

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO

Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

Departamento de Matemática

TRABAJO FINAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Mecánica Celeste

por

LEOPOLDO BURI

Director: DR. FERNANDO MAZZONE

2012

Dedicada a la memoria de mi padre,
a mi madre y a mi hermana.

Resumen

En este trabajo final de Licenciatura en Matemática el objeto de estudio es: El Problema de los tres cuerpos.

En primer lugar, se desarrollan detalladamente principios básicos de la mecánica newtoniana y analítica, explicitando sus diferencias. Todo esto nos permite una primera mirada del problema de los tres cuerpos.

Luego se realiza un análisis profundo del problema de los dos cuerpos, exhibiendo su solución. El mismo, es necesario para la comprensión y el desarrollo de nuestro objeto de estudio.

En tercer lugar, estudiamos específicamente algunas simplificaciones del problema de los tres cuerpos, en las cuales son posibles ciertas soluciones sencillas. Estas simplificaciones surgen del hecho de que nuestro objeto de estudio no tiene solución analítica, en general. Un ejemplo de estas simplificaciones se da cuando la masa de uno de los tres cuerpos es mucho menor que la de los otros dos (problema conocido como “Problema Restringido de los Tres Cuerpos”), por lo que el sistema puede ser reducido a un problema de dos cuerpos y a otro problema de un sólo cuerpo.

Finalmente se mencionan algunos comentarios acerca de los métodos numéricos aplicados, que resuelven numéricamente las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de los n cuerpos, y en particular el de los tres cuerpos que como dijimos no tiene solución exacta generalmente.

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	5
1. Principios Básicos de la Mecánica	11
1.1. Cálculo de Variaciones	13
1.2. Sistemas Mecánicos	18
1.3. Transformada de Legendre	31
1.4. Ecuaciones de Hamilton	34
1.5. Teorema de Liouville	45
2. El Problema de los dos cuerpos	51
2.1. Ecuaciones de Movimiento para n cuerpos	52
2.1.1. Movimiento del centro de masa	54
2.1.2. Momento lineal y su conservación	56
2.1.3. Momento angular y su conservación	57
2.1.4. Energía y su conservación	59
2.2. Ecuaciones de Movimiento para dos cuerpos	61
2.3. Posición Orbital y Velocidad	66

2.4. Anomalías excéntrica y media	80
2.5. La órbita en el espacio	86
2.6. Órbitas perturbadas	97
2.7. Formulación Hamiltoniana	103
3. El problema de los tres cuerpos	107
3.1. Ecuaciones de Movimiento	108
3.2. La integral de Jacobi	114
3.3. La relación Tisserand	119
3.4. Puntos Lagrangianos de equilibrio	124
3.5. Posición de puntos de equilibrio	128
4. Métodos Numéricos	141
4.1. Método de Euler	142
4.2. Forma de Newton del polinomio interpolante	145
4.3. Métodos de Colocación	148
4.4. Programando un método de colocación en el lenguaje MATLAB .	153

Agradecimientos

El agradecimiento más profundo y sentido va para mi familia. Sin su apoyo, colaboración e inspiración, habría sido imposible llevar a cabo esta tesis. A mi madre, Noelia, por su ejemplo de lucha, honestidad y valentía; a mi hermana Betiana por su tenacidad, humildad y generosidad; y a mi padre, Norbel, desde el cielo, por su ejemplo tan sincero y humano...por ellos y para ellos!

Debo agradecer de manera especial y sincera al Doctor Fernando Mazzone por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas, han sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación como licenciado. Las ideas propias, siempre enmarcadas en su orientación y rigurosidad, han sido la clave del buen trabajo que hemos realizado juntos, el cual no se puede concebir sin su siempre oportuna participación. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis. Muchas gracias Fernando.

Para aquellos amigos y compañeros que han compartido conmigo los “ires y venires” en el plano personal durante esta etapa. A mis mejores amigos de la vida, de quienes siempre he recibido palabras de aliento, mis agradecimientos más profundos.

