

**DESARROLLO DE SIMULACIONES NUMÉRICAS PARA
ESTUDIAR LA DINÁMICA DE UN CONCEPTO DE
X-HALE-UAV: UN ENFOQUE BASADO EN SISTEMAS
MULTICUERPO**

por

Luciano Miguel Nitardi

Tesis presentada para la obtención del grado de Magíster en
Ciencias de la Ingeniería
Mención: Ingeniería Mecánica



FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

Junio 2018

**DESARROLLO DE SIMULACIONES NUMÉRICAS PARA
ESTUDIAR LA DINÁMICA DE UN CONCEPTO DE X-
HALE-UAV: UN ENFOQUE BASADO EN SISTEMAS
MULTICUERPO**

por

Luciano Miguel Nitardi

Dr. Bruno Roccia
Director

Dr. Sergio Preidikman
Co-Director

APROBADA POR:

Dr. Martin Alejo Pucheta
Jurado

Dr. Ronald Julián O'Brien
Jurado

Dr. Juan Manuel Fontana
Jurado

Dr. Bruno Roccia
Director

Dr. David de Yong
Secretario de Posgrado FI-UNRC

Dra. Gabriela Maldonado
Directora de la Secretaria de Posgrado y Cooperación

Junio 2018

*Dedicado a mi abuelo Reinaldo Ramón Cortez (1935-2015)
y a mi familia.*

*Aprender sin pensar es esfuerzo perdido;
pensar sin aprender es peligroso.*
Confucio, Siglo VI A.D.C.

AGRADECIMIENTOS

Al director de la tesis Dr. Bruno Antonio Roccia, cuya guía y sabio consejo han hecho este proyecto posible. Quiero expresar mi más sentido agradecimiento por confiar en mí, sin haberme conocido antes.

Al Dr. Sergio Preidikman, mi agradecimiento por ser co-director de esta tesis, y por haber despertado en mí la curiosidad científica.

A mis padres, Liliana María Cortez y Miguel Ángel Nitardi, cuyo consejo desinteresado y sincero sirven de faro en mi vida.

A la familia Bianco, especialmente Alejandro, el cual me brindó todo su apoyo y palabras de aliento.

A la Universidad Nacional de Río Cuarto, al Grupo de Matemática Aplicada y al Grupo de Electrónica Aplicada.

A las personas que me brindaron su ayuda y apoyo, Mónica Buckler, Lic. Edgardo Sosa, Ing. María Elena Araus, Prof.^a Vanina Magnin, Prof.^a Ivana Edith Torri Rubio, Lic. Javier Lomello, Prof.^a Adriana Mardiza, Ing. Gustavo Buttiero, Ing. Mario Marchesio, Ing. Walter Tonini, Dr. Luis Ceballos y Dr. Marcos Verstraete.

TABLA DE CONTENIDOS

Capítulo 1: **Introducción y revisión Bibliográfica.**

1.1	Introducción.	1
1.2	Revisión Bibliográfica	3
1.3	Objetivos	8
1.4	Organización de la Tesis.	9
1.5	Aspectos originales del trabajo desarrollado	10

Capítulo 2: **Modelo Dinámico.**

2.1	Generalidades.	11
2.2	Descripción del modelo.	11
2.3	Ecuaciones de restricción.	13
2.4	Fuerzas Generalizadas.	18
2.4.1	Fuerzas generalizadas debida a resortes lineales.	19
2.4.2	Fuerzas generalizadas debida a los amortiguadores.	20
2.4.3	Torque generalizados-resorte de torsión.	20
2.4.4	Fuerzas generalizadas campo gravitacional	21
2.5	Ecuaciones de movimientos.	21
2.6	Modelo de ráfaga.	23
2.7	Modelo de daño alar.	24

Capítulo 3: **Implementación computacional.**

3.1	Generalidades.	25
3.2	Introducción.	25
3.3	Reducción de índice.	27
3.3.1	Predictor corrector 4to orden de Hamming.	28
3.3.2	Esquema de integración Runge-Kutta de 4 ^{to} orden.	31
3.3.3	Diferencia central (DC).	33
3.3.4	Métodos de estabilización.	37
3.3.4.1	Técnica de Baumgarte.	38
3.3.4.2	Técnica de proyección de coordenadas.	39
3.4	Integración directa de las DAEs de índice 3.	41
3.4.1	Linealización de las ecuaciones de movimiento.	42
3.4.2	Método de Newmark.	44
3.4.3	Método de Hilber-Hunghes-Taylor (HHT).	48

3.4.4 Método α -generalizado.	50
3.5 Condiciones iniciales.	53
3.5.1 Generalidades de posición y orientación.	54
3.5.2 Dimensionamiento.	56
3.5.3 Configuración inicial.	56
3.5.4 Implementación computacional.	60
Capítulo 4: Resultados numéricos.	
4.1 Introducción.	63
4.2 Verificación.	63
4.2.1 Caso I: Oscilador Armónico.	63
4.2.2 Caso II: Rotación del Fuselaje	65
4.2.3 Caso III: Ráfaga (Desplazamiento de apoyo)	67
4.2.4 Caso IV: Péndulo Físico.	70
4.2.5 Caso V: Modo Simétrico y Antisimétrico	74
4.2.6 Caso VI: Sistema de tres Barras	79
4.3 Dinámica de un modelo conceptual X-HALE-UAV.	83
4.3.1 Análisis Energético.	84
4.3.2 Dinámica X-HALE-UAV: amortiguadores activos.	88
4.3.3 Efecto de ráfaga ascendente.	93
4.3.4 Daño en conexiones alares.	95
4.3.5 Ráfaga “+” daño estructural en conexión alar.	99
4.3.6 Dinámica de un modelo de X-HALE-UAV: 32 cuerpos.	104
Capítulo 5: Conclusiones y trabajos futuros.	
5.1 Conclusiones	111
5.2 Trabajos futuros	112
ANEXO A: Ecuaciones de movimiento para el X-HALE-UAV.	
A.1 Generalidades	115
A.2 Posición y velocidad de un punto genérico en el <i>j-esimo</i> cuerpo.	115
A.3 Ecuación de movimiento para el <i>j-esimo</i> cuerpo.	117
ANEXO B: Linealización de las ecuaciones de movimiento.	
B.1 Generalidades.	121
B.2 Linealización de las ecuaciones de movimiento.	121
Referencias.	125

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1:	Diseño conceptual de aeronaves extremadamente livianas y flexibles.	2
Figura 1-2:	Prototipo HP03 Helios.	4
Figura 1-3:	Modelos de aeronave utilizada para investigación I.	7
Figura 1-4:	Modelos de aeronave utilizada para investigación II.	7
Figura 2-1:	Modelo conceptual y definición de sistemas de referencia.	12
Figura 2-2:	Esquema genérico de dos cuerpos vinculados en un punto.	15
Figura 2-3:	Esquema de vinculación <i>hinge joint</i> .	16
Figura 2-4:	Esquema de vinculación específico.	17
Figura 2-5:	Definición de la fuerza ejercida por el s -ésimo resorte y s -ésimo amortiguador sobre el vértice u del fuselaje.	19
Figura 2-6:	Definición de momento por el resorte de torsión s -ésimo sobre la s -ésima ala.	21
Figura 2-7:	Esquema de desplazamiento base.	23
Figura 3-1:	Orientación predefinida.	55
Figura 3-2:	Coordenadas centro de masa ala central.	57
Figura 3-3:	Análisis en un par de alas.	58
Figura 3-4:	Coordenadas del centro de masa del tren de aterrizaje.	59
Figura 3-5:	Coordenadas del centro de masa del motor.	59
Figura 3-6:	Esquema del código computacional.	61
Figura 3-7:	Diagrama de flujo asociado a los <i>Loops</i> de integración.	62
Figura 4-1:	Configuración equivalente a sistema masa resorte convencional.	64
Figura 4-2:	Respuesta sistema fuselaje montado en 4 resortes verticales.	64
Figura 4-3:	Configuración inicial del caso de estudio II.	65
Figura 4-4:	Posición del centro de masa para los integradores: Diferencia Central, Hamming, Runge-Kutta.	66

Figura 4-5:	Posición del centro de masa para los integradores: Newmark sin amortiguación, Newmark con amortiguación, HHT, Alpha generalizado, Arguello y SIMPACT.	66
Figura 4-6:	Posición del centro de masa para los integradores evaluados y SIMPACT.	67
Figura 4-7:	Posición del centro de masa para los integradores evaluados y SIMPACT. Configuración con amortiguadores activos.	67
Figura 4-8:	Fuselaje conectado a cuatro resortes en la dirección z.	68
Figura 4-9:	Respuesta numérica y analítica configuración 1.	69
Figura 4-10:	Respuesta numérica y analítica configuración 2.	69
Figura 4-11:	Versión simplificada del sistema dinámico y Péndulo físico.	70
Figura 4-12:	Respuesta versión simplificada de la aeronave.	71
Figura 4-13:	Desviaciones numéricas a nivel de la posición en las ecuaciones de restricción ala-ala.	73
Figura 4-14:	Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad en las ecuaciones de restricción ala-ala.	74
Figura 4-15:	Configuración simétrica y antisimétrica.	75
Figura 4-16:	Respuesta configuración simétrica.	75
Figura 4-17:	Respuesta configuración antimétrica.	76
Figura 4-18:	Desviaciones numéricas a nivel de la posición: configuración simétrica.	78
Figura 4-19:	Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad: configuración simétrica.	78
Figura 4-20:	Desviaciones numéricas a nivel de la posición: configuración antisimétrica.	79
Figura 4-21:	Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad: configuración antisimétrica.	79
Figura 4-22:	Sistema dinámico simplificado (fuselaje-ala central-alas externas).	80
Figura 4-23:	Sistema de tres barras conectado a tierra por 4 resortes.	80
Figura 4-24:	Desplazamiento del centro de masa del fuselaje y de la barra central del STB.	81

Figura 4-25:	Angulo relativo entre ala central-ala (X-HALE-UAV) y entre barra central-barra lateral (STB).	81
Figura 4-26:	Desviaciones numéricas a nivel de la posición en las ecuaciones de restricción ala derecha-ala central.	82
Figura 4-27:	Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad en las ecuaciones de restricción ala derecha-ala central.	83
Figura 4-28:	Configuración inicial simétrica X-HALE.	84
Figura 4-29:	Energía mecánica total sistema X-HALE.	85
Figura 4-30:	Coordenadas del centro de masa del fuselaje y Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas.	86
Figura 4-31:	Restricción a nivel de la posición: conexión y orientación, alas 3 y 4.	87
Figura 4-32:	Restricción a nivel de la velocidad: conexión y orientación, alas 3 y 4.	87
Figura 4-33:	Configuración inicial antisimétrica.	88
Figura 4-34:	Evolución temporal del centro de masa del fuselaje.	89
Figura 4-35:	Rotaciones del fuselaje en la configuración antisimétrica.	90
Figura 4-36:	Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (configuración simétrica y antisimétrica).	91
Figura 4-37:	Desviaciones numéricas a nivel de la posición (configuración antisimétrica, conexión alar 4-5).	92
Figura 4-38:	Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad (configuración antisimétrica, conexión alar 4-5).	93
Figura 4-39:	Perfiles de ráfaga.	93
Figura 4-40:	Desplazamiento relativo del centro de masa del fuselaje.	94
Figura 4-41:	Coordenadas angulares relativas en las articulaciones alares.	95
Figura 4-42:	Daño alar y Rotación del fuselaje.	96
Figura 4-43:	Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas.	98
Figura 4-44:	Ráfaga “+” daño estructural: Coordenadas relativas y absolutas del centro de masa.	101
Figura 4-45:	Ráfaga “+” daño estructural, coordenadas angulares relativas en las conexiones alares.	103

Figura 4-46: Ráfaga “+” daño estructural, desviaciones numéricas a nivel de la posición para la conexión 4-5.	103
Figura 4-47: Ráfaga “+” daño estructural, desviaciones numéricas a nivel de la velocidad para la conexión 4-5.	104
Figura 4-48: Configuración inicial simétrica (32 cuerpos), X-HALE-UAV.	105
Figura 4-49: Configuración inicial antisimétrica (32 cuerpos), X-HALE-UAV.	105
Figura 4-50: X-HALE-UAV. Desplazamiento del fuselaje y rotación del fuselaje.	107
Figura 4-51: Coordenadas angulares relativas X-HALE-UAV, configuración simétrica y antimétrica.	109
Figura 4-52: Desviaciones numéricas a nivel de la posición para la inculación alar 7–8, configuración antisimétrica X-HALE-UAV.	109
Figura 4-53: Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad para la vinculación alar 7–8, configuración antisimétrica X-HALE-UAV.	110

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3-1:	Algoritmo de Diferencia Central (sistemas lineales).	34
Tabla 3-2:	Algoritmo de Diferencia Central (ODEs no lineales y DAEs de índice 1).	36
Tabla 3-3:	Algoritmo de Diferencia Central.	37
Tabla 3-4:	Esquemas numéricos basados en el algoritmo de Newmark.	45
Tabla 3-5:	Algoritmo de Newmark.	48
Tabla 4-1:	Parámetros de la condición inicial.	69
Tabla 4-2:	Periodo y Amplitud de oscilación (Numérico y Analítico).	70
Tabla 4-3:	Desviaciones máximas absolutas a nivel de la posición entre las alas derecha-central: configuración simétrica.	76
Tabla 4-4:	Desviaciones máximas absolutas a nivel de la velocidad entre las alas derecha-central: configuración simétrica.	77
Tabla 4-5:	Desviaciones máximas absolutas a nivel de la posición entre las alas derecha-central configuración antisimétrica.	77
Tabla 4-6:	Desviaciones máximas absolutas a nivel de la velocidad entre las alas derecha-central: configuración antisimétrica.	77

RESUMEN

Una de las áreas más activas de investigación multidisciplinaria es el estudio de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) extremadamente flexibles (X). Estos conceptos futuristas son una alternativa viable para reemplazar a los actuales satélites de comunicación. La flexibilidad estructural de la aeronave desplazándose en un fluido, conducen a un sistema altamente no lineal caracterizado por un fuerte acoplamiento entre el flujo no estacionario tridimensional y la estructura del X-HALE-UAVs.

En este trabajo de tesis se presenta el desarrollo de una plataforma de simulación numérica que tiene como objetivo estudiar y caracterizar el comportamiento dinámico de un concepto simplificado de un X-HALE-UAV. La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos conectados entre sí por articulaciones flexibles. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del UAV se derivan mediante un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante este enfoque son del tipo diferenciales-algebraicas, conocidas por sus siglas en inglés como DAE (Differential-Algebraic Equations), cuyo índice es 3. Debido a la naturaleza altamente no lineal de las ecuaciones de movimiento, la solución del sistema de DAEs se realiza en forma numérica, simultánea e interactiva en el dominio del tiempo mediante diferentes esquemas de integración.

Con el objetivo de evaluar la confiabilidad de la herramienta de simulación desarrollada se la sometió a un proceso de verificación, que consiste principalmente en: *i*) reproducir soluciones de problemas bien documentados en la literatura; y *ii*) realizar comparaciones numéricas con resultados obtenidos con otros programas de computadoras, ampliamente utilizados en mecánica computacional, tales como SIMPACT.

Entre los resultados más relevantes de este trabajo de tesis se puede mencionar que la formulación desarrollada y su implementación computacional son aptos para estudiar, con gran detalle, la respuesta dinámica no lineal de sistemas aeronáuticos del tipo X-HALE-UAVs caracterizados por grandes deflexiones alares. Adicionalmente, se llevaron a cabo simulaciones numéricas incorporando: *i*) efectos de ráfagas, detectándose un aumento de amplitud en la oscilación, respecto a la respuesta sin ráfaga; y *ii*) daño estructural en las conexiones alares, lo cual se refleja, principalmente, en la generación de rotaciones laterales en el fuselaje. Si bien, no existen modelos reales para validar la herramienta computacional, los resultados encontrados permiten concluir que la

plataforma de simulación numérica desarrollada constituye una excelente alternativa para estudiar la dinámica de aeronaves extremadamente flexibles tipo HALE-UAV.

Los datos resultantes en este trabajo se utilizarán como punto de partida para la elaboración de modelos dinámicos más complejos basados en un enfoque multicuerpo flexible y que permitan: *i*) ser integrados a una plataforma de co-simulación aeroelástica; y *ii*) estudiar la interacción fluido-estructura de aviones muy flexibles, bajo diferentes configuraciones de vuelo, e inmersos en flujos subsónicos.

ABSTRACT

Recently, a new generation of unmanned-air-vehicles (UAVs) called extremely flexible (X) high-altitude long-endurance (HALE) aircrafts are being actively studied today by a large number of government institutions, private companies and universities around the world. These new futuristic concepts are destroyers of old paradigms as they have been conceived as flexible and mobile aerospace platforms, being a viable alternative to current communications satellites. The presence of highly flexible structural members moving in a fluid medium leads to a highly non-linear system characterized by a strong coupling between the three-dimensional unsteady flow and the structure of the X-HALE-UAVs.

In this Master thesis, it is presented the development of a numerical simulation framework which aims to study and characterize the dynamic behavior of a X-HALE-UAV concept. The aircraft is modeled as a collection of rigid bodies connected by flexible joints. The motion equations for the entire UAV are derived by using an energetic approach based on Lagrange's equations for constrained systems, which are differential-algebraic (DAEs) of index-3. Because of the highly non-linear nature of the set of DAEs, they are solved numerically, simultaneously and interactively in the time domain by using different integration schemes in order to assess the accuracy and robustness of different integrators.

In order to assess the reliability of the numerical tool developed, a verification process was conducted, which consists mainly of: *i*) reproducing well-documented problem solutions available in the literature; and *ii*) performing numerical comparisons against results obtained by using other computer programs, widely used in computational mechanics, such as SIMPACT.

Among the most relevant results associated to this thesis, it can be mentioned that both the formulation as well as its computational implementation are well-suited for studying, with great detail, the non-linear dynamic response of aeronautical systems-like X-HALE-UAVs featured by large wing deflections. Additionally, numerical simulations were carried out by incorporating: *i*) gust effects, which produces an increase in the oscillation amplitude regarding the reference response (without gust effect); and *ii*) structural damage in the wing connections, which are mainly reflected as lateral oscillations on the fuselage. Although there are no real models to validate the computational tool, the results

found allow concluding that the numerical simulation platform developed is an excellent alternative to study the dynamics of extremely flexible HALE-UAV aircrafts.

The resulting data obtained in this work will be used as a starting point for the development of more complex dynamic models based on a flexible multibody system approach and that allow: *i)* to be integrated into an aeroelastic co-simulation framework; and *ii)* to investigate the fluid-structure interaction of very flexible aircrafts, under different flight configurations, and immersed in low-subsonic flows.

Capítulo 1

Introducción y Revisión Bibliográfica

1.1 Introducción

En la última década, el uso de redes de comunicación e internet se ha extendido masivamente alrededor del mundo, lo cual se refleja en el aumento significativo de la cantidad de satélites orbitando el planeta. Sin embargo, su costo, la carencia de cobertura y su difícil mantenimiento, han motivado la búsqueda de diseños más eficientes. La opción más prometedora, son los aviones que vuelan a gran altitud y que operan con gran autonomía (High-Altitude Long Endurance, HALE), puesto que son menos costosos, su área de cobertura puede ser ajustada fácilmente y el mantenimiento es mucho más simple comparada con la de los satélites [1]. Aplicaciones adicionales involucran misiones de inteligencia, vigilancia y reconocimiento (Intelligence Surveillance & Reconnaissance, ISR) [2], y recolección de datos atmosféricos [3]. Debido a los requisitos de tales misiones, esta clase de aeronaves están caracterizadas por alas con una alta relación de aspecto (alas muy largas), y si existen, fuselajes muy esbeltos; lo que resulta en un vehículo muy flexible. Años de investigación y desarrollo por Universidades e instituciones gubernamentales de Norteamérica, tales como *The National Aeronautics and Space Administration* (NASA), *National Science Foundation* (NSF), y *The Defense Advanced Research Projects Agency* (DARPA), entre otras, han conducido al desarrollo de modernas máquinas voladoras tipo HALE extremadamente livianas y flexibles (ver Figura 1-1). En la carrera por obtener HALE-UAVs (Unmanned Aerial Vehicle, UAV) eficientes, se entendió que los análisis tradicionales basados en modelos aerolásticos lineales no son adecuados para estos sistemas aeronáuticos no convencionales; motivando de esta manera, el desarrollo de herramientas numéricas aptas para estudiar fenómenos aeroelásticos complejos, que surgen como consecuencia de las grandes deformaciones que experimentan las alas durante condiciones de operación normales [4].

El alto desempeño aerodinámico (autonomía de vuelo) necesario para volar a tan elevada altitud y llevar a cabo misiones de larga duración implica, la utilización de alas largas y por lo tanto muy flexibles [5]. *Un análisis integral de esta nueva generación de*

vehículos aéreos debe incluir sin duda modelos estructurales geoméricamente no lineales capaces de capturar los grandes desplazamientos que pueden surgir como consecuencia de estados de carga normales.

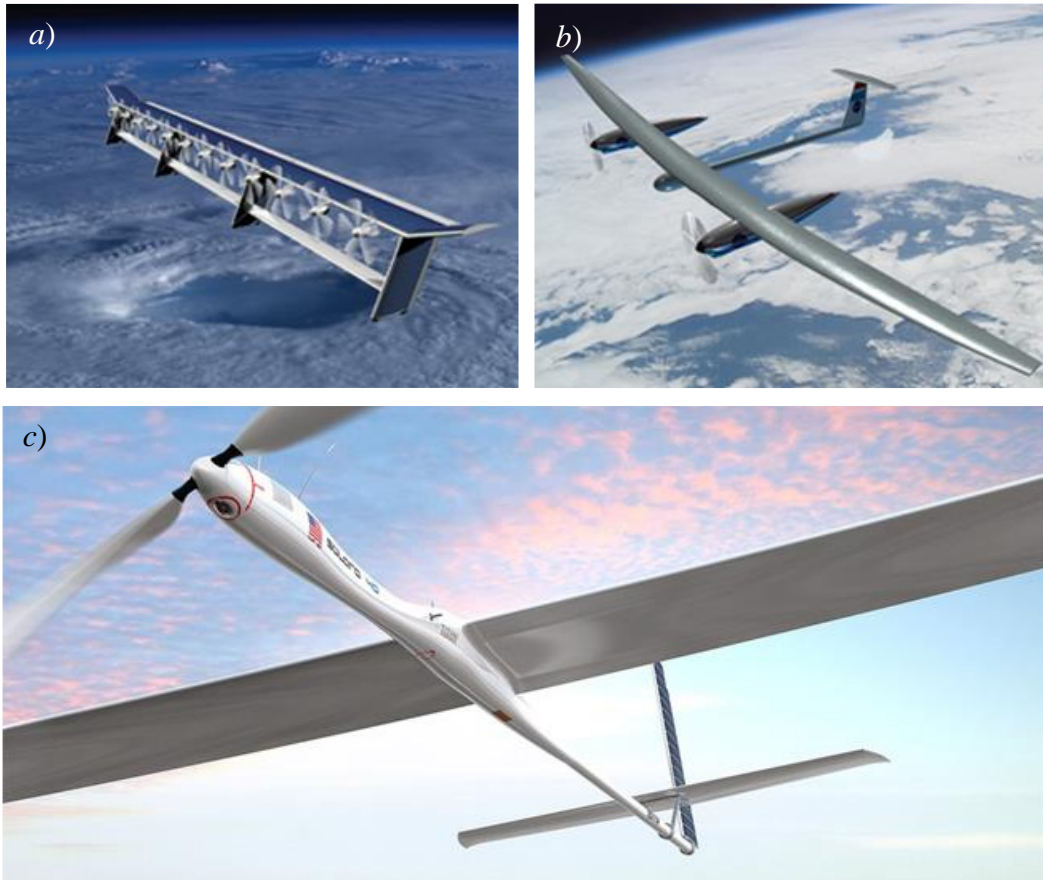


Figura 1-1: a) Diseño conceptual 100-Day (<http://www.nasa.gov/centers/dryden/news>); b) Diseño conceptual 14-Day Demonstrator (<http://www.nasa.gov/centers/dryden/news>); c) Aeronave Solara desarrollado por Titan Aerospace (<http://www.gizmag.com/>).

Un aspecto muy importante, aunque poco entendido hasta hoy, es el relacionado a las bajas frecuencias naturales que caracterizan los modos de vibración estructurales; fenómeno que se traduce “generalmente” en un fuerte acoplamiento entre la dinámica estructural y la dinámica de cuerpo rígido (mecánica del vuelo) referente a la aeronave [6].

Sobre la base de lo mencionado anteriormente, en este trabajo se presenta un marco de simulación numérica para estudiar el comportamiento dinámico de un vehículo conceptual extremadamente flexible (extremely flexible, X), denominado X-HALE-UAV. La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos conectados elásticamente y soportado sobre una plataforma flexible que simula el anclaje al túnel de viento [7]. En esta primera etapa no se consideran las cargas no conservativas

provenientes de la aerodinámica; sin embargo el marco de trabajo permite introducir diferentes modelos de ráfagas y un modelo simple de daño alar, con el objetivo de analizar la respuesta de la aeronave a perturbaciones externas. Las ecuaciones de movimiento se obtuvieron por medio de un enfoque basado en la dinámica de sistemas multicuerpo, las cuales se implementaron en un código computacional interactivo y estructurado desarrollado íntegramente en MATLAB®.

Además, la herramienta computacional permite elegir diferentes esquemas de integración numérica para resolver el sistema de DAEs (*Differential-Algebraic Equations*) resultantes, tales como: Runge-Kutta, Hamming, Newmark, el algoritmo de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) y Alpha Generalizado, entre otros.

Este esfuerzo forma parte de un proyecto de mayor envergadura que se está llevando a cabo en la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), el Instituto Politécnico de Virginia (Virginia Polytechnic Institute and State University) en USA (United States of America) y la Universidad de Maryland en College Park, USA. El objetivo general de dicho proyecto es estudiar el comportamiento aero-servo-elástico de aeronaves tipo HALE. Para ello, se desarrollarán algoritmos numéricos de alta fidelidad para flujos inestacionarios y no-lineales con fronteras sólidas altamente deformables y sometidas a movimientos complejos.

1.2 Revisión Bibliográfica

En los años 80s se entendió que la energía solar podría utilizarse como fuente de alimentación para aviones que vuelen a gran altitud y operen con gran autonomía. Bajo estos supuestos, AeroVironment diseñó y construyó el HALSOL (*High-Altitude Solar vehicle*) ([1] [8]). Una década más tarde esta aeronave fue rediseñada dando lugar al vehículo llamado Pathfinder. Con el objetivo de continuar con el desarrollo de este tipo especial de sistemas aeronáuticos, NASA fundó el programa ERAST (*Environment Research Aircraft and Sensor*); marco en el cual los vehículos Pathfinder y Centurión evolucionaron en el prototipo Helios HP03 (*Long Endurance Configuration*) [9] (ver Figura 1-2).

En el marco del programa de investigación ERAST se realizaron grandes avances relacionados a los conceptos de diseño HALE-UAVs. Sin embargo, la ausencia de herramientas de análisis apropiadas contribuyó a que NASA aprobara el primer vuelo del HP03 el 7 de junio de 2003 a pesar de que los márgenes de seguridad estructurales, de

estabilidad, control y aeroelástico eran mucho más bajos que los de su predecesor, el HP01.



Figura 1-2: Prototipo HP03 Helios (<http://www.nasa.gov/centers/armstrong/news>).

Este primer ensayo debió ser interrumpido 15 horas luego del despegue debido a una fuga detectada en el sistema de refrigeración. Luego de una serie de modificaciones, el 26 de junio de 2003:

El HP03-2 despegó a las 10:06 am hora local del PMRF (Navy Pacific Missile Range Facility) situado en la isla de Kauai, Hawaii... A las 10:22 am y las 10:24 am, el avión se encontró con turbulencia y el ángulo de diedro se incrementó significativamente produciendo leves oscilaciones de cabeceo que se amortiguaron rápidamente. A unos 30 minutos de vuelo, el avión encontró nuevamente turbulencia y experimentó un cambio drástico (inesperado y persistente) hacia una configuración con un gran ángulo de diedro. Como resultado, aparecieron oscilaciones de cabeceo divergentes que duplicaban la velocidad con respecto al aire (desde la condición nominal) por cada ciclo de oscilación. La velocidad de diseño de la aeronave fue posteriormente superada y las altas presiones dinámicas resultantes causaron la falla de los paneles estructurales localizados sobre el borde de ataque de las alas externas produciendo el desprendimiento de los paneles solares y el recubrimiento superior de las alas. El avión impactó en el océano dentro de los límites del rango de prueba PMRF destruyéndose completamente... Las principales causas del accidente incluyen: [La] falta de métodos adecuados de análisis llevó a una evaluación incorrecta del riesgo asociada a los efectos de los cambios de configuración en la aeronave que condujo a una decisión inapropiada de volar un avión altamente sensible

a perturbaciones externas... [y] los cambios de configuración en la aeronave, debidas a limitaciones programáticas y tecnológicos, alteraron la distribución de masa sobre la estructura del vehículo reduciendo significativamente la robustez del diseño y los márgenes de seguridad” [10].

Este incidente catastrófico llevó a la NASA a reconocer el poco entendimiento y las limitadas herramientas analíticas con las que se cuenta para diseñar aeronaves HALE muy flexibles. La recomendación principal de NASA fue ([10] [11] [12]):

“[que] es necesario el desarrollo de nuevos métodos y herramientas de análisis en el dominio del tiempo y multidisciplinarios (estructurales, aeroelásticas, aerodinámicas, atmosféricas, de propulsión, de control, etc.) cada vez más avanzados para el análisis de aeronaves extremadamente flexibles.”.

A pesar de una larga historia de estudios relacionados a la dinámica del vuelo de aviones flexibles, la mayoría de estos consideran modelos lineales, o a lo sumo, una dinámica de cuerpo rígido no lineal para el vehículo acoplada con modelos estructurales lineales. Tales métodos basados en teorías lineales han sido utilizados exitosamente para el diseño de aeronaves convencionales ([13] [14] [15]). Friedmann [16] señaló, en su exhaustiva revisión de aeroelasticidad, la importancia de los problemas *aero-servo-elásticos* asociados con vehículos tipo HALE. Particularmente, destacó que el carácter autónomo de estos vehículos requiere un sistema de control, que interactúe con la dinámica de cuerpo rígido y la dinámica estructural. Livne y Weishaar [6] presentaron una descripción detallada de los diseños no convencionales de los últimos 100 años que han impulsado el desarrollo de teorías y herramientas aeroelásticas hasta la fecha.

En la década del 90, Schoor y von Flotow [17] abordaron el estudio aeroelástico no lineal de una aeronave flexible y demostraron la imperiosa necesidad de incluir la dinámica estructural del avión cuando se analiza la dinámica del vuelo de aeronaves caracterizadas por estructuras altamente flexibles. Su estudio reveló un cambio significativo en los “modos” de cuerpo rígido cuando se incluye la flexibilidad del avión; hecho que les permitió concluir que el efecto asociado al acoplamiento entre las grandes deflexiones y la dinámica de cuerpo rígido (control del rolido) como así también otros fenómenos aeroelásticos (respuesta a ráfagas y flutter, entre otros) deben ser incluidos apropiadamente en la formulación de un marco aerolástico no lineal. Patil *et al.* [18] llegaron a la misma conclusión a partir del estudio de la aeroelasticidad y dinámica del

vuelo de aeronaves tipo HALE. Paralelamente, Drela [19] estudió una aeronave totalmente flexible modelada como un ensamblaje de vigas no lineales, y Jones ([20] [21]) estableció un número de desafíos asociados al diseño de este tipo de vehículos aéreos.

Por otro lado, Cesnik y su equipo desarrollaron una solución práctica y novedosa con el objetivo de estudiar la aeroelasticidad no lineal y la dinámica del vuelo de aeronaves extremadamente flexibles. Sobre esta base, formularon un nuevo marco de trabajo, llamado *the University of Michigan's Nonlinear Aeroelastic Simulation Toolbox* (UM/NAST), el cual provee una plataforma adecuada para diseño de sistemas de control. Esta herramienta permitió abordar el estudio de un gran número de cuestiones aeroelásticas asociadas a HALE-UAVs tales como: *i)* modelado aeroelástico no lineal ([5] [22]); *ii)* sistemas de actuación para la generación de maniobras ([23] [24]); *iii)* mejora de los límites de flutter [25]; *iv)* respuesta a ráfagas [26]; y *v)* estudios de optimización global para configuraciones no convencionales [23]. Al igual que UM/NAST, desde el año 2000 se han desarrollado una variedad de herramientas de simulación destinadas al estudio aeroelástico de aviones muy flexibles, tales como: la herramienta diseñada por Drela en el Instituto Tecnológico de Massachusetts ASWING [19], el marco de simulación llamado NATASHA (*Nonlinear Aeroelastic Trim and Stability of HALE Aircraft*) desarrollado por Patil y Hodges [27], y el código llamado NANSI (*Nonlinear-Aerodynamic/Nonlinear-Structure Interaction*) elaborado en Virginia Tech por Wang *et al.* [28]. Gran parte de los módulos que componen la mayoría de estas herramientas han sido validados parcialmente con datos disponibles en la literatura ([29] [30] [31]), y/o experimentos a escala realizados en túneles de viento ([32] [33]). Con el objetivo de proveer datos experimentales a la comunidad científica que permitan validar en forma integral las distintas herramientas aeroelásticas no lineales existentes, la Universidad de Michigan en colaboración con el Instituto de Tecnología de la Fuerza Aérea (AFIT, USA) y el Laboratorio de Investigación de la Fuerza Aérea (AFRL, USA) diseñaron y construyeron un prototipo llamado X-HALE para vuelos de prueba [10].

Los distintos enfoques que fueron utilizados para deducir las ecuaciones de movimiento (EOM) del HALE-UAVs, son brevemente descriptos a continuación. Cesnik y Su [22] con el fin de analizar el modelo de la Figura 2-2a, utilizaron el principio generalizado de D'alambert para obtener la ecuaciones de movimiento. En su trabajo, Cesnik y Su, incorporaron las cargas provenientes de la aerodinámica por medio de la teoría de estados finitos de Peters *et al.* [35] e integraron numéricamente todas las

ecuaciones gobernantes mediante el método de Newmark modificado [36]. Por otro lado, Patil *et al.* [18] utilizaron el principio de Hamilton extendido para escribir las ecuaciones dinámicas para una aeronave flexible. Las partes deformables se modelaron mediante elemento de vigas geoméricamente exactas formuladas por medio de un enfoque variacional. Patil y coautores realizaron un análisis paramétrico variando la velocidad lineal de la aeronave con el objetivo de encontrar “flutter” y compararon sus resultados con los obtenidos en [37]. El mismo enfoque fue utilizado para estudiar un modelo simplificado del prototipo Helios (ver Figura 1-3b) ([27] [38]).

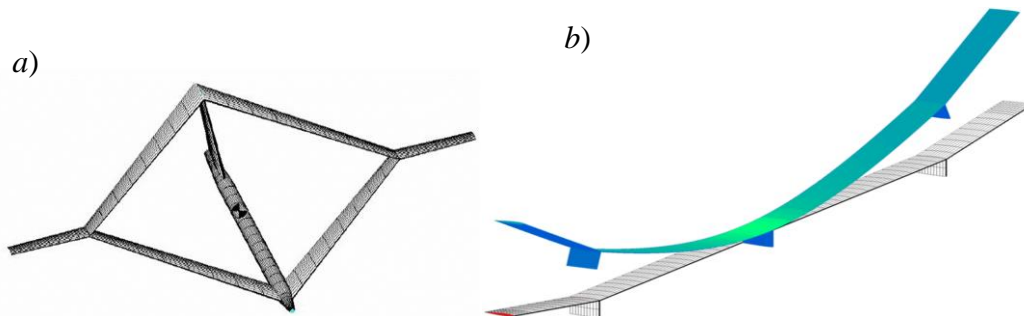


Fig. 1-3. Modelos de aeronave utilizados para investigación I a) Esquema de aeronave estudiado por Cesnik y Su [22] b) Esquema simplificado de Helios [27].

Wang *et al.* [34] emplearon las ecuaciones de Lagrange para modelar un concepto de aeronave HALE flexible (ver Figura 1-4a). En este trabajo se consideró el acoplamiento entre el movimiento de cuerpo rígido del UAV y la flexibilidad de las superficies sustentadoras, las cuales pueden flexionarse solamente en la dirección vertical. Wang y su equipo utilizaron el programa MSC/Nastran para resolver las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema [39].

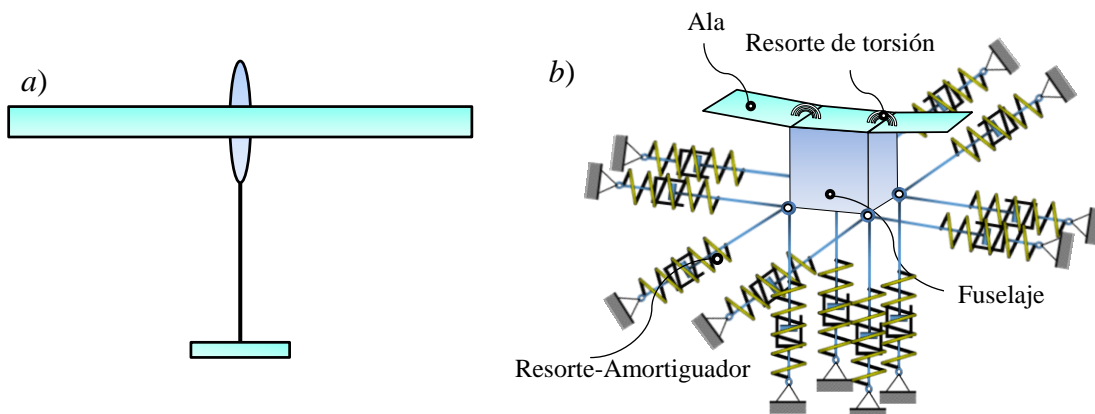


Fig. 1-4. Modelos de aeronave utilizados para investigación II a) Modelo de aeronave estudiado por Wang [34] b) Modelo simplificado de X-HALE-UAV utilizado por Arguello [7].

Recientemente, Arguello *et al.* [7] desarrollaron un modelo dinámico de un concepto simplificado de un X-HALE-UAV (ver Figura 1-4b). Para ello utilizaron una

formulación híbrida basada en las ecuaciones de Newton-Euler en conjunto con las ecuaciones de Lagrange. La aeronave se modeló como una colección de cuerpos rígidos interconectados por medio de articulaciones flexibles y la integración numérica de las ecuaciones de movimiento resultantes se realizó simultánea e interactivamente en el dominio del tiempo, por medio del esquema de cuarto orden de Hamming. Arguello y su equipo se concentró en el estudio de la respuesta dinámica del sistema cuando se permiten grandes deflexiones alares.

1.3 Objetivos

El objetivo general de esta tesis es el desarrollo de simulaciones numéricas que permitan estudiar el comportamiento dinámico de un concepto simplificado de un X-HALE-UAV. La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos conectados entre sí por articulaciones flexibles. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del UAV se derivan mediante un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante este enfoque son del tipo diferenciales-algebraicas (DAEs) de índice 3. La resolución del sistema de DAEs se realiza en forma numérica, simultánea e interactiva en el dominio del tiempo mediante diferentes esquemas de integración.

El estudio dinámico involucra el análisis de diversos fenómenos sobre la dinámica del sistema multicuerpo tales como: *i*) el efecto de ráfagas ascendentes y/o laterales sobre la aeronave; y *ii*) la influencia del daño estructural en las conexiones alares, la cual se modela como un cambio brusco de la rigidez asociada a una, o más, de las articulaciones flexibles entre tramos de alas.

La herramienta numérica desarrollada será utilizada como base para elaborar un marco de simulación aeroelástico no lineal que permita lograr una comprensión cabal de la compleja naturaleza que caracteriza el acoplamiento entre la dinámica del vuelo y la dinámica estructural en aeronaves no tripuladas extremadamente flexibles que operan a gran altitud y con gran autonomía.

Como objetivos específicos de este esfuerzo se incluyen los siguientes.

- a) Estudiar la dinámica HALE-UAVs.
- b) Desarrollar un modelo matemático que permita captar la dinámica de vuelo de aeronaves X-HALE-UAV.

- c) Evaluar la precisión y robustez de distintos integradores, tales como Runge-Kutta (RK), Hamming, Newmark, el algoritmo de Hilber-Hughes-Taylor y Alpha Generalizado, entre otros.
- d) Desarrollo de código computacional interactivo para estudiar el comportamiento dinámico de este tipo de aeronaves.
- e) Verificación de la herramienta numérica por medio de la comparación de resultados clásicos disponibles en la literatura y contra programas de computadoras ampliamente utilizados en el campo de la mecánica computacional.
- f) Estudiar el efecto de ráfagas ascendentes y/o laterales sobre la aeronave.
- g) Estudiar la influencia de una forma sencilla de daño estructural en las conexiones alares.
- h) Publicación de resultados relevantes ([\[40\]](#) [\[41\]](#) [\[42\]](#) [\[43\]](#) [\[44\]](#)).

1.4 Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se presenta el desarrollo de un modelo dinámico multicuerpo rígido de un concepto simplificado de X-HALE-UAV. Las ecuaciones de movimiento se obtienen por medio de un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones holonómicas. Por último se describe la implementación de: *i*) un “modelo de ráfaga”; y *ii*) un modelo de daño alar.

En el capítulo 3 se detallan los distintos integradores utilizados para resolver las ecuaciones de movimiento de la aeronave. Adicionalmente, se describe el procedimiento utilizado para computar las condiciones iniciales para el sistema multicuerpo.

En el capítulo 4 se presenta la verificación del código computacional elaborado para estudiar el comportamiento dinámico de aeronaves tipo HALE por medio de la comparación de resultados contra soluciones de problemas clásicos disponibles en la literatura y contra resultados obtenidos por programas de computadoras ampliamente utilizados en el ámbito de la mecánica computacional, tales como SIMPACT. Finalmente, se presentan una serie de resultados concernientes a la dinámica de un diseño conceptual de X-HALE-UAV.

En el Capítulo 5 se establecen las conclusiones derivadas de los estudios presentados en este trabajo de tesis y los trabajos futuros a realizar en el corto y mediano plazo.

Por último, al final de este trabajo de tesis se incluye un Anexo donde se presenta la deducción de las ecuaciones de movimiento para el sistema multicuerpo y la linealización de las ecuaciones de movimiento.

1.5 Aspectos originales del trabajo desarrollado.

La principal contribución de esta tesis radica en el estudio del comportamiento dinámico de un vehículo X-HALE-UAVs desde una perspectiva multicuerpo. Específicamente, las contribuciones originales que se presentan en este trabajo se resumen a continuación:

- Un modelo dinámico multicuerpo rígido general para aeronaves tipo X-HALE.
- La implementación y evaluación de un gran número de esquemas de integración, algunos de ellos utilizados ampliamente en el ámbito de la dinámica multicuerpo.
- Un código computacional robusto, versátil e interactivo desarrollado íntegramente en MATLAB[®]. Esta herramienta permite estudiar la dinámica de un concepto simplificado de un X-HALE-UAV, la cual permite especificar:
 - i) *Número de Alas.*
 - ii) *Número de Trenes de Aterrizaje.*
 - iii) *Número de Motores.*
 - iv) *Dimensiones generales de los cuerpos.*
 - v) *Vinculación / conexión de los distintos cuerpos que componen el sistema.*
 - vi) *Esquemas de Integración.*
 - vii) *Parámetros asociados al modelo de ráfaga.*
 - viii) *Parámetros asociados al modelo de daño alar.*
- Promueve la creación de modelos dinámicos más complejos basados en la dinámica de multicuerpos flexibles para investigar el comportamiento aeroelástico y aeroservoelástico de aviones flexibles, inmersos en flujos subsónicos y bajo diferentes configuraciones de vuelo.

Capítulo 2

Modelo Dinámico

2.1 Generalidades

En este capítulo se presenta el desarrollo de un modelo multicuerpo rígido para estudiar la dinámica de un diseño conceptual de X-HALE-UAV. Las ecuaciones de movimiento que gobiernan la evolución temporal de la aeronave se obtuvieron por medio de un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. Todos los cuerpos que componen el UAV están vinculados entre sí rígidamente (fuselaje-ala, motores-alas, trenes de aterrizaje-alas) o por medio de articulaciones flexibles (alas-alas, fuselaje-túnel de viento). El modelo tiene, además, la capacidad de: *i*) imponer perturbaciones externas tales como movimientos de apoyo con el objetivo de simular “ráfagas” y *ii*) considerar la degradación estructural en las alas por medio de un modelo de daño sencillo. Las ecuaciones de restricción son incluidas automáticamente en la formulación de las ecuaciones de movimiento mediante la utilización de multiplicadores de Lagrange.

2.2 Descripción del modelo

La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos (fuselaje, alas, tren de aterrizaje y motores) conectados entre sí rígidamente o por articulaciones flexibles. A los efectos de simplificar el tratamiento matemático, el fuselaje se representa mediante un cubo, los motores por cilindros, alas y trenes de aterrizaje por medio de placas planas. El fuselaje del UAV se vincula al túnel de viento mediante 12 resortes y 12 amortiguadores, los cuales se conectan a los vértices inferiores del cubo (3 por vértice). La articulación flexible entre alas es emulada mediante los resortes de torsión. En la Figura 2-1a se presenta un modelo conceptual simplificado de aeronave HALE compuesto por 16 cuerpos: 1 fuselaje, 7 alas, 4 trenes de aterrizaje y 4 motores.

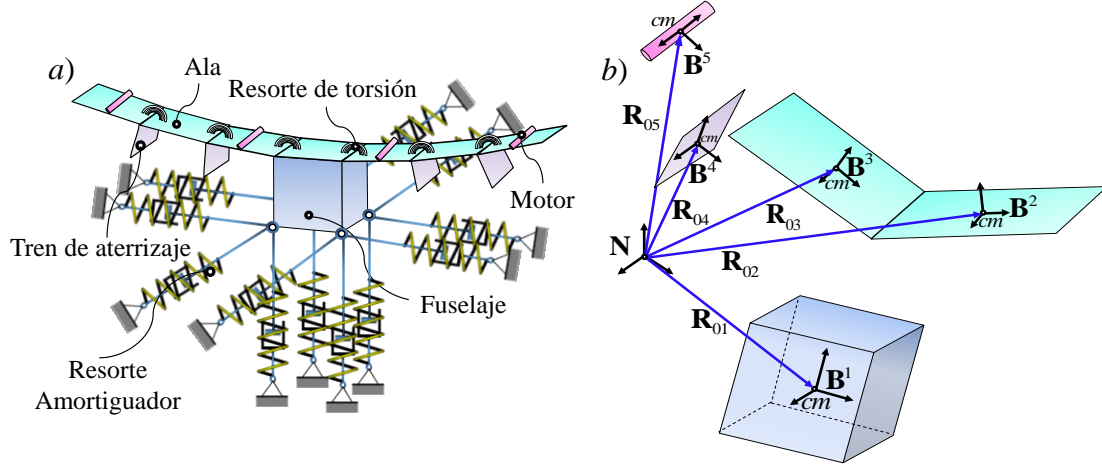


Figura 2-1. Modelo conceptual y definición de sistemas de referencia. *a)* Esquema de un modelo conceptual X-HALE-UAV. *b)* Definición de sistemas de referencias.

En este trabajo se utiliza un conjunto de coordenadas redundantes para describir el espacio de configuración del sistema multicuerpo; es decir, el número de coordenadas utilizadas es superior al número de grados de libertad. Como consecuencia, tales coordenadas no son independientes, sino que están relacionadas entre sí por medio de ecuaciones de restricción, las cuales son introducidas en el EOM, mediante los multiplicadores de Lagrange [45].

Para llevar a cabo de una manera ordenada la deducción de las ecuaciones que gobiernan la evolución temporal del UAV se utilizaron $N_M + N_A + N_T + N_F + 1$ sistemas de referencias; donde N_M es el número de cuerpos que simulan los motores, N_A el número de cuerpos que representan las alas, N_T el número de cuerpos que representan los trenes de aterrizaje y N_F es el número de fuselajes. Esto es: *i)* un marco de referencia inercial o Newtoniano, $\mathbf{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$; y *ii)* un marco de referencia fijo al centro de masa (cm) de cada cuerpo que compone el sistema dinámico, denotado $\mathbf{B}^i = \{\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i\}$ para $i = 1, \dots, N_M + N_A + N_T + N_F + 1$ (ver Figura. 2-1*b*).

Los vectores $\hat{\mathbf{n}}_i$ y $\hat{\mathbf{b}}_k^i$ que componen las bases adheridas a cada uno de los marcos de referencia descritos anteriormente, son vectores unitarios que cumplen con la siguiente condición:

$$[\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3] = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3) = +1. \quad (2.1)$$

Las condiciones impuestas por la ecuación (2.1) indican que el conjunto de vectores que forman los marcos de referencias \mathbf{N} , y \mathbf{B}^i , generan bases ortonormales y dextrógiras (cumplen con la regla de la mano derecha) [46].

La configuración de cada componente del sistema multicuerpo se describe por medio de 7 coordenadas absolutas. Tres coordenadas para definir la posición de un punto fijo del cuerpo y cuatro para definir su orientación. El número total de coordenadas es $n_{coord} = 7n_b$ (donde $n_b = N_T + N_A + N_M + N_F$ es el número de cuerpos). Sin embargo, éstas no son independientes, sino que están relacionadas a través de n_c ecuaciones de restricción, resultando un sistema de $n_{DOF} = 7n_b - n_c$ grados de libertad. Para orientar cada cuerpo con respecto al marco de referencia inercial, \mathbf{N} , se utilizó una parametrización por cuaterniones unitarios; hecho que introduce una ecuación de restricción adicional por cada cuerpo.

