent circuit modeling of induction motors,” *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 2, pp. 259–270, June 2007.
- [82] S. Suo, “Modeling and validation of a fault mitigation method in induction motor-drive systems using magnetic equivalent circuits,” Master’s thesis, Marquette University, 2009.

- [83] T. J. Sobczyk, K. Weinreb, T. Wegiel, M. Sulowicz, and A. Warzecha, "Modeling saturation of main magnetic circuit of cage induction motors in presence of eccentricity," in *4th IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, 2003. SDEMPED 2003.*, Aug 2003, pp. 301–306.
- [84] H. Meshgin-Kelk, A. Eghbali, and H. A. Toliyat, "Modeling and analysis of cage induction motors under rotor misalignment and air gap eccentricity," in *Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005 Industry Applications Conference, 2005.*, vol. 2, Oct 2005, pp. 1324–1328 Vol. 2.
- [85] P. Naderi, "Inter-turn short-circuit fault detection in saturable squirrel-cage induction motor using magnetic equivalent circuit model," *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 35, no. 1, pp. 245–269, 2016.
- [86] E. Sarani, K. Abbaszadeh, and M. Ardebili, "Modeling and simulation of turn-fault and unbalance magnetic pull in induction motor based on magnetic equivalent circuit method," in *2005 International Conference on Electrical Machines and Systems*, vol. 1, Sept 2005, pp. 52–56 Vol. 1.
- [87] G. Y. Sizov, C.-C. Yeh, and N. A. O. Demerdash, "Magnetic equivalent circuit modeling of induction machines under stator and rotor fault conditions," in *2009 IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, May 2009, pp. 119–124.
- [88] H. Meshgin-Kelk, J. Milimonfared, and H. A. Toliyat, "Interbar currents and

- axial fluxes in healthy and faulty induction motors,” in *Conference Record of the 2002 IEEE Industry Applications Conference. 37th IAS Annual Meeting (Cat. No.02CH37344)*, vol. 1, Oct 2002, pp. 194–198 vol.1.
- [89] —, “Interbar currents and axial fluxes in healthy and faulty induction motors,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 40, no. 1, pp. 128–134, Jan 2004.
- [90] J. Faiz, M. Keravand, and M. Ghasemi-Bijan, “Impact of rotor inter-turn short circuit fault upon performance of a wound rotor induction motor,” in *2015 Intl Aegean Conference on Electrical Machines Power Electronics (ACEMP), 2015 Intl Conference on Optimization of Electrical Electronic Equipment (OPTIM) 2015 Intl Symposium on Advanced Electromechanical Motion Systems (ELECTROMOTION)*, Sept 2015, pp. 681–686.
- [91] J. Faiz, M. Keravand, M. Ghasemi-Bijan, S. M. Cruz, and M. Bandar-Abadi, “Impacts of rotor inter-turn short circuit fault upon performance of wound rotor induction machines,” *Electric Power Systems Research*, vol. 135, pp. 48 – 58, 2016.
- [92] P. Naderi and A. Shiri, “Rotor/stator inter-turn short circuit fault detection for saturable wound-rotor induction machine by modified magnetic equivalent circuit approach,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2017.
- [93] R. Roshanfekar and A. Jalilian, “Experimental validation of mec modeling for

- stator and rotor winding faults in wrims,” in *2014 International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, Sept 2014, pp. 1601–1607.
- [94] —, “Analysis of rotor and stator winding inter-turn faults in {WRIM} using simulated {MEC} model and experimental results,” *Electric Power Systems Research*, vol. 119, pp. 418 – 424, 2015.
- [95] L. I. Silva, P. M. de la Barrera, R. Leidhold, G. R. Bossio, and C. H. D. Angelo, “Multi-domain model of stator core faults using bond graph,” in *8th IEEE Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics Drives*, Sept 2011, pp. 592–597.
- [96] M. Poncio, P. de la Barrera, and G. Bossio, “Extensión del método de aproximación de funciones de bobinados al cálculo de las derivadas de las inductancias de un motor de inducción,” *25° Congreso Argentino de Control Automático*, 2016.
- [97] —, “Derivación analítica de las permeancias de un motor de inducción para su circuito magnético equivalente,” *25° Congreso Argentino de Control Automático*, 2016.
- [98] M. Poncio, P. de la Barrera, C. Pezzani, and G. Bossio, “Calculation of electric machine inductances using a geometric approach,” *XVI Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, 2015.
- [99] M. Poncio, P. de la Barrera, L. Silva, and G. Bossio, “Calculation of electric machine inductances based on its magnetic equivalent circuit,” *XVI Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, 2015.