Quiero agradecer también a Marianela y a toda su familia, por todo el cariño brindado a lo largo de este último tiempo.

También necesito agradecer a la U.N.R.C. y en particular a la Secretaría de Ciencia y Técnica por haberme becado y además por haberme fomentado a seguir investigando. Agradezco también al departamento de Matemáticas de dicha

Universidad y a todos sus docentes, porque de una manera u otra, todos ellos son parte de este documento.

Por último, agradezco a Dios, por haber estado a mi lado en todo momento y por darme fuerzas y voluntad para seguir hacia adelante. Es por eso que me remito firmemente a una frase de Agatha Christie: “Aprendí que no se puede dar marcha atrás, que la esencia de la vida es ir hacia adelante. La vida, en realidad, es una calle de sentido único”.

¡¡¡Muchas gracias a todos!!!

Introducción

Presentaremos la contextualización de nuestro objeto de estudio: El Problema de los tres cuerpos, describiendo cómo se originó, cómo fue su desarrollo a lo largo de la historia y quiénes se ocuparon de él. Con este estudio histórico, pretendemos mostrar la importancia que tuvo, que tiene y que tendrá este problema en el marco científico. El hecho de que no pueda resolverse explícitamente, nos da de pensar sobre su complejidad.

El problema de los tres cuerpos es uno de esos típicos problemas matemáticos de apariencia sencilla, que encierra una tremenda complejidad, y que ha atraído a un gran número de importantes matemáticos y físicos.

El origen de dicho problema proviene de la famosa Ley de Gravitación Universal de Newton, que indica que la fuerza gravitatoria atractiva existente entre dos cuerpos, es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. También aparece en este problema la segunda Ley de Newton, o principio fundamental de la dinámica, que nos dice que la fuerza aplicada sobre un cuerpo produce una aceleración directamente proporcional a la masa del mismo. La conjunción de ambas leyes, expresadas en forma vectorial, nos puede proporcionar la trayectoria de un objeto en órbita de otro, conociendo su posición y velocidad en un instante dado. Esto es el origen de la genial idea de Newton, que concibió, cuenta la leyenda, al caerle una manzana de un árbol. Lo cierto es que la solución a este problema es lo que presenta en su obra, de 1687, “*Philosophie naturalis principia mathematica*”, donde describe las tres leyes de Kepler (que más adelante se tratarán) como consecuencia directa de aquellas otras dos leyes que él formula.

Así formulado, tenemos el que se conoce como problema de los dos cuerpos, cuya solución nos proporciona la posición de cada cuerpo, en función del tiempo.

Resuelto el problema para el caso de dos cuerpos, se plantea el de los tres cuerpos, que se presentaba más complicado y que permaneció mucho tiempo abierto, desde que fuera enunciado con dicho nombre por Jean D'Alembert. A primera vista no parecía demasiado complicado pues, supuesto uno de ellos fijo en el origen de coordenadas, se reduce a calcular la trayectoria de los otros dos, es decir, dos ecuaciones en lugar de una. Sin embargo, la resolución de ecuaciones diferenciales no siempre es fácil, o mejor dicho, casi nunca lo es. Los casos de ecuaciones lineales tienen solución, pero no es así en los casos no lineales, para los cuales no siempre es posible encontrar una linealización. El problema fue estudiado por numerosos científicos.

Un caso particular para el caso de tres cuerpos, fue resuelto por Lagrange, quien demostró que existían cinco posiciones que podían ser resueltas, obteniendo lo que desde entonces se conoce como puntos de Lagrange. Este hecho ha devenido en un importante resultado astronómico cuando se descubrieron los asteroides troyanos de Júpiter. En la actualidad estos puntos, son de suma importancia para colocar en ellos determinados satélites espaciales.