El conjunto de coordenadas para el cuerpo i se define como

$$\mathbf{q}_i = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}, q_{i6}, q_{i7}\}^T, \quad \text{para } i = 1, \dots, n_b. \quad (2.2)$$

Finalmente, el vector de coordenadas para todo el sistema multicuerpo se expresa como

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\}^T. \quad (2.3)$$

2.3 Ecuaciones de restricción

En el estudio de sistemas dinámicos, las restricciones usualmente aparecen como consecuencia del contacto entre dos (o más) cuerpos. A su vez, una restricción tiene asociada una *ecuación de restricción* y una *fuerza de restricción*. Las ecuaciones de restricción describen la geometría y/o cinemática del contacto entre cuerpos, mientras que las fuerzas de restricción son las fuerzas de contacto, también llamadas *reacciones*. Cuando las ecuaciones de restricción se pueden expresar como

$$g_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; t) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

donde g_i es una función al menos clase C^2 (es decir, sus derivadas parciales de orden 2 existen y son continuas) y m contabiliza el número de restricciones, entonces la ecuación de restricción (2.4) es referida como *restricción de configuración*.

La ecuación de restricción (2.4) frecuentemente es reescrita en forma diferencial (*Pfaffian form*) como

$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial g_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt, \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Las ecuaciones de restricción que pueden ser expresadas tanto en forma de restricción de configuración como así también en forma diferencial reciben el nombre de *holonómicas*. Por el contrario, las restricciones que no poseen esta propiedad son llamadas *no holonómicas* [47].

En este trabajo, las ecuaciones de restricción son del tipo holonómicas y su origen se debe a: *i*) la conexión de componentes; *ii*) la especificación en orientación relativa entre diferentes cuerpos en el sistema multicuerpo; y *iii*) la parametrización de rotación adoptada. Por consiguiente, sobre cada cuerpo se imponen las siguientes restricciones:

- Restricción de posición: especifica la conexión entre los diferentes componentes del sistema dinámico.
- Restricción de orientación: especifica la orientación relativa entre los diferentes cuerpos del sistema dinámico.
- Restricción U-Q (*Unitary Quaternions*): se debe a la restricción adicional que surge por la utilización de una parametrización por cuaterniones unitarios para especificar la orientación de cada componente del sistema multicuerpo.

A su vez, existen dos subcategorías adicionales asociadas a las restricciones holonómicas según aparezca, o no, explícitamente el tiempo en la formulación de las restricciones. Específicamente, si el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones de restricción, éstas son denominadas holonómicas esclerónomas; en caso contrario son llamadas rehónomas. Debido a la ausencia de movimientos prescritos, es decir, que la ecuación (2.4) no dependen explícitamente del tiempo, en este trabajo, tanto las restricciones de posición como así también las de orientación son del tipo *holonómicas esclerónomas*.

Para establecer la vinculación entre los cuerpos que componen el sistema multicuerpo, se consideran los marcos de referencias fijos a cada cuerpo i , descritos en la Subsección 2.2. La Figura 2-2 muestra en forma esquemática el punto de vinculación P (P') entre dos cuerpos que componen un sistema multicuerpo. \mathbf{R}_{0i} (\mathbf{R}_{0j}) es el vector posición de un punto del cuerpo i (j) respecto al marco inercial \mathbf{N} , \mathbf{r}_{ij} (\mathbf{r}_{ji}) es el vector posición del punto de conexión entre el cuerpo i (j) y el cuerpo j (i) medido respecto del marco de referencia \mathbf{B}^i (\mathbf{B}^j).

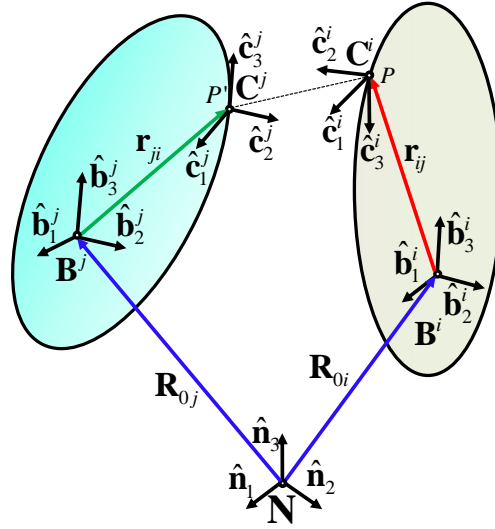


Figura 2-2. Esquema genérico de dos cuerpos vinculados en un punto.

En lo que respecta a la orientación, en el cuerpo i (j) se utiliza, un marco de referencia auxiliar \mathbf{C}^i (\mathbf{C}^j) ubicado en el punto de contacto P (P') (ver Figura 2-2), donde su orientación, para el caso específico de este trabajo, coincide con el marco de referencia \mathbf{B}^i (\mathbf{B}^j) en todo instante. Todas las restricciones se escriben respecto al sistema de referencia inercial \mathbf{N} y pueden ser expresadas matemáticamente como

$$\begin{aligned}
 \text{Con } \varphi_{ij}^r &= \left([\mathbf{R}_{0i} + \mathbf{A}_i \mathbf{r}_{ij}] - [\mathbf{R}_{0j} + \mathbf{A}_j \mathbf{r}_{ji}] \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_r = 0, \text{ para } r=1,2,3, \\
 \text{Ort } \varphi_{ij}^1 &= \left(\hat{\mathbf{b}}_1^j \right)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_2^i = 0, \\
 \text{Ort } \varphi_{ij}^2 &= \left(\hat{\mathbf{b}}_2^j \right)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_3^i = 0, \\
 \text{Ort } \varphi_{ij}^3 &= \left(\hat{\mathbf{b}}_3^j \right)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_1^i = 0, \text{ y} \\
 \text{U-Q } \varphi_k &= \sum_{s=4}^7 q_{ks}^2 - 1 = 0, \text{ para } k=1, \dots, n_b.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde los superíndices *Con*, *Ort* y *U-Q* indican la naturaleza de la restricción, es decir, de posición, orientación, y debida a la parametrización de rotación adoptada, respectivamente. \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_j) es la matriz de rotación (en término de parámetros de Euler) que orienta el marco \mathbf{B}^i (\mathbf{B}^j) con respecto a \mathbf{N} .

El conjunto de restricciones de orientación expuestas en (2.6) establecen que las bases $\mathbf{B}^i = \{\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i\}$ y $\mathbf{B}^j = \{\hat{\mathbf{b}}_1^j, \hat{\mathbf{b}}_2^j, \hat{\mathbf{b}}_3^j\}$ son coincidentes, en su posición relativa, durante toda la simulación. Sin embargo, el sistema estudiado en este trabajo contiene vínculos que permiten el giro en una dirección, llamadas juntas de revolución (*hinge joint*). Las ecuaciones de restricción para este tipo de juntas son una versión levemente modificada de las ecuaciones presentadas en (2.6) [48]. Tal modificación radica

fundamentalmente en no restringir el giro alrededor del eje de rotación de la junta. Si se adopta como eje de rotación $\hat{\mathbf{b}}_1$ en la junta que permite el giro (ver Figura 2-3), se obtiene la restricción $\hat{\mathbf{b}}_1^i = \hat{\mathbf{b}}_1^j$ con lo cual las ecuaciones de restricción a nivel de la orientación expresadas en (2.6) se reducen a

$$\begin{aligned} \text{Ort } \varphi_{ij}^1 &= (\hat{\mathbf{b}}_2^j)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_1^i = 0, \text{ y} \\ \text{Ort } \varphi_{ij}^2 &= (\hat{\mathbf{b}}_3^j)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_1^i = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

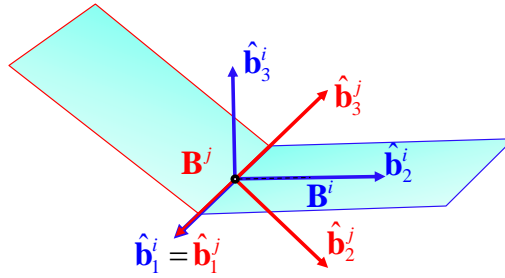


Fig. 2-3. Esquema de vinculación *hinge joint*

Finalmente, el vector de restricciones holonómicas para el sistema dinámico es

$$\Phi(\mathbf{q}) = \{ \dots, \text{Con } \varphi_{ij}^r, \dots, \text{Ort } \varphi_{ij}^1, \text{Ort } \varphi_{ij}^2, \text{Ort } \varphi_{ij}^3, \dots, \text{U-Q } \varphi_1, \dots, \text{U-Q } \varphi_{n_b} \}. \quad (2.8)$$

En lo que se refiere a las vinculaciones específicas del modelo simplificado X-HALE, la vinculación *fuselaje-ala* ocurre en un punto P' localizado sobre la superficie del ala y otro punto P en la cara superior del cubo (en la Figura 2-4a). El ala está orientada con respecto al marco fijo al fuselaje de forma tal, que los sistemas \mathbf{B}^i y \mathbf{B}^j sean paralelos ($\hat{\mathbf{b}}_1^i \cdot \hat{\mathbf{b}}_1^j = 1$, $\hat{\mathbf{b}}_2^i \cdot \hat{\mathbf{b}}_2^j = 1$, $\hat{\mathbf{b}}_3^i \cdot \hat{\mathbf{b}}_3^j = 1$) en todo instante. Para la vinculación *ala-ala* el punto de vínculo P (P') se encuentra siempre sobre los bordes perpendiculares al vector unitario local $\hat{\mathbf{b}}_2^i$ (j), y es una articulación que permite un giro relativo entre las dos alas (*hinge joint*), en dirección $\hat{\mathbf{b}}_1^i$ (j) [48] (ver Figura 2-4b). La vinculación *ala-tren* de aterrizaje, tiene el punto de vínculo P que se encuentra en la superficie del ala y el punto de vínculo P' , perteneciente al tren, se encuentra en el borde superior perpendicular a $\hat{\mathbf{b}}_3^j$ (ver Figura 2-4c), con una orientación donde los sistema de referencia locales del ala (\mathbf{B}^i) y del tren de aterrizaje (\mathbf{B}^j) permanecen paralelos en todo instante. Por último la vinculación *ala-motor*, donde el punto de vínculo P en el ala se encuentra en su superficie y el punto de vínculo P' que corresponde al motor, está en la superficie del mismo, sobre la recta de

acción de $\hat{\mathbf{b}}_3^j$ (ver Figura 2-4d); los dos cuerpos están orientados entre sí de tal forma que \mathbf{B}^i y \mathbf{B}^j son paralelos en todo instante.

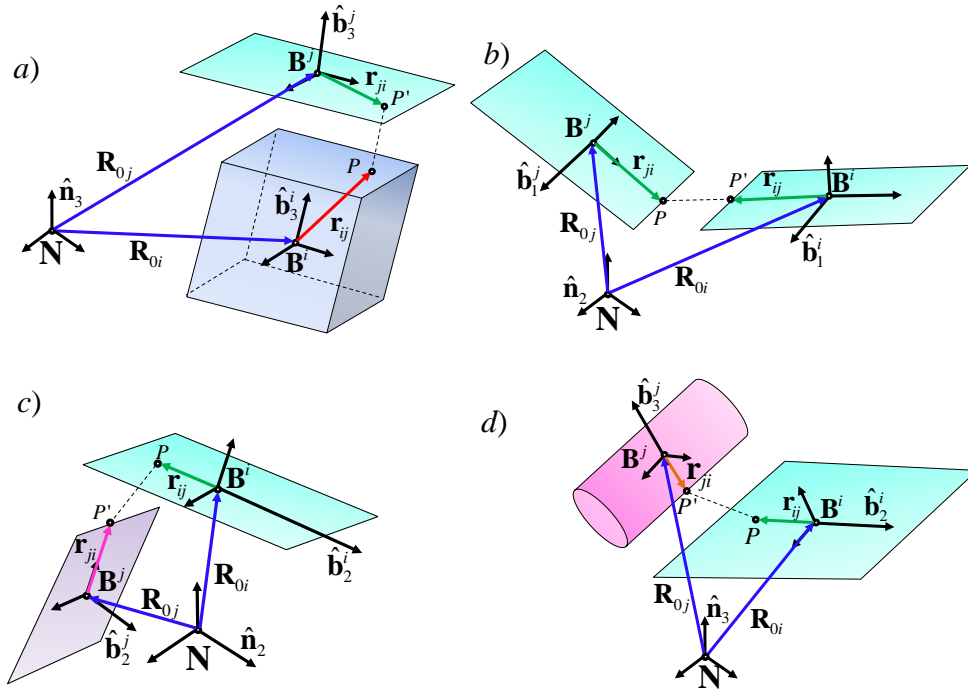


Fig. 2-4. Esquema de vinculación específico, a) Vinculación Ala-Fuselaje; b) Vinculación Ala-Ala; c) Vinculación Ala-Tren de aterrizaje; d) Vinculación Ala-Motor.

El número de ecuaciones de restricción expresado en (2.9), depende directamente de la naturaleza y cantidad de restricciones asociadas a cada uno de los cuerpos que componen el sistema dinámico. Cada restricción de posición aporta tres ecuaciones algebraicas, mientras que la cantidad de relaciones especificadas por una restricción de orientación, depende de los cuerpos que se vinculen: *i*) ala-ala (2 ecuaciones algebraicas); *ii*) motor-ala (3 ecuaciones algebraicas); y *iii*) tren de aterrizaje-ala (3 ecuaciones algebraicas). Por último, la parametrización de rotación utilizada contribuye con una ecuación de restricción adicional por cada componente en el sistema multicuerpo.

$$\begin{aligned}
 n_{Con} &= 3(N_A + N_T + N_M), \\
 n_{Ort} &= 2(N_A - 1) + 3(N_F + N_T + N_M), \\
 n_{U-Q} &= (N_F + N_A + N_T + N_M), \\
 n_c &= \begin{cases} 1, & N_A = 0, \\ 6N_A + 7(N_T + N_M) + 4N_F - 2, & N_A \geq 1 \end{cases} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

donde el subíndice (*Con*, *Ort*, *U-Q*) indica la naturaleza de la restricción y n_c es el número total de ecuaciones algebraicas que posee el sistema.

2.4 Fuerzas generalizadas

Como paso previo a la formulación de las ecuaciones de movimiento, en esta sección se determinaran las fuerzas generalizadas no-conservativas provenientes de los amortiguadores y las fuerzas conservativas debidas a la acción del campo gravitatorio terrestre sobre cada parte componente del HALE-UAV y el potencial elástico asociado a los resortes lineales y de torsión.

Para determinar las fuerzas generalizadas asociadas al conjunto de coordenadas generalizadas absolutas introducidas anteriormente, se utiliza el principio de los trabajos virtuales ([45] [49] [50] [51] [52]). El trabajo virtual de una fuerza externa \mathbf{F} se define de la siguiente manera:

$$\overline{\delta W} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R}, \quad (2.10)$$

donde $\delta \mathbf{R}$ es un desplazamiento virtual arbitrario que pertenece al espacio tangente, $\mathcal{T}_{\mathbf{R}}\mathcal{M}$, al espacio de configuración, \mathcal{M} , y la barra sobre la cantidad δW indica que el trabajo virtual no se puede obtener, en general, como la variación de una función W , es decir, $\delta W \neq \overline{\delta W}$ [53].

El desplazamiento virtual de un punto genérico P sobre el j -ésimo cuerpo que compone el sistema dinámico se define como

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{pj} &= \delta \mathbf{R}_{0j} + \delta (\mathbf{A}_j \mathbf{r}_{pj}), \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_{0j}}{\partial \mathbf{q}_j} \delta \mathbf{q}_j + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}_j} (\mathbf{A}_j \mathbf{r}_{pj}) \delta \bar{\mathbf{q}}_j, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde \mathbf{r}_{pj} es el vector posición de un punto arbitrario P perteneciente al cuerpo j medido respecto al marco de referencia fijo a dicho cuerpo, $\bar{\mathbf{q}}_j = \{q_{j4}, q_{j5}, q_{j6}, q_{j7}\}^T$ es el conjunto de parámetros de Euler asociados al cuerpo j , y \mathbf{B}^j , y \mathbf{R}_{0j} y \mathbf{A}_j fueron definidos anteriormente en la Sección 2.3.

Siguiendo el procedimiento expuesto por [45] se puede demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}_j} (\mathbf{A}_j \mathbf{r}_{pj}) \delta \bar{\mathbf{q}}_j = -2\tilde{\mathbf{r}}_{pj} \mathbf{G}_j \delta \bar{\mathbf{q}}_j, \quad (2.12)$$

donde $\tilde{\mathbf{r}}_{pj}$ es una matriz antisimétrica cuyo vector axial es \mathbf{r}_{pj} y su acción sobre un vector arbitrario es similar al producto vectorial, y

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} -q_{j5} & q_{j4} & -q_{j7} & q_{j6} \\ -q_{j6} & q_{j7} & q_{j4} & -q_{j5} \\ -q_{j7} & -q_{j5} & q_{j5} & q_{j4} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

2.4.1 Fuerzas generalizadas debidas a los resortes lineales

El fuselaje (modelado como un cubo) es el único componente del sistema dinámico que está conectado a resortes lineales. Como se mencionó anteriormente, a cada uno de los cuatro vértices ubicados en la base del cubo, concurren tres resortes (ver Figura 2-5). La longitud natural de cada resorte s es l_{0s} para $s = 1, \dots, 12$.

La fuerza debida al s -ésimo resorte vinculado al vértice u ($u = 1, \dots, 4$) se puede expresar como

$$\mathbf{F}_{us}^R = -k_s \Delta l_s \hat{\mathbf{e}}_s, \quad (2.14)$$

donde k_s es la constante elástica del resorte, Δl_s es la elongación del resorte y $\hat{\mathbf{e}}_s$ un vector unitario que indica la recta de acción del mismo (ver Figura. 2-5).

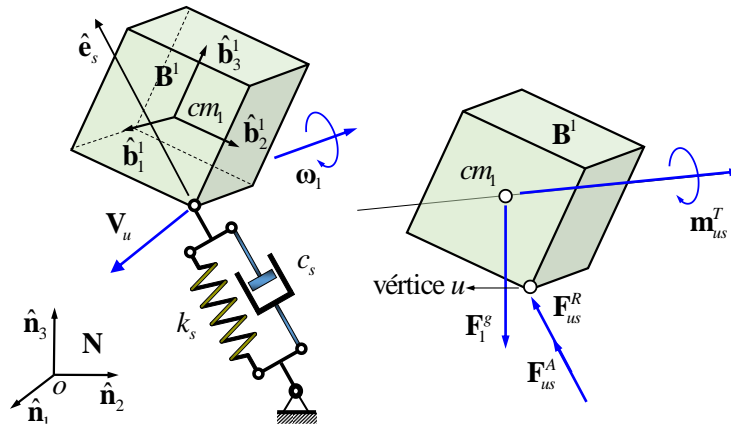


Figura 2-5. Definición de la fuerza ejercida por el s -ésimo resorte y s -ésimo amortiguador sobre el vértice u del fuselaje.

Utilizando la ecuación (2.12) y luego de manipulaciones algebraicas, la carga generalizada del resorte “ s ” vinculado al vértice “ u ” y asociada al conjunto de coordenadas absolutas del fuselaje (\mathbf{q}_1) es

$$\mathbf{Q}_{1s}^R = \left[\left(\mathbf{F}_{us}^R \right)^T \quad 2\mathbf{m}_{us}^T \mathbf{G}_1 \right]^T, \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{m}_{us}^T = (\tilde{\mathbf{r}}_{u1} \mathbf{F}_{us}^R)^T$ [45].

2.4.2 Fuerzas generalizadas debidas a los amortiguadores

Al igual que los resortes, los amortiguadores se encuentran conectados sólo al fuselaje. A cada vértice u localizado en la base del cubo concurren tres amortiguadores. Se debe notar que los vértices donde concurren los resortes y amortiguadores son puntos pertenecientes al fuselaje del sistema dinámico, y por lo tanto, a medida que el cubo se mueve, el punto u experimenta una velocidad, \mathbf{V}_u (ver Figura 2-5). La fuerza del amortiguador s ($s = 1, \dots, 12$) que concurre al vértice u , está representada vectorialmente por

$$\mathbf{F}_{us}^A = -c_s (\mathbf{V}_u \cdot \hat{\mathbf{e}}_s) \hat{\mathbf{e}}_s, \quad (2.16)$$

donde c_s es la constante del s -ésimo amortiguador que concurre al vértice u , y $\hat{\mathbf{e}}_s$ es un vector unitario que indica la recta de acción del amortiguador, la cual coincide con la recta de acción del resorte.

Luego de manipulaciones algebraicas, la carga generalizada del amortiguador “ s ” vinculado al vértice “ u ” y asociada al conjunto de coordenadas absolutas del fuselaje es

$$\mathbf{Q}_{1s}^A = \left[(\mathbf{F}_{us}^A)^T \quad 2\mathbf{m}_{us}^T \mathbf{G}_1 \right]^T, \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{m}_{us}^T = (\tilde{\mathbf{r}}_{u1} \mathbf{F}_{us}^A)^T$ [45].

2.4.3 Torque generalizado - resortes de torsión

Este tipo de resortes se ubican solamente en las juntas del tipo de revolución (ala-ala), donde se genera un momento puro sobre cada una de las alas que intervienen en la unión. Esto es

$$\mathbf{T}_s = -k_{Ts} \theta_{sr} \hat{\mathbf{u}}_s, \quad (2.18)$$

donde k_{Ts} es la constante de rigidez del s -ésimo resorte de torsión, θ_{sr} es el ángulo relativo entre el ala s y el ala r , y $\hat{\mathbf{u}}_s$ es el vector unitario que indica la dirección del vector momento \mathbf{T}_s en el marco de referencia inercial \mathbf{N} (ver Figura 2-6). Es claro que el subíndice s depende del número de juntas de revolución presentes en el sistema multicuerpo.

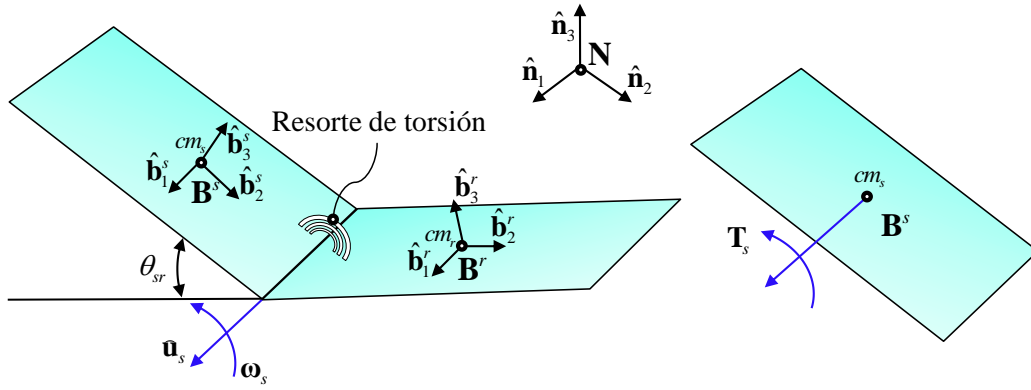


Fig. 2-6. Definición de momento por el resorte de torsión s -ésimo sobre la s -ésima ala.

Finalmente, el torque generalizado asociado al conjunto de coordenadas \mathbf{q}_s que describe la configuración del ala “ s ” es

$$\mathbf{Q}_s^{Tor} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & 2\mathbf{T}_s^T \mathbf{G}_s \end{bmatrix}^T, \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{0}_{1 \times 3}$ es un vector fila de dimensión 3.

2.4.4 Fuerzas generalizadas - campo gravitacional

Todos los cuerpos que componen el HALE-UAV están sujetos a la acción del campo gravitacional terrestre. Debido a la asunción de la hipótesis de cuerpo rígido, tales fuerzas se encuentran aplicadas en el centro de masa de cada cuerpo j , esto es

$$\mathbf{F}_j^g = -m_j g \hat{\mathbf{n}}_3, \quad (2.20)$$

donde m_j es la masa del cuerpo j , g es la aceleración de la gravedad y $\hat{\mathbf{n}}_3$ es el vector unitario que indica la dirección en la cual actúa el campo gravitatorio.

La carga generalizada debida a la acción del campo gravitacional terrestre asociada al conjunto de coordenadas \mathbf{q}_j es

$$\mathbf{Q}_j^g = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_j^g)^T & \mathbf{0}_{1 \times 4} \end{bmatrix}^T, \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{0}_{1 \times 4}$ es un vector fila de dimensión 4.

2.5 Ecuaciones de movimiento

Utilizando la metodología expuesta por [49], las ecuaciones que gobiernan el sistema completo se obtienen combinando *i*) las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo del sistema multicuerpo, compuesto por fuselaje (cubo), alas, trenes de aterrizaje y motores, con *ii*) el conjunto de ecuaciones de vínculo que establecen las conexiones

entre los diferentes cuerpos que componen el X-HALE-UAV. La forma general de las ecuaciones dinámicas para el cuerpo j está dada por

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{B}_{\mathbf{q}_j}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_j^v + \mathbf{Q}_j^{nc} + \mathbf{Q}_j^c, \quad (2.22)$$

donde \mathbf{M}_j es la matriz generalizada de masa para el cuerpo j , $\mathbf{B}_{\mathbf{q}_j}$ es la matriz jacobiana de restricciones para el cuerpo j , $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange, \mathbf{Q}_j^v es un vector cuadrático en las velocidades que surge de diferenciar la energía cinética del cuerpo j con respecto al tiempo, y a las coordenadas \mathbf{q}_j , \mathbf{Q}_j^{nc} comprende todas las cargas generalizadas de origen no conservativas (amortiguadores), y \mathbf{Q}_j^c comprende las cargas generalizadas conservativas (campo gravitacional y resortes).

Finalmente, las ecuaciones de movimiento para el sistema multicuerpo completo se obtienen ensamblando las ecuaciones de movimiento de cada cuerpo, en conjunto con las ecuaciones de restricción, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c, \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $\ddot{\mathbf{q}}$ es el vector de aceleraciones generalizadas, \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema multicuerpo,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_{n_b} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$\mathbf{B}_{\mathbf{q}}$ es la matriz jacobiana global asociada a las ecuaciones de restricción,

$$\mathbf{B}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{q}_2} & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{q}_{n_b}} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

y $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange,

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_c}\}^T. \quad (2.26)$$

El término $\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda}$ representa las fuerzas generalizadas de restricción. El significado de cada multiplicador de Lagrange depende de la manera en que se especificaron las restricciones [46].

En el Anexo A se presenta la deducción de las ecuaciones de movimiento para cada uno de los cuerpos y para el sistema multicuerpo.

El sistema de ecuaciones expuestas en (2.23) son DAEs de índice 3, ya que las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo y las ecuaciones de vínculo son ecuaciones algebraicas (en general altamente no lineales). El sistema (2.23) se puede resolver por medio de dos enfoques diferentes: *i*) reducción de índice de las DAEs y posteriormente aplicar paquetes estándares de integración para ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs); o *ii*) integración directa de las DAEs de índice 3. En el Capítulo 3 se presentan los detalles relacionados a las dos metodologías de resolución y su implementación computacional.

2.6 Modelo de ráfaga

En esta subsección se describe la implementación de un “modelo de ráfaga” sencillo basado en un movimiento de base (túnel de viento) que está vinculado al fuselaje de la aeronave a través de resortes y amortiguadores. Este desplazamiento de apoyo afecta, solamente, al fuselaje del UAV. Los desplazamientos se esquematizan en la Figura 2-7 ($u_x(t)$, $u_y(t)$, $u_z(t)$) donde el subíndice indica la dirección en la que ocurre el desplazamiento con respecto a un sistema inercial, \mathbf{N} .

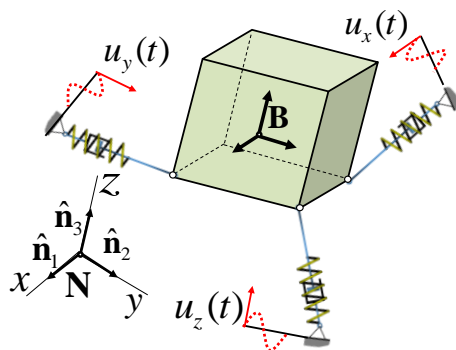


Fig. 2-7. Esquema de desplazamiento base.

La imposición de un movimiento de base introduce un desplazamiento relativo entre el centro de masa del fuselaje y la base del túnel de viento (ver Figura 2-7). Este desplazamiento relativo es utilizado para reformular la ecuación de movimiento asociada

al fuselaje del UAV, en términos de cantidades relativas [54]. Para ello se define el siguiente conjunto de coordenadas

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \{u_x(t), u_y(t), u_z(t), \mathbf{0}_{1 \times 4}\}^T, \\ \bar{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{u}, \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{u}}, \text{ y} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 &= \ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{u}},\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde \mathbf{u} es el desplazamiento de base, y $\bar{\mathbf{q}}_1$, $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1$ y $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1$ son los vectores de coordenadas, velocidades y aceleraciones relativas, respectivamente. Se debe notar que la transformación de coordenadas es realizada sólo para el conjunto de coordenadas asociado al fuselaje (cuerpo 1); el resto de los componentes experimenta este fenómeno a través de las ecuaciones de restricción. Luego de manipulaciones algebraicas, la ecuación de movimiento del fuselaje se reescribe como

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 + \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{q}}_1}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}_1^v + \mathbf{Q}_1^{nc} + \mathbf{Q}_1^c - \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}, \\ \boldsymbol{\Phi}(\bar{\mathbf{q}}_1, \dots, \mathbf{q}_k, \dots) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

El alargamiento neto de los resortes estará dado por la posición relativa del fuselaje respecto a la base, donde se encuentran anclados los resortes. Adicionalmente, los amortiguadores se ven afectados por la velocidad relativa entre el punto de anclaje y el punto de vinculación con el fuselaje [54].

2.7 Modelo de daño alar

El modelo de daño adoptado se basa, fundamentalmente, en el decremento de la rigidez torsional k_t asociada a una, o más, conexiones flexibles que vinculan los tramos de alas. Este mecanismo de daño estructural fue implementado en el código computacional por medio de un esquema simple el cual permite configurar el resorte que experimentará el cambio de rigidez y el tiempo en el cual ocurrirá dicho evento; su forma matemática se expresa así:

$$k_t(t) = \begin{cases} k_t = k_a, & t \leq t_{start}, \\ k_t = k_b, & t > t_{start}. \end{cases} \quad k_b < k_a,\tag{2.29}$$

donde $k_t(t)$ es la rigidez implementada en la articulación entre alas, k_a es la rigidez antes del instante del instante de decremento (t_{start}) y k_b es la rigidez disminuida.

Capítulo 3

Implementación Computacional

3.1 Generalidades

El sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica de la aeronave está constituido por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias complementadas por un conjunto de ecuaciones algebraicas asociadas a los vínculos; las ecuaciones del sistema completo son del tipo diferenciales algebraicas de índice 3. En el ámbito de la dinámica multicuerpo, comúnmente se utilizan dos técnicas para resolver el sistema de DAEs de índice 3. El procedimiento más simple consiste en derivar las ecuaciones de restricción con respecto al tiempo (reducción de índice), mientras que la segunda alternativa aborda directamente la integración numérica del sistema de DAEs de índice 3.

En este capítulo se describen las dos técnicas mencionadas anteriormente (reducción de índice e integración directa) en conjunto con su implementación computacional. Entre los esquemas de integración adoptados para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas que gobiernan la evolución temporal del sistema dinámico bajo estudio, se pueden mencionar: Runge-Kutta, Hamming, Diferencia Central, Newmark, Hilber-Hughes-Taylor y Alfa generalizado. Finalmente, se presentan los detalles asociados a la técnica utilizada para computar el conjunto de condiciones iniciales compatibles con las restricciones impuestas sobre el sistema multicuerpo.

3.2 Introducción

Como se mencionó anteriormente, el conjunto de DAEs de índice 3 que gobiernan la evolución temporal del HALE-UAV se puede integrar directamente sin reducción de índice por medio de esquemas tales como Newmark ([48] [55]). Sin embargo, se ha demostrado que este esquema tiene inconvenientes desde un punto de vista de su estabilidad. En particular, este método exhibe una débil inestabilidad debido a la presencia de las ecuaciones de restricción, las que teóricamente introducen frecuencias “infinitas” en el sistema, frecuencias que el algoritmo de Newmark no puede disipar. Para vencer este problema se han desarrollado diferentes variantes de este método, tal como el

esquema de Newmark con amortiguamiento, HHT y α -generalizado, los cuales introducen un amortiguamiento numérico para asegurar una pequeña disipación de estas frecuencias. Adicionalmente, los dos últimos esquemas retienen una precisión de segundo orden ([56] [57]).

Aparte de los métodos mencionados anteriormente, los cuales atacan directamente el sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas de índice 3, existen técnicas que permiten reducir el índice de las DAEs. Estas técnicas de reducción producen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se pueden resolver por medio de un esquema de integración estándar para ODEs tales como los métodos Runge-Kutta implementados en MATLAB[®].

La técnica basada en reducción de índice consiste básicamente en derivar el vector de restricciones dos veces respecto del tiempo obteniendo las denominadas “restricciones a nivel de la aceleración”. Sin embargo, el sistema de ODEs resultantes puede presentar inestabilidades como consecuencia del empleo de técnicas aproximadas y el acumulamiento de errores de redondeo producidos durante el proceso de integración numérica; evento que se ve reflejado en la violación de las ecuaciones de restricción. Además, la desviación numérica crece linealmente a medida que transcurre el tiempo. Este hecho sumado a los errores de truncamiento propios de los métodos numéricos utilizados, puede ocasionar en el peor de los casos, un acumulamiento cuadrático ([58] [59]). Así mismo, la desviación numérica, es independiente del método numérico elegido para las ecuaciones de movimiento y se origina en la ligera inestabilidad propia del sistema.

En la bibliografía existen varias técnicas de estabilización para corregir esta desviación numérica, entre las cuales, la más ampliamente utilizada por su simplicidad es la técnica es Baumgarte ([60] [61] [62] [63] [64]). Sin embargo, esa técnica puede tener problemas en la práctica y no existe un procedimiento general para determinar los parámetros involucrados en su utilización [51]. Otra técnica utilizada actualmente para estabilizar el sistema de ODEs obtenido como producto de la reducción de índice se basa en la proyección de la solución sobre la variedad de restricción (o parte de ella). Existen dos maneras básicas para realizar esta proyección, una de ellas consiste en redefinir la ODE mediante la adición de nuevos multiplicadores de Lagrange (proyección de invariantes), y la otra consiste en discretizar numéricamente la ODE y al final de cada

paso de integración proyectar la solución aproximada sobre la variedad de restricción seleccionada (proyección de coordenadas) [66].

A continuación se detallan los distintos algoritmos numéricos implementados para resolver tanto el sistema de DAEs de índice 3 como el sistema de DAEs de índice 1. En lo que sigue se utilizarán los acrónimos DAEs-1 y DAEs-3 para indicar DAEs de índice 1 y 3 respectivamente.

3.3 Reducción de índice

Como se mencionó anteriormente, esta técnica consiste en reescribir las DAEs de índice 3 como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, para lo cual es necesario derivar las ecuaciones de restricción dos veces con respecto al tiempo. Esta nueva ecuación impone “restricciones a nivel de la aceleración”, y tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Las ecuaciones de movimiento de (2.22) con las ecuaciones de restricción a nivel de la aceleración (3.1) forman el conjunto de ecuaciones diferenciales de índice 1 con invariantes. Éstas son

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c, \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para la solución exacta, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ representan las invariantes del sistema. El sistema expresado en (3.2) se puede reordenar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}_q^T \\ \mathbf{B}_q & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

El sistema de ODEs (3.3) puede ser integrado por medio de integradores estándares para ODEs (Runge-Kutta, Hamming, diferencia central, etc). Sin embargo, debido a la reducción de índice, las restricciones a nivel de la posición, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, y a nivel de la velocidad, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$, en general no se satisfacen idénticamente, produciéndose una “violación” de las mismas. Este inconveniente se puede suprimir y/o controlar estabilizando la solución por medio de diversas estrategias, tales como Baumgarte y Proyección de Coordenadas, cuyos detalles se expondrán en la subsección 3.3.4.

El sistema de ecuaciones (3.3) constituye un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden altamente no lineales. Previo a la integración de las mismas por medio de paquetes estándares para ODEs es necesario reescribir (3.3) como un sistema de $2n$ ecuaciones diferencias ordinarias de primer orden, es decir,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{z}(t); t]. \quad (3.4)$$

Donde $n = 7n_b + n_c$, (n_b es el número de cuerpos expuesto en la subsección 2.3.1 y n_c es el número de ecuaciones diferenciales que surgen de las restricciones a nivel de la aceleración). Las primeras n componentes de \mathbf{F} representan las velocidades generalizadas y las componentes restantes las fuerzas generalizadas, divididas por sus inercias correspondientes.

En la Ec. (3.4), los vectores $\mathbf{F}[\mathbf{z}(t); t]$, $\mathbf{z}(t)$ y $\dot{\mathbf{z}}(t)$ son de dimensión $2n \times 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathbf{z}(t); t] &= \{F_1[\mathbf{z}(t); t], \dots, F_{2n}[\mathbf{z}(t); t]\}^T, \\ \mathbf{z}(t) &= \{z_1(t), \dots, z_{2n}(t)\}^T, \text{ y} \\ \dot{\mathbf{z}}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{z}(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3.1 Predictor-corrector 4to orden de Hamming

El método predictor corrector de 4to orden propuesto por Hamming (PCH4) utiliza información computada en pasos de tiempo previos (método multipaso), en particular $t - \Delta t$, $t - 2\Delta t$, y $t - 3\Delta t$. Debido a esta propiedad, es esencial la utilización de un esquema especial de arranque que permita proveer la información necesaria al método PCH4. El esquema completo, incluyendo el esquema de arranque adoptado, se expone a continuación:

- I) En el tiempo inicial ($t = 0$), las condiciones iniciales son conocidas, por lo tanto es posible determinar \mathbf{z}_0 por medio de la Ec. (3.4), esto es

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}[\mathbf{z}(t_0); t_0]. \quad (3.6)$$

- II) En t_1 (es decir, en $t = \Delta t$), donde Δt es el paso de tiempo, la solución ${}^p \mathbf{z}_1$ se predice por medio del método explícito de Euler (*forward Euler*),

$${}^p \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \Delta t \mathbf{F}_0. \quad (3.7)$$

- III) La solución predicha se corrige utilizando el método modificado de Euler,

$${}^{k+1}\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \frac{\Delta t}{2} ({}^k\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0), \quad (3.8)$$

donde k es la variable de iteración, y

$${}^k\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}({}^k\mathbf{z}_1; t_1). \quad (3.9)$$

Este paso se repite hasta que el error de iteración (e^1) sea menor que una tolerancia pre establecida ε_0 . El error de iteración se determina como la norma vectorial infinita de la diferencia entre la solución correspondiente a la iteración actual y la computada en la iteración anterior.

- IV) En t_2 (es decir, $t = 2\Delta t$), la solución ${}^p\mathbf{z}_2$ se predice por medio del método predictor de dos pasos de Adams-Brashforth,

$${}^p\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \frac{\Delta t}{2} (3\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_0). \quad (3.10)$$

- V) La solución predicha es corregida por medio del método de Adams-Moulton de dos pasos,

$${}^{k+1}\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \frac{\Delta t}{12} (5{}^k\mathbf{F}_2 + 8\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_0), \quad (3.11)$$

donde

$${}^k\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}({}^k\mathbf{z}_2; t_2). \quad (3.12)$$

El paso se repite hasta que el error de iteración e^2 sea menor que una tolerancia de error previamente establecida ε_0 .

- VI) En t_3 (es decir, $t = 3\Delta t$), la solución ${}^p\mathbf{z}_3$ se predice mediante el método de Adams-Brashforth de tres pasos,

$${}^p\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_2 + \frac{\Delta t}{12} (23\mathbf{F}_2 - 16\mathbf{F}_1 + 5\mathbf{F}_0). \quad (3.13)$$

- VII) La solución predicha es corregida por medio del método de tres pasos de Adams-Moulton,

$${}^{k+1}\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_2 + \frac{\Delta t}{24} (9{}^k\mathbf{F}_3 + 19\mathbf{F}_2 - 5\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0), \quad (3.14)$$

donde

$${}^k\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}\left({}^k\mathbf{z}_3; t_3\right). \quad (3.15)$$

El paso se repite hasta que el error de iteración e^3 sea menor que una tolerancia de error preestablecida ε_0 , cuando esto ocurre, se calcula el error de truncamiento local, de la forma

$$\mathbf{E}_3^L = {}^{k+1}\mathbf{z}_3 - {}^p\mathbf{z}_3. \quad (3.16)$$

- VIII) Para t_4, t_5, t_6, \dots (es decir $t = 4\Delta t, 5\Delta t, 6\Delta t$), la solución es computada mediante el método predictor corrector de cuarto orden de Hamming. La ecuación que predice la solución está dada por

$${}^p\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_{j-4} + \frac{4}{3}\Delta t\left(2\mathbf{F}_{j-1} - \mathbf{F}_{j-2} + 2\mathbf{F}_{j-3}\right). \quad (3.17)$$

- IX) La ecuación predicha es modificada utilizando el error de truncamiento local calculado en el paso previo,

$${}^1\mathbf{z}_j = {}^p\mathbf{z}_j + \frac{112}{9}\mathbf{E}_{j-1}^L. \quad (3.18)$$

- X) La ecuación modificada es corregida por la ecuación de corrección

$${}^{k+1}\mathbf{z}_j = \frac{1}{8}\left[9\mathbf{z}_{j-1} - \mathbf{z}_{j-3} + 3\Delta t\left({}^k\mathbf{F}_j + 2\mathbf{F}_{j-1} + \mathbf{F}_{j-2}\right)\right], \quad (3.19)$$

donde

$${}^k\mathbf{F}_j = \mathbf{F}\left({}^k\mathbf{z}_j; t_j\right), \quad (3.20)$$

y

$${}^1\mathbf{F}_j = \mathbf{F}\left({}^1\mathbf{z}_j; t_j\right). \quad (3.21)$$

Este paso es repetido hasta que el error e^j de iteración sea menor que una tolerancia de error preestablecida ε_0 .

- XI) Una vez que el error e^j es menor que la tolerancia preestablecida ($e^j < \varepsilon_0$), se calcula el error de truncamiento local para su uso en el paso de tiempo actual como así también en el paso de tiempo posterior ($j+1$),

$$\mathbf{E}_j^L = \frac{9}{121}\left({}^{k+1}\mathbf{z}_j - {}^p\mathbf{z}_j\right). \quad (3.22)$$

- XII) Finalmente se calcula la solución final en el paso j como

$$\mathbf{z}_j = {}^{k+1}\mathbf{z}_j - \mathbf{E}_j^L, \quad (3.23)$$

3.3.2 Esquema de integración Runge-Kutta de 4^{to} orden

Los métodos Runge-Kutta constituyen una familia de integradores, explícitos y de un solo paso, destinados a la resolución de sistemas de ODEs de primer orden. Estos métodos están diseñados para alcanzar una precisión comparable a una expansión en serie de Taylor evitando, al mismo tiempo, la evaluación de derivadas de alto orden [67]. Si bien, los métodos RK se pueden presentar de diversas maneras, éstos se expresan generalmente como

$$z_{j+1} = z_j + \phi \Delta t, \quad (3.24)$$

donde ϕ es la función de incremento, la cual se puede interpretar como una pendiente generalizada sobre el intervalo de integración $\Delta t = t_{j+1} - t_j$.

El valor de ϕ en la Ec. (3.24) se obtiene considerando la pendiente en varios puntos dentro del subintervalo de integración. La cantidad de puntos utilizados dentro del intervalo para determinar la función incremento ϕ define el orden del método RK. Los métodos RK de segundo orden utilizan dos puntos, los de tercer orden tres puntos, los de cuarto orden cuatro puntos, y así sucesivamente. En particular, cuando se utilizan cuatro puntos se obtiene una familia específica de métodos RK denominados *clásicos*. Adicionalmente, el orden del método está directamente relacionado al error de truncamiento global, por ejemplo: un método RK de segundo orden posee un error de truncamiento local $O(h^3)$ y un error de truncamiento global $O(h^2)$, donde $h = \Delta t$. Por otro lado, se debe destacar que, para un orden dado, existe un conjunto infinito de métodos RK, cuya diferencia radica en: *i*) la localización de los puntos dentro del intervalo de integración que son utilizados para determinar ϕ ; y *ii*) la manera en que ϕ es estimada a partir de las pendientes evaluadas en dichos puntos.

En general, la función incremento se expresa como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n, \quad (3.25)$$

donde los coeficientes a_i son constantes y los k_i se definen como

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(z_j; t_j), \\
k_2 &= f\left(z_j + q_{11}k_1h; t_j + p_1h\right), \\
k_3 &= f\left(z_j + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h; t_j + p_2h\right), \\
&\vdots \\
k_n &= f\left(z_j + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h; t_j + p_{n-1}h\right),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde los p_i y q_i son constantes. Se debe destacar que los k_i constituyen un conjunto de relaciones de recurrencia, es decir, k_1 aparece en la ecuación para k_2 , la cual aparece en la ecuación para k_3 , y así sucesivamente. Adicionalmente, el número de términos n retenidos en la función incremento ϕ constituye el instrumento para generar una gran variedad de métodos RK. Una vez que n es seleccionado, las constantes a_i , p_i y q_i son evaluadas igualando la Ec. (3.24) a los términos de una expansión en series de Taylor. El lector debe notar que el método Runge-Kutta de primer orden, $n = 1$, es en realidad el método de Euler. Los métodos RK de segundo orden utilizan una función ϕ con dos términos, es decir $n = 2$, los métodos RK de tercer orden una función con $n = 3$, y así sucesivamente. Es fácil demostrar que los métodos RK de orden n proporcionarían resultados exactos si la solución a la ecuación diferencial es polinómica de orden n .

En este trabajo se adoptó el método RK clásico de cuarto orden ($n = 4$), el cual puede formularse en forma matricial de la siguiente manera ([68] [69]):

$$\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{z}_j + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)h, \tag{3.27}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_j; t_j), \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_j + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1h; t_j + \frac{1}{2}h\right), \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_j + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2h; t_j + \frac{1}{2}h\right), \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_j + \mathbf{k}_3h; t_j + h).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Cabe aclarar que \mathbf{F} fue definida en la Ec. (3.9).

3.3.3 Diferencia central (DC)

El método de diferencia central es extensamente utilizado por su simplicidad. Como su nombre lo indica, la formulación de éste método se basa en el empleo de diferencias finitas para aproximar la primera derivada (velocidad) y la segunda derivada (aceleración) en término de las posiciones [70]. Esto es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_n &= \frac{1}{2h}(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n-1}) + O(h^2), \\ \ddot{\mathbf{q}}_n &= \frac{1}{h^2}(\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}) + O(h^2),\end{aligned}\tag{3.29}$$

donde $h = t_{n+1} - t_n$.

En sus comienzos, este método fue concebido para integrar numéricamente, en el dominio del tiempo, ecuaciones diferenciales lineales asociadas a problemas de dinámica estructural. Con el objetivo de describir los esquemas de diferencia central utilizados frecuentemente en el ámbito de mecánica computacional, considere la siguiente ecuación de movimiento lineal,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t),\tag{3.30}$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema, la cual es simétrica y positiva definida, \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento del sistema estructural, \mathbf{K} es la matriz de rigidez del sistema estructural, y \mathbf{F}_{ext} es el vector de cargas externas.

La solución para las posiciones en $t = t_n + h$ se obtiene utilizando información computada en el paso de integración previo. Para ello es necesario utilizar (3.30) evaluada en t_n , esto es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{K}\mathbf{q}_n = \mathbf{F}_n^{ext}.\tag{3.31}$$

Reemplazando la Ec. (3.29) en (3.31) se obtiene la siguiente relación en términos de \mathbf{q}_{n+1} , \mathbf{q}_n , y \mathbf{q}_{n-1} es

$$\left(\frac{1}{h^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2h}\mathbf{C}\right)\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_n^{ext} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{h^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}_n - \left(\frac{1}{h^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2h}\mathbf{C}\right)\mathbf{q}_{n-1},\tag{3.32}$$

la cual permite computar la solución \mathbf{q}_{n+1} en t_{n+1} utilizando la ecuación de movimiento evaluada en t_n . Por esta razón el esquema DC es clasificado como un *método de integración explícito*. Adicionalmente, se debe notar que el cálculo de \mathbf{q}_{n+1} involucra \mathbf{q}_n

y \mathbf{q}_{n-1} , por lo tanto, el cómputo de la solución en $t = \Delta t$ requiere de un procedimiento especial de arranque. Tal esquema puede ser fácilmente derivado de la Ec. (3.29) reconociendo que \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ y $\ddot{\mathbf{q}}_0$ son conocidos en $t = 0$. Luego de algunas manipulaciones algebraicas, la fórmula para calcular \mathbf{q}_{-1} se puede expresar como

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_0 - \dot{\mathbf{q}}_0 h + \frac{h^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_0. \quad (3.33)$$

En la Tabla 3-1 se presenta un algoritmo del método DC el cual permite su fácil implementación en un código de computadora [70]. El método de diferencia central requiere la utilización de un paso de integración menor a un valor crítico, denominado h_{cr} ; tales métodos son referenciados como *condicionalmente estables*. Si el paso de tiempo utilizado es superior a h_{cr} , el procedimiento de integración se vuelve inestable, y por lo tanto cualquier error de redondeo se magnifica durante el proceso de integración haciendo que la solución carezca de valor, en la mayoría de los casos.