-
- [100] M. Poncio, P. de la Barrera, C. Pezzani, L. Silva, and G. Bossio, “Inductance calculation for electric machines with semi-closed slots,” *XVI Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, 2015.
- [101] N. Balabanian, T. Bickart, and S. Seshu, *Teoría de redes eléctricas*. Reverté, 1972.
- [102] A. S. Langsdorf, *Theory of Alternating Current Machinery*. McGraw-Hill, 2001.

Apéndice A

Diferencia de potencial magnético en el entrehierro

En la sección de la MI representada en la Fig. 2.3(a), la FMM inducida por la fase a en la trayectoria de Ampere está dada por (2.57). Esa FMM, que es proporcional a la distribución de bobinados graficada en la Fig. 2.3(b), tiene valor medio espacial no nulo.

En cambio, la FMM inducida por la misma fase en el desarrollo completo del entrehierro tiene valor medio espacial nulo, porque este último no rodea por separado a los lados activos de la bobina, como sí lo hace la trayectoria de Ampere en las posiciones del lado radial \overline{cd} pertenecientes al intervalo $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Esta última FMM puede entonces calcularse como:

$$\mathcal{F}_{sa}(\phi^s, i_{sa}) = \left[n_{sa}(\phi^s) - \langle n_{sa}(\phi^s) \rangle \right] i_{sa}. \quad (\text{A.1})$$

La expresión entre corchetes dada en (A.1) es un parámetro de la máquina, y la FMM una variable proporcional a él, graficada con color rojo en la Fig. 2.12(b).

Similarmente, puede calcularse la DPM en el entrehierro debida a la corriente en esa misma fase a partir de la función de su bobinado aplicando (2.81). La función del bobinado de la fase a es un parámetro de la máquina, y la DPM una variable proporcional a él, graficada con color azul en la Fig. 2.12(b) para una posición particular del rotor.

La Fig. 2.12(b) muestra, entonces, las gráficas de dos parámetros propios de la máquina, uno de los cuales es la expresión entre corchetes dada en (A.1), proporcional a la FMM inducida por la fase a , y el otro la función del bobinado de esa fase, proporcional a la DPM que produce en el entrehierro. Como puede verse, las gráficas de ambos parámetros son espacialmente discontinuas y la segunda presenta además un corrimiento en ordenadas, correspondiente a la posición del rotor para la que fue calculada, que es la representada en la Fig. 2.11(c).

Esta discontinuidad espacial se debe a la restricción R1 impuesta al método AFB, según la cual la permeabilidad de los núcleos debe considerarse infinita, resultando equipotenciales a cada lado de la bobina de la fase a , y la DPM una función de dos escalones, cada uno de valor constante.

Si sólo está energizada la fase a , se puede calcular el PM en el núcleo del estator resolviendo el circuito de la Fig. A.1. En éste, el nodo con PM \mathcal{U}_s representa al núcleo del estator y el nodo con PM \mathcal{U}_r al del rotor, adoptado como cero de referencia.

Los núcleos de estator y del rotor están conectados por dos ramas magnéticas, cada una con una fuente de FMM en serie con la permeancia del arco de entrehierro al que enfrenta. Cada una de estas dos ramas magnéticas corresponde a un intervalo angular de media vuelta en la sección de la MI.

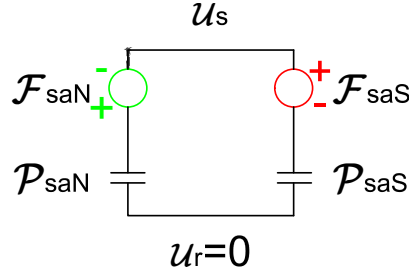


Figura A.1: Circuito magnético inducido por la fase a en las figuras 2.3 y 2.11.