La primera solución de carácter general se debe a Laplace, quien presenta en 1776 su tratado de Mecánica Celeste, donde explica que los cambios orbitales de Saturno y Júpiter, que tanto preocuparon a Newton, son meras perturbaciones que sólo dependían de la propia Ley de Gravitación, y tendían a compensarse con el transcurso del tiempo. También afirma que si se conociera la velocidad y la posición de todas las partículas del Universo en un instante, se podrían predecir su pasado y futuro, lo que dio origen al conocido determinismo laplaciano. Sin

embargo, la respuesta de Laplace no era exacta, pues en sus ecuaciones del sistema Sol-Júpiter-Saturno despreció un término matemático que creía muy pequeño, pero que podía crecer rápidamente y sin límite, de hecho hasta desestabilizar el Sistema Solar.

Así pues, el problema general seguía sin solución. Por ello el Rey Óscar II de Suecia, en 1884 ,organizó un concurso internacional de matemáticas cuyas bases establecían cuatro problemas por resolver. El primero de ellos, propuesto por Karl Weierstrass, era precisamente el problema de los n cuerpos, correspondiente a la generalización del caso de tres, y que pretendía establecer las fórmulas que rigen las trayectorias de los objetos del Sistema Solar. El matemático francés Henri Poincaré, que entonces contaba con 36 años de edad, participó en el mismo, para lo cual comenzó estudiando detenidamente el caso de tres, y presentando su memoria en 1888, con el título de “Mémoire sur les Courbes Définies par une Équation Différentielle”, en la que estableció que el problema carecía de solución, siendo declarado ganador por el jurado. La conclusión principal de Poincaré en dicha memoria era que la evolución del sistema era en extremo caótica, pues una pequeñísima variación en el estado inicial de cualquiera de los cuerpos, como por ejemplo, las debidas a los errores de medición por pequeños que sean, podría conducir a resultados completamente diferentes. Uno de los integrantes del jurado, Karl Weierstrass, afirmó: «Si bien este trabajo no puede ser considerado como la solución completa del desafío presentado, es de tal importancia, que su publicación marcará el comienzo de una nueva era en la historia de la Mecánica Celeste.»

La razón de dicha falta de solución estable es que este problema carece de lo que se conoce como solución analítica, es decir, la integral que se debe resolver

para obtener una función que nos represente la posición de cada uno de los cuerpos en función del tiempo, no existe como una expresión en términos de las funciones usuales que todos conocemos. No obstante, el que no tenga solución analítica no quiere decir que sea un enigma, pues lo que sí es posible es obtener aproximaciones numéricas con cualquier precisión que querramos, con lo que sí podemos calcular y predecir las trayectorias. Así pues, el problema fundamental radica en que cualquier variación en los datos iniciales, por pequeña que ésta sea, hace que varíe completamente los resultados con respecto a los valores observados en la realidad.

El problema de los tres cuerpos ha dado lugar a una variedad de problemas similares, muchos de ellos muy importantes en nuestra vida cotidiana. Se trata de resolver la evolución de sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales, donde pequeñas variaciones producen grandes diferencias en el comportamiento futuro. Este tipo de sistemas se suele denominar sistemas caóticos, y como ejemplos podemos indicar el Sistema Solar, que fue el primero de los estudiados, así como las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento, los problemas de crecimiento de poblaciones o diferentes modelos económicos.

Esta contextualización histórica ayuda a situar la importancia y la necesidad de desarrollar esta tesis en torno a los siguientes cuatro ejes, contenidos en sendos capítulos: Principios Básicos de la Mecánica; El Problema de los dos cuerpos; específicamente El Problema de los tres cuerpos y Métodos Numéricos.

En efecto, en el capítulo 1 se exhibe el análisis de los principios básicos de la mecánica, haciendo énfasis sobre las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana, que nos permitirán tener otra mirada del problema, objeto de estudio.