Tabla 3-1: Algoritmo de Diferencia Central (sistemas lineales)

A	Esquema de arranque:
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Computar $\ddot{\mathbf{q}}_0$ a partir de $\dot{\mathbf{q}}_0$, \mathbf{q}_0 y la ecuación de movimiento. 2. Seleccionar $h \leq h_{cr}$. 3. Computar \mathbf{q}_{-1}. 4. Calcular $\hat{\mathbf{M}} = \left(\frac{1}{h^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right)$. 5. Factorizar $\hat{\mathbf{M}}$: $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{U}$.
B	Para cada paso de tiempo:
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular el lado derecho $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_n^{ext} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{h^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{q}_n - \left(\frac{1}{h^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{n-1}$. 2. Resolver para las coordenadas en $t_{n+1} = t_n + h$, $\hat{\mathbf{M}} \mathbf{q}_{n+1} = \hat{\mathbf{R}}$. 3. Si es necesario, computar las velocidades y aceleraciones en t, <ul style="list-style-type: none"> $\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n-1})$ $\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{h^2} (\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1})$

Si bien, el algoritmo presentado en la Tabla 3-1 fue derivado para integrar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, su utilización en el contexto de ODEs no lineales y sistemas de DAEs-1 (como el sistema estudiado en este trabajo de tesis) no supone ninguna dificultad adicional. Sin embargo, desde un punto de vista de implementación

computacional es necesario realizar una leve modificación en el procedimiento presentado anteriormente. Para ello, consideremos una versión reestructurada de la DAE de índice 1 introducida en la Ec. (3.3),

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{B}_q^T(t_n) \boldsymbol{\lambda}_n &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n), \\ \mathbf{B}_q(t_n) \dot{\mathbf{q}}_n &= \mathbf{S}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n),\end{aligned}\tag{3.34}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{Q}^v(t_n) + \mathbf{Q}^{nc}(t_n) + \mathbf{Q}^c(t_n), \\ \mathbf{S} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{B}_q(t_n) \dot{\mathbf{q}}_n) \dot{\mathbf{q}}_n.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Introduciendo la segunda expresión de la Ec. (3.29) en la Ec. (3.35) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2} \mathbf{M}_n \mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{B}_q^T(t_n) \boldsymbol{\lambda}_n &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) + \frac{2}{h^2} \mathbf{M}_n \mathbf{q}_n - \frac{1}{h^2} \mathbf{M}_n \mathbf{q}_{n-1}, \\ \mathbf{B}_q(t_n) \mathbf{q}_{n+1} &= h^2 \mathbf{S}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) + 2\mathbf{B}_q(t_n) \mathbf{q}_n - \mathbf{B}_q(t_n) \mathbf{q}_{n-1},\end{aligned}\tag{3.36}$$

la cual se puede reescribir como

$$\tilde{\mathbf{M}}_n \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n-1}, \dot{\mathbf{q}}_n) \\ \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n-1}, \dot{\mathbf{q}}_n) \end{Bmatrix},\tag{3.37}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}_n &= \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} \mathbf{M}_n & \mathbf{B}_q^T(t_n) \\ \mathbf{B}_q(t_n) & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n-1}, \dot{\mathbf{q}}_n) &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) + \frac{2}{h^2} \mathbf{M}_n \mathbf{q}_n - \frac{1}{h^2} \mathbf{M}_n \mathbf{q}_{n-1}, \text{ y} \\ \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n-1}, \dot{\mathbf{q}}_n) &= h^2 \mathbf{S}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) + 2\mathbf{B}_q(t_n) \mathbf{q}_n - \mathbf{B}_q(t_n) \mathbf{q}_{n-1}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

A diferencia del algoritmo detallado en la Tabla 3-1, la Ec. (3.37) utiliza $\dot{\mathbf{q}}_n$ en el cómputo de \mathbf{q}_{n+1} ; lo cual requiere el cálculo de $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ al final de cada paso de integración. Sobre esta base, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ es computado por medio de un esquema de diferencia hacia atrás de segundo orden. En la Tabla 3-2 se presenta un algoritmo del método DC especialmente modificado para integrar sistemas de ODEs no lineales, como así también sistemas de DAEs-1.

Otra forma de obtener el esquema de diferencia central consiste en emplear las fórmulas de Newmark considerando $\gamma = 1/2$ y $\beta = 0$ [71]. Bajo estas asunciones, las fórmulas para los desplazamientos y velocidades tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}),\end{aligned}\tag{3.39}$$

donde el paso de integración h es considerado constante durante todo el proceso de integración.

Tabla 3-2: Algoritmo de Diferencia Central (ODEs no lineales y DAEs de índice 1)

A	Esquema de arranque:
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Computar $\ddot{\mathbf{q}}_0$ a partir de $\dot{\mathbf{q}}_0$, $\ddot{\mathbf{q}}_0$ y la ecuación de movimiento. 2. Seleccionar $h \leq h_{cr}$. 3. Computar \mathbf{q}_{-1}.
B	Para cada paso de tiempo:
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular \mathbf{M}_n, y $\mathbf{B}_q(t_n)$. 2. Factorizar $\tilde{\mathbf{M}}_n$: $\tilde{\mathbf{M}}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{U}_n$. 3. Calcular el lado derecho \mathbf{R} y \mathbf{S}. 4. Resolver para las coordenadas en $t_{n+1} = t_n + h$, $\tilde{\mathbf{M}}_n \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n+1} \\ \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}$. 5. Computar las velocidades en t_{n+1} por medio de, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{2h}(3\mathbf{q}_{n+1} - 4\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}).$ 6. Si es necesario, computar las aceleraciones en t_n, $\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{h^2}(\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}).$

Si bien, las ecuaciones presentadas en (3.39) son explícitas en los desplazamientos e implícitas en las velocidades, para sistemas lineales, se puede obtener un esquema de integración explícito. Sin embargo, para ODEs y DAEs-1 que contengan términos no lineales en función de las velocidades (por ejemplo fuerzas que disipan energía) se requiere de un proceso iterativo en cada paso de tiempo para determinar adecuadamente $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$. Este proceso puede comenzar considerando las velocidades computadas en el paso previo y mejorando la aproximación de las mismas por medio de la evaluación de las aceleraciones. Este procedimiento converge rápidamente si el amortiguamiento es

pequeño. Una manera de evitar este esquema iterativo consiste en evaluar la velocidad a la mitad del paso de integración, $t_{n+1/2} = t_n + h/2$ como variable intermedia [71]. En la Tabla 3-3 se presenta un algoritmo de Diferencia Central, que utiliza las velocidades computadas en $t_{n+1/2}$.

Tabla 3-3: Algoritmo de Diferencia Central [72].

A	Esquema de arranque:
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Computar $\ddot{\mathbf{q}}_0$ y λ_0 a partir de $\dot{\mathbf{q}}_0$, $\ddot{\mathbf{q}}_0$ y la ecuación de movimiento. 2. Seleccionar $h \leq h_{cr}$.
B	Para cada paso de tiempo:
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Computar $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n h + \ddot{\mathbf{q}}_n \frac{h^2}{2}$. 2. Computar las velocidades en $t_{n+1/2} = t_n + h/2$, por medio de, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_n \frac{h}{2}.$ 3. Calcular \mathbf{M}_{n+1}, y $\mathbf{B}_q(t_{n+1})$. 4. Factorizar $\hat{\mathbf{M}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{n+1} & \mathbf{B}_q^T(t_{n+1}) \\ \mathbf{B}_q(t_{n+1}) & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix}$: $\hat{\mathbf{M}}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1}$ 5. Calcular el lado derecho $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{n+1}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2})$ y $\mathbf{S}(\mathbf{q}_{n+1}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2}; t_{n+1})$. 6. Resolver para las aceleraciones y λ en $t_{n+1} = t_n + h$, $\hat{\mathbf{M}}_{n+1} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \lambda_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix}$. 7. Computar las velocidades en t_{n+1} por medio de, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_{n+1/2} + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \frac{h}{2}.$

3.3.4 Métodos de estabilización

La técnica de reducción de índice expuesta al comienzo de la Sección 3.3, produce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se pueden resolver por medio de un esquema de integración estándar para ODEs (como los descritos en las subsecciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3). Sin embargo el sistema de ecuaciones (3.3) puede presentar inestabilidades como consecuencia de las técnicas de aproximación y acumulación de errores de redondeo, que se producen durante el proceso de integración numérica y se manifiestan en la violación de las ecuaciones de restricción. Además, la desviación numérica crece linealmente a medida que transcurre el tiempo. Éste hecho sumado a los errores de truncamiento propios de los métodos numéricos empleados puede ocasionar

un acumulamiento cuadrático ([58] [59]). Se debe aclarar que las desviaciones numéricas son independientes del método numérico elegido para integrar la ecuación de movimiento (3.3) y se origina en la ligera inestabilidad propia del sistema.

La técnica de estabilización Baumgarte, por su simplicidad, es una de las más utilizadas ([60] [61]), pero esta técnica no es del todo eficiente en la práctica, además no existe un procedimiento general para la determinación de los parámetros involucrados en su utilización [51]. El procedimiento de proyectar la solución sobre la variedad de restricción (o parte de ella) es otra técnica de estabilización, y se puede realizar de dos formas: *i*) proyección de invariantes, que consiste en redefinir la ODE mediante la introducción de nuevos multiplicadores de Lagrange y *ii*) discretizar numéricamente la ODE y al final de cada paso de integración proyectar la solución aproximada sobre la variedad de restricción seleccionada [51].

A continuación se describe la implementación de las dos técnicas mencionadas anteriormente para eliminar la desviaciones numéricas que surgen durante la integración del sistema de ecuaciones diferenciales de índice 1 que gobiernan el sistema multicuerpo.

3.3.4.1 Técnica de Baumgarte

Esta técnica consiste en reemplazar la ecuación de restricción a nivel de la aceleración, $\ddot{\Phi} = \mathbf{0}$, por una versión estabilizada cuya forma es similar a un controlador proporcional derivativo (PD) [62], esto es

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha\dot{\Phi} + \beta^2\Phi = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

donde α y β son constantes positivas.

Reemplazando la ecuación (3.40) en la ecuación (3.3), se obtiene la versión estabilizada para el sistema ODEs,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}_q^T \\ \mathbf{B}_q & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - 2\alpha \mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}} - \beta^2 \Phi(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

La ecuación (3.41) es resuelta por medio de alguno de los esquemas numéricos presentados anteriormente. Sin embargo, esta técnica posee limitaciones cuando se aplica a sistemas relativamente complejos. Una alternativa para mejorar la estabilización de las ecuaciones de restricción consiste en incrementar los valores de α y β , sin embargo esta

estrategia está limitada por un valor crítico, del cual dependen las constantes α y β a partir del cual la solución numérica se desestabiliza en forma repentina.

A pesar de que no existe un procedimiento sistemático para seleccionar los valores de α y β , en la literatura existen varios trabajos en los cuales se trata este asunto ([65] [73] [74]). En general, la elección de las ganancias α y β depende del paso del tiempo Δt usado en la integración numérica. Según datos experimentales, valores entre 2 y 20 producen muy buenos resultados para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, siendo $\alpha = \beta$ la elección óptima para el caso de amortiguamiento crítico.

3.3.4.2 Técnica de proyección de coordenadas

Esta técnica consiste en discretizar numéricamente (3.3), computar la solución en t_{n+1} mediante alguno de los integradores descritos en la subsecciones 3.3.1-3 y al final de cada paso de integración, proyectar la solución obtenida sobre la variedad de restricción seleccionada. Para la proyección se utilizan tres definiciones diferentes para la variedad de restricción: *i*) a nivel de posición, *ii*) a nivel de la velocidad y *iii*) la combinación de las variedades a nivel de la posición y velocidad (ésta posee un costo computacional mayor).

Reescribiendo el sistema de ODEs de segundo orden (3.3) como un sistema de ODEs de primer orden utilizando $\mathbf{z} = \{\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T\}^T$ es posible definir la variedad de restricción como

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \begin{Bmatrix} \Phi(\mathbf{q}) \\ \mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.42)$$

donde $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ es un conjunto invariante para (3.3). La derivada de \mathbf{h} con respecto al vector \mathbf{z} , produce

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}_z(\mathbf{z}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_q & \mathbf{0}_{n_c \times 7n_b} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{B}_q \end{Bmatrix}, \quad (3.43)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{z})$ tiene rango fila completo. Si se elige como conjunto invariante sólo la variedad a nivel de la velocidad, entonces

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.44)$$

la ecuación (3.43) se reduce a

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{B}_q. \quad (3.45)$$

La solución computada en cada paso del tiempo es proyectada sobre la variedad \mathbf{h} definida anteriormente mediante el siguiente esquema,

$$\mathbf{z}_{n+1} = \tilde{\mathbf{z}}_{n+1} - \gamma \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}_{n+1}; t_{n+1}) \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{z}}_{n+1}), \quad (3.46)$$

donde $\mathbf{F} = \mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{D})^{-1}$ con $\mathbf{D}(\mathbf{z})$ suave, tal que $\mathbf{H}\mathbf{D}$ es no singular para cada \mathbf{z} , y $\tilde{\mathbf{z}}_{n+1}$ es la solución computada en $t = t_{n+1}$ por medio del método de integración utilizado. La elección más común de \mathbf{D} es $\mathbf{D} = \mathbf{H}^T$, una variante menos costosa es

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_q^T & \mathbf{0}_{n_c \times 7n_b} \\ \mathbf{0}_{n_c \times 7n_b} & \mathbf{B}_q^T \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

El esquema (3.46) conserva un error global $O(\Delta t^p)$ para \mathbf{z}^{n+1} y las restricciones (3.42) son satisfechas con un error proporcional a $O(\Delta t^{p+1})$ [59]. Además, el esquema (3.46) tiene la estabilidad requerida si $\mathbf{H}\mathbf{F}$ es definido positivo. Para la mayoría de los sistemas mecánicos, la variedad de restricción resulta asintóticamente estable para $0 < \gamma < 2$, donde la elección $\gamma = 1$ está cerca de ser óptima.

La matriz \mathbf{F} se determina de las siguientes formas

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_q^T (\mathbf{B}_q \mathbf{B}_q^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c \times n_c} & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \\ -\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{B}_q^T (\mathbf{B}_q \mathbf{B}_q^T)^{-1} & \mathbf{I}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_q^T (\mathbf{B}_q \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_q^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c \times n_c} & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c \times n_c} & \mathbf{I}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_q^T (\mathbf{B}_q \mathbf{B}_q^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c \times n_c} & \mathbf{0}_{n_c \times n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c \times n_c} & \mathbf{I}_{n_c \times n_c} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

siendo más efectivo el proceso de estabilización cuando más pequeño sea $\|\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{F}\|$. El conjunto de ecuaciones (3.48), (3.49) y (3.50) dan lugar a diferentes esquemas de post-estabilización ([75] [76]):

- *S-full*: obtenido por medio del esquema de estabilización (3.46) y la ecuación (3.48), proyectando sobre la variedad de restricción definida a nivel de la posición y a nivel de la velocidad;
- *S-both*: obtenido por medio del esquema de estabilización (3.46) y la ecuación (3.50), proyectando sobre la variedad de restricción definida a nivel de la posición y a nivel de la velocidad;
- *S-both-m*: obtenido por medio del esquema de estabilización (3.46) y la ecuación (3.49), proyectando sobre la variedad de restricción definida a nivel de la posición y a nivel de la velocidad;
- *S-pos*: obtenido por medio del esquema de estabilización (3.46) y la ecuación (3.50), proyectando sobre la variedad de restricción definida solo a nivel de la posición; y
- *S-vel*: obtenido por medio del esquema de estabilización (3.46) y la ecuación (3.50), proyectando sobre la variedad de restricción definida sólo a nivel de la velocidad.

Se debe mencionar además, que el esquema *S-full* es poco usado ya que el término $\partial(\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{\mathbf{q}}$ es muy difícil de computar y es, también, muy costoso computacionalmente. El mismo grado de precisión puede obtenerse utilizando el esquema *S-both* mediante una aplicación doble del mismo, denotado comúnmente en la literatura como *S-both*². Un algoritmo para aplicar *S-both*² se puede encontrar en [75]. Más detalles acerca de la estabilidad del esquema (3.46) y de los criterios de selección de la matriz \mathbf{F} se pueden encontrar en los trabajos de Ascher ([59] [66] [75]).

3.4 Integración directa de las DAEs de índice 3

Una alternativa a la técnica de reducción de índice expuesta en la Subsección 3.3 para integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento que resultan de sistemas dinámicos con restricciones consiste en tratar directamente las DAEs de índice 3. Los algoritmos utilizados para integrar estos sistemas deben, necesariamente, ser capaces de lidiar adecuadamente con las restricciones presentes en el sistema. En este sentido, Cardona y Geradin [48] han realizado una extensa revisión de los esquemas numéricos utilizados en el ámbito de la dinámica estructural con el objetivo de seleccionar

(introduciendo eventualmente las modificaciones necesarias) los algoritmos adecuados para integrar sistemas de DAEs-3.

Las ecuaciones de movimiento que surgen del modelado de sistemas estructurales son generalmente rígidas; es decir, las frecuencias de vibración están distribuidas sobre un amplio rango de frecuencias. Este fenómeno es producto de las propiedades físicas del sistema, o bien, del procedimiento numérico utilizado para discretizar espacialmente el sistema de PDEs (*Partial Differential Equations*). Por éste motivo, los algoritmos numéricos que se utilizan en CSD (*Computational Structural Dynamics*) son frecuentemente incondicionalmente estables; es decir, son estables independientemente del paso de tiempo adoptado para la integración. Entre los esquemas de integración más populares utilizados en dinámica estructural, las fórmulas de Newmark [77] son probablemente las más difundidas. El esquema propuesto por Newmark ha servido como base para el desarrollo de un gran número de algoritmos numéricos que incorporan propiedades que mejoran sustancialmente el desempeño del mismo. Por ejemplo, la propiedad deseada de estabilidad incondicional puede perderse para ciertos problemas no lineales. Este problema se puede evitar por medio de la introducción de cierta disipación numérica a altas frecuencias, permitiendo al mismo tiempo, obtener resultados más cercanos al comportamiento real de materiales y estructuras ([78] [79] [80]). Otros esquemas que abordan el problema de estabilidad en el régimen no lineal son los llamados *energy conserving algorithms* (algoritmos de conservación de energía) ([81] [82]).

Los integradores más utilizados en dinámica multicuerpo flexible basados en el método clásico de Newmark que incorporan disipación a altas frecuencias manteniendo una precisión de segundo orden son: *i*) el método de Newmark con amortiguamiento [48]; *ii*) el método HHT [78]; y *iii*) el método α -generalizado de Chung y Hulbert [83].

3.4.1 Linealización de las ecuaciones de movimiento

La implementación de integradores tales como Newmark, HHT, o α -generalizado, requieren la utilización de una versión linealizada de las ecuaciones de movimiento presentadas en (2.23) [48]. Para ello se expresa la solución corregida en $t = t_n$ de manera incremental como

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_n &= \hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}, \\
\dot{\mathbf{q}}_n &= \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\dot{\mathbf{q}}, \\
\ddot{\mathbf{q}}_n &= \check{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\ddot{\mathbf{q}}, \text{ y} \\
\lambda_n &= \hat{\lambda}_n + \Delta\lambda,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

donde ($\hat{\quad}$) sobre la variable indica cantidad aproximada, y $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\dot{\mathbf{q}}$, $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$, y $\Delta\lambda$ son los incrementos en el vector de coordenadas, velocidades, aceleraciones, y multiplicadores de Lagrange, respectivamente.

A partir de la Ec. (3.51) es posible realizar una expansión de primer orden de la Ec. (2.23) alrededor de $(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \check{\ddot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\lambda}_n)$. Previo a éste procedimiento, se reescribe la Ec. (2.23) evaluada en $t = t_n$ como

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{q}}_n, \dot{\mathbf{q}}_n, \mathbf{q}_n, \lambda_n; t_n) &= \mathbf{M}(\mathbf{q}_n)\ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{B}_q^T(\mathbf{q}_n)\lambda_n - \mathbf{Q}_n^v - \mathbf{Q}_n^{nc} - \mathbf{Q}_n^c = \mathbf{0}, \\
\Phi(\mathbf{q}_n; t_n) &= \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3.52}$$

donde \mathbf{r} es el vector residuo.

Luego de manipulaciones algebraicas (ver Anexo B) se obtiene la versión linealizada de las ecuaciones de movimiento y el vector de restricciones. Esto es

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_n \Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{T_n} \Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{T_n} \Delta\mathbf{q} + (\mathbf{B}_q^T)_n \Delta\lambda &= -\mathbf{r}_n + O(h^2), \\
(\mathbf{B}_q)_n \Delta\mathbf{q} &= -\Phi_n + O(h^2),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

donde

$$\mathbf{C}_{T_n}(\hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n; t_n) = \left(-\frac{\partial}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}} [\mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc}] \right)_{t=t_n}, \tag{3.54}$$

es la matriz de amortiguamiento tangente, y

$$\mathbf{K}_{T_n}(\hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n, \lambda_n; t_n) = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\ddot{\mathbf{q}}}} [\mathbf{M}\check{\ddot{\mathbf{q}}}] + \frac{\partial}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}} [\mathbf{B}_q^T \hat{\lambda}] - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}} [\mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c] \right)_{t=t_n} \tag{3.55}$$

es la matriz de rigidez tangente del sistema.

Finalmente, la Ec. (3.53) se puede reescribir en $t = t_n$ en forma reducida como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{q}} \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{T_n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\dot{\mathbf{q}} \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_n} & (\mathbf{B}_q^T)_n \\ (\mathbf{B}_q)_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_n \\ -\Phi_n \end{Bmatrix}, \tag{3.56}$$

lo cual produce las ecuaciones de movimiento linealizadas para un sistema multicuerpo con restricciones holonómicas.

3.4.2 Método de Newmark

En 1959 Newmark presentó una familia de métodos de integración para la solución de problemas de dinámica estructural, basados en una aproximación del campo de desplazamientos y velocidades, asumiendo que la aceleración varía linealmente [77]. Las fórmulas de Newmark se obtienen por medio de una expansión en series de Taylor para \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en $t = t_n$. Esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2!}\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^3}{3!}\dddot{\mathbf{q}}_n + \dots, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + h\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2!}\dddot{\mathbf{q}}_n + \dots,\end{aligned}\tag{3.57}$$

donde $h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Considerando la expresión integral para el residuo en las expansiones presentadas en (3.57), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau)[t_{n+1} - \tau] d\tau, \text{ y} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Adicionalmente, considere la expansión en Taylor para $\ddot{\mathbf{q}}_n$ y $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ alrededor de $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_n &= \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{q}^{(3)}(t_n - \tau) + \mathbf{q}^{(4)}\frac{(t_n - \tau)^2}{2!} + \dots, \text{ y} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{q}^{(3)}(t_{n+1} - \tau) + \mathbf{q}^{(4)}\frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2!} + \dots,\end{aligned}\tag{3.59}$$

A continuación, la primera ecuación de (3.59) multiplicada por $(1 - \gamma)$ es combinada con la segunda ecuación de (3.59) multiplicada por γ , esto es

$$\begin{aligned}(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} &= (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}(\tau) + (1 - \gamma)\mathbf{q}^{(3)}(t_n - \tau) + \\ &+ \gamma\ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \gamma\mathbf{q}^{(3)}(t_n - \tau) + O(h^2\mathbf{q}^{(4)}).\end{aligned}\tag{3.60}$$

Este procedimiento permite obtener $\ddot{\mathbf{q}}(\tau)$ en términos de $\ddot{\mathbf{q}}_n$ y $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$,

$$\ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{q}^{(3)}(\tau - h\gamma - t_n) + O(h^2\mathbf{q}^{(4)}).\tag{3.61}$$

Realizando el mismo procedimiento descrito anteriormente, pero utilizando $(1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n$ y $2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{q}^{(3)}(\tau - 2h\beta - t_n) + O(h^2\mathbf{q}^{(4)}). \quad (3.62)$$

Las ecuaciones (3.61) y (3.62) en conjunto con el teorema del valor medio se utilizan para computar la versión integral del residuo introducido en la Ec. (3.58),

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau &= h(1-\gamma)\dot{\mathbf{q}}_n + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{R}_n, \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau)[t_{n+1} - \tau] d\tau &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta h^2\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{R}'_n, \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathbf{q}^{(3)}(\hat{\tau})h^2\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + O(h^3\mathbf{q}^{(4)}), \text{ y} \\ \mathbf{R}'_n &= \mathbf{q}^{(3)}(\hat{\tau})h^3\left(\frac{1}{6} - \beta\right) + O(h^4\mathbf{q}^{(4)}), \text{ con } t_n < \hat{\tau} < t_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. (3.63) en la Ec. (3.58) se obtienen las fórmulas de Newmark,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n h + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta h^2\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{R}'_n, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1-\gamma)h\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma h\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{R}_n. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Si bien los parámetros (β, γ) son elegidos por el usuario, es bien conocido que la elección más apropiada para tales parámetros es $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$, lo cual produce el método conocido con el nombre aceleración constante promedio (*average constant acceleration*). Esta elección para β y γ produce un esquema incondicionalmente estable con máxima precisión sobre todo el rango de frecuencias para un sistema lineal. Esta propiedad se puede visualizar evaluando las expresiones para los residuos \mathbf{R}_n y \mathbf{R}'_n en la Ec. (3.64).

Tabla 3-4: Esquemas numéricos basados en el algoritmo de Newmark

Esquema	Tipo	γ	β	Precisión
Diferencia Central (Puramente explícito)	Explícito	0	0	1
Diferencia central	Explícito	1/2	0	2
Fox-Goodwin	Implícito	1/2	1/12	2
Aceleración lineal	Implícito	1/2	1/6	2
Aceleración constante promedio (Reg. trapecoidal)	Implícito	1/2	1/4	2

En la Tabla 3-4 se presenta un resumen de los principales métodos de integración basados en Newmark para diferentes valores de los parámetros β y γ .

Generalmente se asume que las propiedades de estabilidad y precisión en el método de Newmark ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) se mantienen cuando las fórmulas son aplicadas a sistemas no lineales; hecho que debe ser considerado solo como una conjetura. La gran diversidad y rango de no linealidades ha conducido al uso de estrategias numéricas para examinar las propiedades de una gran variedad de esquemas numéricos. En particular, el método de Newmark tiene problemas de estabilidad cuando es utilizado para integrar sistemas de DAEs. Específicamente, exhibe una débil inestabilidad debido a la presencia de restricciones (ecuaciones algebraicas), las cuales introducen frecuencias extremadamente elevadas (teóricamente infinitas) en el sistema dinámico. Tales frecuencias no pueden ser disipadas por el algoritmo de Newmark, volviéndose por lo tanto, incondicionalmente inestable [55]. Este problema puede ser evitado introduciendo cierto grado de amortiguamiento numérico en las fórmulas de Newmark. Cardona y Geradin [48] expusieron que la mejor manera de incorporar tal amortiguamiento es expresar los parámetros β y γ en término de una tercera constante α como

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2, \quad \text{y} \quad \alpha \geq 0. \quad (3.66)$$

A continuación se detalla la aplicación de las fórmulas de Newmark a las ecuaciones de movimiento linealizadas presentadas en la Ec. (3.56). Para ello se expresa la Ec. (3.56) en $t = t_{n+1}$ y se asume $\mathbf{q}_{n+1}^0 = \mathbf{0}$, con lo cual las fórmulas de Newmark se reducen al siguiente conjunto predictor para la iteración 0 en t_{n+1} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1}^0 &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{q}}_n, \quad \text{y} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

y (3.65) se reestructura como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_{n+1}^0 + \beta h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}, \quad \text{y} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 + \gamma h \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

La Ec. (3.68) en conjunto con $\mathbf{q}_{n+1}^0 = \mathbf{0}$ permite escribir los incrementos en las velocidades y aceleraciones en términos de los incrementos en las posiciones (ver Anexo B), es decir,

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{\beta h^2} \Delta\mathbf{q}, \\ \Delta\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\gamma}{\beta h} \Delta\mathbf{q},\end{aligned}\tag{3.69}$$

lo cual a su vez permite reescribir (3.56) como

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}_{T_{n+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & (\mathbf{B}_q^T)_{n+1} \\ (\mathbf{B}_q)_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\Phi_{n+1} \end{Bmatrix},\end{aligned}\tag{3.70}$$

o en forma contraída,

$${}^{Nk}\mathbf{S}_{n+1} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\Phi_{n+1} \end{Bmatrix},\tag{3.71}$$

donde

$$\begin{aligned}{}^{Nk}\mathbf{S}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{T_{n+1}} & (\mathbf{B}_q^T)_{n+1} \\ (\mathbf{B}_q)_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ y} \\ \bar{\mathbf{K}}_{T_{n+1}} &= \mathbf{K}_{T_{n+1}} + \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}_{T_{n+1}}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

El supra índice Nk en la Ec. (3.71) indica que la matriz de iteración \mathbf{S} corresponde al método de Newmark clásico. Finalmente, se deben actualizar los valores de $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$, y \mathbf{q}_{n+1} correspondientes a la iteración k acorde a

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{q}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta\mathbf{q}, \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} &= \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta h^2} \Delta\mathbf{q}, \text{ y} \\ \lambda_{n+1}^{k+1} &= \lambda_{n+1}^k + \Delta\dot{\lambda}.\end{aligned}\tag{3.73}$$

En la Tabla 3-5 se presenta un algoritmo para el esquema de Newmark el cual permite su fácil implementación en un código de computadora [48].

Tabla 3-5: Algoritmo de Newmark

A	Para cada paso de tiempo:
	1. Incrementar el tiempo acorde $t = t_n + h$.
	2. \mathbf{q}_n y λ_n son conocidas.
	3. Computar \mathbf{q}_{n+1}^0 , $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^0$ y $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^0$ acorde a (3.67) y asumir $\lambda_{n+1}^0 = \mathbf{0}$.
	4. Evaluar ${}^{Nk}\mathbf{S}_{n+1}^k$ y los residuos \mathbf{r}_{n+1}^k y Φ_{n+1}^k .
	5. Calcular $\Delta\mathbf{q}$ y $\Delta\lambda$ acorde a (3.71).
	6. Actualizar el valor de \mathbf{q}_{n+1} , $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ y λ_{n+1} acorde a (3.73).
	7. Computar el error y chequear por convergencia, $\ \mathbf{r}_{n+1}^{k+1}\ _\infty < \varepsilon_1$, $\ \Phi_{n+1}^{k+1}\ _\infty < \varepsilon_2$, $\ \{\Delta\mathbf{q}, \Delta\lambda\}^T\ _\infty < \varepsilon_3$.
	7.1. Si la condición de convergencia se cumple, se retorna al punto 1.
	7.2. Si la condición de convergencia no se cumple, se retorna al punto 4.

3.4.3 Método de Hilber-Hughes-Taylor (HHT)

La eficiencia y sencilla implementación del método de Newmark lo hacen uno de los integradores más utilizados en el ámbito de la dinámica estructural. Sin embargo, cuando el método requiere la introducción de amortiguamiento numérico para preservar su estabilidad, el método pierde la propiedad de precisión de segundo orden. Adicionalmente, la energía disipada por el método puede ser excesiva [48]. Sobre esta base, Hilber *et al.* [78] propuso una elegante manera de introducir amortiguamiento numérico en las fórmulas de Newmark sin degradar la precisión del método. Tal estrategia consiste en mantener las fórmulas de Newmark (3.65) mientras las ecuaciones de movimiento son modificadas por medio de la introducción de un factor α_f y $(1 - \alpha_f)$ con el objetivo de promediar las fuerzas internas (elásticas, de dispersión, de restricción, etc) y las fuerzas externas entre t_n y t_{n+1} . En dinámica multicuerpo, la ecuación de movimiento (2.23) es modificada de la siguiente manera ([84] [85]):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n+1}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (1 - \alpha_f)(\mathbf{B}_q^T\lambda - \mathbf{Q}^v - \mathbf{Q}^{nc} - \mathbf{Q}^c)_{n+1} = \\ -\alpha_f(\mathbf{B}_q^T\lambda - \mathbf{Q}^v - \mathbf{Q}^{nc} - \mathbf{Q}^c)_n, \quad (3.74) \\ \Phi(\mathbf{q}_{n+1}; t_{n+1}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Donde las cantidades $()_n$ son conocidas provenientes del paso de tiempo anterior. La ecuación de movimiento modificada (3.74) puede ser utilizada sin problemas en el caso de sistemas no lineales. El esquema de integración obtenido por las fórmulas de

Newmark en conjunto con la ecuación (3.74) se conoce con el nombre de HHT o método α [69].

Al igual que el método de Newmark, la ecuación de movimiento (3.74) necesita ser linealizada previo a su implementación numérica. Siguiendo el procedimiento descrito en el Anexo B, la versión linealizada de la Ec. (3.74) en $t = t_{n+1}$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(1-\alpha_f)} \mathbf{M}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{T_{n+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & \mathbf{B}_{n+1}^T \\ \mathbf{B}_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\Phi_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (3.75)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{T_{n+1}}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}, \hat{\mathbf{q}}_{n+1}; t_{n+1}) &= -\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [\mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc}], \text{ y} \\ \mathbf{K}_{T_{n+1}}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}, \hat{\mathbf{q}}_{n+1}, \hat{\lambda}_{n+1}, t_{n+1}) &= \frac{1}{(1-\alpha_f)} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [\mathbf{M}_{n+1}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}) \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{B}_q^T)_{n+1}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}, t_{n+1}) \hat{\lambda}_{n+1}] - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [\mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c], \end{aligned} \quad (3.76)$$

son la matriz de amortiguamiento tangente y la matriz de rigidez tangente asociadas al método HHT, respectivamente. El lector debe recordar que $(\hat{\cdot})_{n+1}$ sobre la variable indica cantidad aproximada en $t = t_{n+1}$.

Finalmente, la combinación de la Ec. (3.75) con las fórmulas de Newmark, Ec (3.65), permite reescribir la Ec. (3.75) como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}_{n+1}}{\beta(1-\alpha_f)h^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}_{T_{n+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & (\mathbf{B}_q^T)_{n+1} \\ (\mathbf{B}_q)_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\Phi_{n+1} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

o en forma contraída,

$${}^{HHT} \mathbf{S}_{n+1} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\Phi_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (3.78)$$

donde

$$\begin{aligned}
{}^{HHT}\mathbf{S}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{T_{n+1}} & (\mathbf{B}_q^T)_{n+1} \\ (\mathbf{B}_q)_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{K}}_{T_{n+1}} &= \mathbf{K}_{T_{n+1}} + \frac{1}{\beta(1-\alpha_f)h^2} \mathbf{M}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}_{T_{n+1}}, \text{ y} \\
\mathbf{r}_{n+1} &= \frac{1}{(1-\alpha_f)} \mathbf{M}_{n+1} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^v - \mathbf{Q}^{nc} - \mathbf{Q}^c)_{n+1} + \\
&\quad + \left\{ \frac{\alpha_f}{(1-\alpha_f)} (\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^v - \mathbf{Q}^c - \mathbf{Q}^e)_n \right\}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

El supra índice *HHT* en la Ec. (3.78) indica que la matriz de iteración \mathbf{S} corresponde al método HHT. Geradin y Rixen [71] mostraron que la precisión de segundo orden del método HHT se mantiene si se utiliza solo el parámetro α_f como variable libre, y el resto de los parámetros asociados al método se definen acorde a

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f, \text{ y } \beta = \frac{1}{4} (1 + \alpha_f)^2 \text{ para } 0 \leq \alpha_f < \frac{1}{3}. \tag{3.80}$$

Por último, la implementación numérica del método HHT es similar al esquema expuesto en la Tabla 3-5 para el algoritmo de Newmark. El único cambio que debe realizarse es sustituir la matriz de iteración ${}^{Nk}\mathbf{S}_{n+1}$ por ${}^{HHT}\mathbf{S}_{n+1}$ y utilizar la versión del residuo expuesta en la Ec. (3.79).

3.4.4 Método α -generalizado

Posterior al desarrollo del método HHT, Chung y Hulbert [83] modificaron el esquema HHT por medio de la introducción de un parámetro adicional α_m y $(1 - \alpha_m)$ con el objetivo de promediar, también, las fuerzas de inercia en la ecuación de movimiento. Sobre esta base, la ecuación de movimiento (2.23) se reescribe como

$$\begin{aligned}
(1-\alpha_m) \mathbf{M}_{n+1} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (1-\alpha_f) (\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c)_{n+1} = \\
- \left\{ \alpha_m \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \alpha_f (\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c)_n \right\}, \tag{3.81} \\
\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}_{n+1}; t_{n+1}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Donde las cantidades $()_n$ son conocidas y provenientes del paso de tiempo anterior. Al igual que en Newmark y HHT, la ecuación de movimiento (3.81) necesita ser linealizada previo a su implementación numérica. Siguiendo el procedimiento descrito en la subsección 3.4.3, cuyos detalles se encuentran expuestos en el Anexo B, la versión linealizada de la Ec. (3.81) en $t = t_{n+1}$ es

$$\begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha_m)}{(1-\alpha_f)} \mathbf{M}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{T_{n+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & \mathbf{B}_{n+1}^T \\ \mathbf{B}_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\boldsymbol{\Phi}_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (3.82)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{T_{n+1}}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}, \hat{\mathbf{q}}_{n+1}, t_{n+1}) &= -\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [\mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc}], \text{ y} \\ \mathbf{K}_{T_{n+1}}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}, \hat{\mathbf{q}}_{n+1}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}, t_{n+1}) &= \frac{(1-\alpha_m)}{(1-\alpha_f)} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [\mathbf{M}_{n+1}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}) \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [(\mathbf{B}_q^T)_{n+1}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1}, t_{n+1}) \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}] - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_{n+1}} [\mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c], \end{aligned} \quad (3.83)$$

son la matriz de amortiguamiento tangente y la matriz de rigidez tangente asociadas al método α -generalizado, respectivamente. El lector debe recordar que $(\hat{\cdot})_{n+1}$ sobre la variable indica cantidad aproximada en $t = t_{n+1}$.

Finalmente, la combinación de la Ec. (3.82) con las fórmulas de Newmark, Ec (3.65), permite reescribir la Ec. (3.82) como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha_m)}{(1-\alpha_f)\beta h^2} \mathbf{M}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}_{T_{n+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & \mathbf{B}_{n+1}^T \\ \mathbf{B}_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\boldsymbol{\Phi}_{n+1} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

o en forma contraída,

$${}^{\alpha-G} \mathbf{S}_{n+1} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\boldsymbol{\Phi}_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (3.85)$$

donde

$$\begin{aligned} {}^{\alpha-G} \mathbf{S}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & (\mathbf{B}_q^T)_{n+1} \\ (\mathbf{B}_q)_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{T_{n+1}} &= \mathbf{K}_{T_{n+1}} + \frac{(1-\alpha_m)}{(1-\alpha_f)\beta h^2} \mathbf{M}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C}_{T_{n+1}}, \text{ y} \\ \mathbf{r}_{n+1} &= \frac{(1-\alpha_m)}{(1-\alpha_f)} \mathbf{M}_{n+1} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^v - \mathbf{Q}^{nc} - \mathbf{Q}^c)_{n+1} + \\ &+ \left\{ \frac{\alpha_m}{(1-\alpha_f)} \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\alpha_f}{(1-\alpha_f)} [\mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^v - \mathbf{Q}^{nc} - \mathbf{Q}^c]_n \right\}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

El supra índice α -G en la Ec. (3.85) indica que la matriz de iteración **S** corresponde al método α -generalizado.

Con respecto a la precisión del método, se puede demostrar que el mismo es de segundo orden si se cumple la siguiente relación [71]:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m. \quad (3.87)$$

Por otro lado, un análisis del espectro de frecuencias propias de la matriz de amplificación asociada al método α -generalizado para $\omega h \rightarrow \infty$, asumiendo γ acorde a la Ec. (3.87) para lograr precisión de segundo orden, produce los siguientes valores para los autovalores:

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_f}{1-\alpha_f}, \quad \text{y} \quad \lambda_{2,3} = \frac{\alpha_f - \alpha_m - 1}{\alpha_f - \alpha_m + 1}, \quad (3.88)$$

los cuales son estrictamente menores que 1 debido a la condición de estabilidad $1/2 \geq \alpha_f \geq \alpha_m \geq 0$ [71]. Tales condiciones se pueden resumir en términos de los parámetros involucrados en el método de la siguiente manera:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m, \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 + \alpha_f - \alpha_m)^2. \quad (3.89)$$

Si los parámetros son elegidos acorde a las condiciones expresadas en (3.89) el algoritmo resultante posee las propiedades de: precisión de segundo orden, incondicionalmente estable, amortiguamiento numérico de intensidad controlada por medio de los parámetros α_f y α_m , y radio espectral para $\omega h \rightarrow \infty$,

$$\rho_\infty = \max \left\{ \frac{\alpha_f}{1-\alpha_f}, \frac{\alpha_f - \alpha_m - 1}{\alpha_f - \alpha_m + 1} \right\}. \quad (3.90)$$

La Ec. (3.90) permite seleccionar los parámetros α_f y α_m en función del radio espectral, es decir,

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \text{y} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \text{para} \quad 0 \leq \rho_\infty \leq 1, \quad (3.91)$$

con el objetivo de prescribir un radio espectral, permitiendo de esta manera controlar la cantidad de disipación numérica introducida en el rango de altas frecuencias.

Al igual que HHT, la implementación numérica del método α -generalizado es similar al esquema expuesto en la Tabla 3-5 para el algoritmo de Newmark. El único

cambio que debe realizarse es sustituir la matriz de iteración ${}^{Nk}\mathbf{S}_{n+1}$ por ${}^{\alpha-G}\mathbf{S}_{n+1}$ y utilizar la versión del residuo expuesta en la Ec. (3.86).

Como conclusión, se puede mencionar que tanto el esquema HHT como el esquema α -generalizado constituyen la mejor opción cuando se requieren algoritmos implícitos incondicionalmente estables que permitan introducir disipación numérica en el rango de altas frecuencias mientras que, al mismo tiempo, preservan el atributo de máxima precisión en el rango de bajas frecuencias. Estos métodos, con especial preferencia por el α -generalizado, son ampliamente utilizados en la solución numérica de sistemas dinámicos no lineales y sistemas con grados de libertad restringidos (sistemas multicuerpo) [56].

3.5 Condiciones iniciales

Otro aspecto importante para controlar o eliminar por completo las violaciones de las restricciones es comenzar el proceso de integración con un conjunto de condiciones iniciales en las coordenadas y las velocidades que satisfagan las ecuaciones de restricción correspondientes.

Existen básicamente dos maneras de determinar un conjunto adecuado de condiciones iniciales compatibles con las ecuaciones de vínculos: *i*) método aproximado basado en partición de coordenadas; y *ii*) método exacto basado en el análisis de la cadena cinemática. El primero de ellos, es un procedimiento estándar en el estudio de sistemas multicuerpo para obtener un conjunto de condiciones iniciales aceptables con el cual comenzar el proceso de integración [49]. Típicamente, este método consiste en tratar las ecuaciones de restricción a nivel de la posición (o velocidad) como un sistema de ecuaciones cinemáticas, y asignar valores conocidos a cierto conjunto de coordenadas (o velocidades), y resolver para el resto de las coordenadas (o velocidades). Sin embargo, esta metodología puede llevar a resultados que están lejos de la configuración real del sistema. Esto sucede frecuentemente en problemas tridimensionales, particularmente cuando se deben determinar las coordenadas angulares utilizadas para parametrizar las rotaciones. El segundo método, como su nombre lo indica, consiste en formular la cadena cinemática y extraer los valores de las coordenadas y velocidades, utilizando las ecuaciones de restricción correspondientes [86].

En este trabajo se utiliza el segundo procedimiento, el cual requiere proveer: *i*) dimensiones geométricas de los cuerpos que componen el sistema multicuerpo; *ii*)

posición y orientación inicial del fuselaje; *iii*) ubicación del ala central conectada al fuselaje; *iv*) rotación inicial de las alas, con respecto al eje de articulación de las mismas; *v*) localización de los trenes de aterrizaje respecto al ala que lo contiene; y *vi*) localización de los motores, respecto al ala donde se encuentra.

3.5.1 Generalidades de posición y orientación

Como se introdujo en este Capítulo, la parametrización utilizada para describir la orientación de cada cuerpo i que compone el sistema multicuerpo está basada en los denominados parámetros de Euler, los cuales permiten evitar singularidades, tales como el *Gimbal locking* presente cuando se utilizan los ángulos de Euler.

Utilizando la nomenclatura establecida en el Capítulo 2 para especificar las coordenadas que describen la configuración de un miembro componente del sistema multicuerpo, el cuaternión unitario asociado a un cuerpo i se puede expresar como ([45] [47] [49])

$$\bar{\mathbf{q}}_i(t) = (q_{i4}, q_{i5}, q_{i6}, q_{i7})^T, \quad (3.92)$$

donde q_{ij} para $j = 4,5,6,7$ son los parámetros de Euler, los cuales se pueden escribir en términos del giro ϕ_i alrededor del eje rotación $\hat{\mathbf{t}}_i$ como

$$q_{i4} = \cos \frac{\phi_i}{2}, \quad q_{i5} = (\hat{\mathbf{t}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \sin \frac{\phi_i}{2}, \quad q_{i6} = (\hat{\mathbf{t}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \sin \frac{\phi_i}{2} \quad \text{y} \quad q_{i7} = (\hat{\mathbf{t}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_3) \sin \frac{\phi_i}{2}, \quad (3.93)$$

donde $\hat{\mathbf{t}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_j$ para $j = 1,2,3$ son los cosenos directores del vector unitario $\hat{\mathbf{t}}_i$ con respecto al marco de referencia inercial \mathbf{N} [45]. Usando notación contraída, la Ec. (3.93) se reescribe como

$$q_{i4} = \cos \frac{\phi_i}{2}, \quad q_{i5} = c\theta_{i1} \sin \frac{\phi_i}{2}, \quad q_{i6} = c\theta_{i2} \sin \frac{\phi_i}{2} \quad \text{y} \quad q_{i7} = c\theta_{i3} \sin \frac{\phi_i}{2}, \quad (3.94)$$

donde $c\theta_{ij} = \cos \theta_{ij}$ para $j = 1,2,3$.

La estrategia utilizada para determinar la ubicación de un cuerpo arbitrario i y los parámetros de Euler asociados a su configuración inicial, consiste en analizar la cadena cinemática que involucra dicho cuerpo con el objetivo de: *i*) construir el vector posición de su centro de masa; y *ii*) determinar su orientación utilizando rotaciones materiales (ángulos de Euler), espaciales, cosenos directores, etc. La parametrización a utilizar para determinar la configuración inicial en orientación depende de la topología del problema,

cantidad de cuerpos involucrados, etc. Una vez obtenida dicha orientación se extraen los parámetros de Euler correspondientes por medio de un mapa de la forma $\mathbf{h}(\mathbf{T}_{\mathbf{N}\mathbf{B}^i}): SO(3) \rightarrow \mathbb{H}^1$, donde $\mathbb{H}^1 = \{\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{H}, \|\bar{\mathbf{q}}\| = 1\}$ y \mathbf{h} depende de la parametrización utilizada para construir la matriz de rotación $\mathbf{T}_{\mathbf{N}\mathbf{B}^i}$ [86]. En este trabajo se utiliza una secuencia de rotación 1-2-3 fija al espacio y se asume que el sistema de referencia fijo a cada cuerpo se encuentra inicialmente, paralelo al sistema inercial como se muestra en la Figura 3-1.

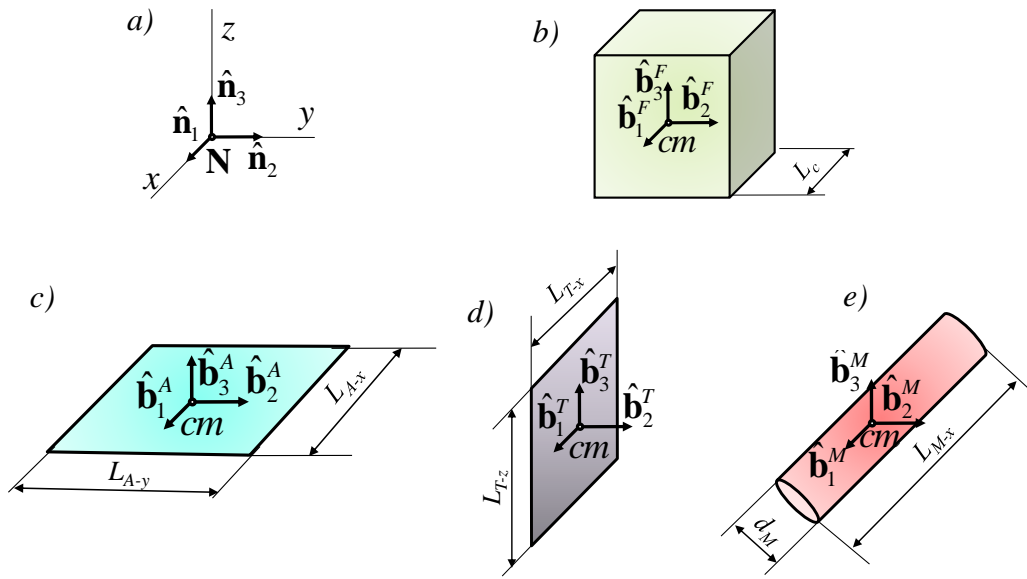


Fig. 3-1. Orientación pre definida. (a) Sistema inercial; (b) fuselaje; (c) alas; (d) trenes de aterrizaje; y (e) motores.