Las polaridades de las fuentes de FMM y DPM en las permeancias del entrehierro en el circuito corresponden a las indicadas en las secciones de la MI representadas en la Fig. 2.11.

La fuente \mathcal{F}_{saN} induce flujo desde el estator hacia el rotor, actuando como polo inductor *Norte*, y la fuente \mathcal{F}_{saS} induce flujo desde el rotor hacia el estator, actuando como polo inductor *Sur*.

De la solución del circuito, el PM en el núcleo del estator resulta:

$$\mathcal{U}_s(\phi^s, \theta, i_{sa}) = -\mathcal{F}_{sa}(\phi^s, i_{sa}) + \Delta \mathcal{U}_{sr}(\phi^s, \theta, i_{sa}), \quad (\text{A.2})$$

donde los dos últimos términos son funciones espacialmente discontinuas, cuyas gráficas son proporcionales a las mostradas en la Fig. 2.12(b).

Sustituyendo (A.1) y (2.81) en (A.2), el PM en el núcleo del estator resulta:

$$\mathcal{U}_s(\phi^s, \theta, i_{sa}) = \left[-\left(n_{sa}(\phi^s) - \langle n_{sa}(\phi^s) \rangle \right) + N_{sa}(\phi^s, \theta) \right] i_{sa}, \quad (\text{A.3})$$

siendo la expresión entre corchetes también una función espacialmente discontinua.

Como se analizó en la Sec. 2.3.3, la proximidad del rotor al polo *Sur* (prpS) produce un corrimiento positivo en ordenadas de la gráfica de función de bobinados,

resultando entonces la desigualdad:

$$N_{sa}(\phi^s, \theta) \Big|_{\text{prpS}} > \left(n_{sa}(\phi^s) - \langle n_{sa}(\phi^s) \rangle \right), \quad (\text{A.4})$$

que puede notarse comparando las dos gráficas de la Fig. 2.12(b).

La sustitución de (A.4) en (A.3), hace que la expresión entre corchetes en esa última sea positiva, teniendo entonces el PM inducido por la fase a en el núcleo del estator el mismo signo de la corriente.

Análogamente, si el rotor se encuentra próximo al polo N , como lo representa la Fig. 2.11(e), la expresión entre corchetes en (A.3) resulta negativa y el PM inducido por la fase a en el núcleo del estator tiene signo contrario al de la corriente.

Generalizando, el PM inducido por cada una de las tres fases en el núcleo del estator tendrá una componente en fase con su corriente si el rotor se aproxima al polo Sur , o en oposición de fase si se aproxima al $Norte$.

Las ranuras simétricamente distribuidas respecto del plano neutro de cada arrollamiento, al no producir corrimiento de la gráfica de la función de bobinados, tampoco tienen efecto sobre el PM del núcleo del estator.

Apéndice B

Parámetros de cálculo y simulación

B.1 Equivalencia entre los dos modelos

En la Tabla B.1 están dados los valores de las permeancias del modelo CME para aplicar a su red magnética las mismas restricciones R1 y R2 impuestas al método AFB, para que los resultados sean comparables.

Tabla B.1: Permeancias del CME para su equivalencia con el método AFB.

\mathcal{P}_{sy}	∞	Permeancia del yugo del estator.
\mathcal{P}_{st}	∞	Permeancias de los dientes del estator.
\mathcal{P}_{ry}	∞	Permeancia del yugo del rotor.
\mathcal{P}_{rt}	∞	Permeancias de los dientes del rotor.
$\mathcal{P}_{s\ tan}$	0	Permeancias de dispersión tangencial del estator.
$\mathcal{P}_{r\ tan}$	0	Permeancias de dispersión tangencial del rotor.

En el modelo CME, R1 se implementa asignando valor infinito a las permeancias de las ramas correspondientes a los yugos y dientes, lo que equivale a reemplazarlas por conexiones puente; y R2 asignando valor cero a las permeancias de las ramas tangenciales del entrehierro, lo que equivale a su apertura.