El cuaternión unitario expresado en la Ec. (3.92) puede ser manipulada algebraicamente para obtener la siguiente matriz de rotación en término de los parámetros de Euler [47],

$$\mathbf{A}_i = 2 \begin{bmatrix} q_{i4}^2 + q_{i5}^2 - \frac{1}{2} & q_{i5}q_{i6} - q_{i4}q_{i7} & q_{i5}q_{i7} + q_{i4}q_{i6} \\ q_{i5}q_{i6} + q_{i4}q_{i7} & q_{i4}^2 + q_{i6}^2 - \frac{1}{2} & q_{i6}q_{i7} - q_{i4}q_{i5} \\ q_{i5}q_{i7} - q_{i4}q_{i6} & q_{i6}q_{i7} + q_{i4}q_{i5} & q_{i4}^2 + q_{i6}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Donde $\mathbf{A}_i \in SO(3): \mathbf{B}^i \rightarrow \mathbf{N}$. Como se puede observar, los elementos de \mathbf{A}_i son cuadráticos, evitando de esta manera singularidades del tipo trigonométricas, presentes en las parametrizaciones basadas en ángulos de Euler.

Como se mencionó anteriormente, la orientación inicial de cada cuerpo i se determina mediante una secuencia de rotación 1-2-3 fija al espacio, cuya representación matricial está dada por

$$\mathbf{T}_{\mathbf{N}^i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

donde $\mathbf{T}_{\mathbf{N}^i} : \mathbf{B}^i \rightarrow \mathbf{N}$.

Utilizando el procedimiento reportado por Diebel [87], el cual consiste básicamente en comparar las expresiones (3.95) y (3.96), es posible encontrar las expresiones para los parámetros de Euler, esto es

$$q_{i4} = \sqrt{\frac{\text{tr}\mathbf{A}_i + 1}{4}}, \quad q_{i5} = \frac{a_{i32} - a_{i23}}{4q_{i4}}, \quad q_{i6} = \frac{a_{i13} - a_{i31}}{4q_{i4}} \quad \text{y} \quad q_{i7} = \frac{a_{i21} - a_{i12}}{4q_{i4}}. \quad (3.97)$$

Por último, el vector posición del centro de masa del i -ésimo cuerpo se determina por medio de la relación cinemática (A.1), detallada en el Anexo A.

3.5.2 Dimensionamiento

La representación de cada cuerpo del sistema multicuerpo se realiza mediante figuras geométricas simples con el fin de simplificar el tratamiento matemático. El fuselaje es representado por un cubo, cuya longitud de lado es definida por L_c (ver Figura 3-1b). Las alas son representadas por placas planas, donde las magnitudes características están definidas por las cantidades L_{A-x} y L_{A-y} medida a lo largo de vectores unitarios $\hat{\mathbf{b}}_1^A$ y $\hat{\mathbf{b}}_2^A$, respectivamente (ver Figura 3-1c). Similar a las alas, los trenes de aterrizaje se representan por placas planas caracterizadas por L_{T-x} (a lo largo de $\hat{\mathbf{b}}_1^T$) y L_{T-z} (a lo largo de $\hat{\mathbf{b}}_3^T$) (ver Figura 3-1d). Por último, los motores se representan por medio de cilindros con diámetro d_M y longitud L_{M-x} (a lo largo de $\hat{\mathbf{b}}_1^M$) (ver Figura 3-1e).

3.5.3 Configuración inicial

La posición de cada cuerpo que compone el sistema multicuerpo se determina a partir de la posición y orientación del fuselaje. Eso se debe a que las alas, motores y trenes de aterrizaje están directa o indirectamente vinculados al fuselaje.

A continuación se detallan los pasos para establecer la posición y orientación de cada cuerpo en coordenadas globales:

- i) La orientación del fuselaje se determina mediante el procedimiento expuesto en la subsección 3.5.1. El lector debe notar que el vector posición del centro de masa del fuselaje está dado por

$$\mathbf{R}_F^{cm} = x\hat{\mathbf{n}}_1 + y\hat{\mathbf{n}}_2 + z\hat{\mathbf{n}}_3. \quad (3.98)$$

- ii) La orientación del ala central, vinculada rígidamente a la parte superior del fuselaje (ver Figura 3-2), posee la misma orientación de éste, el vector posición del centro de masa del ala central es

$$\mathbf{R}_{AC}^{cm} = \mathbf{R}_F^{cm} + \mathbf{A}_F(\mathbf{r}_F^P - \mathbf{r}_{AC}^{P'}), \quad (3.99)$$

donde $\mathbf{A}_F : \mathbf{B}^F \rightarrow \mathbf{N}$ es la matriz de rotación del marco de referencia fijo al fuselaje al marco de referencia inercial, \mathbf{r}_F^P es el vector posición del punto de conexión P contenido en el fuselaje expresado en el marco de referencia fijo al fuselaje, \mathbf{B}^F , y $\mathbf{r}_{AC}^{P'}$ es el vector posición del punto de conexión P' contenido en el ala central en términos del marco de referencia fijo al ala central, \mathbf{B}^{AC} (ver Figura 3-2).

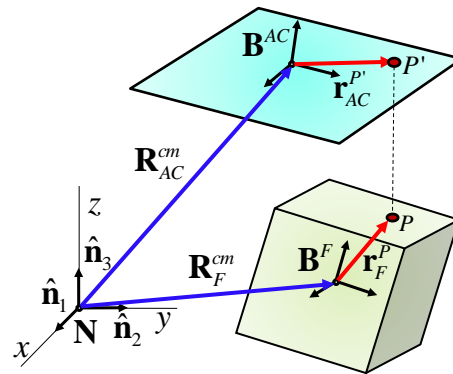


Fig. 3-2. Coordenadas del centro de masa del ala central.

- iii) La posición y orientación del resto de las alas se establece realizando un análisis por cada par de alas, es decir, como se conoce la posición y orientación del ala acoplada al fuselaje (paso anterior), se comienza analizando el par de alas que contiene al ala vinculada al fuselaje, luego se prosigue con los pares adyacentes, esto hace que se conozca siempre, en cada par de alas analizado, la posición con la orientación de una de las alas, ésta información, junto con las características geométricas de ambas alas, permite deducir la posición del

centro de masa del ala contigua. También se debe tener en cuenta que el punto de conexión entre alas se establece en el punto medio de la arista que está simultáneamente en contacto con las alas. En la figura 3.3 se tiene una cadena cinemática de alas cuyo par de alas en estudio es el ala k (posición del centro de masa y orientación conocida) y $k + 1$ (posición del centro de masa y orientación desconocida).

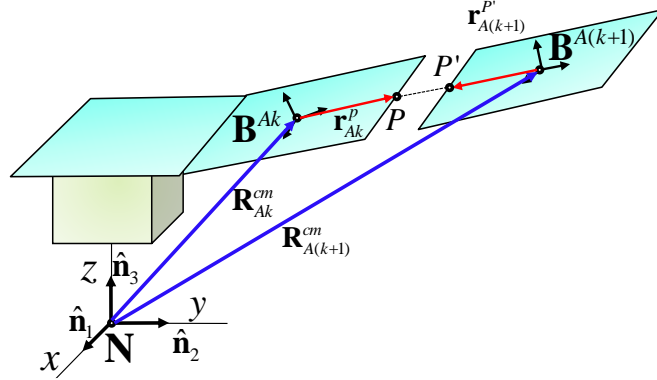


Fig. 3-3. Análisis en un par de alas.

La orientación del ala $k + 1$ se establece mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} q_{A(k+1)} &= \cos \frac{\phi_{A(k+1)}}{2}, \quad q_{A(k+1)5} = \sin \frac{\phi_{A(k+1)}}{2}, \\ q_{A(k+1)6} &= 0, \quad \text{y} \quad q_{A(k+1)7} = 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

El vector posición del centro de masa del ala es

$$\mathbf{R}_{A(k+1)}^{cm} = \mathbf{R}_k^{cm} + \mathbf{A}_{Ak} \mathbf{r}_k^P - \mathbf{A}_F \mathbf{A}_{A(k+1)} \mathbf{r}_{A(k+1)}^{P'}, \quad (3.101)$$

donde $\mathbf{A}_{Ak} : \mathbf{B}^{Ak} \rightarrow \mathbf{N}$ es la matriz de rotación del marco de referencia fijo al ala k , \mathbf{r}_{Ak}^P es el vector posición del punto de conexión P contenido en el ala k y expresado en términos de \mathbf{B}^{Ak} , $\mathbf{A}_{A(k+1)} : \mathbf{B}^{A(k+1)} \rightarrow \mathbf{N}$ es la matriz de rotación del marco de referencia fijo al ala $k + 1$ deducida de (3.100) y $\mathbf{r}_{A(k+1)}^{P'}$ es el vector posición del punto de conexión P' contenido en el ala $k + 1$, en términos de $\mathbf{B}^{A(k+1)}$ (ver Figura 3-3).

- iv) Una vez obtenido el vector posición del centro de masa para cada ala se determina la posición del centro de masa del tren de aterrizaje número s que compone la aeronave mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{R}_{Ts}^{cm} = \mathbf{R}_k^{cm} + \mathbf{A}_{Ak} (\mathbf{r}_k^P - \mathbf{r}_{Ts}^{P'}), \quad (3.102)$$

donde $\mathbf{A}_{Ak} : \mathbf{B}^{Ak} \rightarrow \mathbf{N}$ es la matriz de rotación del marco de referencia fijo al ala k , \mathbf{r}_{Ak}^P es el vector posición del punto de conexión P contenido en el ala k expresado en términos del marco \mathbf{B}^{Ak} , $\mathbf{r}_{Ts}^{P'}$ es el vector posición del punto de conexión P' contenido en el tren de aterrizaje en el marco de referencia fijo al tren, \mathbf{B}^{Ts} (ver Figura 3-4).

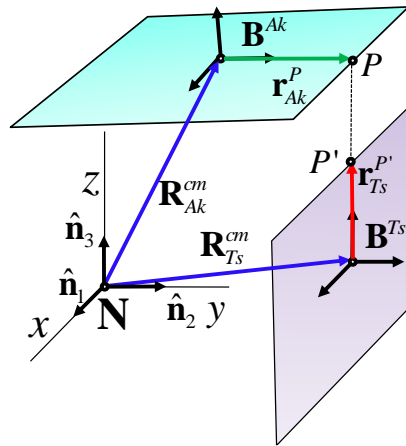


Fig. 3-4. Coordenadas del centro de masa del tren de aterrizaje.

v) Para la ubicación del centro del motor número m , se utiliza la fórmula

$$\mathbf{R}_{Mm}^{cm} = \mathbf{R}_k^{cm} + \mathbf{A}_{Ak} (\mathbf{r}_{Ak}^P - \mathbf{r}_{Mm}^{P'}), \quad (3.103)$$

donde $\mathbf{A}_{Ak} : \mathbf{B}^k \rightarrow \mathbf{N}$ es la matriz de rotación del marco de referencia fijo al ala k , \mathbf{r}_{Ak}^P es el vector posición del punto de conexión P contenido en el ala k expresado en el marco de referencia fijo al ala en cuestión, \mathbf{B}^k , $\mathbf{r}_{Mm}^{P'}$ es el vector posición del punto de conexión P' contenido en el motor, expresado en el sistema de referencia \mathbf{B}^{Mm} (ver Figura 3-5).

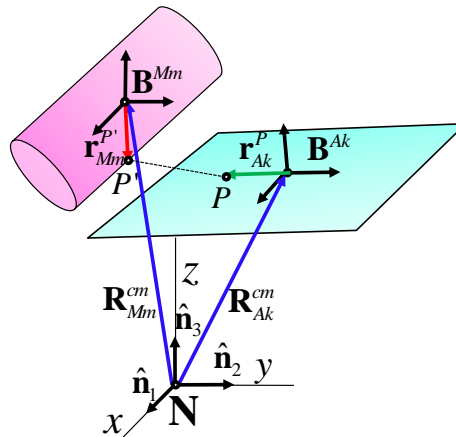


Fig. 3-5. Coordenadas del centro de masa del motor.

En este trabajo se estudia la aeronave desde su condición inicial de reposo respecto al sistema inercial por lo que las velocidades iniciales del centro de masa en cada cuerpo es cero. Teniendo en cuenta lo dicho y con la topología de la aeronave determinada, finalmente para establecer la condición inicial, al nivel de aceleraciones, se aplica la ecuación (3.6).

3.5.4 Implementación computacional

El modelo dinámico descrito en el Capítulo 2 junto con los esquemas de integración y el procedimiento para determinar las condiciones iniciales compatibles con las ecuaciones de vínculo introducidas en este Capítulo, fueron implementados en un código computacional desarrollado íntegramente en el software matemático MATLAB[®], el cual es un lenguaje computacional muy popular en el ámbito de la computación científica; utilizado por ingenieros, científicos y estudiantes; MATLAB[®] permite la manipulación de matrices, la representación de datos, implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario y la comunicación de datos con otros usuarios, además dispone de herramientas adicionales, como una librería con un gran número de modelos para resolver ecuaciones diferenciales (ODEs) [88].

La plataforma de simulación numérica desarrollada en este trabajo, permite elegir diferentes esquemas de integración. Esta selección constituye un punto de bifurcación importante en el código, ya que se deben lanzar rutinas de estabilización y diferenciación de las ecuaciones de restricción, si el integrador seleccionado utiliza el procedimiento de reducción de índice, o linealización de las ecuaciones de movimiento si el esquema numérico integra directamente las DAEs-3. En la Figura 3-6 se presenta el diagrama de flujo del código implementado.

En el diagrama de flujo de la Figura 3-6 se pueden observar dos lazos de iteración (*Loop* Integrador 1 y *Loop* Integrador 2) que dependen del esquema de integración adoptado (reducción de índice o integración directa). Por otro lado, la Figura 3-7 muestra los diagramas de flujo asociados al procedimiento de reducción de índice y la integración directa de las DAEs-3.

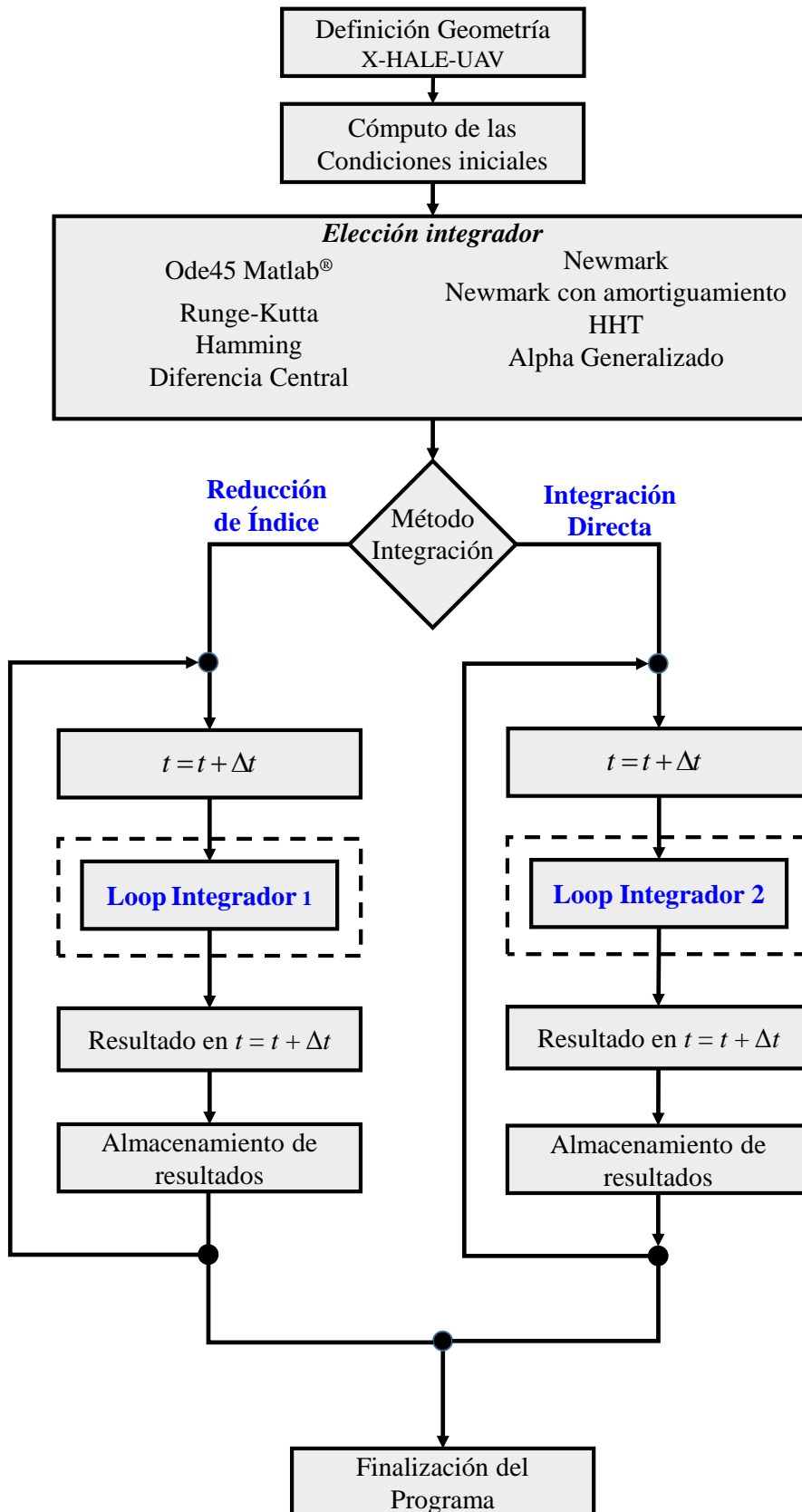


Fig. 3-6. Esquema del código computacional.

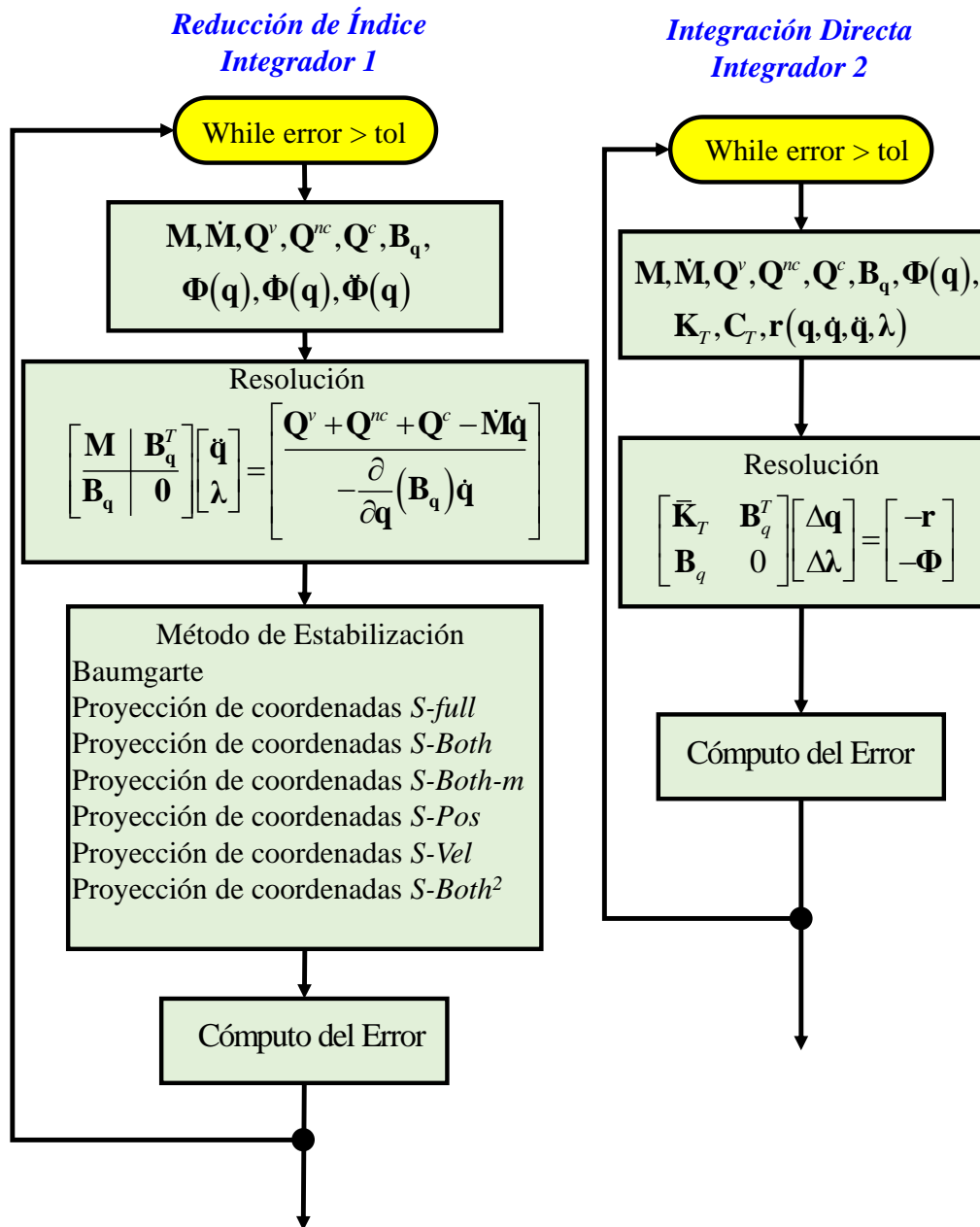


Fig. 3-7. Diagrama de flujo asociado a los *Loops* de integración.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1 Introducción

En este capítulo se verifica el código computacional que implementa la formulación matemática expuesta en el capítulo 2, y los esquemas de integración numérica detallados en el capítulo 3. Debido a que no existen mediciones experimentales relacionadas a la dinámica de X-HALE-UAVs, el desarrollo general de Verificación y Validación (V&V) se reduce, en este trabajo, al proceso de verificación; el cual se llevó a cabo en dos etapas. La primera de ellas consiste en la reproducción de resultados clásicos bien documentados en la literatura, siguiendo los lineamientos generales de ([89] [90]); mientras que la segunda etapa consiste en la comparación de resultados numéricos contra aquellos provistos por códigos computacionales ampliamente utilizados en el ámbito de la mecánica computacional, tales como SIMPACT [44]. A continuación, se presenta una serie de estudios relacionados al comportamiento dinámico de un modelo conceptual de X-HALE-UAV, incluyendo el efecto de ráfagas sobre la aeronave y de rotura en las conexiones alares. Por último, con el fin de explorar las limitaciones y demostrar las capacidades del código computacional, se exponen resultados concernientes a un modelo de X-HALE-UAV compuesto por 32 cuerpos.

4.2 Verificación.

En esta Subsección se presenta una serie de estudios que tienen como objetivo verificar tanto la formulación desarrollada en el Capítulo 3 como su implementación numérica en el Capítulo 4.

4.2.1 Caso I: Oscilador armónico

Este caso de estudio consiste en considerar solamente el fuselaje montado sobre cuatro resortes verticales (con el resto de los resortes y amortiguadores deshabilitados) como se muestra en la Figura 4-1. Los valores utilizados para los parámetros del sistema son: $k = 1 \text{ N/m}$ y $l_0 = 10 \text{ m}$ para cada uno de los cuatro resortes, $m = 1 \text{ Kg}$ para la masa del fuselaje, y constante de aceleración gravitatoria $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$. Esta configuración

es equivalente a un sistema masa resorte cuya amplitud máxima de oscilación (z_m) y periodo (τ), determinados en [54] por las fórmulas

$$z_m = \left| \frac{mg}{4k} \right| \text{ y } \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4k}{m}}}. \quad (4.1)$$

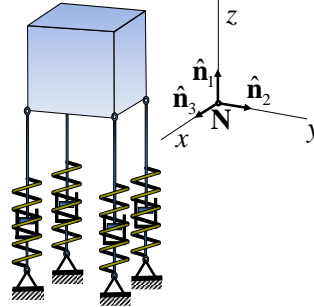


Fig. 4-1. Configuración equivalente a sistema masa resorte convencional.

La integración numérica del sistema detallado anteriormente se llevó a cabo por medio de: *i*) del integrador `ode45` disponible en MATLAB®; *ii*) Hamming de cuarto orden; y *iii*) el algoritmo Newmark sin amortiguamiento numérico (es decir $\alpha = 0$). Para los últimos dos integradores se utilizó un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$ seg.

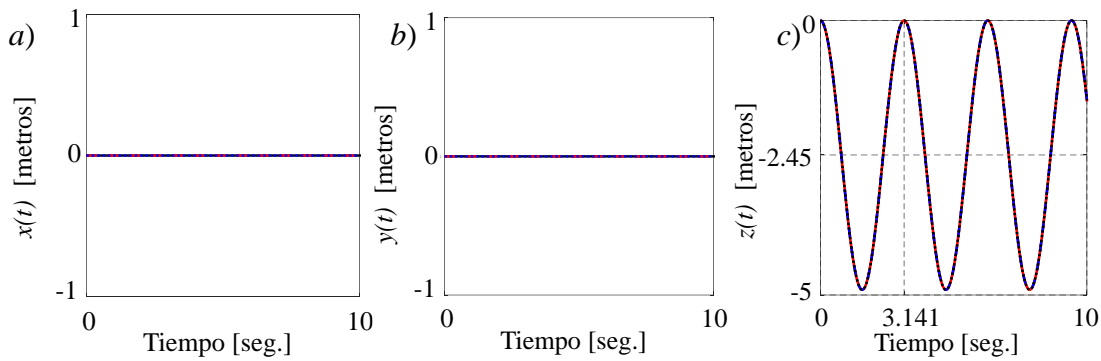


Fig. 4-2. Respuesta sistema fuselaje montado en 4 resortes verticales. `ode45`, (negro) Hamming (azul) y Newmark sin amortiguamiento (rojo). Desplazamiento *a*) $x(t)$; *b*) $y(t)$; *c*) $z(t)$.

El valor del periodo de oscilación y el valor de la amplitud máxima alrededor del punto de equilibrio estático, obtenidos con la herramienta desarrollada es $\tau = 3.141$ seg y $z_m = 2.4525$ m, para los tres integradores utilizados. Además se destaca que la respuesta obtenida por cada uno de los esquemas es idéntica (ver Figura 4-2).

El error relativo porcentual cuando se comparan los valores obtenidos por simulación, con aquellos correspondientes a la solución analítica es de 0.018% y 0.02%, para el periodo y la amplitud máxima, respectivamente.

4.2.2 Caso II: Rotación del fuselaje

El caso de estudio en esta sección consiste solamente del fuselaje (cubo) montado sobre doce resortes lineales y los amortiguadores desactivados. Cada uno de los resortes está caracterizado por una constante de rigidez $k = 1.0 \text{ N/m}$ y longitud natural $l_0 = 10 \text{ m}$. La masa del fuselaje es $m = 1.0 \text{ Kg}$ y la constante de aceleración gravitacional es $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$. El conjunto de condiciones iniciales consiste en ubicar el centro de masa del cubo en la posición $(0,0,0)$ con una rotación inicial de 10° alrededor del eje \hat{n}_2 , como se muestra en la Figura 4-3, mientras que las velocidades, tanto lineales como angulares, son todas nulas.

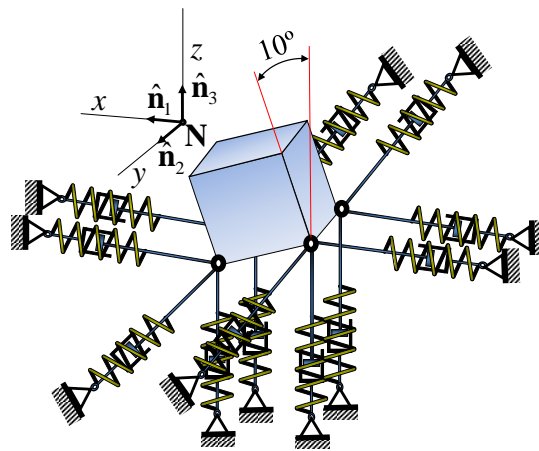


Fig. 4-3. Configuración inicial del caso de estudio II.

Los esquemas de integración investigados son: *i*) Hamming de cuarto orden; *ii*) diferencia central; *iii*) Runge-Kutta de cuarto orden; *iv*) Algoritmo de Newmark sin amortiguamiento ($\alpha = 0$); *v*) Algoritmo de Newmark con amortiguamiento ($\alpha = 0.02$); *vi*) HHT ($\alpha_f = 0.02$); y *vii*) Alpha generalizado ($\alpha_f = 0.5$ y $\alpha_m = 0.4988$). Los primeros tres integradores utilizan la técnica de reducción de índice con una estabilización numérica *S-Both*². El paso de tiempo utilizado es $\Delta t = 0.001 \text{ seg.}$ para todos los integradores.

Las Figuras 4-4 y 4-5 muestran la posición del centro de masa del cubo como función del tiempo. En la primera figura se presenta la respuesta obtenida por los integradores que utilizan la reducción de índice, mientras que en la segunda figura se muestra la respuesta obtenida por la integración directa del sistema DAEs de índice 3. Como se puede observar en las Figuras 4-4*b* y 4-5*b*, el desplazamiento del centro de masa del cubo en la dirección \hat{n}_2 obtenida por los esquemas de integración adoptados es nulo.

Esto se debe a que el movimiento ocurre en el plano formado por los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_3$.

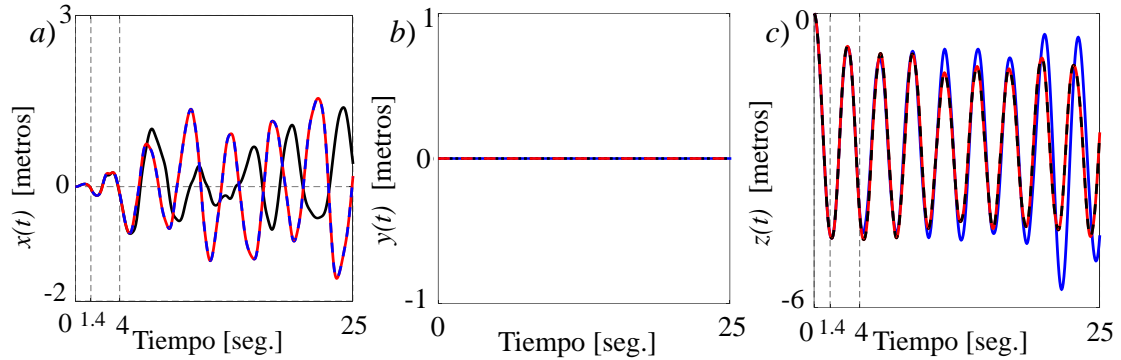


Fig. 4-4. Posición del centro de masa para los integradores: Diferencia Central (azul); Hamming (rojo); Runge-Kutta (negro). *a)* Desplazamiento en x ; *b)* Desplazamiento en y ; *c)* Desplazamiento en z .

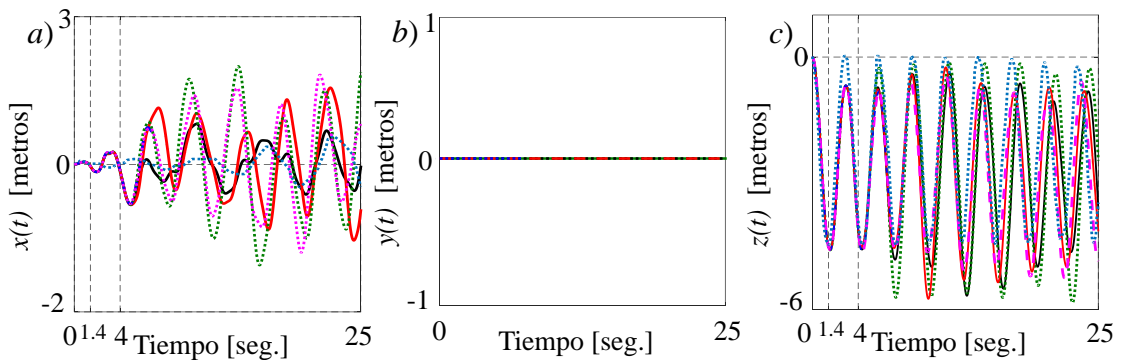


Fig. 4-5. Posición del centro de masa para los integradores: Newmark sin amortiguación (azul); Newmark con amortiguación (rojo); HHT (negro); Alpha generalizado (verde); Arguello (celeste) y SIMPACT (magenta). *a)* Desplazamiento en x ; *b)* Desplazamiento en y ; *c)* Desplazamiento en z .

Se observa que, a partir de $t = 1.4$ seg., la respuesta del sistema en la dirección x y z difiere de la respuesta obtenida por Arguello [7] y en $t = 4$ seg. de la obtenida por el programa SIMPACT ([44] [91]) (ver Figura 4-5 *a* y *c*). Este hecho se atribuye inicialmente a la gran longitud natural de los resortes y su baja rigidez, lo cual se traduce directamente en un sistema altamente flexible. Como consecuencia, cualquier perturbación sobre el sistema (por ejemplo de origen numérico) afecta la precisión de los integradores, los cuales a su vez son de naturaleza diferente (explícitos, implícitos, 2 orden y 4 orden). También cabe destacar que en la integración por el algoritmo de Newmark sin amortiguamiento en un tiempo $t = 6.5$ seg., la solución explota, lo cual se manifiesta por falta de convergencia del integrador numérico.

A continuación, se propone evaluar integradores analizados anteriormente considerando la longitud inicial de los resortes $l_0' = l_0 / 4$ y rigidez $k = 4\text{N/m}$, mientras que el resto de los demás parámetros del sistema no cambian. Esta modificación se

traduce directamente en un sistema más rígido, cuya respuesta con todos los integradores es idéntica a la obtenida con el programa de elementos finitos SIMPACT, como se puede observar en la Figura 4-6.

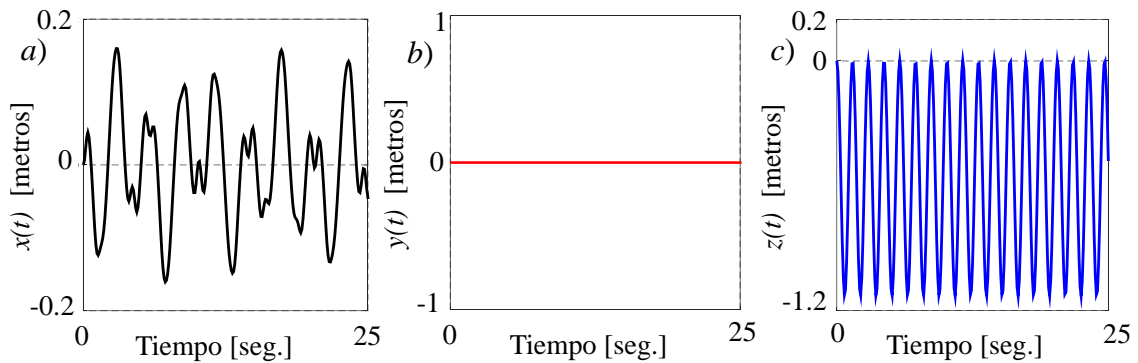


Fig. 4-6. Posición del centro de masa para los integradores evaluados y SIMPACT. *a)* Desplazamiento en x ; *b)* Desplazamiento en y ; *c)* Desplazamiento en z .

Por último, el caso de estudio analizado anteriormente es modificado considerando los doce amortiguadores que vinculan el fuselaje con el túnel de viento. Las constantes de amortiguamiento de cada amortiguador tienen el mismo valor, todas igual a 0.1 Ns/m. Para este caso los integradores utilizados (Hamming, Diferencia Central, Runge-Kutta, Newmark, HHT y Alpha Generalizado) producen la misma respuesta que el programa SIMPACT (ver Figura 4-7), lo que permite validar el módulo que computa las fuerzas asociadas a los amortiguadores.

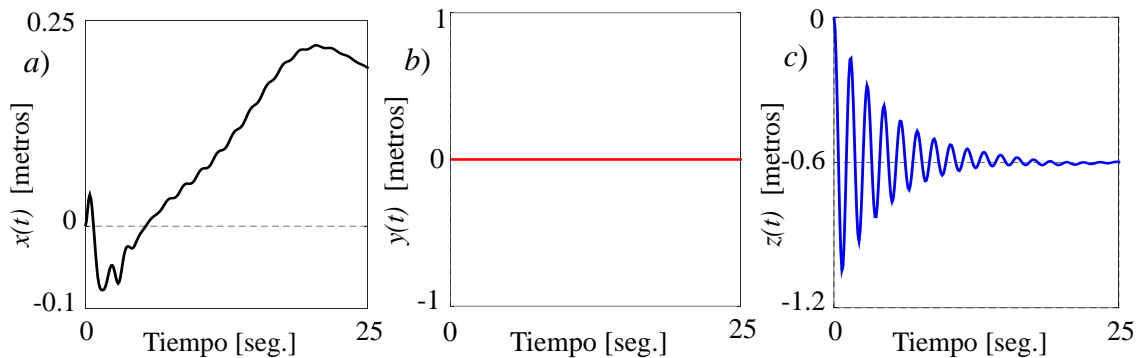


Fig. 4-7. Posición del centro de masa para los integradores evaluados y SIMPACT. Configuración con amortiguadores activos. *a)* Desplazamiento en x ; *b)* Desplazamiento en y ; *c)* Desplazamiento en z .

4.2.3 Caso III: Ráfaga (Desplazamiento de apoyo)

Con el objetivo de verificar el modelo de ráfaga implementado se considera el fuselaje conectado a cuatro resortes y cuatro amortiguadores en la dirección vertical (ráfaga ascendente) (ver Figura 4-8).

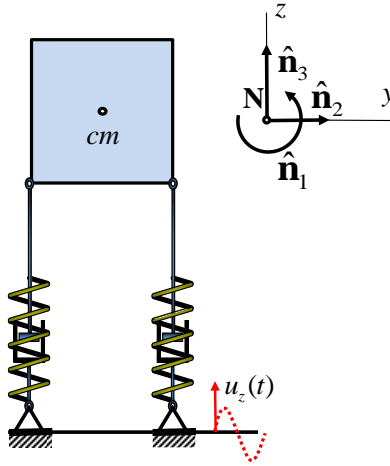


Fig. 4-8. Fuselaje conectado a cuatro resortes en la dirección z .

La excitación de base utilizada tiene una forma sinusoidal dada por la siguiente expresión:

$$u_z(t) = U \sin \omega t, \quad (4.2)$$

donde $u_z(t)$ es el desplazamiento que experimenta el anclaje de los resortes y amortiguadores, U es la amplitud máxima de la excitación, y ω es la frecuencia circular de la excitación.

La configuración analizada es equivalente a un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) sometido a un desplazamiento de base, cuya ecuación de movimiento y solución analítica está dada en [54] por

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{q}}_z + c\dot{\bar{q}}_z + k\bar{q}_z &= m\omega^2 u_z(t), \quad \text{y} \\ \bar{q}_z(t) &= Z \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde \bar{q}_z es el desplazamiento relativo en metros, $\dot{\bar{q}}_z$ es la velocidad relativa, $\ddot{\bar{q}}_z$ la aceleración relativa, c es el coeficiente de amortiguamiento, k la constante de rigidez del resorte, m la masa del sistema, Z es un valor característico de movimiento base [54] y ϕ es el ángulo de fase.

Los esquemas de integración evaluados para obtener la respuesta del sistema mostrado en la Figura 4-8 sujeto a desplazamiento de base son: *i*) Hamming de cuarto orden; *ii*) Runge-Kutta de cuarto orden, con una estabilización numérica *S-Both*²; y *iii*) HHT ($\alpha_f = 0.02$).

Los valores utilizados para los parámetros del sistema son: rigidez de cada resorte $k = 0.25$ N/m, longitud no deformada $l_0 = 10$ m, y masa del fuselaje $m = 1$ Kg. En la Tabla 4-1 se especifican las condiciones iniciales y el resto de los parámetros del sistema,

para dos configuraciones diferentes, la configuración 1) no amortiguada y 2) amortiguada, en la primera, no posee un desplazamiento inicial como en la segunda y la velocidad relativa inicial difieren, pero ambas poseen la misma frecuencia y amplitud de excitación. Los valores asociados a la velocidad y posición inicial se obtienen de la solución analítica del sistema MRA con movimiento de base. El campo gravitacional terrestre no es tenido en cuenta en este análisis.

	\bar{q}_z [m]	$\dot{\bar{q}}_z$ [m/s]	c [Ns/m]	U [m]	ω [rad/seg]
Configuración 1	0	-5.2083	0	1	5
Configuración 2	-0.208	-4.992	1	1	5

Tabla 4-1. Parámetros de la condición inicial.

En la Figura 4-9 y 4-10 se presenta la respuesta del sistema dinámico para la configuración 1 y para la configuración 2, respectivamente. Las respuestas obtenidas por medio de los integradores investigados no mostraron diferencias significativas.

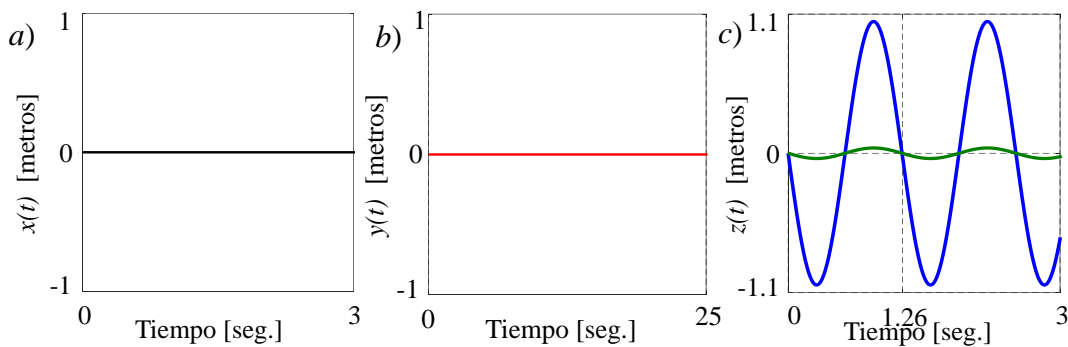


Fig. 4-9. Respuesta numérica y analítica configuración 1. Desplazamiento absoluto y relativo en a) $x(t)$; b) $y(t)$; c) $z(t)$ azul es el relativo; verde es el absoluto.

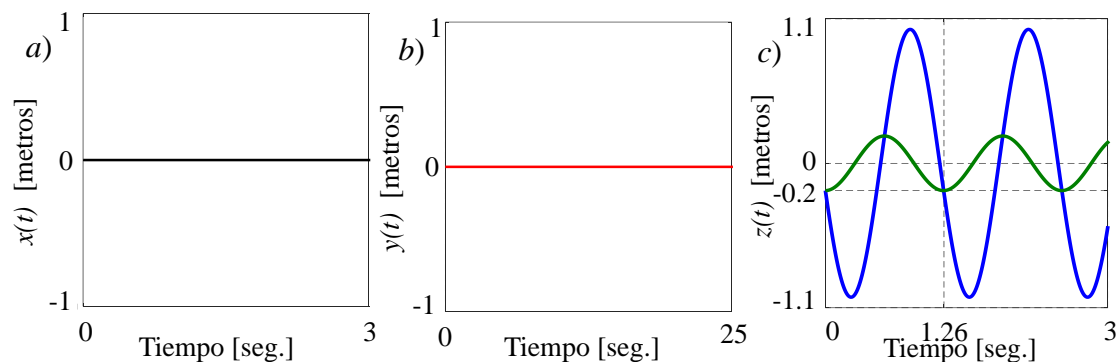


Fig. 4-10. Respuesta numérica y analítica configuración 2. Desplazamiento absoluto y relativo en a) $x(t)$; b) $y(t)$; c) $z(t)$ azul es el relativo, verde el el absoluto.

En la Tabla 4-2 se compara el valor del periodo y amplitud de oscilación provenientes de las simulaciones numéricas (para las dos configuraciones detalladas en

la Tabla 4-1) contra la solución analítica (4.3). También se puede notar que el error relativo porcentual exhibido por la solución numérica, comparada con la analítica, es muy pequeño; hecho que permite validar la correcta implementación del modelo de ráfaga basado en un movimiento de apoyo.

	T_{Num} [Seg]	T_{Ana} [Seg]	Error %	Q_{Num} [m]	Q_{Ana} [m]	Error %
Configuración 1	1.26	1.256	0.315	1.041	1.0417	0.067
Configuración 2	1.26	1.256	0.315	1.019	1.0198	0.078

Tabla 4-2. Periodo y Amplitud de oscilación (Numérico y Analítico).

4.2.4 Caso IV: Péndulo físico

En esta sección se efectúa un análisis sencillo que pretende validar la porción del modelo multicuerpo que considera el acoplamiento flexible entre las diferentes alas que componen la aeronave. Para ello se considera una versión simplificada del sistema dinámico compuesto solamente por tres cuerpos: *i*) el fuselaje; *ii*) el tramo de ala central vinculada rígidamente al fuselaje; y *iii*) un tramo de ala vinculada al tramo central por medio de un resorte de torsión (ver Figura. 4-11a).

El fuselaje (cubo) está vinculado rígidamente a tierra por medio de seis ecuaciones algebraicas de restricción: tres de posición y tres de orientación.

Cada uno de los tres cuerpos posee una masa de 1 kg, el resorte de torsión posee una constante de rigidez, $k_t = 100$ Nm/rad, y la acción del campo gravitacional terrestre no es tenido en cuenta ($g = 0$). Las alas (representadas por placas) son cuadradas cuyos lados tienen una longitud $L = 1.0$ m. Las condiciones iniciales para el problema consisten de un ángulo relativo en el tramo alar central y el ala externa de 10° y velocidad angular nula.

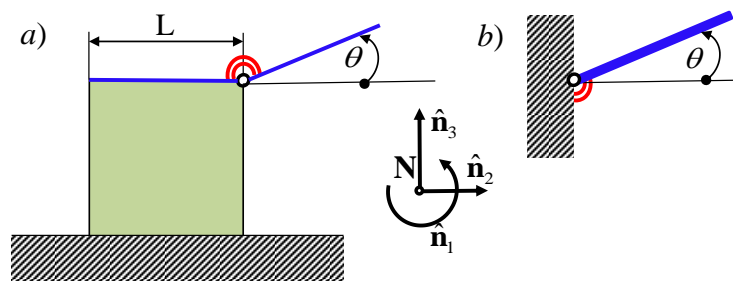


Fig. 4-11. a) Versión simplificada del sistema dinámico. b) Péndulo físico.

Los esquemas de integración utilizados para resolver el sistema de ecuaciones gobernantes son: *i*) el integrador ODE45 disponible en MATLAB®; *ii*) predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming; *iii*) Diferencia Central; y *iv*) Alpha generalizado ($\alpha_f = 0.5$ y $\alpha_m = 0.4988$). El paso de tiempo utilizado es $\Delta t = 0.001$ para todos los integradores, excepto el esquema ODE45 que utiliza paso de integración adaptivo. Como se puede observar en la Figura 4-12, la solución numérica obtenida por todos los esquemas numéricos es idéntica. El valor del periodo de oscilación se extrajo de la gráfica de la respuesta y es igual a 0.363 seg.

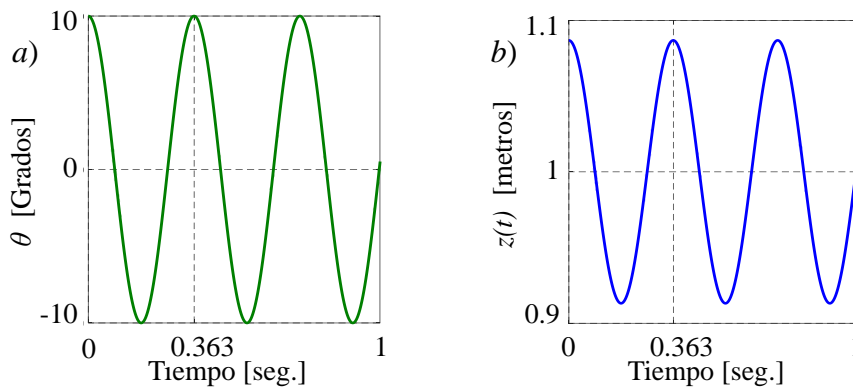


Fig. 4-12. Respuesta versión simplificada de la aeronave. *a*) Oscilación del ala. *b*) Desplazamiento del centro de masa del ala en $z(t)$.