B.2 Parámetros del motor modelado

En la Tabla B.2 están dados los valores de los parámetros básicos que definen la geometría de los núcleos del estator y del rotor sin irregularidades, necesarios para calcular tanto las inductancias con el método AFB como las permeancias con el modelo CME.

En ausencia de irregularidades, el entrehierro es liso y uniforme, y la función del entrehierro $g(\phi^s, \theta)$ es constante e igual a su valor medio g_0 sin considerar los ranurados del estator y del rotor.

En la Tabla B.3 están dados los valores de los parámetros del arrollamiento trifásico del estator.

Tabla B.2: Geometría de los núcleos.

S_s	48		Número de ranuras del estator.
S_r	40		Número de ranuras del rotor.
r	$75e - 3$	[m]	Radio medio del entrehierro.
g_0	$450e - 6$	[m]	Entrehierro.
l	$100e - 3$	[m]	Longitud de los núcleos del estator y del rotor.

Tabla B.3: Parámetros de los arrollamientos del estator.

N_s	18		Número de espiras por bobina.
R_s	1.1912	$[\Omega]$	Resistencia por fase.
L_{sl}	$784.78e - 6$	$[H]$	Inductancia de dispersión por fase.

Tabla B.4: Parámetros de los lazos del rotor.

R_b	$26e - 6$	$[\Omega]$	Resistencia de una barra.
L_b	0		Inductancia de dispersión de una barra.
R_e	$1.56e - 6$	$[\Omega]$	Resistencia de un segmento de aro de la jaula.
L_e	$30e - 9$	$[H]$	Inductancia de dispersión de un segmento de aro.
\mathcal{P}_e	$30e - 9$	$[H]$	Permeancia de dispersión de un segmento de aro.

El número de espiras por bobina es necesario para calcular las inductancias propias de las fases del estator, mutuas entre las fases y entre éstas y los lazos del rotor con el método AFB; así como las FMM y los enlaces de flujo con el modelo CME.

La resistencia e inductancia de dispersión por fase son datos necesarios para la simulación de ensayos o de marcha con el MCMA y el modelo CME.

En la Tabla B.4 están dados los valores de los parámetros del núcleo del rotor y de la jaula de ardilla.

La resistencia de las barras es un dato necesario para la simulación de ensayos y de marcha con el MCMA y el modelo CME, mientras que la inductancia de dispersión lo es sólo para el MCMA. El modelo CME representa la dispersión de flujo en las barras con la permeancia $\mathcal{P}_{r \tan}$ dada en la Tabla B.1. Adoptando en el CME la restricción

Tabla B.5: Parámetros mecánicos.

J	$40e - 3$	[kgm ²] Momento de inercia del rotor.
B	$4e - 3$	[Nms] Fricción viscosa.

Tabla B.6: Parámetros de la alimentación eléctrica.

$V_{s\ rms}$	220/380	[V] Valor eficaz de tensión nominal del estator.
f	50	[Hz] Frecuencia de alimentación.

R1 impuesta al método AFB, según la cual la permeabilidad de los núcleos del estator y del rotor debe considerarse infinita, la inductancia L_b y la permeancia $\mathcal{P}_{r\ tan}$ son numéricamente iguales, al ser enlazadas por una sola espira. El valor adoptado para ambas es cero.

Por su parte, la resistencia de los segmentos de anillo de cortocircuito es un dato necesario para la simulación de ensayos y de marcha con el MCMA y el modelo CME, mientras que la inductancia de dispersión lo es sólo para el MCMA. El modelo CME tiene en cuenta el flujo disperso de los anillos con la permeancia \mathcal{P}_e . La inductancia L_e y la permeancia \mathcal{P}_e son numéricamente iguales, al ser enlazadas por una sola espira.

En la Tabla B.5 están dados los valores de los parámetros que determinan la dinámica del dominio mecánico.

Finalmente, en la Tabla B.6 están dados los valores de los parámetros nominales de alimentación eléctrica.