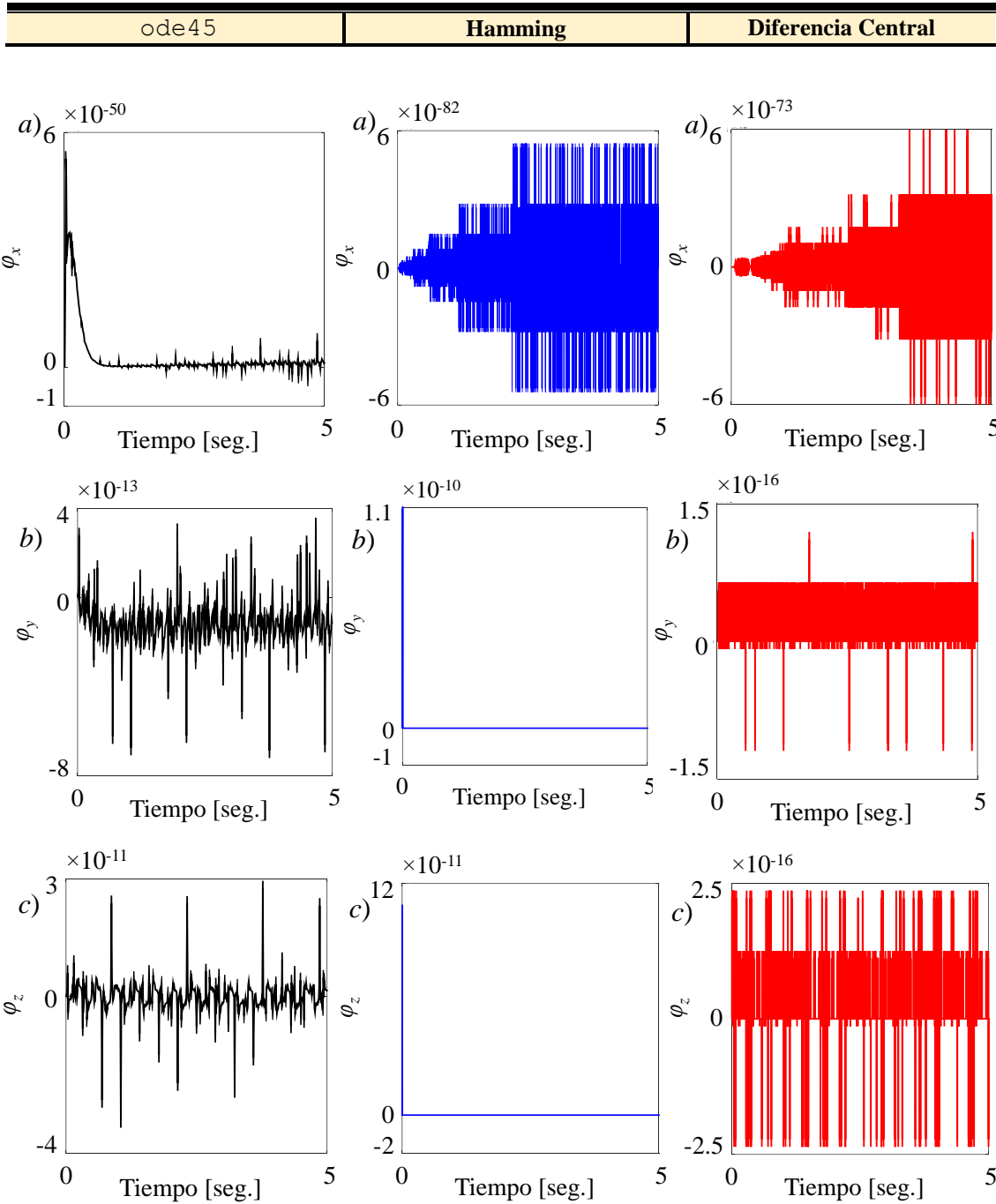
El período de oscilación obtenido para el sistema esquematizado en la Figura 4-11a es comparado contra la solución analítica de un sistema mecánico simple que consiste de una barra rígida en voladizo vinculada a un soporte por medio de un resorte de torsión (ver Figura 4-11b); denominado Barra-Resorte-Torsión (BRT). Se puede demostrar que el período de oscilación del BRT está dado en [54] por

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3k_t}{m}}} = 0.3627 \text{ seg.} \quad (4.4)$$

El error relativo porcentual obtenido entre las respuestas concernientes al sistema multicuerpo simplificado y el modelo BRT es de 0.066% para el periodo de oscilación.

Los integradores basados en la técnica de reducción de índice (ver Capítulo 3) sufren desviaciones numéricas la cuales son controladas mediante el método de estabilización de Baumgarte ($\alpha = 10$ y $\beta = 10$) o el método de proyección de coordenadas. Para el ode45 disponible en MATLAB® se utilizó Baumgarte debido a que ode45 es un esquema de integración interno cuyo algoritmo no es accesible y para los métodos

restantes, Hamming y diferencia central se utilizó proyección de coordenadas, porque está probado su mejor desempeño cuando las restricciones son complejas [76]. En las Figuras 4-13 y 4-14 se muestran las desviaciones numéricas que ocurren en las ecuaciones de restricción a nivel de la posición de conexión (φ_x , φ_y , φ_z) y de orientación (φ_1 , φ_2); como así también las desviaciones en las restricciones a nivel de la velocidad para la vinculación entre el ala central y el ala externa (ver Capítulo 3).



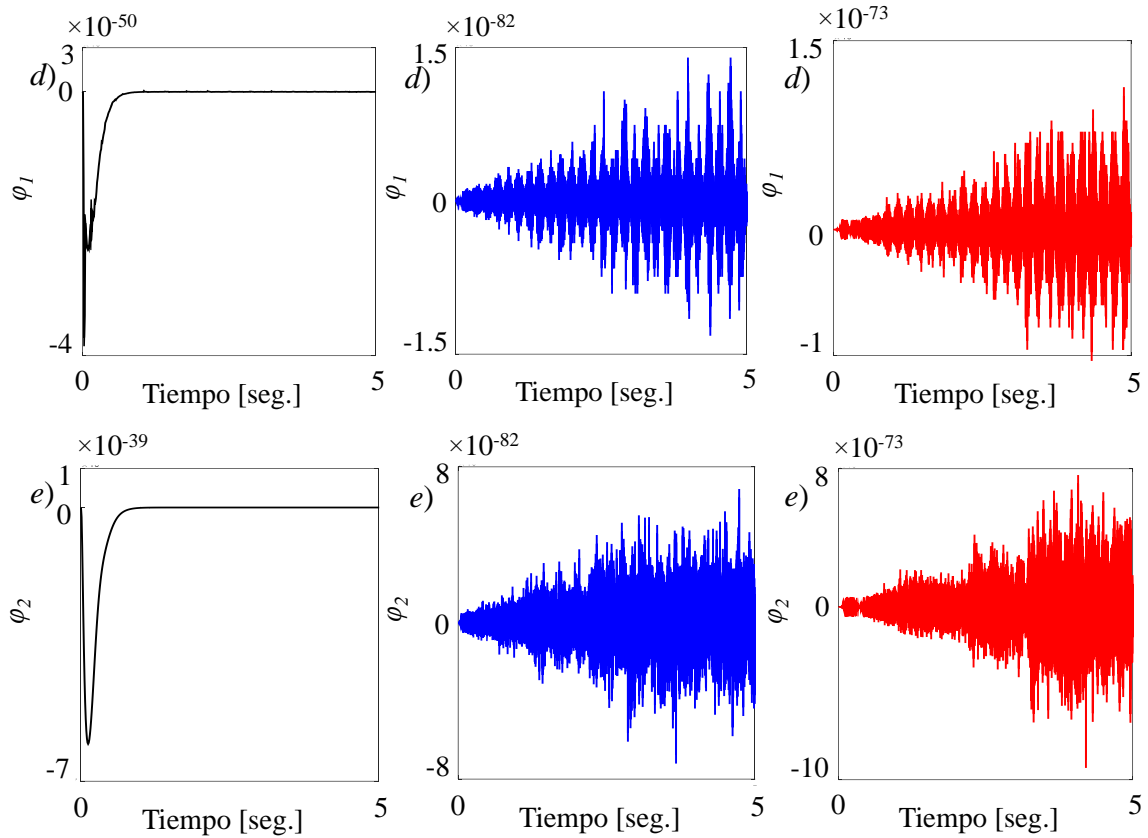
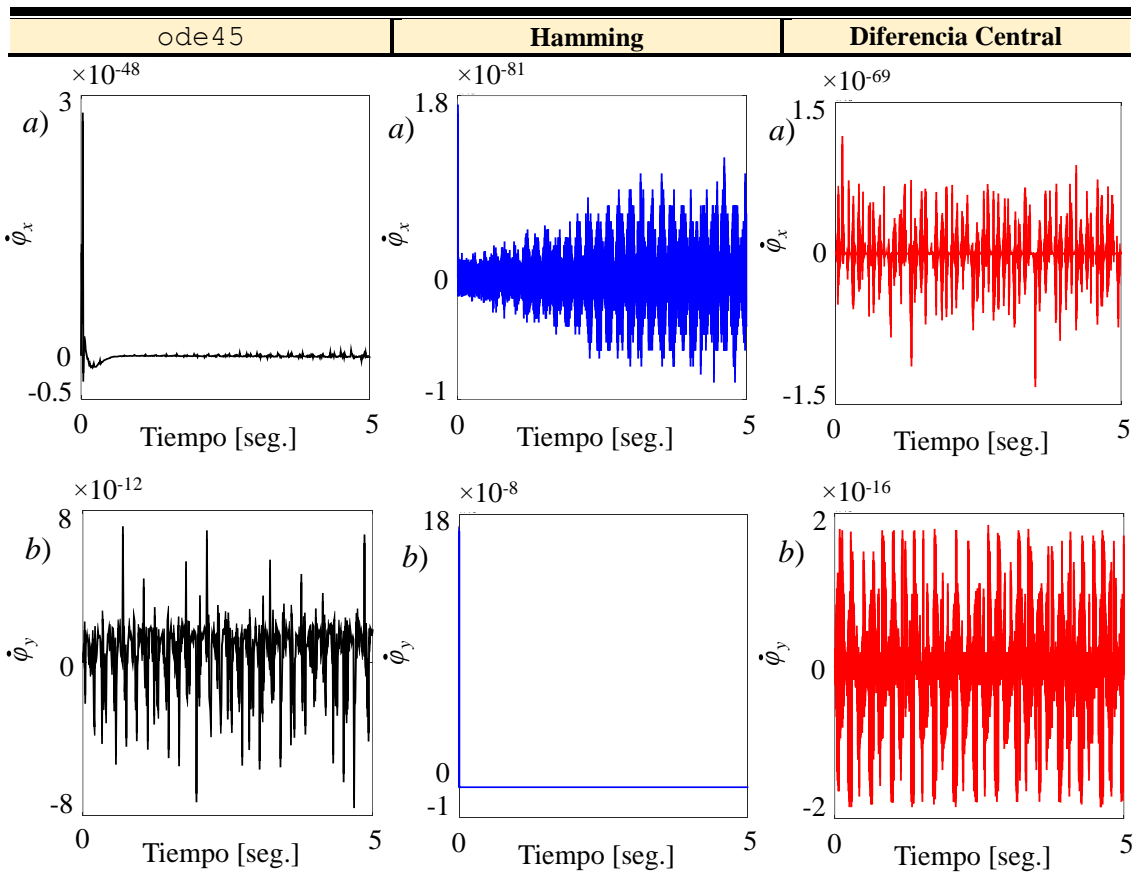


Fig. 4-13. Desviaciones numéricas a nivel de la posición en las ecuaciones de restricción ala-ala. En coordenadas *a)* x ; *b)* y ; *c)* z . En la orientación, *d)* ϕ_1 ; *e)* ϕ_2 .



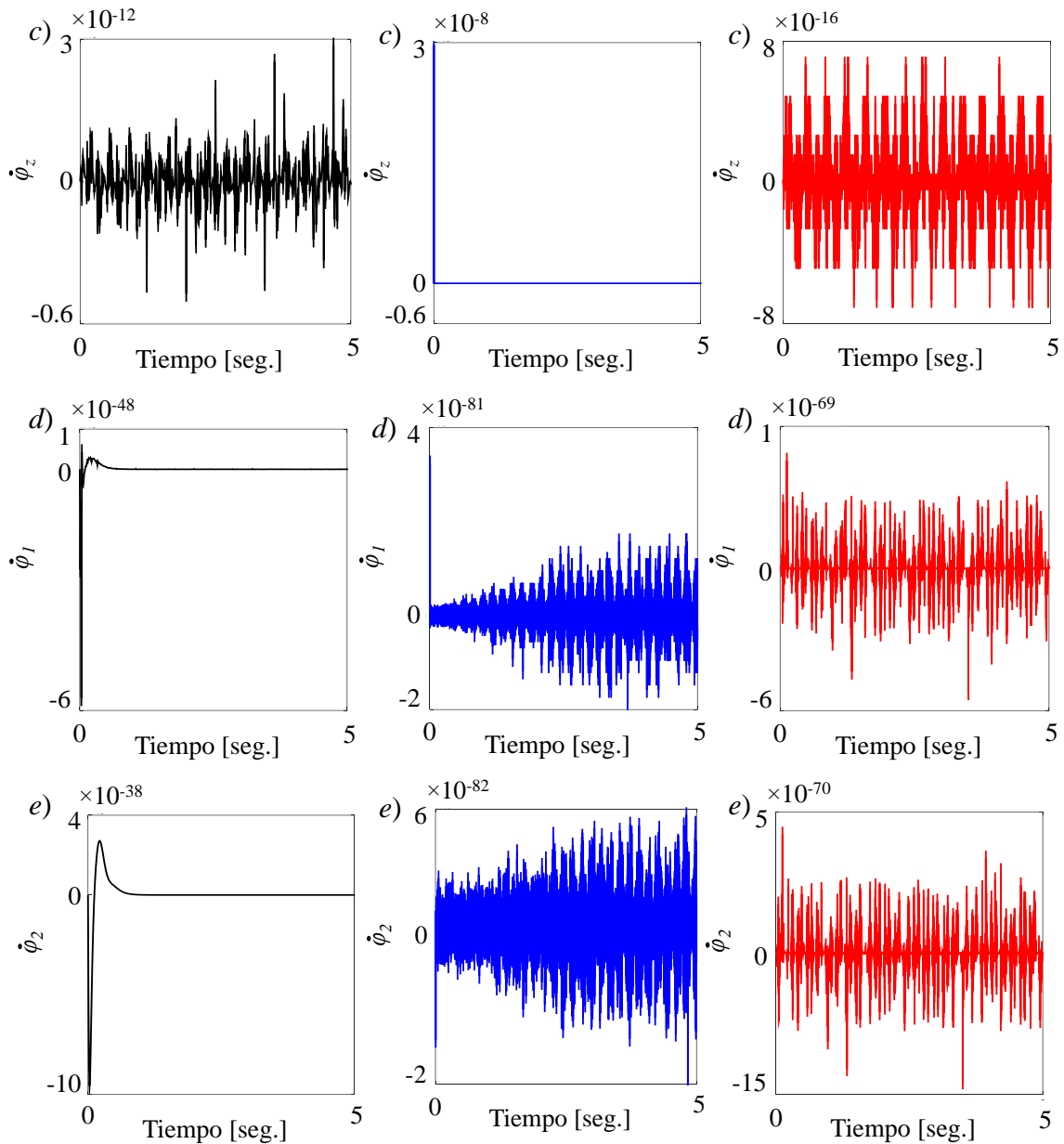


Fig. 4-14. Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad en las ecuaciones de restricción ala-ala. En coordenadas $a) \dot{x}$; $b) \dot{y}$; $c) \dot{z}$. En la orientación, $d) \dot{\varphi}_1$; $e) \dot{\varphi}_2$.

De los gráficos mostrados anteriormente, se concluye que las desviaciones numéricas a nivel de la posición y la velocidad son bien controladas; lo mismo ocurre para el resto de las restricciones, es decir, fuselaje-tierra y ala central-fuselaje.

4.2.5 Caso V: Modo simétrico y antisimétrico

En esta subsección se reproduce el estudio realizado originalmente por [7] sobre un sistema dinámico simple compuesto por 4 cuerpos: el fuselaje y tres alas. El ala central está conectada rígidamente al fuselaje. Se consideran dos configuraciones diferentes para

el sistema multicuerpo: *i*) una configuración de ala simétrica (ver Figura 4-15a); y *ii*) una configuración de ala antisimétrica (ver Figura 4-15b).

Es importante destacar que el fuselaje está conectado rígidamente al terreno, con lo cual todos los resortes lineales y amortiguadores están deshabilitados. Además, el campo gravitacional terrestre no es tenido en cuenta ($g = 0$). La masa de todos los cuerpos intervinientes es igual a la unidad, $m = 1$ Kg, las placas que simulan las alas tienen una forma geométrica cuadrada de lado 1 m, y el valor de las constantes de rigidez para los resortes torsionales que vinculan las alas externas al tramo de ala central es $k_t = 100$ N/rad. El conjunto de condiciones iniciales para el problema consiste de una amplitud de 10° para el ángulo relativo entre las alas externas con el tramo central, y velocidad angular nula.

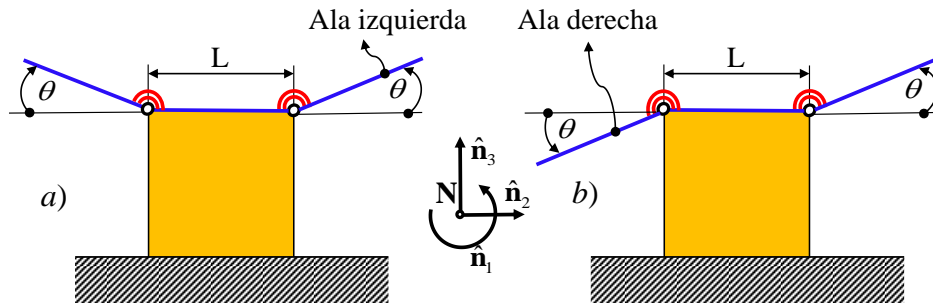


Fig. 4-15. Configuración a) simétrica y b) antisimétrica.

El periodo de oscilación obtenida por la herramienta numérica, tanto para la configuración simétrica y antisimétrica, es de $\tau = 0.363$ seg. En la Figura 4-16 y Figura 4-17 se presenta la respuesta del sistema para las dos configuraciones utilizando los integradores: *i*) ode45 disponible en MATLAB®; *ii*) predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming; *iii*) Diferencia Central; *iv*) Runge-Kutta de 4^{to} orden y *v*) Alpha generalizado ($\alpha_f = 0.5$ y $\alpha_m = 0.4988$). El paso de tiempo utilizado es $\Delta t = 0.001$ para todos los integradores, excepto para el ode45 que utiliza un paso de tiempo adaptivo.

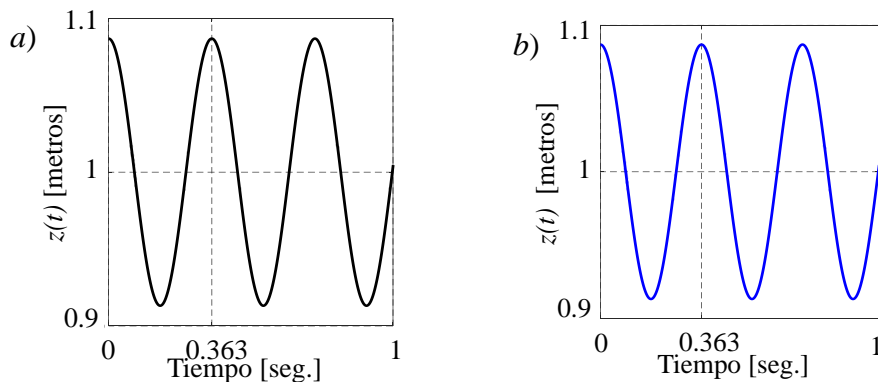


Fig. 4-16. Respuesta configuración simétrica. a) Ala derecha; b) Ala izquierda.

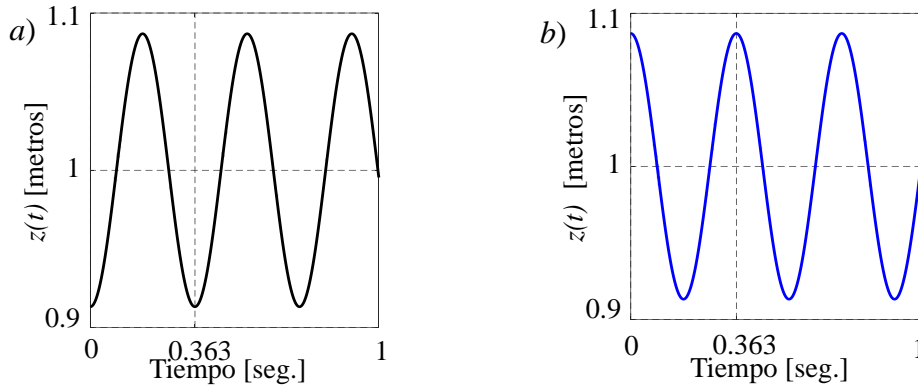


Fig. 4-17. Respuesta configuración asimétrica. a) Ala derecha; b) Ala izquierda.

El error relativo porcentual es del 0.066% cuando se lo compara con el periodo de oscilación calculado en formula analítica (4.4) ($\tau = 0.3627$ seg).

Los esquemas de integración que utilizan reducción de índice son estabilizados con el método de Baumgarte ($\alpha = 10$ y $\beta = 10$) para ode45 y el método de las proyecciones para Hamming, Diferencia Central y Runge-Kutta de 4^{to} orden, cuya fundamentación de uso se encuentra en la subsección 4.2.4.

A continuación en las tablas 4-3 a 4-6 se encuentran las máximas desviaciones absolutas para las restricciones a nivel de la posición en la conexión ($\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$) y orientación (φ_1, φ_2) entre el ala central y el tramo alar externo derecho. Observándose: *i*) las desviaciones numéricas a nivel de la posición y la velocidad son bien controladas, al igual para el resto de las restricciones; *ii*) las desviaciones, en general, son levemente mayores a nivel de la velocidad que al nivel de la posición, esto es evidente comparando las Tablas 4-3 y 4- 4.

Simétrica		ode45	Hamming	DC	Runge-Kutta
Sin Estabilización	φ_x	1.85×10^{-50}	4.85×10^{-56}	7.71×10^{-41}	1.24×10^{-47}
	φ_y	2.47×10^{-11}	8.43×10^{-7}	0.0028	1.35×10^{-8}
	φ_z	2.07×10^{-12}	1.48×10^{-7}	5.38×10^{-6}	1.84×10^{-10}
	φ_1	9.77×10^{-51}	7.58×10^{-56}	5.91×10^{-41}	2.66×10^{-47}
	φ_2	1.46×10^{-40}	9.37×10^{-58}	1.47×10^{-39}	3.98×10^{-40}
Con Estabilización	φ_x	8.12×10^{-51}	9.19×10^{-59}	7.12×10^{-66}	5.09×10^{-57}
	φ_y	6.89×10^{-13}	5.97×10^{-10}	1.1×10^{-16}	2.22×10^{-16}
	φ_z	2.67×10^{-13}	2.52×10^{-11}	2.2×10^{-16}	2.22×10^{-16}
	φ_1	1.69×10^{-50}	1.19×10^{-58}	1.42×10^{-65}	2.23×10^{-57}
	φ_2	6.87×10^{-40}	2.44×10^{-59}	1.24×10^{-66}	8.44×10^{-57}

Tabla 4-3. Desviaciones máximas absolutas a nivel de la posición, ala derecha y central: simétrica.

Simétrica		ode45	Hamming	DC	Runge-Kutta
Sin Estabilización	ϕ_x	2.59×10^{-50}	9.69×10^{-57}	6.87×10^{-42}	5.03×10^{-48}
	ϕ_y	1.51×10^{-11}	2.74×10^{-7}	0.0011	5.46×10^{-9}
	ϕ_z	6.66×10^{-12}	3.89×10^{-8}	9.7×10^{-5}	1.38×10^{-10}
	ϕ_1	2.32×10^{-50}	1.51×10^{-56}	1.44×10^{-41}	1.08×10^{-47}
	ϕ_2	1.0×10^{-39}	1.92×10^{-58}	1.08×10^{-38}	2.54×10^{-39}
Con Estabilización	ϕ_x	3.59×10^{-49}	5.41×10^{-57}	5.76×10^{-62}	4.39×10^{-48}
	ϕ_y	7.12×10^{-12}	3.49×10^{-12}	1.73×10^{-16}	1.40×10^{-13}
	ϕ_z	5.12×10^{-12}	1.98×10^{-11}	6.66×10^{-16}	4.30×10^{-11}
	ϕ_1	7.50×10^{-49}	8.43×10^{-60}	1.30×10^{-61}	8.78×10^{-48}
	ϕ_2	1.01×10^{-38}	5.87×10^{-60}	7.60×10^{-63}	8.48×10^{-49}

Tabla 4-4. Desviaciones máximas absolutas a nivel de la velocidad, ala derecha-central: simétrica.

Simétrica		ode45	Hamming	DC	Runge-Kutta
Sin Estabilización	ϕ_x	2.08×10^{-49}	4.33×10^{-54}	5.41×10^{-40}	1.24×10^{-47}
	ϕ_y	2.93×10^{-11}	8.43×10^{-7}	0.0028	1.35×10^{-8}
	ϕ_z	1.91×10^{-12}	1.48×10^{-7}	5.38×10^{-6}	1.84×10^{-10}
	ϕ_1	7.23×10^{-50}	6.62×10^{-54}	1.13×10^{-39}	2.66×10^{-47}
	ϕ_2	1.53×10^{-39}	1.70×10^{-55}	1.08×10^{-37}	3.98×10^{-40}
Con Estabilización	ϕ_x	3.38×10^{-50}	5.40×10^{-57}	1.89×10^{-65}	1.13×10^{-72}
	ϕ_y	7.30×10^{-13}	2.52×10^{-10}	1.11×10^{-16}	2.22×10^{-16}
	ϕ_z	3.06×10^{-13}	4.45×10^{-11}	2.22×10^{-16}	2.22×10^{-16}
	ϕ_1	7.08×10^{-50}	9.47×10^{-57}	2.84×10^{-65}	5.60×10^{-73}
	ϕ_2	3.09×10^{-39}	3.99×10^{-57}	3.56×10^{-66}	1.75×10^{-70}

Tabla 4-5. Desviaciones máximas absolutas a nivel de la posición, ala derecha y central: antisimétrica.

Simétrica		ode45	Hamming	DC	Runge-Kutta
Sin Estabilización	ϕ_x	2.41×10^{-49}	8.65×10^{-55}	2.31×10^{-40}	5.64×10^{-47}
	ϕ_y	1.91×10^{-11}	2.74×10^{-7}	0.0011	5.46×10^{-9}
	ϕ_z	4.23×10^{-12}	3.08×10^{-8}	9.7×10^{-5}	1.38×10^{-10}
	ϕ_1	2.19×10^{-49}	1.32×10^{-54}	4.61×10^{-41}	1.19×10^{-46}
	ϕ_2	1.05×10^{-38}	3.56×10^{-56}	3.64×10^{-37}	2.86×10^{-38}
Con Estabilización	ϕ_x	1.54×10^{-48}	6.20×10^{-58}	1.70×10^{-61}	1.09×10^{-59}
	ϕ_y	7.18×10^{-12}	3.49×10^{-12}	1.73×10^{-16}	1.40×10^{-13}
	ϕ_z	5.17×10^{-12}	1.98×10^{-11}	6.66×10^{-16}	4.30×10^{-11}
	ϕ_1	3.24×10^{-48}	8.65×10^{-55}	3.87×10^{-61}	2.45×10^{-59}
	ϕ_2	4.85×10^{-38}	2.74×10^{-7}	1.32×10^{-62}	4.17×10^{-62}

Tabla 4-6. Desviaciones máximas absolutas a nivel de la velocidad, ala derecha y central: antisimétrica.

Si bien las desviaciones son bien controladas, el esquema de integración de Hamming exhibe valores de desviación más altos; hecho que sucede al comienzo del proceso de integración. Este fenómeno se debe al esquema de arranque que se utiliza en el método, caracterizado por integradores de orden bajo (ver Capítulo 3). En las Figuras 4-18 a 4-21 se presentan las desviaciones numéricas que se dan en el método de Hamming con estabilización, a nivel de la posición y velocidad, en las configuraciones antes estudiadas, pero no se graficaron los valores correspondientes a los tres primeros pasos de integración, los cuales están asociados al esquema de arranque que utiliza el método de Hamming, observándose que las máximas desviaciones luego de los primeros tres pasos de integración son menores que las obtenidas en las tablas expuestas anteriormente (ver Tabla 4-3 a 4-6).

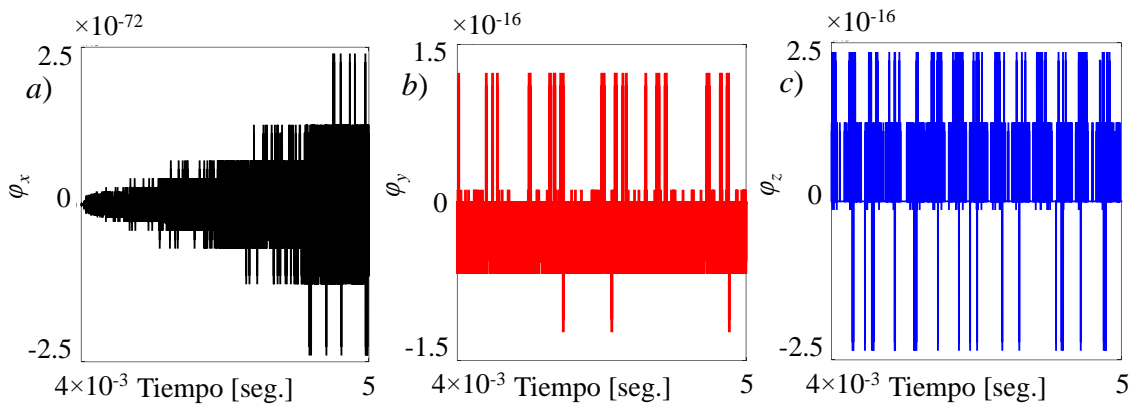


Fig. 4-18. Desviaciones numéricas a nivel de la posición: configuración simétrica. En coordenadas a) x ; b) y ; c) z .

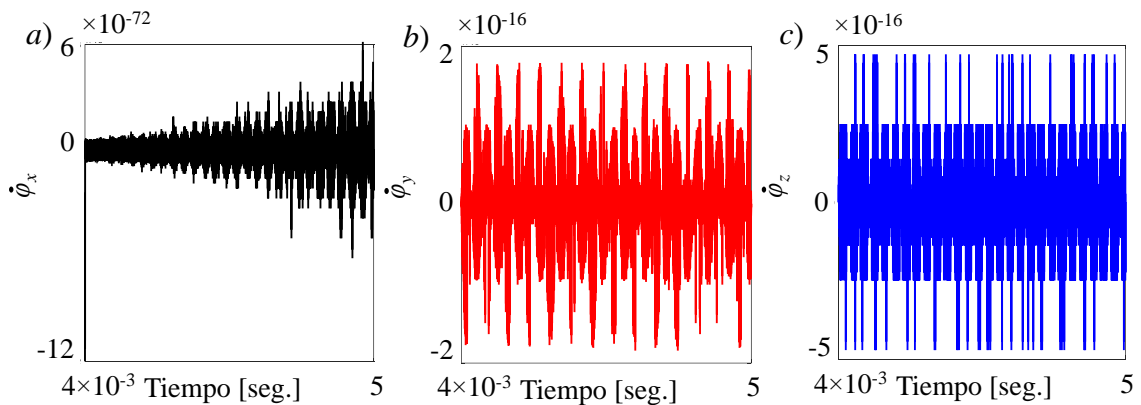


Fig. 4-19. Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad: configuración simétrica. En coordenadas a) \dot{x} , b) \dot{y} , c) \dot{z} .

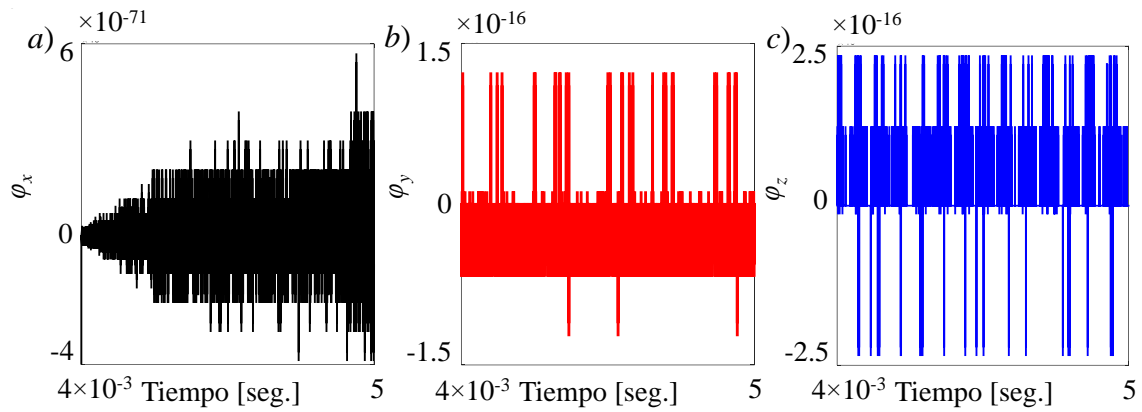


Fig. 4-20. Desviaciones numéricas a nivel de la posición: configuración antisimétrica. En coordenadas a) x ; b) y ; c) z .

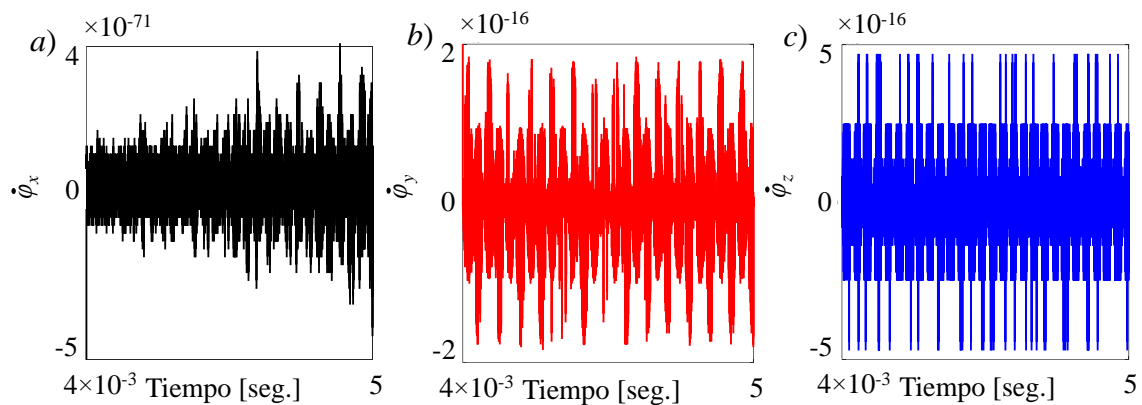


Fig. 4-21. Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad: configuración antisimétrica. En coordenadas a) \dot{x} ; b) \dot{y} ; c) \dot{z} .

4.2.6 Caso VI: Sistema de tres barras

En este caso se estudia un modelo dinámico compuesto por el fuselaje y tres alas, donde el ala central se encuentra vinculada al fuselaje en forma rígida. Dicho fuselaje está conectado a 12 resortes, 4 verticales (en la dirección z), 8 horizontales (4 en la dirección x y 4 en la dirección y). En la configuración inicial el fuselaje se encuentra en la posición $(0, 0, 0)$ y cada ala forma un ángulo $\theta = 10^\circ$ con respecto al ala central (ver Figura 4-22). Los parámetros del sistema son: masa de las alas $m_A = 1.0$ kg, $m_F = 0.1$ kg masa del fuselaje, longitud característica del cubo que simula el fuselaje $L_F = 1.0$ m, alas con forma cuadrada $L_A = 1.0$ m, constante de rigidez de los resortes lineales $k_s = 50$ N/m, longitud natural de los resortes lineales $l_0 = 10$ m, y constantes de rigidez para los resortes de torsión $k_t = 100$ N/rad.

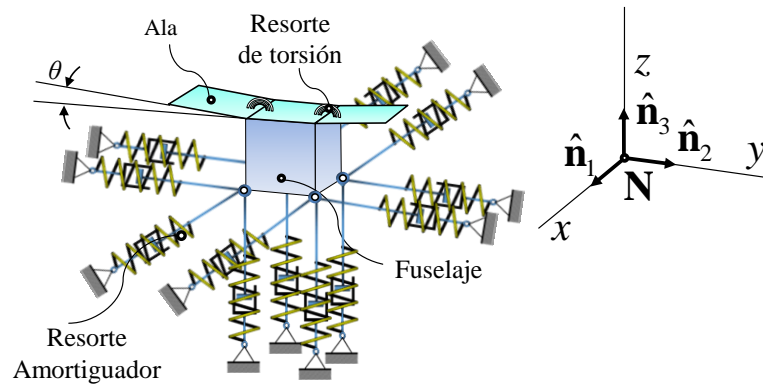


Fig. 4-22. Sistema dinámico simplificado (fuselaje-ala central-alas externas).

Con el objetivo de verificar la formulación desarrollada y la implementación numérica del sistema esquematizado en la Figura 4-22, en esta subsección se compara la respuesta temporal del modelo conceptual de X-HALE-UAV contra la respuesta de un sistema dinámico 2-dimensional simple que consiste de tres barras conectadas entre sí elásticamente (ver Figura 4-23). La barra central está vinculada a tierra por medio de 4 resortes, 2 verticales (en la dirección z) y 2 horizontales (en la dirección y). En lo que sigue, se utilizará el acrónimo STB para hacer referencia al sistema de tres barras. Los parámetros del STB son: masa de las barras laterales $m_{BL} = 1.0$ Kg, masa de la barra central $m_{BC} = 1.1$ Kg (masa del fuselaje + masa del ala central), constante de rigidez de los resortes lineales $k_z = 100$ N/m para los verticales, $k_y = 200$ N/m para los horizontales, una constante de rigidez para los resortes de torsión $k_t = 100$ N/rad y una longitud para las tres barras de $L_B = 1.0$ m.

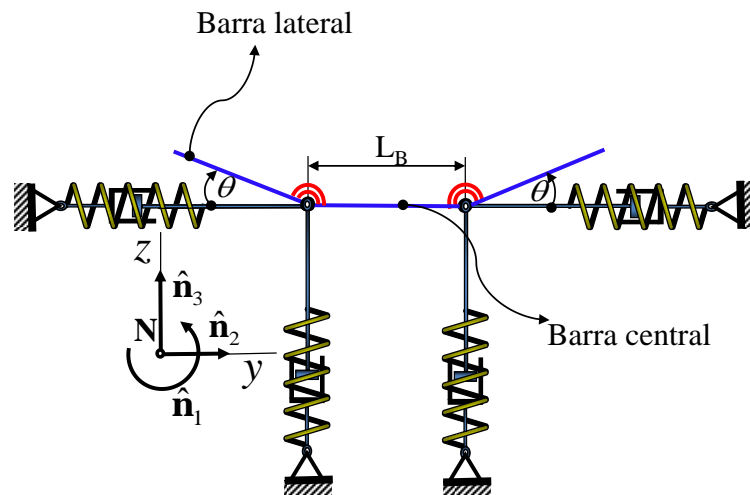


Fig. 4-23. Sistema de tres barras conectado a tierra por 4 resortes.

El sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del STB es formulado por medio de un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange

para sistemas sin restricciones. Para integrar el sistemas de ODEs que describen la dinámica del STB se utilizó el esquema `ode45` disponible en MATLAB®.

El conjunto de condiciones iniciales para el STB es igual al utilizado para el sistema presentado en la Figura 4-22. Se debe destacar que la acción del campo gravitatorio se encuentra activo para el estudio presentado en ésta subsección ($g = 9.81\text{m/s}^2$). Los esquemas numéricos utilizados para integrar el sistema de DAEs (de índice 1 y/o índice 3) que gobierna la evolución temporal del X-HALE-UAV son, *i*) Hamming; *ii*) Diferencia Central; y *iii*) Alpha generalizado ($\alpha_f = 0.5$ y $\alpha_m = 0.4988$).

En la Figura 4-24 se presenta la evolución temporal del centro de masa del fuselaje y STB. Como se puede observar, la respuesta es idéntica independientemente del integrador utilizado.

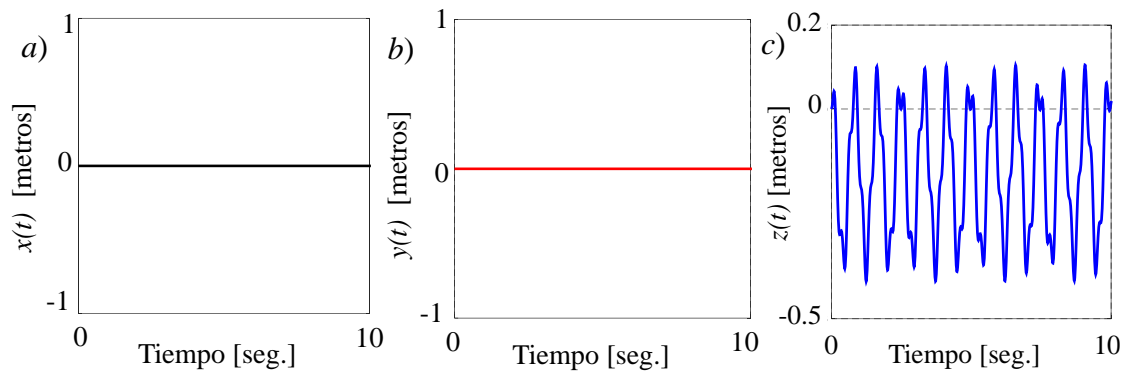


Fig. 4-24. Desplazamiento del centro de masa del fuselaje y de la barra central del STB, *a*) x ; *b*) y ; *c*) z .

Por otro lado, como se puede apreciar en la Figura 4-25, la rotación relativa entre el ala central y las alas externas en el modelo X-HALE-UAV coincide totalmente con la rotación relativa entre la barra central y las barras laterales en el modelo STB.

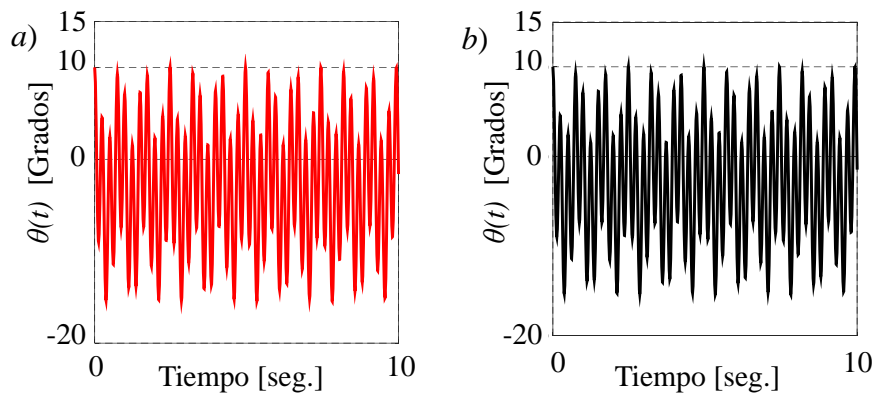


Fig. 4-25. Angulo relativo entre ala central-ala (X-HALE-UAV) y entre barra central-barras laterales (STB). *a*) Lado izquierdo; *b*) Lado derecho.

Por último, en las Figuras 4-26 y 4-27, se presentan las desviaciones numéricas a nivel de la posición y velocidad que surgen cuando se utiliza reducción de índice. Se aclara que las Figuras 4-26 y 4-27 son pertenecientes al esquema de integración de Hamming, combinado con el método de proyección de coordenadas *S-both*².

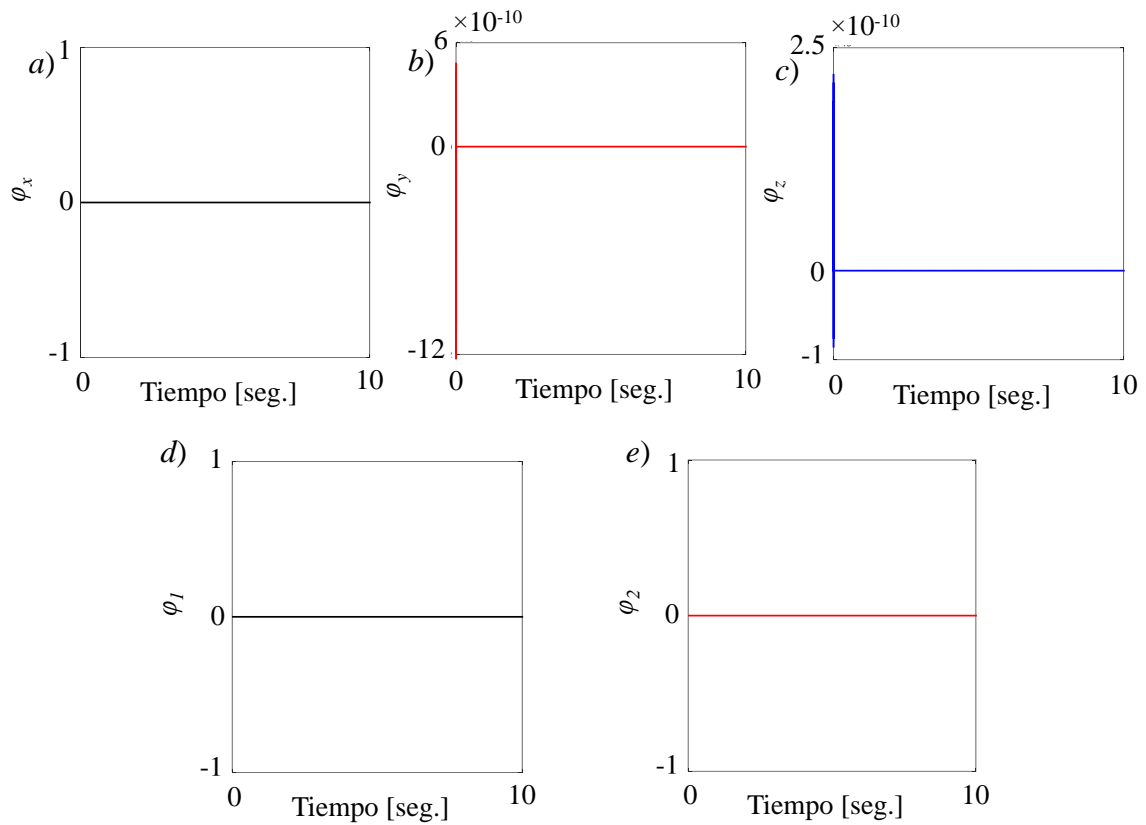
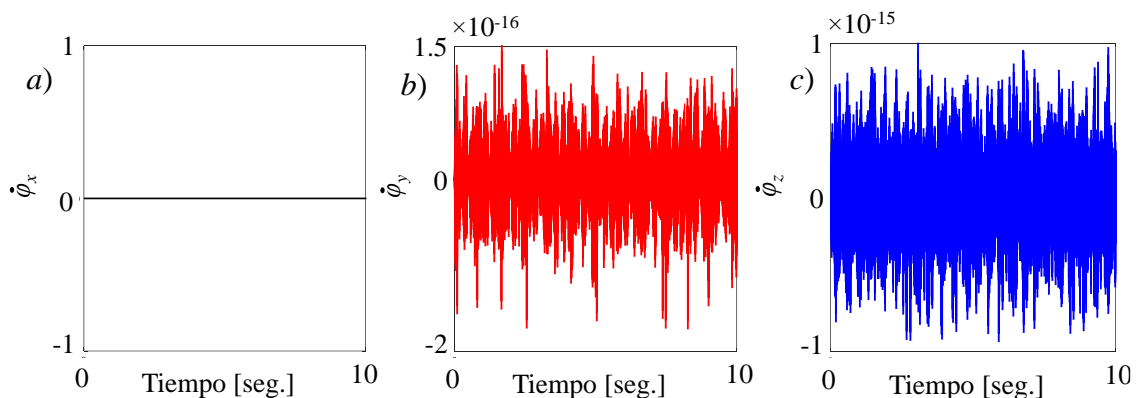


Fig. 4-26. Desviaciones numéricas a nivel de la posición en las ecuaciones de restricción ala derecha-ala central; a) x; b) y; c) z; y orientación, d) ϕ_1 ; e) ϕ_2 .



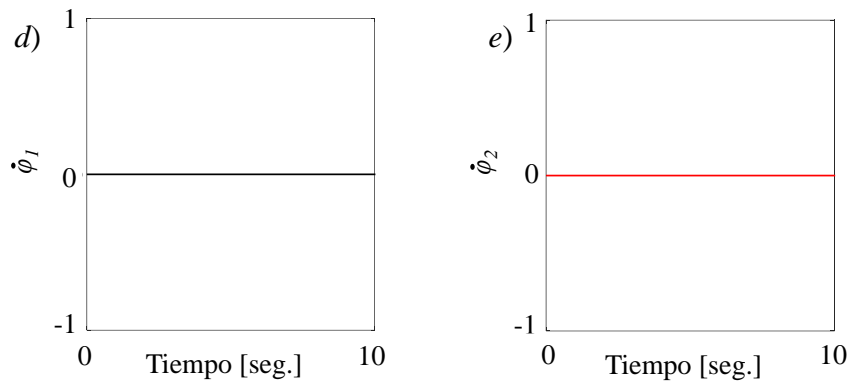


Fig. 4-27. Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad en las ecuaciones de restricción ala derecha-ala central; *a)* \dot{x} , *b)* \dot{y} , *c)* \dot{z} ; y orientación, *d)* $\dot{\varphi}_1$ *e)* $\dot{\varphi}_2$.

Como se puede observar en los gráficos de 4-26 y 4-27, las desviaciones numéricas son bien controladas durante todo el proceso de integración, lo mismo sucede con el integrador DC.

4.3 Dinámica de un modelo conceptual de X-HALE-UAV

En esta subsección se estudia el comportamiento dinámico de un modelo simplificado de X-HALE-UAV sometido a distintas solicitaciones externas. El UAV está compuesto por: 7 alas, 4 trenes de aterrizaje, 4 motores y un fuselaje (ver Figura 4-28); el cual se encuentra vinculado al túnel de viento por medio de doce resortes y doce amortiguadores. Los parámetros del sistema tienen los siguientes valores: masa de las alas $m_A = 1.0$ kg, masa de los trenes de aterrizajes $m_T = 1.0$ kg, $m_M = 0.1$ kg masa de los motores, masa del fuselaje $m_F = 0.1$ kg, longitud característica del cubo que simula el fuselaje $L_F = 1.0$ m, alas con forma cuadrada $L_A = 1.0$ m, placas que simulan los trenes de aterrizajes con $L_T = 1.0$ m y $h_T = 0.5$ m, motores con una longitud $L_M = 1.0$ m y diámetro $d_M = 0.1$ m, constante de rigidez de los resortes lineales $k_s = 100$ N/m, longitud natural de los resortes $l_0 = 2.5$ m, constantes de rigidez de los resortes de torsión $k_T = 200$ N/rad, y constantes de los amortiguadores $c_s = 0.1$ Ns/m.

En primera instancia se realizó un examen energético con el objeto de cuantificar la disipación de energía que introducen los integradores estudiados en este trabajo, y en función de esta disipación establecer cuáles son los de mejor desempeño. Una vez seleccionados los integradores de mejor rendimiento, se activaron los amortiguadores del sistema, con el fin de examinar la funcionalidad de los integradores seleccionados para el modelo X-HALE-UAV con amortiguación. Posteriormente al modelo X-HALE-UAV se le realizan los siguientes estudios, *i)* efecto de una ráfaga ascendente mediante un

desplazamiento base, *ii*) rotura mediante el cambio de rigidez en el resorte de torsión ubicado entre alas, *iii*) efecto combinado ráfaga ascendente rotura. Por último con el objeto de explorar las limitaciones de los algoritmos de integración, se estudió un modelo extremo del X-HALE-UAV de 32 cuerpos.

4.3.1 Análisis Energético

En esta subsección se presenta un análisis energético que tiene como objetivo cuantificar la pérdida de energía mecánica total del sistema dinámico durante el proceso de integración numérica. Para ello, se utilizó el modelo de X-HALE-UAV descrito en la sección 4.3 con una configuración simétrica. El conjunto de condiciones iniciales está dado por la posición del centro de masa del fuselaje en el punto $(0,0,0)$, y un ángulo relativo entre las alas de 5° (ver Figura 4-28). Debido al carácter del estudio expuesto en esta subsección, los doce amortiguadores se encuentran desactivados. El efecto del campo gravitacional terrestre es tenido en cuenta ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) y no existen solicitaciones externas sobre el sistema. Los integradores evaluados son: *i*) el integrador `ode45` disponible en MATLAB®; *ii*) Hamming de cuarto orden; *iii*) diferencia central; *iv*) Runge-Kutta de cuarto orden; *v*) Algoritmo de Newmark con amortiguamiento ($\alpha = 0.015$); *vi*) Algoritmo HHT ($\alpha_f = 0.026$); y *viii*) Alpha generalizado ($\alpha_f = 0.487$ y $\alpha_m = 0.4615$). El esquema `ode45` utiliza un esquema de estabilización basado en la técnica de Baumgarte ($\alpha = 10$ y $\beta = 10$), mientras que para los integradores *ii*) a *iv*) se utiliza una estabilización basada en proyección de coordenadas *S-Both*². El paso de integración utilizado para todos los esquemas de integración es $\Delta t = 0.001$, excepto para el `ode45` cuyo paso es adaptativo.

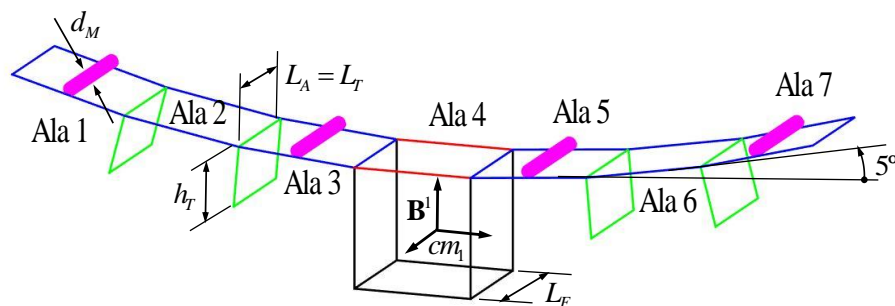


Fig. 4-28. Configuración inicial simétrica X-HALE.

En la Figura 4-29 se presenta la evolución de la energía mecánica total del sistema durante un lapso de simulación de 30 segundos. Es conocido que los esquemas de integración implementados en este trabajo y asociados a la estrategia de reducción de

índice introducen amortiguamiento numérico durante el proceso de integración. Sin embargo, se puede apreciar que los más eficientes, desde un punto de vista de conservación de la energía, son los métodos de Hamming, Runge-Kutta y `ode45`, mientras que diferencia central exhibe el mayor porcentaje de disipación de energía; una disminución del orden de 0.26% en el lapso de simulación estudiado.

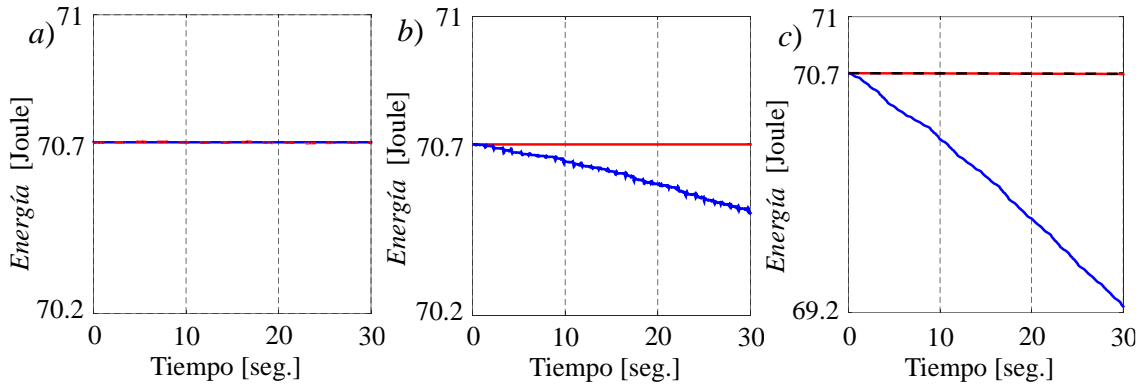
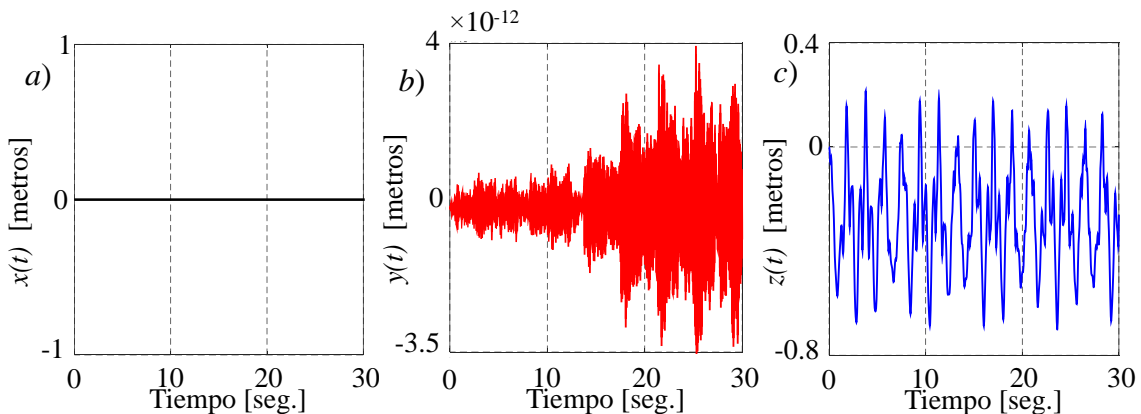


Fig. 4-29. Energía mecánica total sistema X-HALE a) Hamming (azul) y `ode45` (rojo); b) Diferencia Central (azul) y Runge-Kutta (rojo); c) Newmark con amortiguación (azul), HHT (rojo) y Alpha generalizado (negro).

En lo que se refiere a los integradores que utilizan la técnica de integración directa, los más eficientes, desde un punto de vista energético, son el Alpha generalizado y el algoritmo HHT. El integrador de Newmark con amortiguamiento ($\alpha = 0.015$) es el que mayor disipación de energía presenta (2%) (ver Figura 4-29c).

En las Figuras 4-30a, 4-30b y 4-30c se muestra la evolución temporal del centro de masa del fuselaje del UAV, mientras que en las Figuras 4-30d, 4-30e y 4-30f se exhiben las rotaciones relativas entre alas. Se debe destacar que todos los integradores utilizados produjeron la misma respuesta. El efecto de disipación de energía cuantificado en la Figura 4-29 no se aprecia en la Figura 4-30.



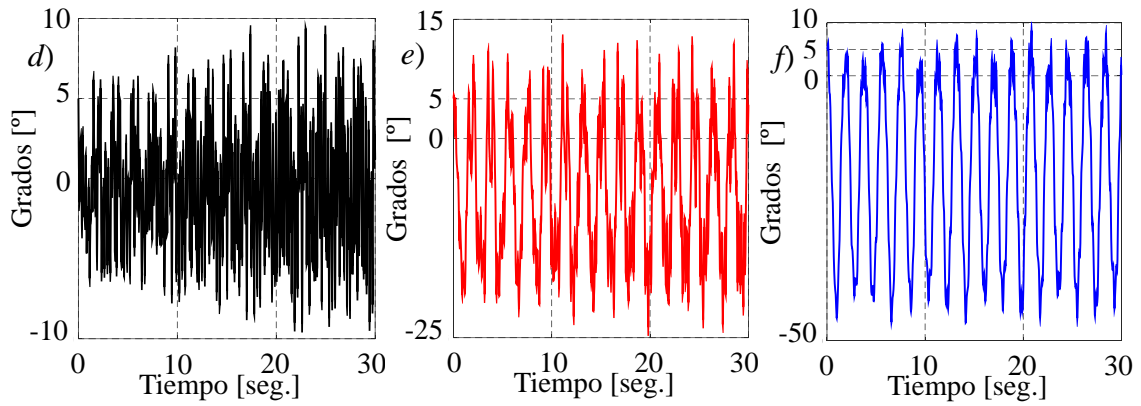
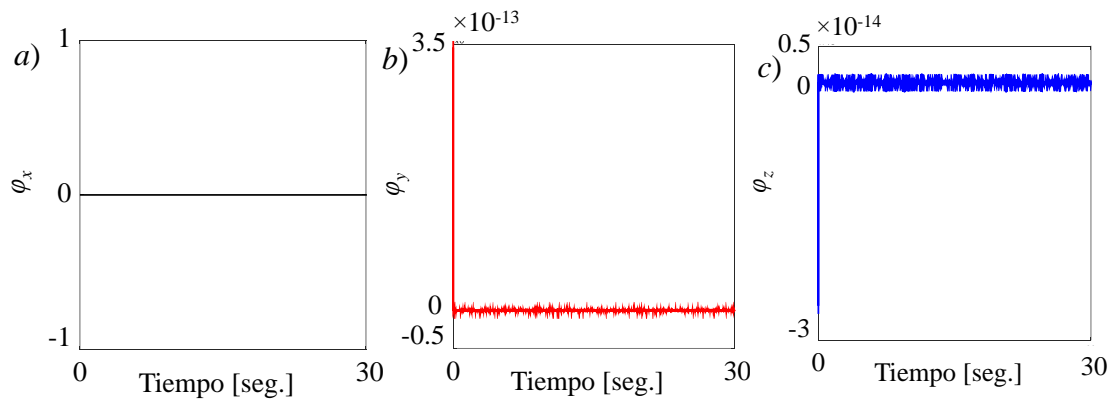


Fig. 4-30. Coordenadas del centro de masa del fuselaje: *a)* $x(t)$; *b)* $y(t)$; *c)* $z(t)$; Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas: *d)* alas 1-2 y 7-6; *e)* alas 2-3 y 6-5; *f)* alas 3-4 y 4-5.

Tanto la coordenada $x(t)$ como la coordenada $y(t)$ son prácticamente nulas debido a la configuración simétrica adoptada como condición inicial. Como consecuencia del acoplamiento dinámico que existe entre los grados de libertad asociados al fuselaje y los grados de libertad de los tramos alares externos, el desplazamiento vertical del fuselaje, $z(t)$, exhibe un comportamiento oscilatorio que evidencia: *i)* una componente que surge por la liberación del sistema desde una posición distinta a la posición de equilibrio (muy notoria sobre el transitorio de la respuesta) y *ii)* otra componente asociada al movimiento oscilatorio de los tramos de alas.

Como se puede observar en la Figura 4-30*d*, 4-30*e* y 4-30*f*, las coordenadas angulares que describen la orientación relativa de un ala con respecto a la contigua sobre la porción derecha de la aeronave; distinguiéndose una amplitud de oscilación que es mayor en las alas internas (alas 3-4). Además, son iguales a las coordenadas angulares que describen su par homólogo en la porción izquierda del UAV; hecho que se debe a la adopción de una configuración inicial simétrica.



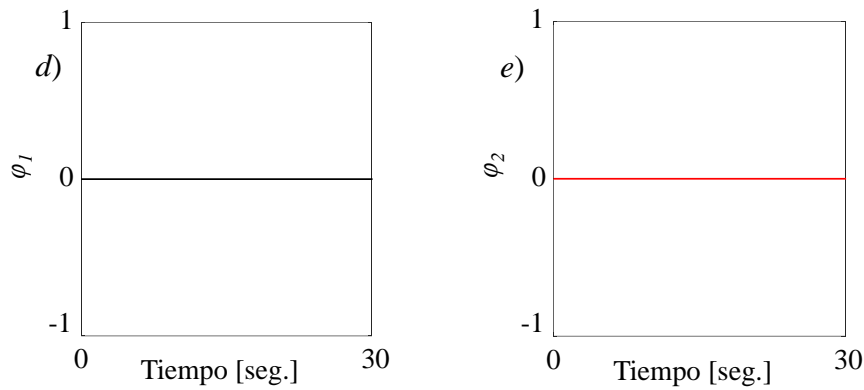


Fig. 4-31. Restricción a nivel de la posición: conexión y orientación, alas 3-4; a) x ; b) y ; c) z ; d) φ_1 ; e) φ_2 .

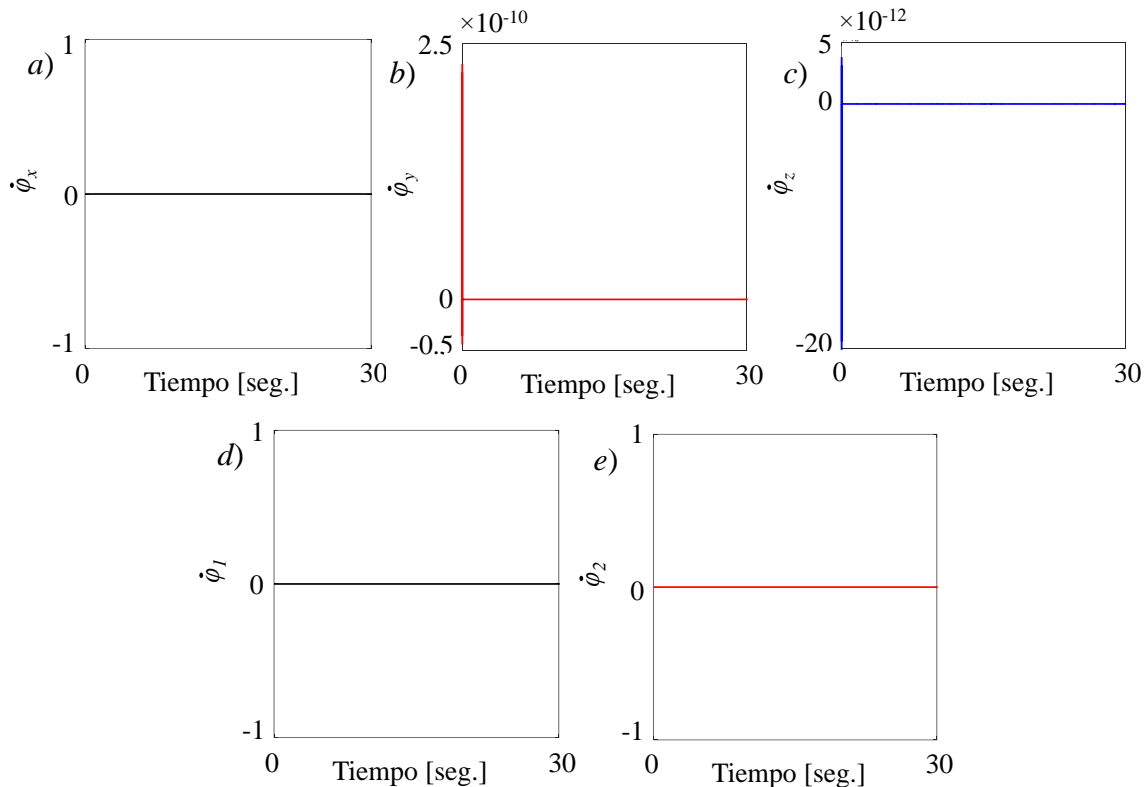


Fig. 4-32. Restricción a nivel de la velocidad: conexión y orientación, alas 3-4; a) \dot{x} ; b) \dot{y} ; c) \dot{z} ; d) $\dot{\varphi}_1$; e) $\dot{\varphi}_2$.

En las figuras 4-31 y 4-32 se muestran las desviaciones numéricas que ocurren en las ecuaciones de restricción de conexión a nivel de la posición y a nivel velocidad para la vinculación entre el ala 3 y el ala 4. Tales desviaciones corresponden al esquema de integración Hamming de 4^{to} orden, en conjunto con el procedimiento de estabilización *S-Both*². Se concluye que las desviaciones numéricas a nivel de la posición y la velocidad son bien controladas; lo mismo sucede para el resto de las restricciones.

El análisis llevado a cabo anteriormente nos permite concluir que: i) el código computacional desarrollado (que implementa el modelo dinámico descrito

anteriormente) es capaz de simular adecuadamente configuraciones caracterizadas por grandes deflexiones de los tramos de ala sin que se produzca divergencia de la respuesta; y *ii*) todos los integradores son eficientes para simular la respuesta del sistema. Sin embargo, existe una disipación notoria de energía para los integradores DC y Newmark con amortiguamiento, siendo este último el que mayor energía disipa. Debido al excelente control en las desviaciones numéricas y una disipación de energía mínima, los esquemas de integración Alpha generalizado (con los mismos coeficientes de amortiguación expuestos en esta sección) y Hamming de 4^{to} orden (con proyección de coordenadas *S-Both*² como método de estabilización numérica), se utilizarán como integradores por defecto (a menos que se indique lo contrario) para el resto de los estudios que se presentan a continuación.

4.3.2 Dinámica X-HALE-UAV: amortiguadores activos

En esta subsección se estudia el concepto de X-HALE-UAV detallado al comienzo de la Sección 4.3 para dos configuraciones diferentes, una simétrica (ver Figura 4-28) y otra antisimétrica (ver Figura 4-33), considerando activos, todos los resortes y amortiguadores lineales que vinculan el fuselaje al túnel de viento. Las alas tienen un ángulo relativo entre sí de 5°.

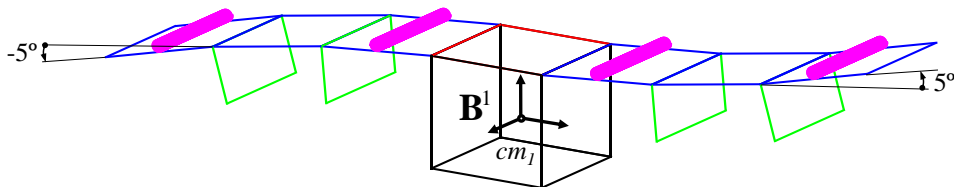


Fig. 4-33. Configuración inicial antisimétrica.

La Figura 4-34 muestra la posición del centro de masa del fuselaje para las dos configuraciones estudiadas, observándose que, en la configuración simétrica, las componentes del vector posición, $x(t)$ e $y(t)$, son nulas; mientras que para la configuración antisimétrica la única componente nula es $x(t)$. Esto se debe a un torque resultante no nulo en la dirección del vector unitario \hat{n}_1 (eje x) como consecuencia de una configuración no simétrica, lo cual produce una oscilación del centro de masa del fuselaje a lo largo de la dirección \hat{n}_2 (eje y) (ver Figura 4-35).

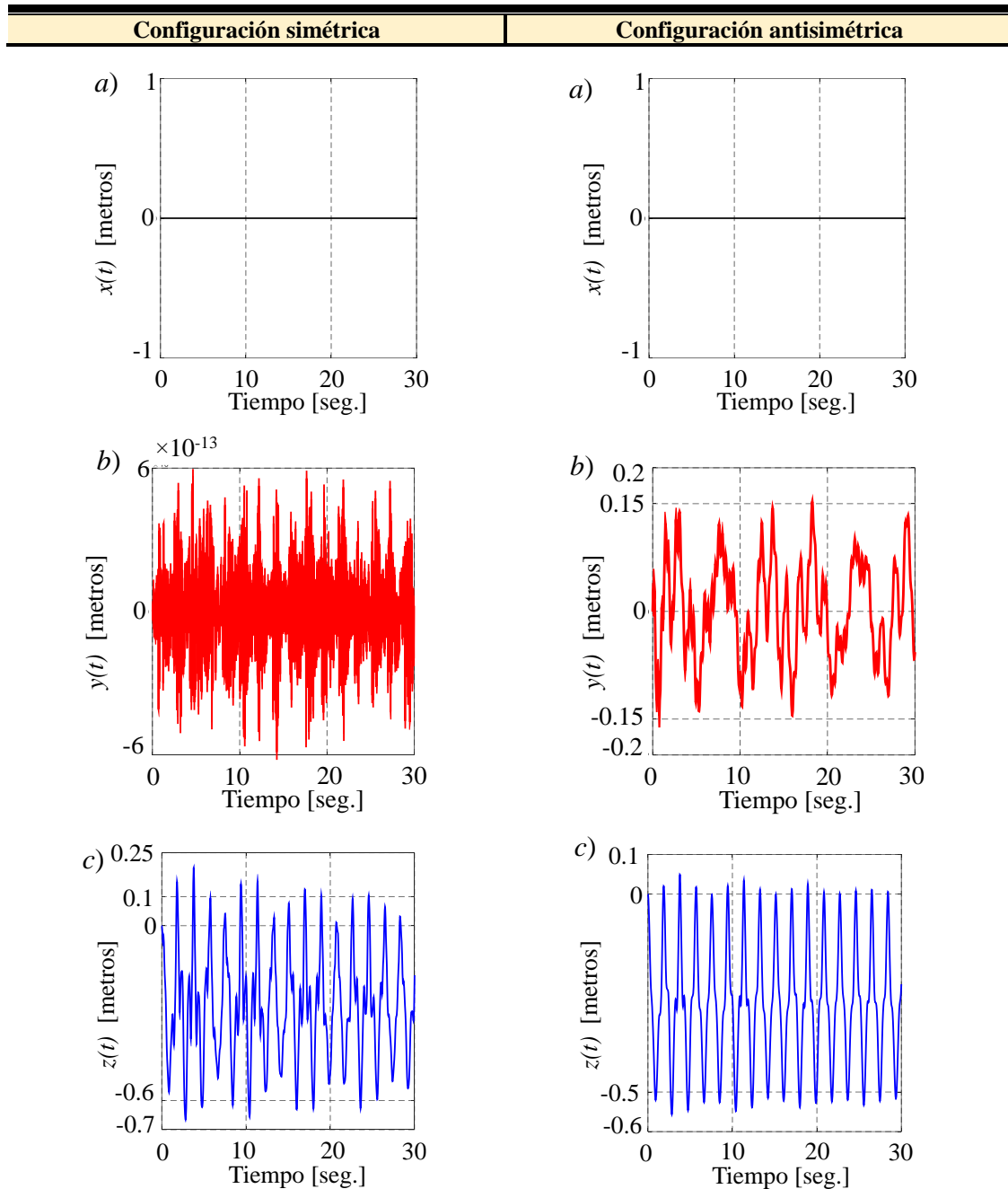


Fig. 4-34. Evolución temporal del centro de masa del fuselaje. a) $x(t)$; b) $y(t)$; c) $z(t)$.

Al igual que en la subsección 4.3.1, el movimiento del fuselaje en $z(t)$, independientemente de la configuración analizada, exhibe dos componentes. Una de ellas asociada a la liberación del sistema desde una posición diferente a la posición de equilibrio estático, y la otra componente es introducida por la oscilación de los tramos alares externos, más notoria en el modo simétrico. Además, no existen solicitaciones fuera del plano “yz” por ende, el movimiento se da solo en “yz” (ver Figura 4-34 y 4-35).

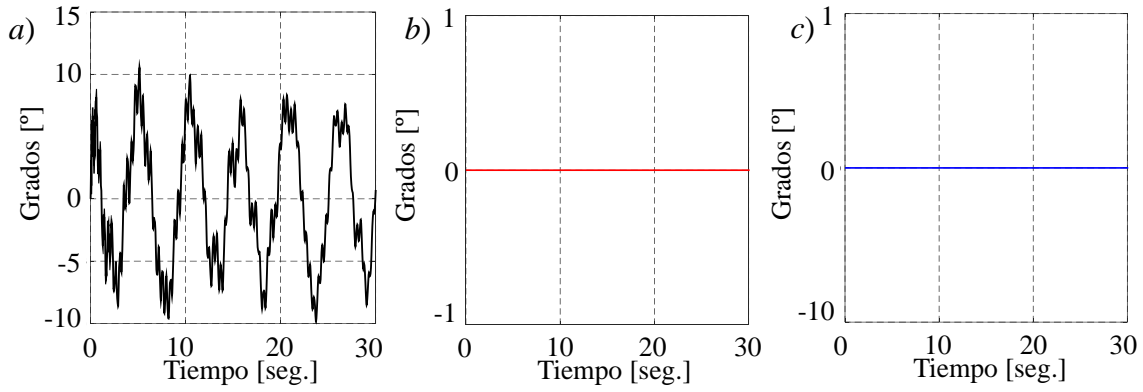
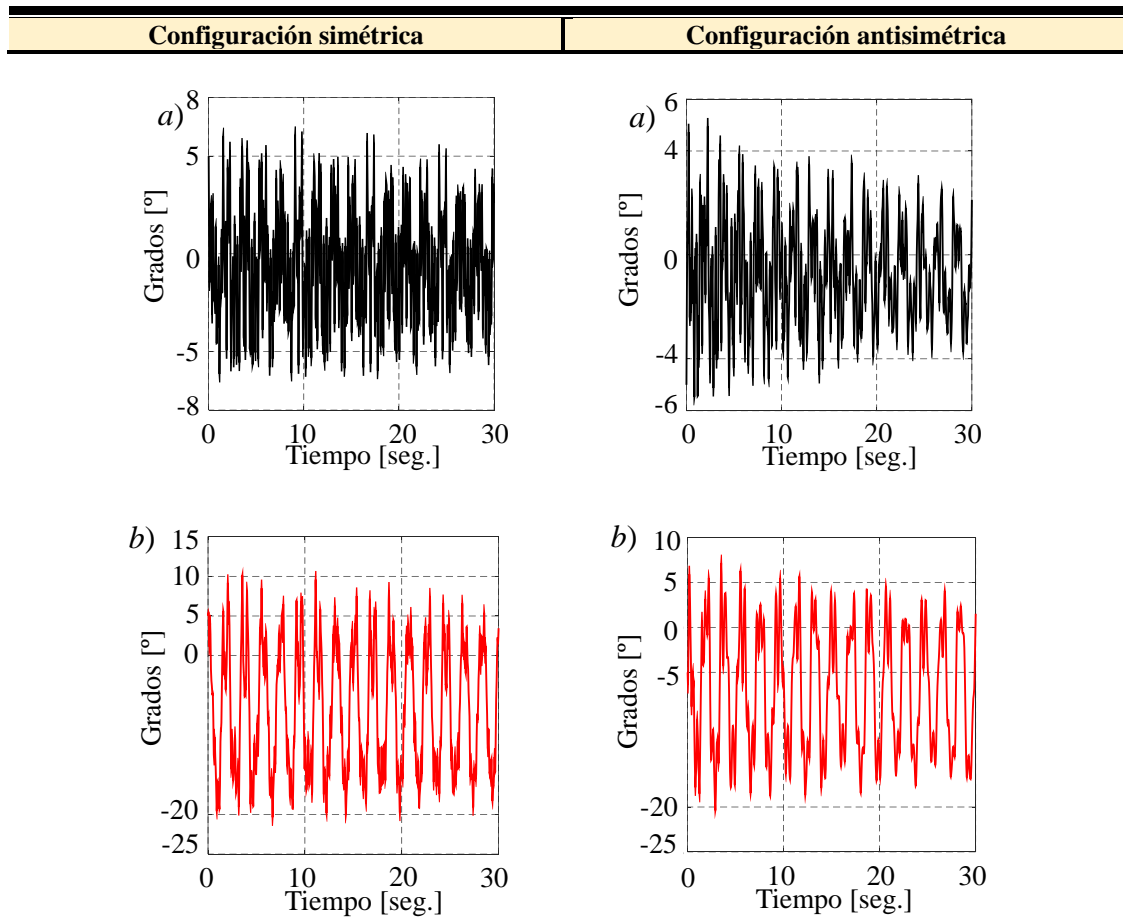


Fig. 4-35. Rotaciones del fuselaje en la configuración antisimétrica; *a)* Alrededor de \hat{n}_1 ; *b)* Alrededor de \hat{n}_2 ; *c)* Alrededor de \hat{n}_3 .

En la Figura 4-36 se presentan los valores para las coordenadas angulares que describen la orientación de un ala relativa a la contigua (para todo el conjunto de alas), observándose: *i)* una mayor frecuencia de oscilación en el modo simétrico para la conexión alar 1-2 y 6-7, y *ii)* una disminución en la amplitud de oscilación (las conexiones alares 1-2 y 6-7 evidencian un mayor decremento) a medida que transcurre el tiempo de simulación, la cual es más notoria para el modo antisimétrico.



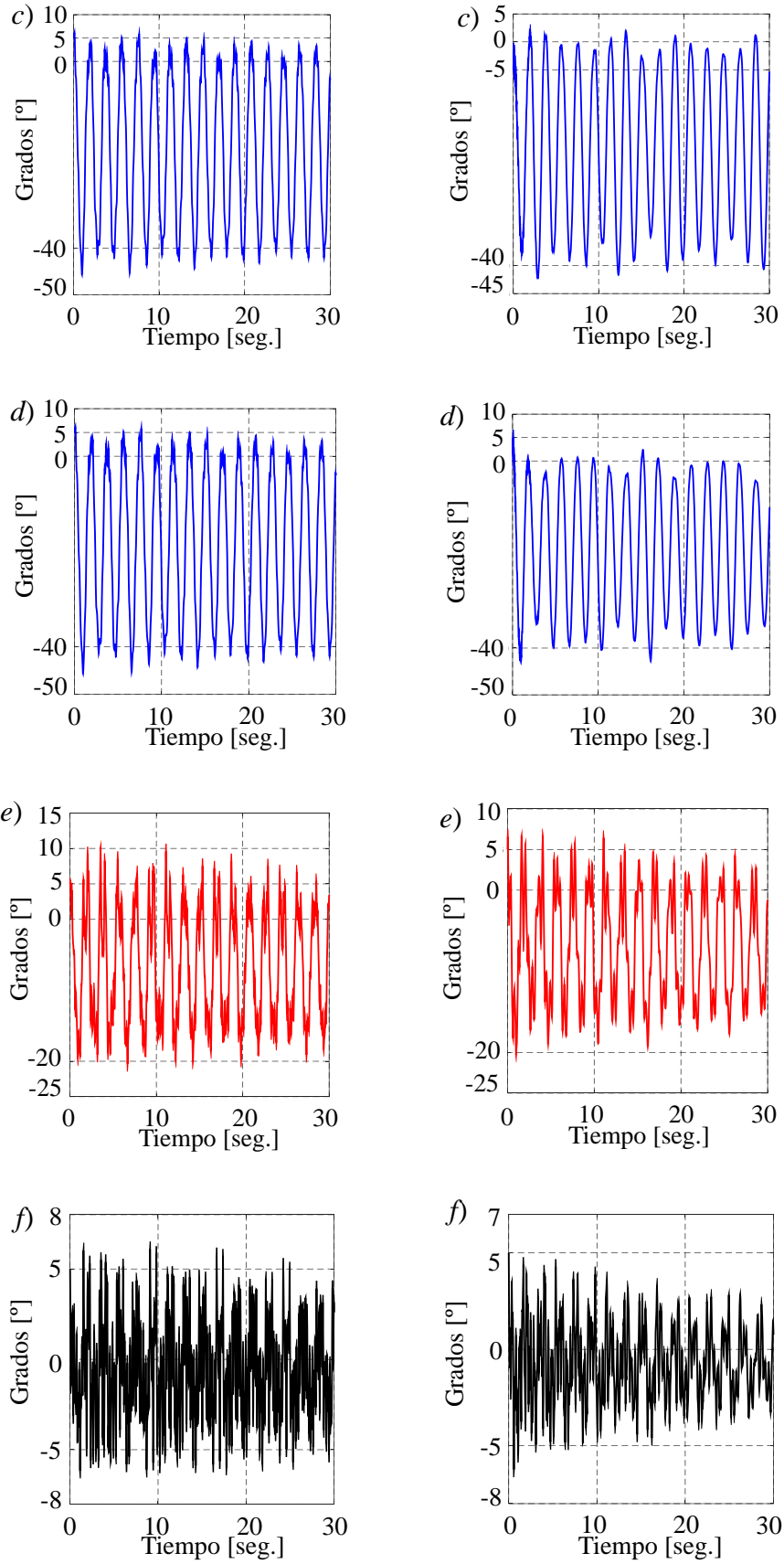


Fig. 4-36. Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (configuración simétrica y antimétrica); a) conexión 1-2; b) conexión 2-3; c) conexión 3-4; d) conexión 4-5; e) conexión 6-5; f) conexión 7-6.

Las desviaciones numéricas, en las ecuaciones de restricción, que se producen utilizando el integrador Hamming son bien controladas para todas las restricciones a nivel de la posición y velocidad, tanto en el modo simétrico como el antisimétrico. En la Figura 4-37 y 4-38 se presentan las desviaciones numéricas (posición y velocidad) en la conexión alar 4-5 para la configuración antisimétrica.

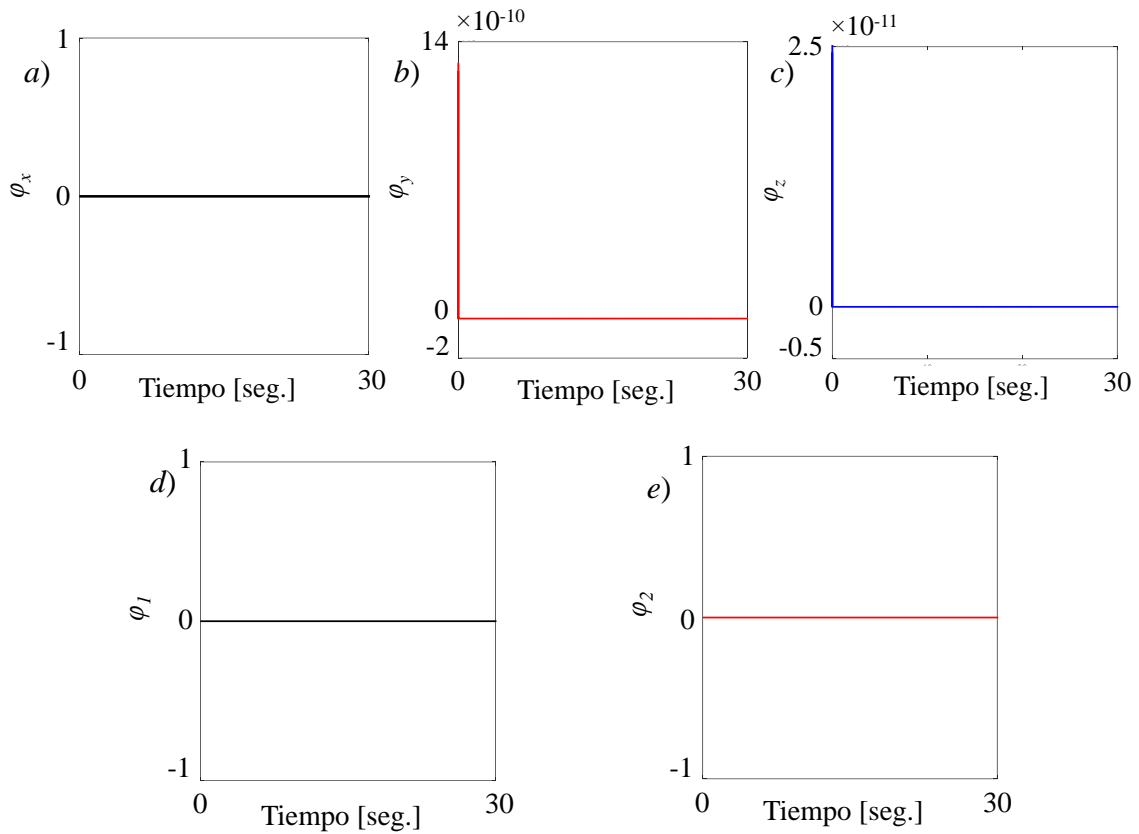
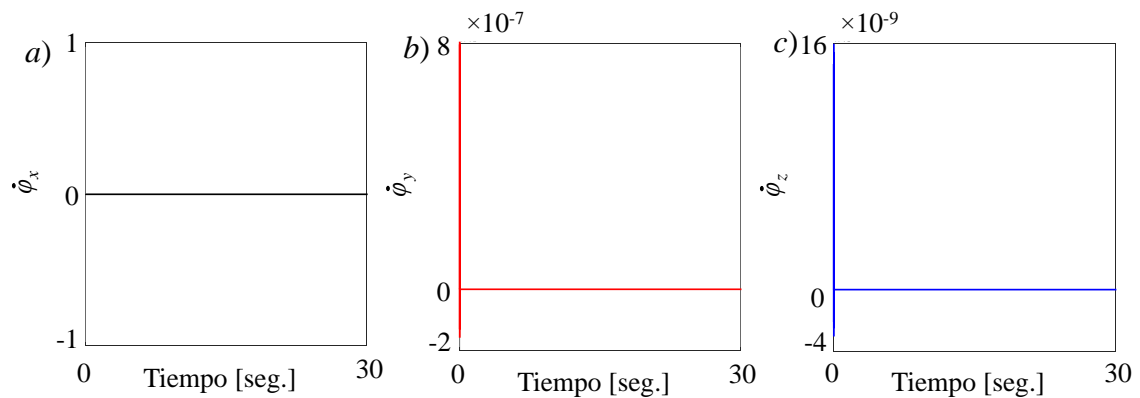


Fig. 4-37. Desviaciones numéricas a nivel de la posición (configuración antisimétrica, conexión alar 4-5); a) x ; b) y ; c) z ; d) φ_1 ; e) φ_2 .



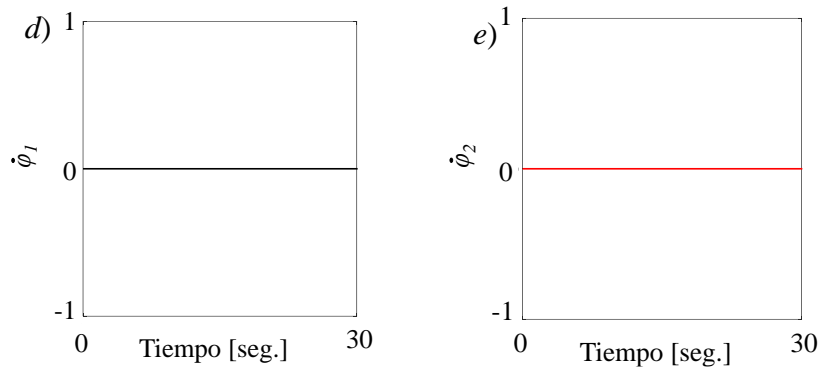


Fig. 4-38. Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad (configuración antisimétrica, conexión alar 4-5); a) \dot{x} ; b) \dot{y} ; c) \dot{z} ; d) $\dot{\phi}_1$; e) $\dot{\phi}_2$.

4.3.3 Efecto de ráfaga ascendente

En esta subsección se considera el X-HALE-UAV en una configuración simétrica y se estudia como una ráfaga ascendente afecta el comportamiento dinámico de la aeronave.

Como se detalló en el Capítulo II, el modelo de ráfaga es implementado en este trabajo por medio de un desplazamiento de apoyo definido por la siguiente función:

$$u_z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{start}, \\ U(\sin(2\pi ft))^x, & t_{start} < t \leq t_{end}, \\ 0, & t > t_{end}. \end{cases} \quad (4.5)$$

donde $U = 2$ m, $f = 0.5$ Hz, y $x = 100$ es el exponente de la función.

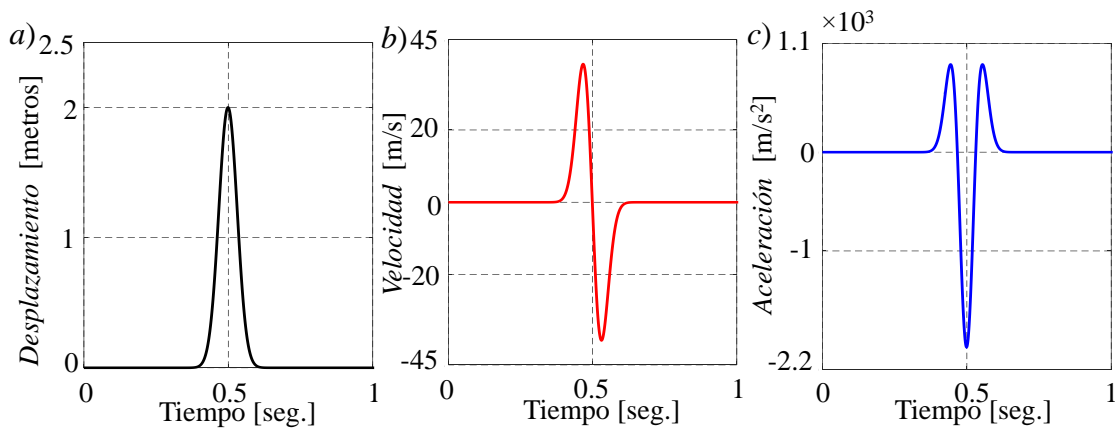


Fig. 4-39. Perfiles de ráfaga. a) Desplazamiento $u_z(t)$; b) velocidad $\dot{u}_z(t)$; c) aceleración $\ddot{u}_z(t)$.

En la Figura 4-39 se muestra el perfil de desplazamiento, velocidad y aceleración obtenido con los datos utilizados. Se debe mencionar que la aeronave es excitada con dos ráfagas similares que actúan una a continuación de la otra y separadas temporalmente por

1.0 seg. La primera perturbación comienza en $t_{start} = 5$ seg y finaliza en $t_{end} = 6$ seg, mientras que la segunda perturbación comienza en $t_{start} = 7$ seg y finaliza en $t_{end} = 8$ seg.

En la Figura 4-40 se presenta la evolución temporal del centro de masa del fuselaje de la aeronave. Se debe destacar que la coordenada en la dirección vertical de la Figura 4-40c es relativa al movimiento de apoyo, mientras que en la Figura 4-40d tal coordenada corresponde al valor absoluto de desplazamiento. Como consecuencia del movimiento de apoyo, el fuselaje es claramente excitado en la dirección vertical. Las alas, motores y trenes de aterrizaje experimentan una excitación similar, debido al acoplamiento que existe, a través de las ecuaciones de restricción, entre el fuselaje y el resto de la estructura. Las componentes en las direcciones $x(t)$ y $y(t)$ son prácticamente nulas, tanto en valor absoluto como relativo, debido a la simetría del caso de estudio (ver Figura 4-40 a y b).

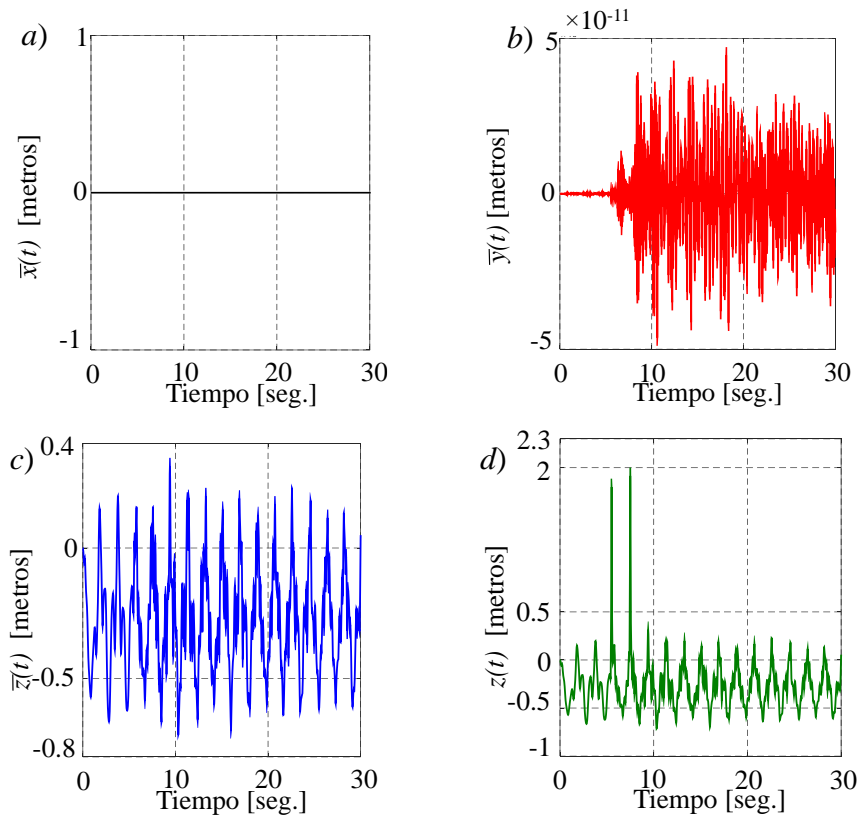


Fig. 4-40. Desplazamiento relativo del centro de masa del fuselaje; a) $\bar{x}(t)$; b) $\bar{y}(t)$; c) $\bar{z}(t)$; d) desplazamiento absoluto $z(t)$.

En la Figura 4-41 se presentan los valores para las coordenadas angulares que describen la orientación de un ala relativa a la contigua (solo para el conjunto de conexiones alares ubicadas a la derecha, 1-2, 2-3, 3-4), observándose un aumento de la amplitud y frecuencia en las oscilaciones para las vinculaciones 1-2 y 2-3. En la conexión

3-4 es más notorio el aumento de amplitud que el aumento de frecuencia, cuando es comparada con la respuesta del sistema sin perturbación externa (denominada respuesta de referencia, ver Figura 4-36 modo simétrico). La respuesta es idéntica para los tramos alares localizados a la izquierda (articulaciones 4-5, 5-6 y 6-7).

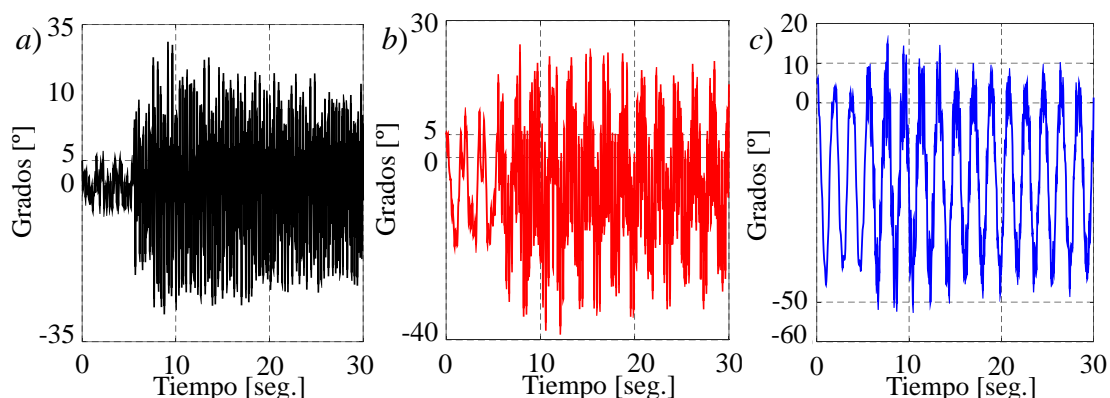


Fig. 4-41. Coordenadas angulares relativas en las articulaciones alares; a) conexión 1-2; b) conexión 2-3 y c) conexión 3-4.

4.3.4 Daño en conexiones alares

En esta subsección se presentan resultados numéricos concernientes al comportamiento dinámico del UAV, en configuración inicial simétrica, cuando las alas experimentan daño estructural (ver subsección 2.7). Se debe recordar que el daño estructural en las alas es introducido aquí por medio de un modelo simple de disminución de rigidez en la conexión entre alas.

Con el objetivo de cuantificar la influencia de la disminución de rigidez en las conexiones alares sobre la respuesta de la aeronave, se presentan dos casos de estudios: *i*) daño estructural en la conexión alar 1-2, y *ii*) daño estructural en la conexión alar 2-3 (ver Figura 4-28). Ambos casos de estudios están caracterizados por un decremento en la rigidez torsional del 50% (es decir, de 200 N/rad a 100 N/rad).

El cambio de rigidez en una conexión alar produce una rotación sobre el fuselaje alrededor del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}_1$ como así también un movimiento lateral contenido en el plano “yz” (ver Figura 4-42).

Respuesta de Referencia	Caso de Estudio I (Daño Conexión alar 1-2)	Caso de Estudio II (Daño Conexión alar 2-3)
-------------------------	---	--

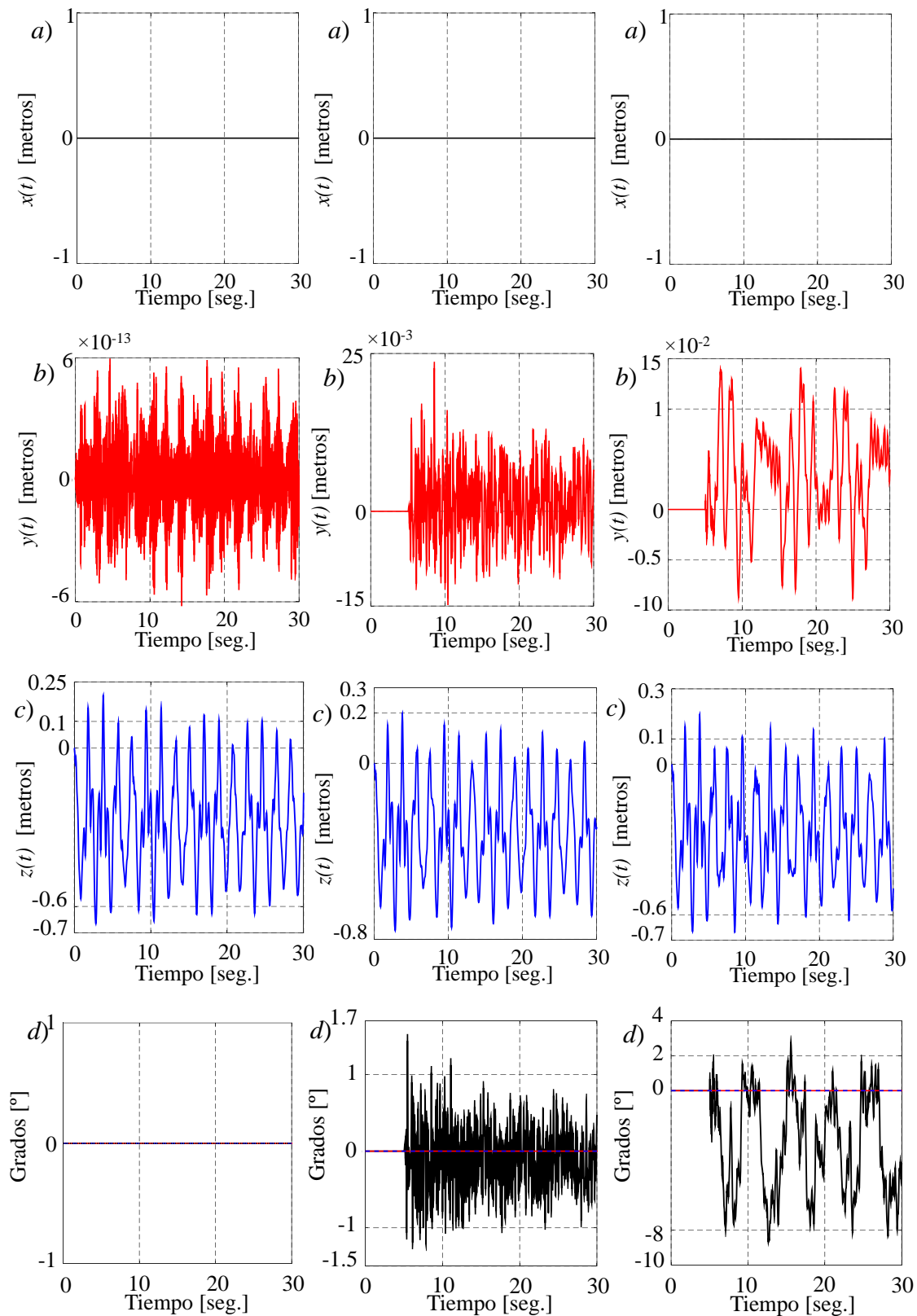
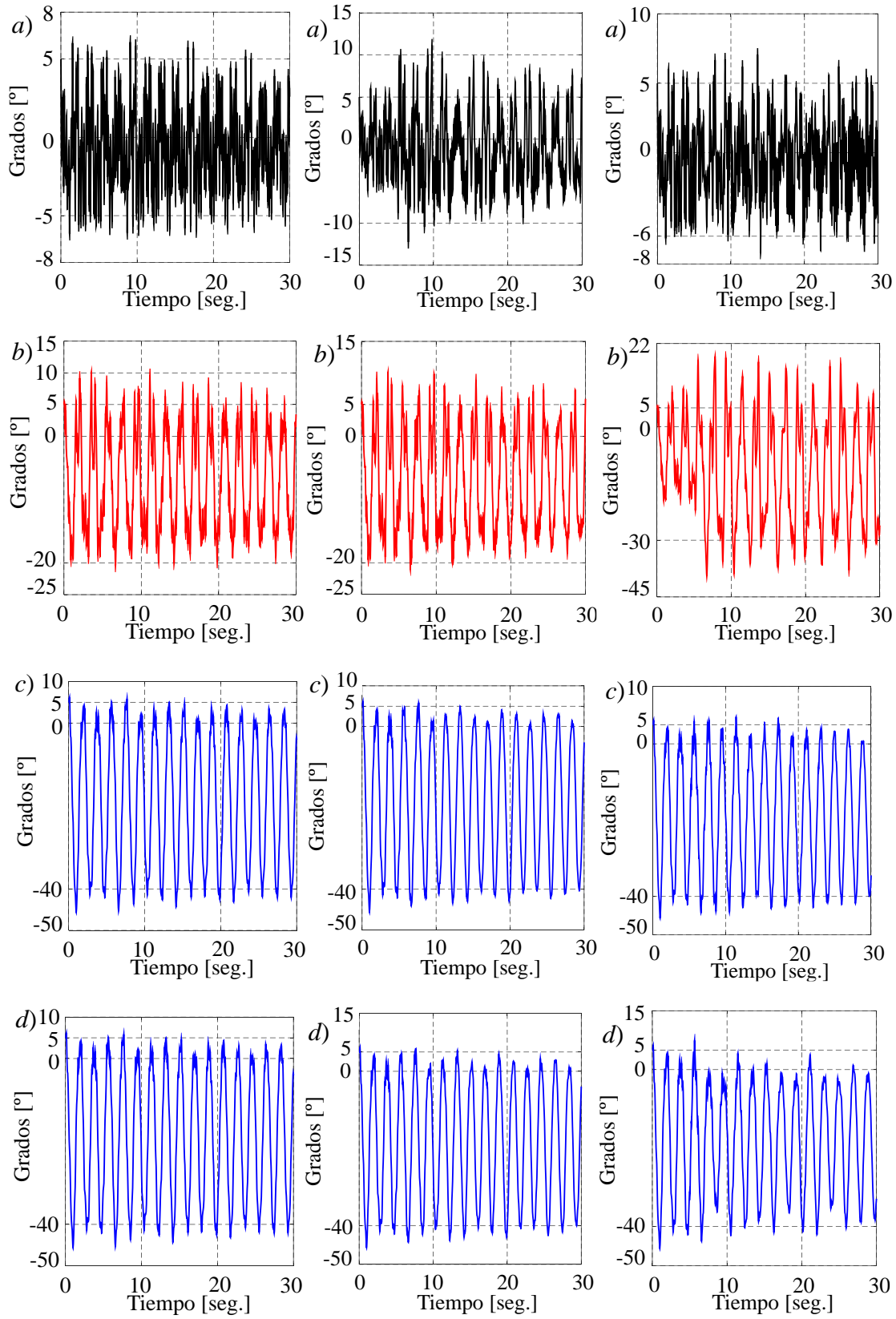


Fig. 4-42. Daño alar; *a*) $x(t)$; *b*) $y(t)$; *c*) $z(t)$; *d*) Rotación del fuselaje alrededor del vector $\hat{\mathbf{n}}_1$ (negro); $\hat{\mathbf{n}}_2$ (rojo); $\hat{\mathbf{n}}_3$ (azul).

La evolución temporal de las coordenadas angulares relativas en las articulaciones alares se muestra en la Figura 4-43.

Respuesta de Referencia	Caso de Estudio I (Daño Conexión alar 1-2)	Caso de Estudio II (Daño Conexión alar 2-3)
-------------------------	--	---



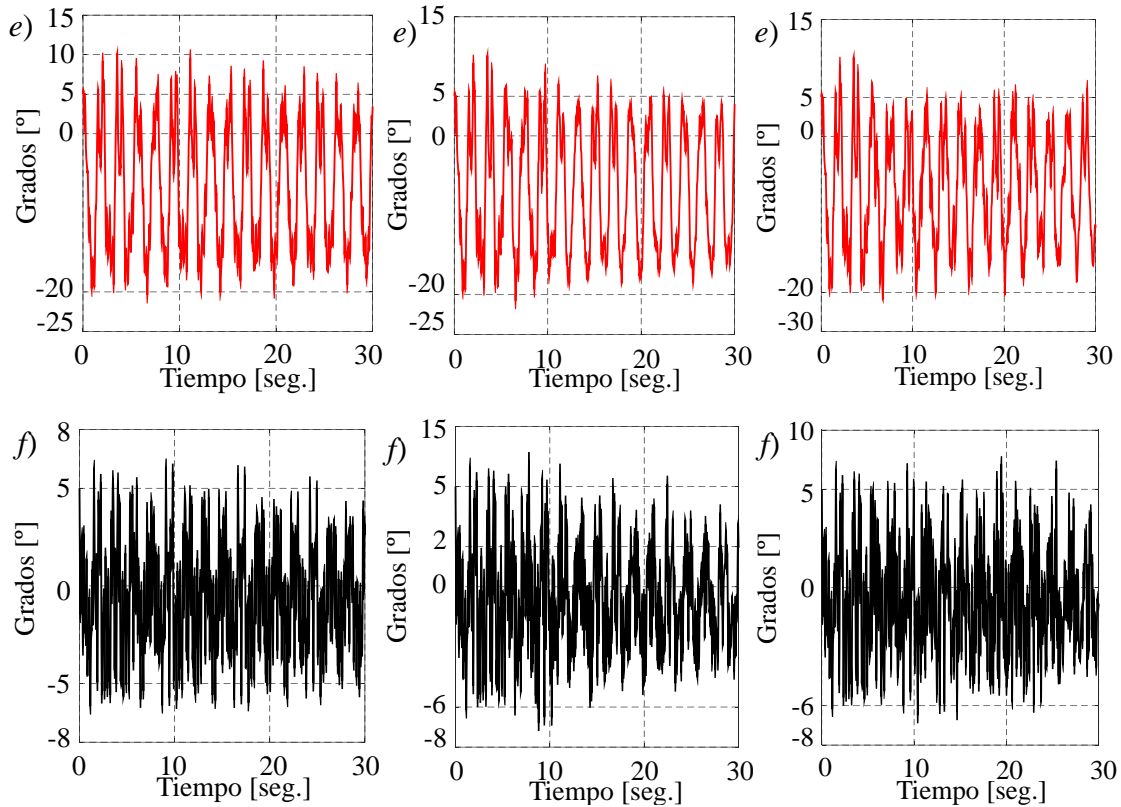


Fig. 4-43. Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas; a) conexión 1-2; b) conexión 2-3; c) conexión 3-4; d) conexión 4-5; e) conexión 5-6; f) conexión 7-6.

Con respecto al caso de estudio I, se debe notar que la disminución de rigidez ocurre en la conexión alar que se localiza en la articulación más alejada del fuselaje de la aeronave. Esta perturbación se manifiesta por medio de la aparición de una oscilación lineal, con pequeña amplitud, del fuselaje a lo largo de la dirección lateral \hat{n}_2 (ver Figura 4-42b), en conjunto con una rotación de amplitud decreciente alrededor del eje \hat{n}_1 (ver Figura 4-42d). La Figura 4-43 muestra la evolución temporal de las coordenadas angulares relativas en las articulaciones alares. Se puede observar, para éste caso de estudio, que las conexiones internas no experimentan grandes cambios respecto a la respuesta de referencia, mientras que la conexión 1-2 donde se provoca el daño muestra una amplitud de oscilación significativamente más grande, pero decreciente en el tiempo (ver Figura 4-43a). La respuesta temporal de los tramos alares localizados a la izquierda no presenta cambios significativos, en términos de amplitud y frecuencia, cuando se la compara con la respuesta de referencia.

En el caso II, la disminución de rigidez ocurre en conexiones alares que se encuentran más próximas al fuselaje, el efecto de oscilación lateral y rotación del fuselaje alrededor del eje \hat{n}_1 se magnifica considerablemente (ver Figura 4-42b). Adicionalmente,

las coordenadas angulares relativas en las alas internas, muestran cambios significativos en comparación con la respuesta de referencia (ver Figura 4-43), específicamente en la amplitud de oscilación, que aumenta notoriamente en la articulación dañada (conexión 2-3). En la articulación 1-2 no se presentan cambios significativos, en lo que respecta a la amplitud y frecuencia, mientras que en la conexión alar 3-4, la amplitud decrece con el tiempo, en forma más acentuada (ver Figura 4-43c). Los efectos descritos anteriormente son amplificados para la conexión homóloga internas 4-5 (ver Figura 4-43d), mientras que para la conexión 5-6, el efecto tiene un impacto menor (ver Figura 4-43e). Finalmente, la conexión externa (6-7) no presenta cambios significativos respecto a la respuesta de referencia (ver Figura 4-43f).

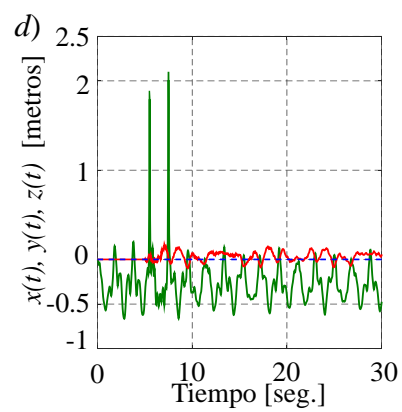
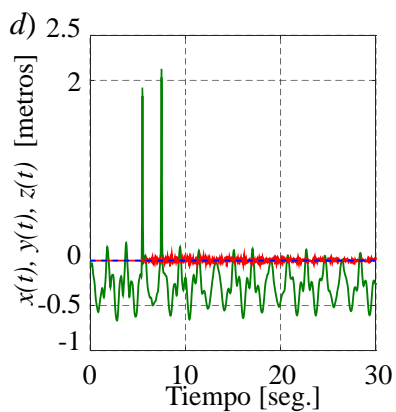
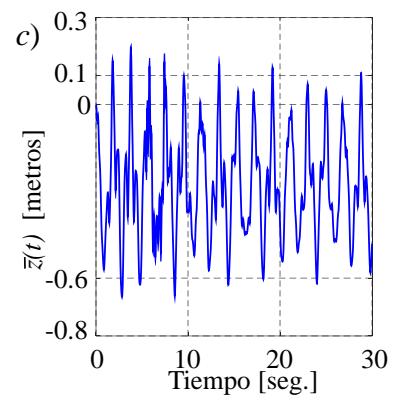
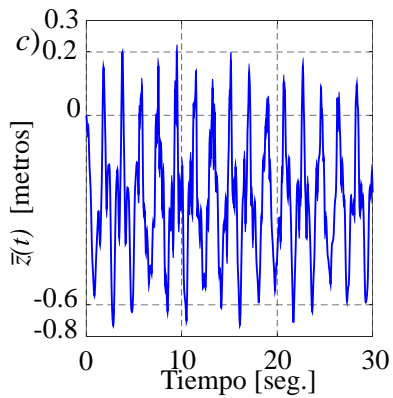
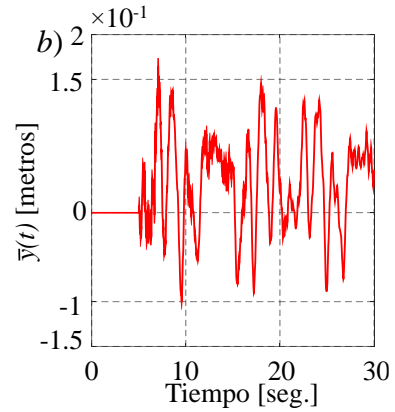
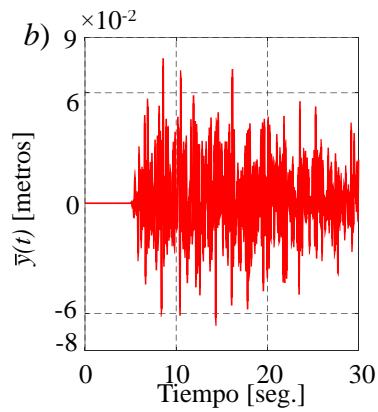
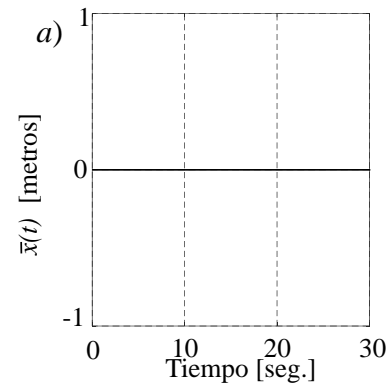
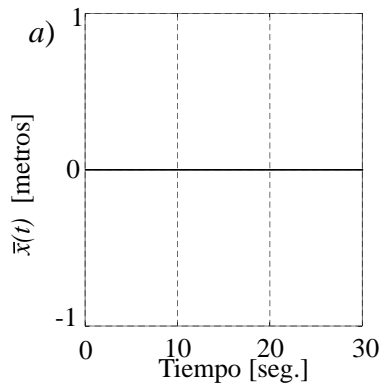
De los resultados presentados en esta subsección se puede concluir que la herramienta computacional desarrollada presenta una gran versatilidad y robustez permitiendo obtener adecuadamente la respuesta dinámica del sistema multicuerpo cuando se lo somete a este tipo de perturbación. También se debe destacar que: *i*) los dos integradores utilizados produjeron los mismos resultados; y *ii*) las desviaciones numéricas asociadas a la estrategia de reducción de índice fueron bien controladas.

4.3.5 Rafaga “+” daño estructural en conexión alar

En esta subsección se estudia la respuesta dinámica de la aeronave con configuración simétrica ante el efecto combinado de ráfagas (Subsección 4.3.3) y los dos casos de daño estructural presentados en la Subsección 4.3.4, es decir: *i*) Caso I: ráfaga “+” daño estructural en conexión alar 1-2; y *ii*) Caso II: ráfaga “+” daño estructural en conexión alar 2-3.

La Figura 4-44 se muestra el desplazamiento relativo y absoluto del centro de masa correspondiente al fuselaje junto con la rotación del fuselaje. Y se destaca que, el movimiento absoluto y relativo en los ejes x e y (ver Figura 4-44 *a* y *b*) coinciden en todo instante, esto no sucede en dirección z donde el desplazamiento absoluto y relativo una vez implementado el efecto de ráfaga ascendente, difieren en forma significativa (ver Figura 4-44 *c* y *d*). Esto se debe a que los casos de estudio sólo poseen un efecto de ráfaga ascendente, es decir en dirección z . Finalmente el daño en la conexión alar produce una oscilación a lo largo del eje y con una rotación en el eje x , de mayor amplitud en el caso de estudio II que en el caso de estudio I, pero de menor frecuencia (ver Figura 4-44 *b* y *e*).

Caso de Estudio I (Ráfaga + Daño Conexión alar 1-2)	Caso de Estudio II (Ráfaga + Daño Conexión alar 2-3)
--	---



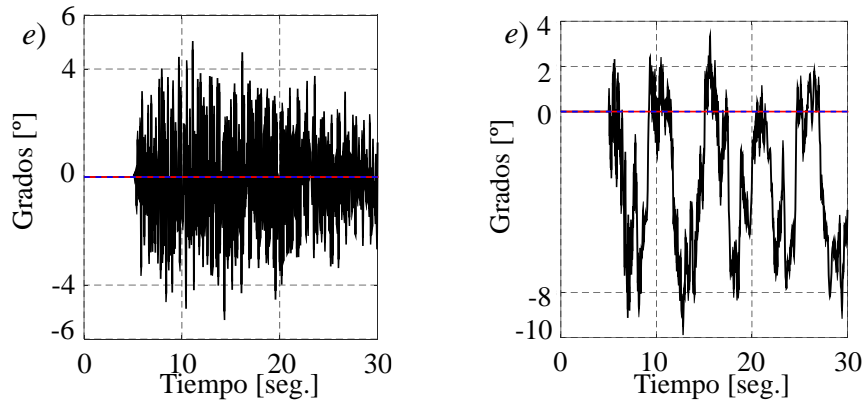
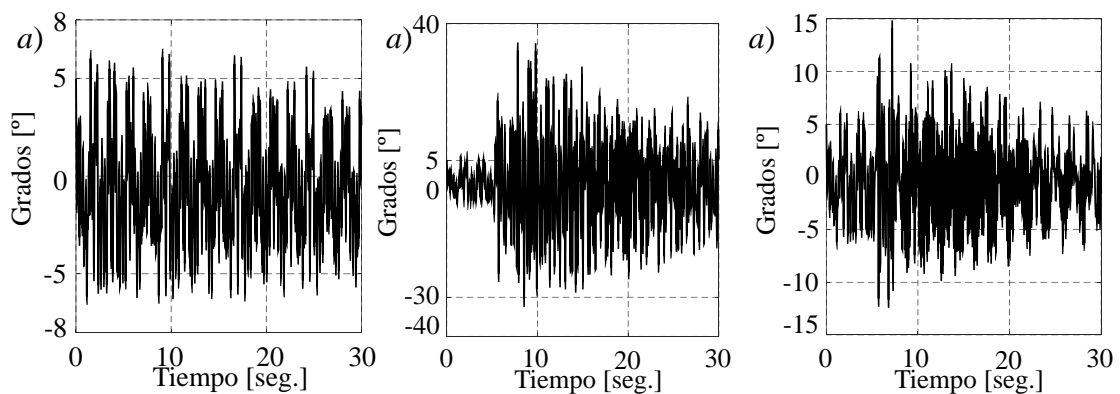
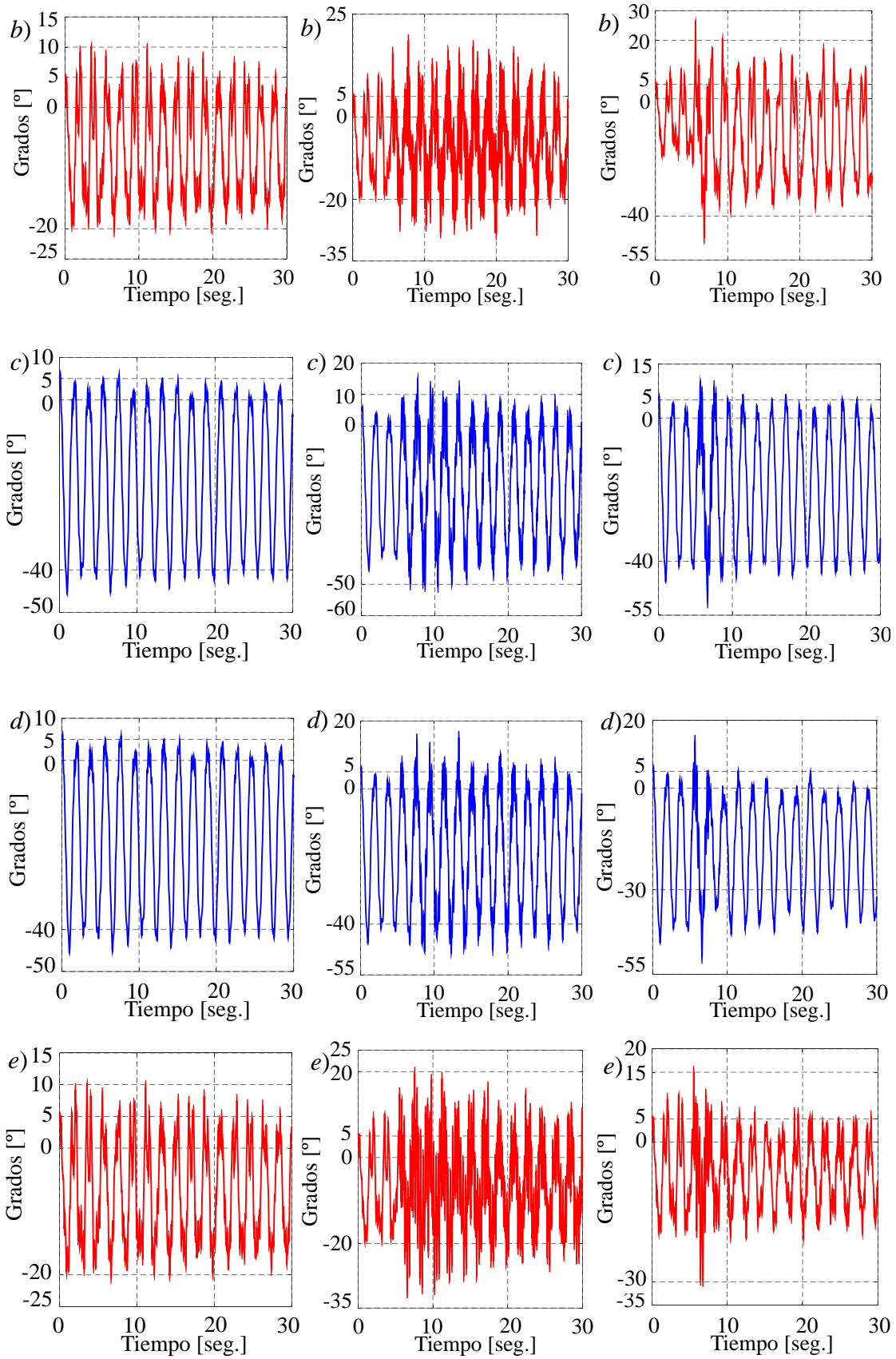


Fig. 4-44. Ráfaga + daño estructural; Coordenadas relativas del centro de masa, *a)* $\bar{x}(t)$; *b)* $\bar{y}(t)$; *c)* $\bar{z}(t)$. *d)* Coordenadas absolutas *x* (azul); *y* (rojo); *z* (verde). *e)* Rotación del fuselaje, \hat{n}_1 (negro); \hat{n}_2 (rojo); \hat{n}_3 (azul).

Las deflexiones alares muestran un incremento significativo en la amplitud y frecuencia de oscilación comparada con la respuesta de referencia. En particular, las conexiones alares externas 1-2 y 6-7 como lo muestra la Figura 4-45 (*a* y *f*), mientras que en las conexiones alares 2-3 y 5-6 el incremento es más notorio en lo que respecta a la amplitud de oscilación (ver Figura 4-45 *b* y *e*). Por último, las conexiones alares 3-4 y 4-5 manifiestan un aumento de amplitud durante el periodo de excitación externa, luego se estabilizan (ver Figura 4-45 *c* y *d*).

Respuesta de Referencia	Caso de Estudio I (Ráfaga + Daño Conexión alar 1-2)	Caso de Estudio II (Ráfaga + Daño Conexión alar 2-3)
-------------------------	---	--





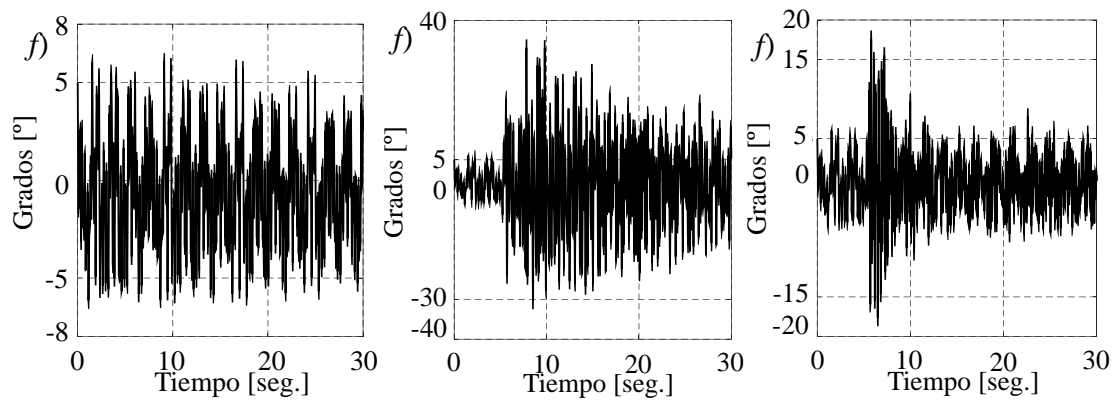


Fig. 4-45. Ráfaga “+” daño estructural, coordenadas angulares relativas en las conexiones alares: a) conexión 1-2; b) conexión 2-3; c) conexión 3-4; d) conexión 4-5; e) conexión 5-6; f) conexión 7-6.

Las oscilaciones laterales del fuselaje como las rotaciones del mismo, originadas como consecuencia de la imposición de daño estructural en una sola conexión alar (hecho que rompe con la simetría del problema) muestran una amplitud de oscilación decreciente con el tiempo, similar a la respuesta mostrada en la Subsección 4.3.4 (ver Figura 4-42d).

Adicionalmente, se debe mencionar que para los dos casos de estudio analizados en esta Subsección, las desviaciones numéricas de conexión y orientación en la conexión alar 4-5 (ver Figuras 4- 46 y 4-47), muestran que el esquema de integración seleccionado Hamming+S-both² se desempeña de manera eficiente .

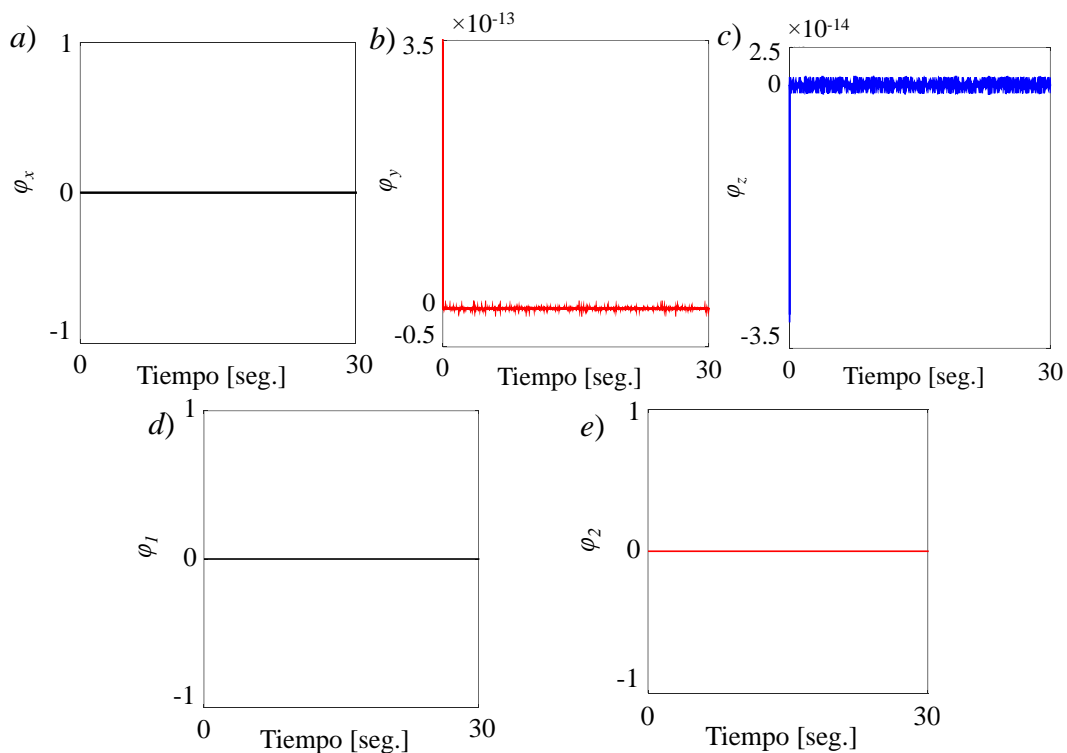


Fig. 4-46. Ráfaga “+” daño estructural, desviaciones numéricas a nivel de la posición para la conexión 4-5: a) x; b) y; c) z; d) ϕ_1 ; e) ϕ_2 .

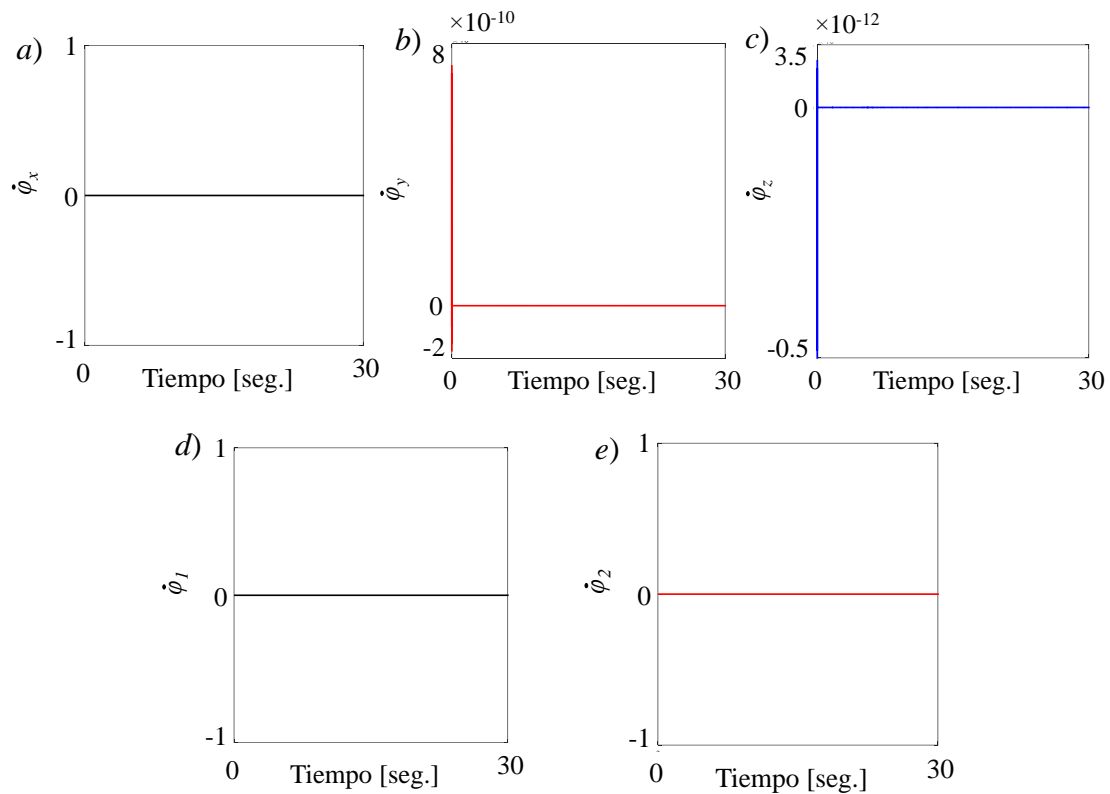


Fig. 4-47. Ráfaga “+” daño estructural, desviaciones numéricas a nivel de la velocidad para la conexión 4-5: a) $\dot{\phi}_x$; b) $\dot{\phi}_y$; c) $\dot{\phi}_z$; d) $\dot{\phi}_1$; e) $\dot{\phi}_2$.

El análisis llevado a cabo anteriormente nos permite concluir que el código computacional desarrollado (que implementa el modelo dinámico descrito anteriormente) es capaz de simular adecuadamente combinaciones de daño estructural en las articulaciones alares con perturbaciones externas tales como ráfagas de viento.

4.3.6 Dinámica de un modelo de X-HALE-UAV: 32 cuerpos

Con el objetivo de demostrar las capacidades de la formulación desarrollada y su implementación computacional, en esta subsección se presenta el estudio del comportamiento dinámico de un modelo conceptual de X-HALE-UAV compuesto por 32 cuerpos. El UAV está compuesto por 1 fuselaje, 15 alas, 8 trenes de aterrizaje, 8 motores y el fuselaje. Los parámetros del sistema son: masa de las alas $m_A = 0.5$ kg, masa de los trenes de aterrizajes $m_T = 0.25$ kg, masa de los motores $m_M = 0.1$ kg, $m_F = 0.1$ kg masa del fuselaje, constante de rigidez de los resortes lineales $k_s = 200$ N/m, longitud natural de los resortes $l_0 = 2.5$ m, constantes de rigidez de los resortes de torsión $k_T = 800$ N/rad, y constantes de los amortiguadores $c_s = 0.5$ Ns/m. Los demás parámetros son los mismos del punto 4.3.

El estudio llevado a cabo considera dos configuraciones diferentes: *i*) modo simétrico (ver Figura 4-48), donde el ángulo relativo entre alas es 5° ; y *ii*) modo antisimétrico (ver Figura 4-49) que posee el mismo ángulo relativo entre alas. Los resultados obtenidos por los dos integradores utilizados por defecto son iguales.

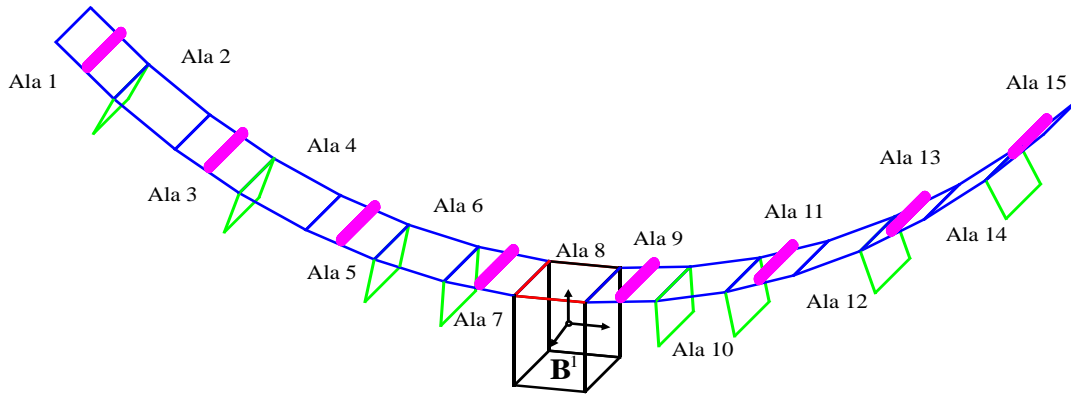


Fig. 4-48. Configuración inicial simétrica (32 cuerpos), X-HALE-UAV.

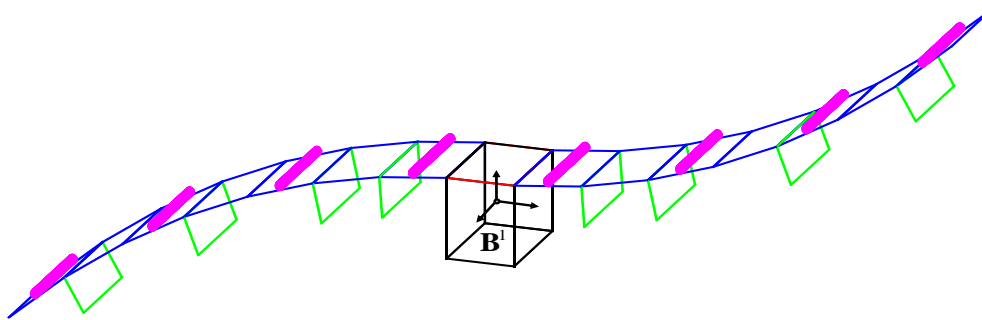


Fig. 4-49: Configuración inicial antisimétrica (32 cuerpos), X-HALE-UAV.

En la Figura 4-50 se presenta la evolución temporal del centro de masa del fuselaje para las dos configuraciones estudiadas. En la configuración simétrica el movimiento ocurre solamente en la dirección $z(t)$, mientras que en la configuración antisimétrica el movimiento se produce en las direcciones $y(t)$ y $z(t)$.

El movimiento en $z(t)$ (ver Figura 4-50c) posee, en ambas configuraciones, de manera similar a los casos de estudio anteriores: *i*) una componente originada por la liberación del sistema desde una posición diferente a la posición de equilibrio estático; y *ii*) una componente originada por el acoplamiento flexible con las alas. La primera disminuye su intensidad a medida que transcurre el tiempo, debido al amortiguamiento introducido por los amortiguadores lineales y es más notoria su amplitud en el modo simétrico (ver Figura 4-50b). Cabe destacar que la configuración antisimétrica genera un desplazamiento en dirección $y(t)$ (ver Figura 4-50b), acompañado de una oscilación rotacional en dirección \hat{n}_1 (ver Figura 4-50d).

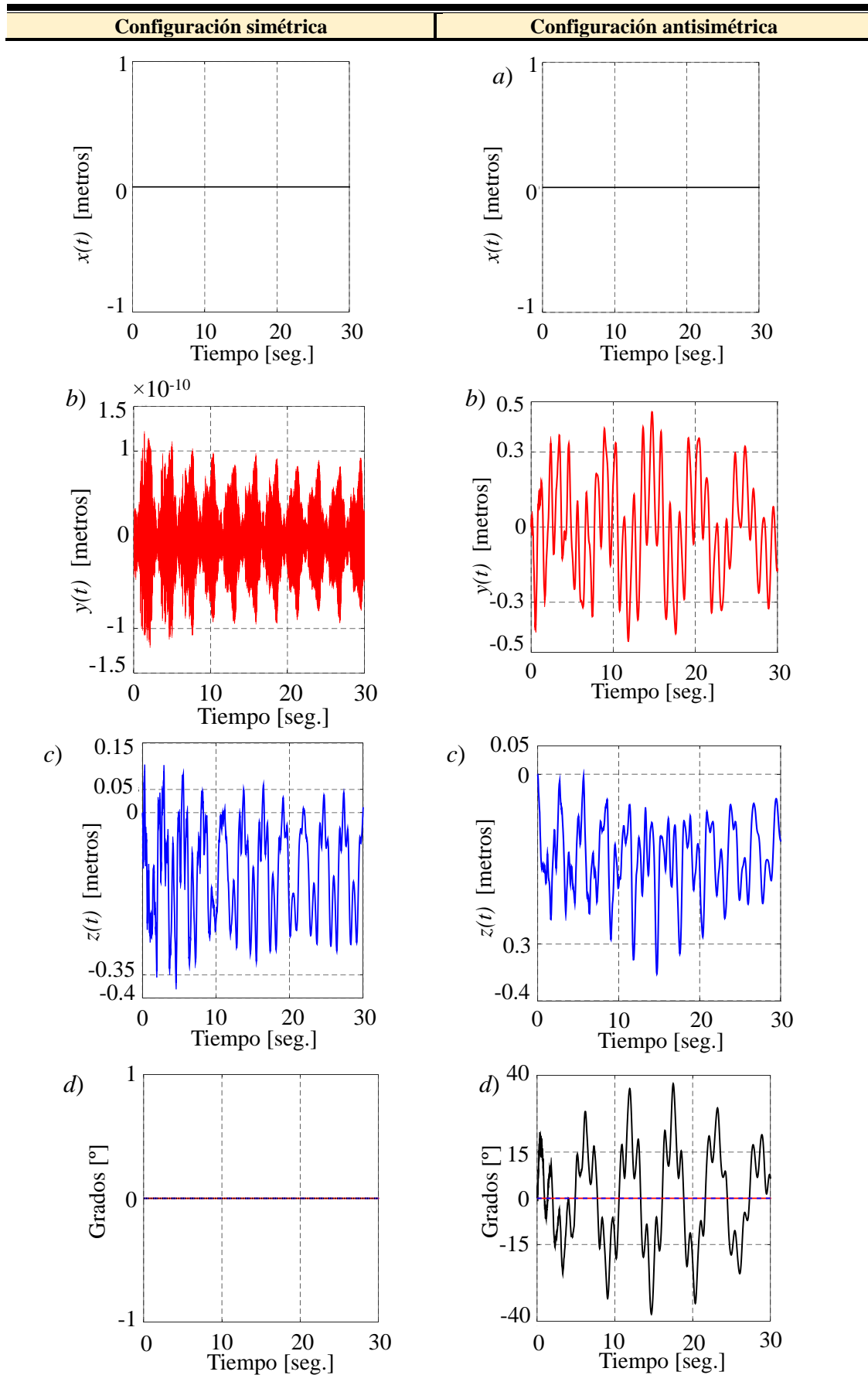
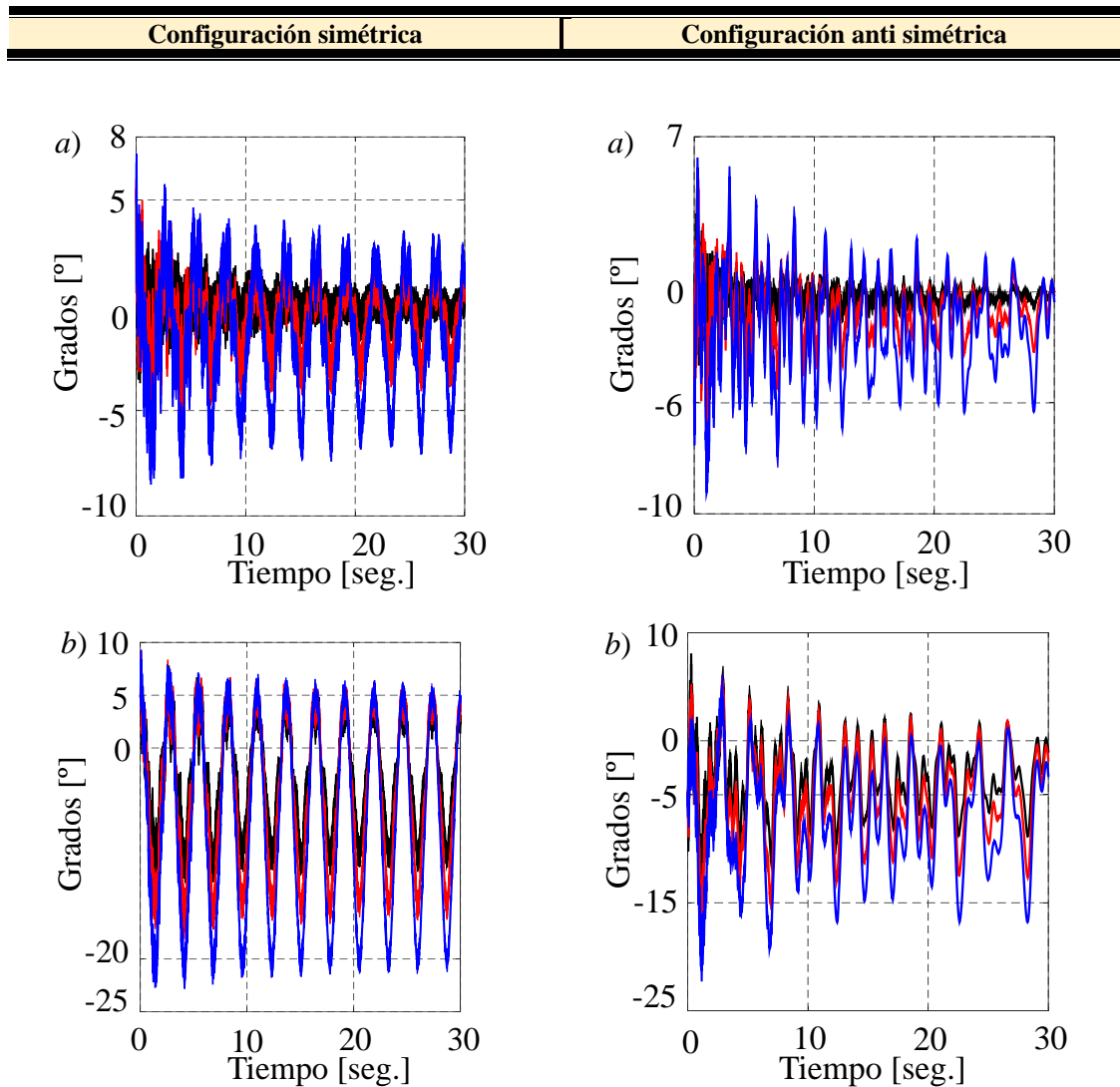
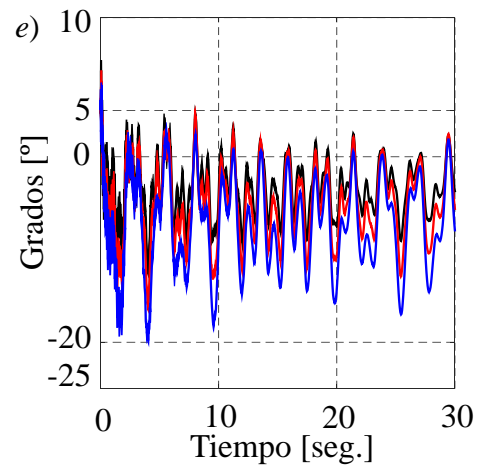
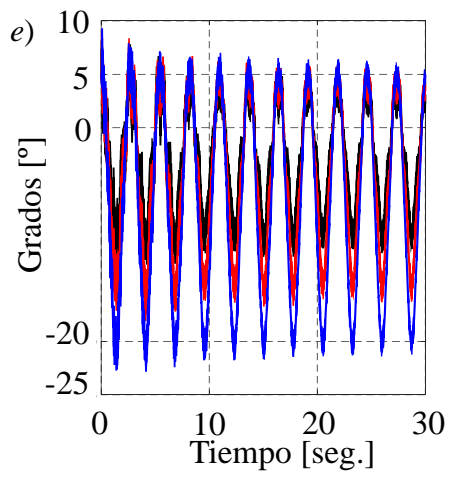
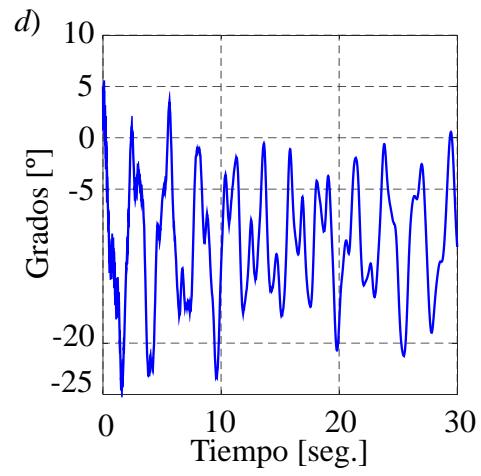
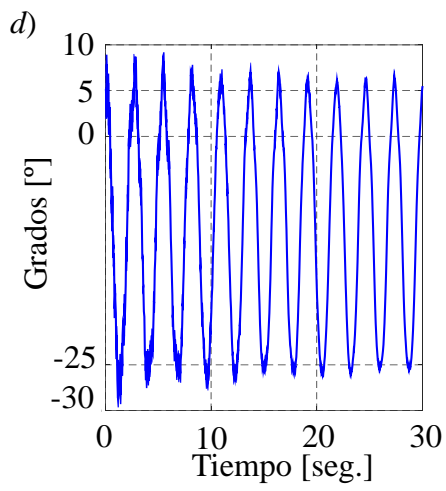
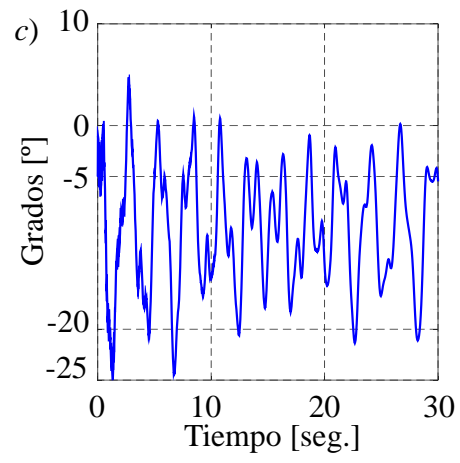
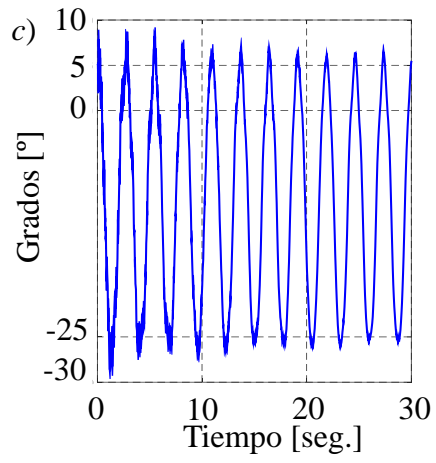


Fig. 4-50. X-HALE-UAV. Desplazamiento del fuselaje: a) $x(t)$; b) $y(t)$; c) $z(t)$; d) rotación del fuselaje, $\hat{\mathbf{n}}_1$ (negro); $\hat{\mathbf{n}}_2$ (rojo); $\hat{\mathbf{n}}_3$ (azul).

Las coordenadas angulares que describen la orientación de un ala relativa a la contigua (para todo el conjunto de alas), se exhiben en la Figura 4-51. De su observación se puede concluir que: *i*) la frecuencia de oscilación, en las alas externas, es mayor que en las alas internas (ver Figura 4-51a y 4-51f); *ii*) se evidencia una amplitud de oscilación estacionaria para las alas internas (ver Figura 4-51b, 4-51c, 4-51d y 4-51e), en el modo simétrico y decreciente para el modo antisimétrico. Se debe mencionar que la amplitud de oscilación máxima se da en el modo simétrico (ver Figura 4-51c y 4-51d).





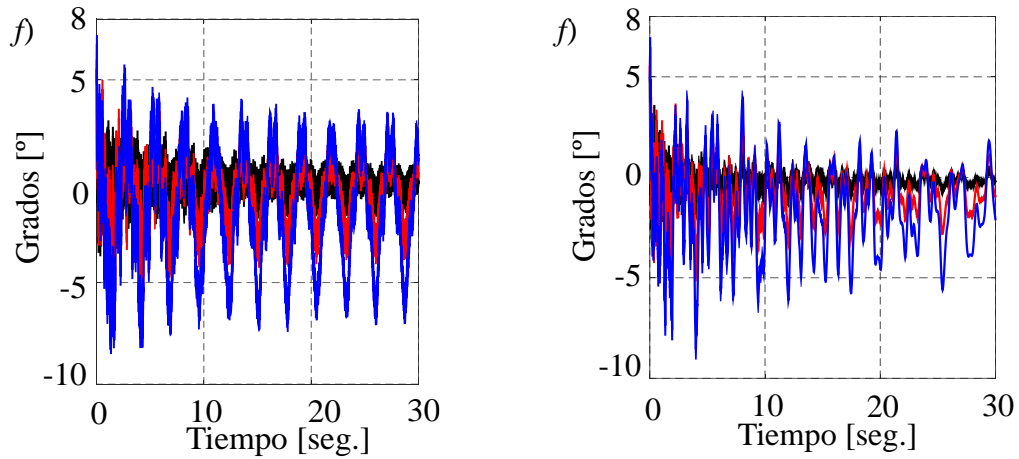


Fig. 4-51. Coordenadas angulares relativas X-HALE-UAV, configuración simétrica y antimétrica: *a)* conexión 1-2 (negro), 2-3 (rojo) y 3-4 (azul); *b)* conexión 4-5 (negro), 5-6 (rojo) y 6-7 (azul); *c)* conexión 7-8; *d)* conexión 8-9; *e)* conexión 9-10 (azul), 10-11(rojo) y 11-12 (negro); *f)* 12-13 (azul), 13-14 (rojo) y 14-15 (negro).

En las figuras 4-52 y 4-53 se muestran las desviaciones numéricas que ocurren en las ecuaciones de restricción de conexión a nivel de la posición y a nivel velocidad para la vinculación del ala 8 con el ala 9, y se observa que éstas son bien controladas; lo mismo sucede para el resto de las restricciones.

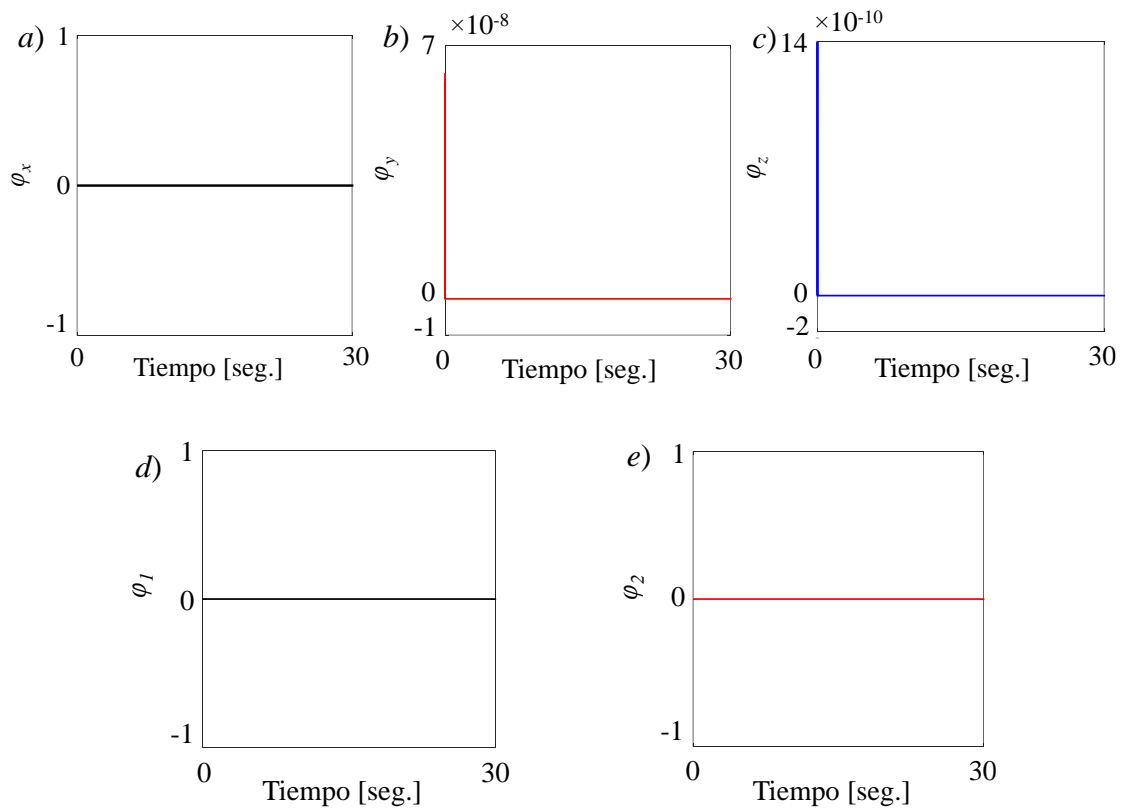


Fig. 4-52. Desviaciones numéricas a nivel de la posición para la vinculación alar 7–8, configuración antisimétrica X-HALE-UAV: *a)* x ; *b)* y ; *c)* z ; *d)* ϕ_1 ; *e)* ϕ_2 .

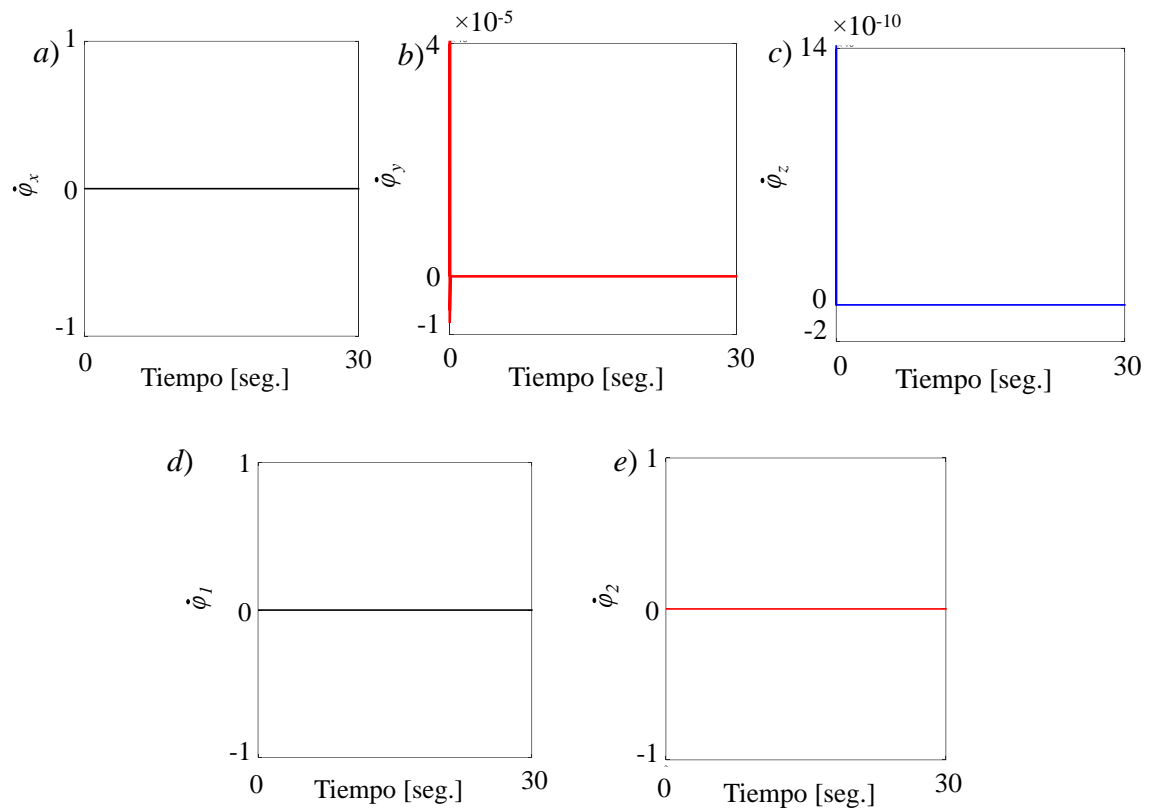


Fig. 4-53. Desviaciones numéricas a nivel de la velocidad para la vinculación alar 7–8, configuración antisimétrica X-HALE-UAV: a) \dot{x} ; b) \dot{y} ; c) \dot{z} , d) $\dot{\varphi}_1$, e) $\dot{\varphi}_2$.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1 Conclusiones

Como producto de este trabajo de tesis, se desarrolló una herramienta computacional que permite estudiar la dinámica de un modelo simplificado de aeronave X-HALE-UAV. La utilización de la herramienta numérica posibilitó realizar simulaciones numéricas cuyos resultados permitieron comprender, con mayor detalle, las características intrínsecas del comportamiento dinámico asociado a aeronaves extremadamente flexibles tipo HALE-UAV.

Entre los principales aspectos desarrollados en esta tesis se destaca: *i*) el desarrollo de un modelo dinámico multicuerpo rígido basado en un enfoque energético que utiliza las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones; y *ii*) la implementación computacional de diferentes esquemas de integración numéricas asociados tanto a la técnica de reducción de índice de DAEs (Runge-Kutta, Hamming, etc) como así también su integración directa (Newmark, HHT, Alpha generalizado, etc). La formulación desarrollada considera todas las no linealidades provenientes de la cinemática de grandes rotaciones y desplazamientos de los cuerpos rígidos, posibilita la inclusión de daño estructural en las alas como así también perturbaciones externas tales como ráfagas de viento. Adicionalmente, el modelo es lo suficientemente versátil para introducir una cantidad arbitraria de cuerpos, lo cual facilita modelar rápidamente diferentes configuraciones de UAVs.

Este modelo fue implementado exitosamente en una herramienta de simulación elaborada completamente en MATLAB, la cual permite integrar interactiva y simultáneamente todas las ecuaciones gobernantes en el dominio del tiempo por medio de diferentes esquemas de integración.

La herramienta de simulación numérica se verificó exitosamente contra casos de estudio simples disponibles en la literatura (para los cuales existen soluciones analíticas cerradas) y por medio de comparación de resultados con programas de simulación de uso extendido en el ámbito de la mecánica computacional tal como SIMPACT. Finalmente,

se analizó el efecto de perturbaciones tales como ráfagas de viento, daño estructural en articulaciones alares, y el efecto combinado de ambos sobre la respuesta dinámica de un concepto simplificado de X-HALE-UAV. De los resultados numéricos obtenidos se puede concluir que:

- El código computacional es lo suficientemente robusto y versátil para estudiar diferentes configuraciones de X-HALE-UAV caracterizados por deflexiones alares grandes y sometidos a perturbaciones externas.
- Todos los esquemas de integración investigados en este trabajo (Runge-Kutta, Hamming, Diferencia Central, Newmark, el algoritmo de Hilber-Hughes-Taylor y Alpha Generalizado) presentan un buen desempeño durante el proceso de integración, tanto desde el punto de vista de precisión como así también de estabilidad de la solución. Sin embargo, la excesiva pérdida de energía mecánica total mostrada por Newmark (debido al efecto estabilizante introducido por medio de amortiguamiento numérico) y DC los hacen inadecuados.
- El efecto de ráfaga sobre el sistema dinámico produce un aumento de la amplitud y frecuencia de oscilación de los tramos alares.
- El efecto de daño estructural produce oscilaciones laterales y rotaciones del fuselaje; siendo más notorio cuando el daño se localiza próximo al fuselaje.

Si bien el modelo dinámico desarrollado y su implementación computacional han permitido obtener excelentes resultados, los integradores investigados experimentan problemas de estabilidad numérica cuando los resortes lineales son muy flexibles y las condiciones iniciales involucran una rotación del fuselaje.

5.2 Trabajos futuros

Como trabajo futuro se pretende:

- Extender el modelo dinámico presentado en este trabajo por medio de la incorporación de un modelo flexible para los tramos alares basado en la utilización de elementos de vigas geoméricamente exactas y/o elementos de cáscaras formuladas en el grupo especial euclideo $SE(3)$.
- Implementar una versión híbrida del método de red de vórtices no lineal (UVLM) y el método de partículas vorticosas (VPM) para estudiar la aerodinámica no estacionaria de esta clase de vehículos voladores.

- Implementar una técnica de transferencia de información basado en la utilización de funciones de bases radiales para combinar el simulador aerodinámico UVLM-VPM con el modelo estructural no lineal del UAV.
- Estudiar la aeroelasticidad no lineal de un concepto simplificado de X-HALE-UAV y estimar márgenes de seguridad para diferentes configuraciones de vuelo.

Una vez que se realicen las extensiones propuestas, se obtendrá una plataforma de simulación unificada para estudiar el comportamiento aeroelástico de aeronaves X-HALE-UAV, la cual permitirá analizar una amplia gama de configuraciones de vuelo. El estudio de los resultados que se obtengan a partir de la utilización del nuevo modelo derivará en recomendaciones de diseño para desarrollar la próxima generación de aeronaves no tripuladas altamente flexibles tipo HALE.

Anexo A

Ecuaciones de movimiento para el X-HALE-UAV

A.1 Generalidades

En este anexo se desarrollan las ecuaciones de movimiento para los cuerpos que componen el sistema multicuerpo (fuselaje, alas, trenes de aterrizaje y motores). Cada uno de los cuerpos que componen el sistema dinámico se considera rígido; los cuales a su vez, pueden estar vinculados entre sí rígidamente o por medio de conexiones elásticas.

La deducción de las ecuaciones se realiza mediante un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange con restricciones holonómicas. Para determinar la energía cinética es necesario conocer el vector velocidad lineal de cada punto perteneciente al cuerpo en estudio. La energía potencial debida a los resortes y al campo gravitacional es introducida mediante el principio de los trabajos virtuales.

La metodología utilizada para derivar las ecuaciones de movimiento es aquella propuesta por Shabana [49] y Nikravesh [45], cuya formulación utiliza un formalismo de marco de referencia flotante (*Floating Frame of Reference*, FFR). Para este problema, el marco de referencia fijo a cada cuerpo i del sistema multicuerpo tiene su origen en el centro de masa del i -ésimo cuerpo.

A.2 Posición y velocidad de un punto genérico en el j -ésimo cuerpo

El vector posición de un punto P perteneciente a un cuerpo rígido j y medido con respecto al marco de referencia inercial, \mathbf{N} , se puede expresar en término de una traslación y una rotación de cuerpo rígido. Desde este punto de vista, el espacio de configuración del j -ésimo cuerpo rígido es $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ [56]. Sobre esta base, el vector posición \mathbf{R}_j^P se puede escribir como

$$\mathbf{R}_j^P = \mathbf{R}_j^{cm} + \mathbf{A}_j \mathbf{r}_p, \quad (\text{A.1})$$

donde, \mathbf{R}_j^P es el vector posición del punto P , \mathbf{R}_j^{cm} es el vector posición del centro de masa del j -ésimo cuerpo, \mathbf{r}_p es el vector posición de un punto genérico P sobre el j -ésimo

cuerpo y expresado en el marco de referencia \mathbf{B}^j fijo a dicho cuerpo, y $\mathbf{A}_j \in SO(3)$ es una matriz de rotación que orienta el marco de referencia \mathbf{B}^j con respecto a \mathbf{N} .

El vector velocidad del punto P se obtiene tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ecuación (A.1), esto es,

$$\dot{\mathbf{R}}_j^P = \dot{\mathbf{R}}_j^{cm} + \dot{\mathbf{A}}_j \mathbf{r}_P, \quad (\text{A.2})$$

donde la notación $(\dot{})$ indica derivada temporal.

En este trabajo, la matriz de rotación \mathbf{A}_j asociada al j -ésimo cuerpo se parametrizó en término de los conocidos parámetros de Euler $\mathbf{p}_j = \{q_{j4}, q_{j5}, q_{j6}, q_{j7}\}^T$, con lo cual \mathbf{A}_j se puede expresar como

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{G}_j \mathbf{L}_j^T, \quad (\text{A.3})$$

donde,

$$\mathbf{G}_j(\mathbf{p}_j) = \begin{bmatrix} -q_{j5} & q_{j4} & -q_{j7} & q_{j6} \\ -q_{j6} & q_{j7} & q_{j4} & -q_{j5} \\ -q_{j7} & -q_{j6} & q_{j5} & q_{j4} \end{bmatrix}, \text{ y} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{p}_j) = \begin{bmatrix} -q_{j5} & q_{j4} & q_{j7} & -q_{j6} \\ -q_{j6} & -q_{j7} & q_{j4} & q_{j5} \\ -q_{j7} & q_{j6} & -q_{j5} & q_{j4} \end{bmatrix}.$$

Utilizando las definiciones introducidas anteriormente para \mathbf{G}_j y \mathbf{L}_j , la derivada temporal de la matriz de rotación \mathbf{A}_j se escribe como

$$\dot{\mathbf{A}}_j = 2\dot{\mathbf{G}}_j \mathbf{L}_j^T, \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado y siguiendo el procedimiento establecido por Nikravesh [45], para un vector arbitrario \mathbf{r} tenemos que

$$\mathbf{L}_j^T \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p}_j \quad (\text{A.6})$$

donde la matriz $\bar{\mathbf{r}}$ se puede escribir como

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{r})^T \\ \mathbf{r} & -\bar{\mathbf{r}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Derivando la expresión (A.6) en función del tiempo se obtiene

$$\mathbf{L}_j^T \mathbf{r} + \mathbf{L}_j^T \dot{\mathbf{r}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}}\mathbf{p}_j + \bar{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{p}}_j \quad (\text{A.8})$$

donde al ser \mathbf{r} arbitrario se aplica (A.6), entonces $\mathbf{L}_j^T \dot{\mathbf{r}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}}\mathbf{p}_j$, (A.8) queda de la forma

$$\mathbf{L}_j^T \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}\mathbf{p}_j \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, reemplazando la expresión (A.5) en (A.2) y teniendo en cuenta (A.9), el vector velocidad de un punto genérico P tiene la siguiente forma (para más detalle el lector puede consultar [45])

$$\mathbf{R}_j^P = \mathbf{R}_j^{cm} + 2\mathbf{G}_j \bar{\mathbf{r}}_P \dot{\mathbf{p}}_j. \quad (\text{A.10})$$

A.3 Ecuación de movimiento para el j -ésimo cuerpo

Luego de obtener la velocidad lineal de cualquier punto perteneciente a un cuerpo del sistema, las ecuaciones de movimiento se pueden deducir utilizando las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. En este trabajo se consideran restricciones holonómicas, es decir, éstas se pueden expresar tanto en forma de restricción de configuración como así también en forma diferencial (ver Capítulo 2). Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores las ecuaciones de Lagrange en su forma restringida se expresan como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c, \quad (\text{A.11})$$

donde T es la energía cinética, $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector multiplicadores de Lagrange asociado a un conjunto de ecuaciones de restricción $\Phi(\mathbf{q};t)$, \mathbf{B}_q es la matriz jacobiana de restricción, \mathbf{Q}^{nc} y \mathbf{Q}^c son los vectores fuerzas generalizadas, conservativas (c) y no conservativas (nc), respectivamente.

Estas ecuaciones son complementadas con las ecuaciones algebraicas asociadas a los vínculos, las cuales se expresan como:

$$\Phi(\mathbf{q};t) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.12})$$

La energía cinética T_j asociada al j -ésimo cuerpo es calculada siguiendo el procedimiento desarrollado por Shabana [49] y Nikravesh [45], e implementado por Rocca *et al.* [92] para el estudio de micro vehículos aéreos, esto es,

$$T_j = \frac{1}{2} \int_{V_j} \rho_j (\mathbf{R}_j^P)^T \mathbf{R}_j^P dV_j, \quad (\text{A.13})$$

donde ρ_j es la densidad de masa por unidad de longitud, de área o de volumen, \mathbf{R}_j^P es el vector velocidad lineal de un punto arbitrario P perteneciente al j -ésimo cuerpo definido anteriormente.

Introduciendo la expresión (A.10) en (A.13), y luego de manipulaciones algebraicas, la energía cinética para el cuerpo j se puede reescribir como

$$T_j = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{R}_j^{cm} \\ \dot{\mathbf{p}}_j \end{matrix} \right\} \left\langle \int_{V_j} \rho_j \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 2\mathbf{G}\bar{\mathbf{r}}_p \\ (2\mathbf{G}\bar{\mathbf{r}}_p)^T & 4(\mathbf{G}\bar{\mathbf{r}}_p)^T \mathbf{G}\bar{\mathbf{r}}_p \end{bmatrix} dV_j \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \mathbf{R}_j^{cm} \\ \dot{\mathbf{p}}_j \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Se puede demostrar que si el origen del marco de referencia \mathbf{B}^j está localizado en el centro de masa del j -ésimo cuerpo, y además los vectores unitarios que definen \mathbf{B}^j definen ejes de simetría, entonces las integrales fuera de la diagonal en la expresión (A.14) son nulas, es decir,

$$\int_{V_j} \rho_j 2\mathbf{G}\bar{\mathbf{r}}_p dV_j = \mathbf{0}. \quad (\text{A.15})$$

Asumiendo este resultado para los cuerpos utilizados en este trabajo, y luego de manipulaciones algebraicas, la energía cinética para el j -ésimo cuerpo se reescribe como

$$T_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_j^T \begin{bmatrix} \mathbf{m}_j^{RR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_j^{PP} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j, \quad (\text{A.16})$$

donde

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \left\{ \left(\mathbf{R}_j^{cm} \right)^T, \left(\dot{\mathbf{p}}_j \right)^T \right\}^T, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{m}_j^{RR} = \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & m_j \end{bmatrix}, \quad \text{y}$$

$$\mathbf{m}_j^{PP} = 4\mathbf{L}_j^T \bar{\mathbf{I}}_j^{PP} \mathbf{L}_j.$$

Se debe mencionar que $\bar{\mathbf{I}}_{ipp}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva. La expresión (A.16) se puede reescribir en notación contraída como

$$T_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_j^T \mathbf{M}_j \dot{\mathbf{q}}_j, \quad (\text{A.18})$$

donde

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_j^{RR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_j^{PP} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Introduciendo (A.18) en las ecuaciones de Lagrange, se obtienen las ecuaciones de movimiento para el cuerpo j , las cuales tienen la siguiente forma

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{B}_{\mathbf{q}_j}^T \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{Q}_j^v + \mathbf{Q}_j^c + \mathbf{Q}_j^{nc}, \quad (\text{A.20})$$

donde

$$\mathbf{Q}_j^v = -\mathbf{M}_j \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} (\dot{\mathbf{q}}_j^T \mathbf{M}_j \dot{\mathbf{q}}_j). \quad (\text{A.21})$$

El vector \mathbf{Q}_j^v es un vector cuadrático en las velocidades y se origina debido al hecho que la matriz de masa no es constante.

Finalmente, la ecuación (A.20) es complementada por el conjunto de ecuaciones de vínculo $\Phi_j(\mathbf{q}; t)$, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{B}_{\mathbf{q}_j}^T \boldsymbol{\lambda}_j &= \mathbf{Q}_j^v + \mathbf{Q}_j^c + \mathbf{Q}_j^{nc}, \text{ y} \\ \Phi_j(\mathbf{q}_j; t) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Por último, la ecuación de movimiento para todo el sistema se compone del conjunto de ecuaciones de movimiento para cada cuerpo j con sus respectivas ecuaciones restricción. Luego de un procedimiento de ensamblaje estándar, tales ecuaciones toman la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}^v + \mathbf{Q}^{nc} + \mathbf{Q}^c, \\ \Phi(\mathbf{q}; t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

donde $\ddot{\mathbf{q}}$ es el vector de aceleraciones generalizadas. El término $\mathbf{B}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}$ representa las fuerzas generalizadas de restricción.

Anexo B

Linealización de las ecuaciones de movimiento

B.1 Generalidades

En este anexo se presenta el procedimiento utilizado para obtener la versión linealizada de las ecuaciones de movimiento, lo cual es fundamental para la correcta implementación del algoritmo de Newmark y sus derivaciones.

B.2 Linealización de las ecuaciones de movimiento

Por conveniencia, se escribe nuevamente aquí el sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas que gobiernan el comportamiento dinámico de un sistema multicuerpo [49],

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}; t) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{B.1}$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema, \mathbf{B}_q es la matriz jacobiana asociada a las restricciones, \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas, $\boldsymbol{\Phi}$ es el conjunto de restricciones cinemáticas, \mathbf{Q} son las cargas generalizadas que colectan aquellas de origen disipativo, conservativo y el termino giroscópico \mathbf{Q}^v , y $\boldsymbol{\lambda}$ es el conjunto de multiplicadores de Lagrange.

Como se mencionó en la subsección 3.4.1, se expresa la solución corregida en $t = t_n$ de manera incremental como

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_n &= \hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{q}}_n &= \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\dot{\mathbf{q}}, \\ \ddot{\mathbf{q}}_n &= \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\ddot{\mathbf{q}}, \text{ y} \\ \boldsymbol{\lambda}_n &= \hat{\boldsymbol{\lambda}}_n + \Delta\boldsymbol{\lambda},\end{aligned}\tag{B.2}$$

donde ($\hat{\quad}$) sobre la variable indica cantidad aproximada, y $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\dot{\mathbf{q}}$, $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$, y $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ son los incrementos en el vector de coordenadas, velocidades, aceleraciones, y multiplicadores de Lagrange, respectivamente. Luego se evalúa la Ec. (B.1) en $t = t_n$, esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_n, \lambda_n; t_n) &= \mathbf{M}(\mathbf{q}_n) \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{B}_q^T(\mathbf{q}_n, t_n) \lambda - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n; t_n), \\ \Phi(\mathbf{q}_n; t_n) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Realizando una expansión en Taylor alrededor del punto $(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\lambda}_n)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\dot{\mathbf{q}}, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\ddot{\mathbf{q}}, \hat{\lambda}_n + \Delta\lambda; t_n) &= \mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\lambda}_n; t_n) + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \Phi(\hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}; t_n) &= \Phi(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) + \Delta\Phi = \mathbf{0},\end{aligned}\tag{B.4}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n} \Delta\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n} \Delta\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \Delta\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\lambda}_n} \Delta\lambda + O(\Delta^2), \\ \Delta\Phi &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \Delta\mathbf{q} + O(\Delta^2),\end{aligned}\tag{B.5}$$

y las derivadas parciales pueden ser computadas como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n} \left\{ \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n) \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \mathbf{B}^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \lambda - \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n; t_n) \right\} = \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n), \\ \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n} \left\{ \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n) \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \lambda - \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n; t_n) \right\} = -\frac{\partial}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n} \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n; t_n), \\ \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \left[\mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n) \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n \right] + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \left[\mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \lambda \right] - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \left[\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n; t_n) \right], \\ \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\lambda}_n} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_n} \left\{ \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n) \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \lambda - \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n; t_n) \right\} = \mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n), \text{ y} \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \left[\Phi_n(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \right] = \mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n, t_n).\end{aligned}\tag{B.6}$$

Descartando términos de segundo orden y superiores $O(\Delta^2)$, la Ec. (B.4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\dot{\mathbf{q}}, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\ddot{\mathbf{q}}, \hat{\lambda}_n + \Delta\lambda; t_n) &\approx \mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\lambda}_n; t_n) + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n} \Delta\ddot{\mathbf{q}} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n} \Delta\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \Delta\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \hat{\lambda}_n} \Delta\lambda = \mathbf{0}, \\ \Phi(\hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}; t_n) &\approx \Phi(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) + \frac{\partial \Phi_n}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

La ecuación (B.7) en conjunto con las derivadas introducidas en la Ec. (B.6) permiten reescribir (B.3) en forma linealizada como

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n) \Delta \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{C}_T(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \Delta \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{K}_T(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\lambda}_n; t_n) \Delta \mathbf{q}_n + \\ + \mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \Delta \lambda = -\mathbf{r}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n, \check{\mathbf{q}}_n, \lambda_n; t_n), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{B}_q(\mathbf{q}_n; t_n) \Delta \mathbf{q} = -\Phi(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n).$$

donde

$$\mathbf{C}_T(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n; t_n) = -\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n; t_n), \quad (\text{B.9})$$

es la matriz de amortiguamiento tangente, y

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\lambda}_n; t_n) = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} [\mathbf{M}(\hat{\mathbf{q}}_n) \check{\mathbf{q}}_n] + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} [\mathbf{B}_q^T(\hat{\mathbf{q}}_n; t_n) \lambda] - \\ - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{q}}_n} [\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n; t_n)], \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

es la matriz de rigidez tangente.

La Ec. (B.8) se puede expresar en forma contraída utilizando notación vectorial, esto es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \check{\mathbf{q}} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{T_n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_n} & \mathbf{B}_n^T \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_n \\ -\Phi_n \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Finalmente, evaluando (B.11) en $t = t_{n+1}$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \check{\mathbf{q}} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{T_{n+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_{n+1}} & \mathbf{B}_{n+1}^T \\ \mathbf{B}_{n+1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_{n+1} \\ -\Phi_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \hat{\mathbf{q}}_{n+1} + \Delta \mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \hat{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} + \Delta \dot{\mathbf{q}}, \\ \check{\mathbf{q}}_{n+1} &= \check{\check{\mathbf{q}}}_{n+1} + \Delta \check{\mathbf{q}}, \text{ y} \\ \lambda_{n+1} &= \hat{\lambda}_{n+1} + \Delta \lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Referencias

- [1]. Colella, N. J., and Wenneker, G. S., “Pathfinder and the Development of Solar Rechargeable Aircraft,” E&TR, pp. 1-9, 1994.
- [2]. Tilmann, C. P., Flick, P. M., Martin, C. A., and Love, M. H., “High-Altitude Long Endurance Technologies for SensorCraft,” RTO AVT Symposium on “Novel Vehicle Concepts and Emerging Vehicle Technologies,” Brussels, Belgium, April 7–10 2003, MP-104-P-26-1.
- [3]. Whitson, S., “The Proteus, Giving Shape to Forms Unknown,” *Private Pilot*, vol. 33, no. 12, pp. 44-50, 1998.
- [4]. Palacios, R., Cesnik, C. E. S., and Reichenbach, E., “A Re-examination of the Structural Design Procedures for Very Flexible Aircraft,” *Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Stockholm, Sweden, June 18-21, 2007.
- [5]. Shearer, C. M., and Cesnik, C. E. S., “Nonlinear Flight Dynamics of Very Flexible Aircraft,” *Journal of Aircraft*, vol. 44, no. 5, pp. 1528-1545, 2007.
- [6]. Livne, E., and Weisshaar, T. A., “Aeroelasticity of nonconventional airplane configurations – past and future,” *Journal of Aircraft*, vol. 40, no. 6, pp. 1047-1065, 2003.
- [7]. Arguello, M., Preidikman, S., y Roccia, B. A., “Desarrollo de simulaciones numéricas para estudiar la dinámica de un concepto de aeronave X-HALE-UAV”, *Revista Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*, vol. 2, no. 2, pp. 16-24, 2014.
- [8]. Scheiman, D. A., Brinker, D. J., Bents, D. J., and Colozza, A. J., “Design of a GaAs/Ge Solar Array for Unmanned Aerial Vehicles,” IEEE WCPEC, pp. 2006-2009, 1994.
- [9]. Gibbs, Y., “NASA Armstrong Fact Sheet: Solar-Power Research,” <http://www.nasa.gov>, 2015.
- [10]. Cesnik, C. E. S., Senatore, P. J., Su, W., Atkins, E. M., Shearer, C. M., and Pitcher, N. A., “X-HALE: A very flexible UAV for nonlinear aeroelastic tests,” *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA Paper 2010-2715, April 12-15, Orlando, FL, pp. 1-23, 2010.

- [11]. Galante, N., “The Helios Prototype flying wing is shown over the Pacific Ocean during its first test flight on solar power from the U.S. Navy's Pacific Missile Range Facility in Hawaii,” <http://www.dfr.nasa.gov/Gallery/Photo/Helios/>, 2003.
- [12]. Noll, T. E., Brown, J. M., Perez-Davis, M. E., Ishmael, S. D., Tiffany, G. C., and Gaier, M., “Investigation of the Helios Prototype Aircraft Mishap,” Mishap Report Volume I, NASA, <http://www.nasa.gov/pdf/64317main/helios.pdf> , 2004.
- [13]. Schimdt, D. K., and Raney, D. L., “Modeling and simulation of flexible flight vehicles,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 24, no. 3, pp. 539-546, 2001.
- [14]. Reschke, C., “Flight loads analysis with inertially coupled equations of motion,” *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2005-6026, August 15-18, San Francisco, CA, pp. 1-21, 2005.
- [15]. Crimaldi, J. P., Britt, R. T., and Rodden, W. P., “Response of B-2 aircraft to nonuniform spanwise turbulence,” *Journal of Aircraft*, vol. 30, no. 5, pp. 652–659, 1993.
- [16]. Friedmann, P. P., “Renaissance of aeroelasticity and its future,” *Journal of Aircraft*, vol. 36, no. 1, pp. 105-121, 1999.
- [17]. Van Schoor, M. C. and von Flotow, A. H., “Aeroelastic Characteristics of a Highly Flexible Aircraft,” *Journal of Aircraft*, vol. 27, no. 10, pp. 901-908, 1990.
- [18]. Patil, M. J., Hodges, D. H., and Cesnik, C. E. S., “Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of High-Altitude Long-Endurance Aircraft,” *Journal of Aircraft*, vol. 38, no. 1, pp. 88-94, 2000.
- [19]. Drela, M., “Integrated Simulation Model for Preliminary Aerodynamic, Structural, and Control-Law Design of Aircraft,” *Proceedings of the 40th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, AIAA Paper 1999-1394, April 12-15, St. Louis, Missouri, pp. 1644-1656, 1999.
- [20]. Jones, R. I., “The Design Challenge of High Altitude Long Endurance (Hale) Unmanned Aircraft,” *The Aeronautical Journal*, pp. 273-280, 1999.
- [21]. Jones, R. I., “Selection and Comparison of Unmanned Aircraft Configurations,” *In 12th RPVs International Conference, Bristol, United Kingdom*, Conference Papers (A97-21501 04-01), Sept. 9-11, Bristol, United Kingdom, University of Bristol, 1996.

- [22]. Cesnik, C. E. S. and Su, W., “Nonlinear Aeroelastic Modeling and Analysis of Fully Flexible Aircraft,” *Proceedings of the 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA Paper 2005-2169, April 18-21, Austin, TX, 2005.
- [23]. Cesnik, C. E. S. and Brown, E. L., “Active Warping Control of a Joined Wing Airplane Configuration,” *Proceedings of the 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference*, AIAA Paper 2003-1715, April 7-10, Hampton, Virginia, 2003.
- [24]. Brown, E. L., “Integrated Strain Actuation in Aircraft with Highly Flexible Composite Wings,” Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 2003.
- [25]. Cesnik, C. E. S. and Ortega-Morales, M., “Active Aeroelastic Tailoring of Slender Flexible Wings,” *Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Madrid, Spain, 2001.
- [26]. Su, W. and Cesnik, C. E. S., “Dynamic Response of Highly Flexible Flying Wings,” *AIAA Journal*, vol. 49, no. 2, pp. 324-339, 2011.
- [27]. Patil, M. J., and Hodges, D. H., “Flight dynamics of highly flexible flying wings,” *Journal of Aircraft*, vol. 43, no. 6, pp. 1790-1798, 2006.
- [28]. Wang, Z., Chen, P. C., Liu, D. D., and Mook, D. T., “Nonlinear-aerodynamics/nonlinear-structure interaction methodology for a high-altitude long-endurance wing,” *Journal of Aircraft*, vol. 47, no. 2, pp. 556-566, 2010.
- [29]. Chandra, R. and Chopra, I., “Structural response of composite beams and blades with elastic couplings,” *Composite Engineering*, vol. 2, no. 5-7, pp. 347-374, 1992.
- [30]. Minguet, P. and Dugundji, J., “Experiments and analysis for structurally coupled composite blades under Large deflections. part 1 – static behavior,” *AIAA Journal*, vol. 28, no. 9, pp. 1573-1579, 1990.
- [31]. Minguet, P. and Dugundji, J., “Experiments and analysis for structurally coupled composite blades under large deflections. part 2 – dynamic behavior,” *AIAA Journal*, vol. 28, no. 9, pp. 1580-1588, 1990.
- [32]. Tang, D. M. and Dowell, E. H., “Experimental and theoretical study on aeroelastic response of high-aspect-ratio wings,” *AIAA Journal*, vol. 39, no. 8, pp. 1430-1441, 2001.

- [33]. Tang, D. M. and Dowell, E. H., “Experimental and theoretical study of gust response for high-aspect-ratio wing,” *AIAA Journal*, vol. 40, no. 3, pp. 419-429, 2002.
- [34]. Wang, R., Zhou, X., and Zhou, Z., “Longitudinal Flight Dynamics and Control of Highly Flexible Solar UAV,” *IEEE (ICIECS)*, pp. 1-4, 2010.
- [35]. Peters, D. A., Karunamoorthy, S., and Cao, W. M., “Finite State Induced Flow Models Part I: Two-Dimensional Thin Airfoil,” *Journal of Aircraft*, vol. 32, pp. 313-322, 1995.
- [36]. Jansen, K. E., Whiting, S. C. H., and Hulbert, G. M., “A generalized-alpha method for integrating the filtered Navier-Stokes equations with a stabilized finite element method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 305-319, 2000.
- [37]. Patil, M. J., “Aeroelastic Tailoring of Composite box beams,” *AIAA*, vol. 15, pp. 1-9, 1997.
- [38]. Wang, R., Zhou, X., Zhou, Z., and Xu, X., “Distributed Modeling and Control of Large-Scale Highly Flexible Solar-Powered UAV,” *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 195390, 2015.
- [39]. Azoulay, D., and Karpel, M., “Characterization of Methods for Computation of Aeroservoelastic Response to Gust Excitation,” *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, AIAA Paper 2006-1938, May 1-4, Newport, Rhode Island, 2006.
- [40]. Nitardi, L. M., Rocca, B. A., Preidikman S., y Flores, F. G., “Estudio de la dinámica de un concepto de X-HALE-UAV: un enfoque multicuerpo,” *Argencon IEEE 2016*, Buenos, Aires.
- [41]. Nitardi, L. M., Rocca, B. A., Preidikman S., y Flores, F. G., “Estudio de la dinámica de un concepto de X-HALE-UAV: un enfoque multicuerpo,” *XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, ENIEF 2016, córdoba, Argentina, 8 al 11 de Noviembre, 2016.
- [42]. Nitardi, L. M., Rocca, B. A., Preidikman, S., y Flores, F. G., “Estudio de la dinámica de un concepto de X-HALE-UAV – Parte 1: Aspectos teóricos y de modelado,” *VI MACI 2017*, Comodoro Rivadavia, Argentina, Mayo 02-05, 2017.
- [43]. Nitardi, L. M., Rocca, B. A., Preidikman, S., y Flores, F. G., “Estudio de la dinámica de un concepto de X-HALE-UAV – Parte 2: Validación y simulación,” *VI MACI 2017*, Comodoro Rivadavia, Argentina, Mayo 02-05, 2017.

- [44]. Nitardi, L. M., Roccia, B. A., Preidikman, S., and Flores, F. G., “Dynamics of a high-altitude long-endurance aircraft concept: A multibody system approach,” *6th International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics – MuSMe 2017*.
- [45]. Nikravesh, P. E., *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice Hall, 1988.
- [46]. Shuster, M. D., “A survey of attitude representations,” *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 41, no 4. pp 439-517, 1993.
- [47]. Baruh H., *Applied Dynamics*, CRC Press, 2014.
- [48]. Géradin, M. and Cardona, A., *Flexible Multibody Dynamics – A Finite Elements Approach*, John Wiley & Sons Ltd, New York, 2000.
- [49]. Shabana A. A., *Dynamics of multibody systems*, Cambridge, New York, 2005.
- [50]. Shabana A. A., *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2010.
- [51]. Bauchau O. A., *Flexible multibody dynamics*, Springer, New York, 2010.
- [52]. Kane T. R., *Dynamics*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1968.
- [53]. Da Silva. C., *Fundamentals of Dynamics and Analysis of Motion*, Dover Publications Inc, New York, 2016.
- [54]. Rao, S. S., *Vibraciones Mecánicas*. 5ta ed. Pearson 2012.
- [55]. Fiset y Vaneghem, “Numerical integration of multibody system dynamic equations using the coordinate partitioning method in an implicit Newmark scheme”. *Computer Methods Application Mechanical Engineer*, vol 135 pp 85-105, 1996.
- [56]. Cardona A., and Géradin M., “Time integration of the equations motion in mechanism analysis”. *Computer & Structures*, vol 33, no. 3 pp 801-820, 1989.
- [57]. Géradin M. and Cardona A., “Numerical integration of second-order differential-algebraic systems in flexible mechanism dynamics,” in: M. Pereira and J. Ambrosio, eds. *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical System*, NATO ASI Series, *Applied Sciences*, vol. 268, pp. 233-284, 1993.

- [58]. Ascher U. M., and Petzold L. R., “Stability of computational methods for constrained dynamics systems,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, no. 1, pp. 95-120, 1993.
- [59]. Ascher, U. M., Chin H. and Reich S., “Stabilization of DAEs and invariant Manifolds,” *Numer. Math.*, vol. 67 pp. 131-149, 1994.
- [60]. Baumgarte, J., “Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineer*, vol. 1, pp1-16, 1972.
- [61]. Flores P., Pereira R., Machado M. and Seabra M., “Investigation on the baumgarte stabilization for dynamic analysis of constrained mulbibody system” *The Second European Conference on Mechanism Science*, EUCOMES, pp 305-312, 2009.
- [62]. Blajer W., “Elimination of constraint violation and accuracy aspects in numerical simulation of multibody systems,” *Multibody System Dynamics*, vol. 7, pp. 265-284, 2002.
- [63]. Braun D. J., and Goldfarb M., “Eliminating constraint drift in the numerical simulation of constrained dynamical systems,” *Computational Methods Appl. Mechanics Enrg.*, vol. 198, pp. 3151-3160, 2009.
- [64]. Blajer W., “Methods for constraint violation suppression in the numerical simulation of constrained multibody systems – A comparative study,” *Computational Methods Appl. Mechanics Enrg.*, vol. 200, pp. 1568-1576, 2011.
- [65]. Flores P., Machado M., and da Silva M. T., “A parametric study on the Baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems,” *Journal Comp. Nonlinear Dynamics*, vol. 6, pp. 1-9, 2011.
- [66]. Ascher, U. M., Chin H., Petzold L. R., and Reich S., “Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds,” *Journal of Mech, Struct. Machines*, vol. 23 pp. 135-158, 1995
- [67]. Cheney W., Kincaid D., *Métodos numéricos y computación*, CENGAGE Learning, 2011.
- [68]. Henrici P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, New York, Wiley, 1962.
- [69]. Raltson A., *A First Course in Numerical Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1965.

- [70]. Bathe K.J., *Finite Element Procedure*, Prentice Hall, Person Education, Inc, 2006.
- [71]. Géradin M. and Rixen D. J., “*Mechanical Vibrations*” Theory and application to structural dynamics. John Wiley and Sons, 2015.
- [72]. Bettinoti O., “*A weakly-intrusive multi-scale substitution method in explicit dynamics*” Thèse de Doctorat de L'école Normale Supérieure de Cachan, 2015.
- [73]. Kim J. K., Chung I. S., Lee B. H., “Determination of the feedback coefficients for the constraint violation stabilization,” *Proc. Inst. Mech. Engr., Part C: J. Mech. Engrg.*, vol. 204, pp. 233-242, 1990.
- [74]. Yoon S., Howe R. M., Greenwood D. T., “Stability and accuracy analysis of Baumgarte's constrained violation stabilization method,” *Journal of Mechanic Design*, vol. 117, pp. 446-453, 1995.
- [75]. Ascher U. M., and Petzold L. R., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [76]. Rocca B. A., *Desarrollo de simulaciones numéricas para el estudio del vuelo de micro vehículos aéreos de alas batientes inspirados en la biología*, Tesis doctoral presentada a la facultad de ciencias exactas, físicas y naturales, UNC, 2013.
- [77]. Newmark, N. M. A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, no 7. pp 67-94, 1959.
- [78]. Hilber H. M., Hughes T. and Taylor R. L, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, vol. 5. pp 283–292, 1977.
- [79]. Hilber H. M, and Hughes T. J. R, and R. L. Collocation dissipation for time integration scheme in structural dynamics. *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, vol. 6. pp 99–117, 1978.
- [80]. Wood, W. L., Bossak, M., and Zienkiewicz, O. C.: "An Alpha Modification of Newmark's Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5, pp. 1562-1566, 1980.
- [81]. Simo J. and Wong K: "Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, pp. 19-52, 1991.

- [82]. Simo J. Tarnow N. and Wong K: "Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 100, pp. 63-116, 1992.
- [83]. Chung, J. and Hulbert, G.: "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method". *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol.60, pp 371:375, 1993.
- [84]. Wang. J and Li Z.: Implementation of HHT algorithm for numerical integration of multibody dynamics with holonomic constraints. *Journal Nonlinear Dynamics*, vol. 80. Pp 817-825, 2015
- [85]. Negrut, D., Rampalli, R., Ottarsson, G. and Sajdak, A.: On an implementation of the Hilber–Hughes–Taylor method in the context of index 3 differential-algebraic equations of multibody dynamics *Journal Computational Nonlinear Dynamics*, vol 2, no 1. pp 73–85, 2006.
- [86]. Gomez C. Preidikman S. and Rocca B.: Imposicion de las condiciones iniciales en sistemas multicuerpo con restricciones: una metodologia general" *6º Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, (MACI)*, 2017.
- [87]. Diebel, J.: *Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors*. Stanford University, 2006.
- [88]. Gilat A., *MATLAB®*, Reverté, 2005.
- [89]. Oberkampf W.L., Trucano T.G "Verification and validation in computational fluid dynamics." *Progress in Aerospace Sciences*, 38 (3): p. 209-272, 2002.
- [90]. Schwer L.E. "An Overview of de PTC60/V&V10: Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics". *iacm expressions 20/07* p.14-21, 2007
- [91]. Flores, F. G, SIMPACT, an explicit finite element program, Departamento de estructuras UNC, 2011.
- [92]. Rocca B. A., Preidikman A and Balachandran B."Computational Dynamics of Flapping Wings in Hover Flight: A Co-Simulation Strategy", *AIAA Journal*, Vol. 55, No. 6 (2017), pp. 1806-1822.