En segunda instancia, será necesario para nuestro estudio, el análisis del pro-

blema de los dos cuerpos, su solución y propiedades subyacentes. También en el capítulo 2 se presenta el análisis de la formulación Lagrangiana del problema de los dos cuerpos y se observa que las conclusiones obtenidas son las mismas que las que se obtienen de la formulación newtoniana.

Con el problema de los dos cuerpos previamente analizado y estudiado, nos sumergiremos en el mismo problema pero con un cuerpo más. Parece simple y fácil decirlo, sin embargo agregar un cuerpo más al problema de los dos cuerpos arrastra una inmensa dificultad. Justamente esta nueva situación, no tiene solución. Lo único posible de tratar aquí es una simplificación de la misma. Es por eso que nos centraremos en el llamado: Problema restringido Circular de los tres cuerpos. Este problema da origen a puntos de equilibrio en el espacio (más específicamente a cinco puntos) que son de muchísima importancia para la astronomía. En el capítulo 3 de esta tesis están detalladas estas aplicaciones.

Finalmente, aplicaremos métodos numéricos para tratar de obtener aproximaciones numéricas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de estos cuerpos. Es por eso, que en el capítulo 4, se estudiarán algunos métodos numéricos que se aplican no sólo al problema de los tres cuerpos, sino también al de los n cuerpos. Por ejemplo se pueden estudiar aproximaciones del estado de los ocho planetas de nuestro sistema solar, incluidos el sol y también el ex-planeta Plutón si se quisiese.

Capítulo 1

Principios Básicos de la Mecánica

Introducción

La mecánica es la rama de la física que se encarga del estudio del movimiento y reposo de los cuerpos, y de su evolución en el tiempo, bajo la acción de fuerzas que interactúan entre ellos.

La mecánica clásica es una formulación de la mecánica que describe el comportamiento de cuerpos físicos de tamaño macroscópicos en reposo y a velocidades pequeñas en comparación a la velocidad de la luz.

Se disponen de varias formulaciones diferentes de la mecánica clásica para describir un mismo fenómeno, las cuales llegan a la misma conclusión, es decir, todas arriban a lo mismo, salvo que difieren en sus metodologías.

- * La mecánica newtoniana es una formulación específica de la mecánica clásica que estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclídeo en tres dimensiones. La formulación básica de la mecánica newtoniana se hace en sistemas de referencia inerciales, es decir, las ecuaciones del movi-

miento se reducen a las Leyes de Newton, en honor a Isaac Newton quien hizo importantes contribuciones a esta teoría. por ejemplo la primera ley establece que todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que otros cuerpos actúen sobre él. La segunda de ellas expresa que la fuerza que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a su aceleración (como ya se aclaró en la introducción). Y por último, la tercera ley dice que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce sobre el primero una fuerza igual y de sentido opuesto.

- * La mecánica analítica es una formulación más abstracta y general que la anterior y permite el uso en igualdad de condiciones de sistemas inerciales o no inerciales. La mecánica analítica tiene, básicamente dos formulaciones: la formulación lagrangiana y la formulación hamiltoniana. Las dos llegan básicamente a los mismos resultados físicos, aunque la elección del enfoque puede depender del tipo de problema. Existen algunas diferencias entre el sistema de ecuaciones de Hamilton y el de ecuaciones de Lagrange: las ecuaciones de Lagrange son m ecuaciones y las de Hamilton son $2m$ ecuaciones. Además, las ecuaciones de Lagrange tienen m incógnitas, en tanto que las ecuaciones de Hamilton tienen $2m$ incógnitas. Otra cuestión importante es que las ecuaciones de Lagrange son de segundo orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer dos datos por incógnita para fijar las constantes arbitrarias (posición y velocidad inicial, por ejemplo) y las ecuaciones de Hamilton son de primer orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer un dato por incógnita para fijar las constantes arbitrarias (posición inicial, por ejemplo). La formulación de Hamilton es más potente que la de Lagrange y se emplea con preferencia cuando se trata de resolver

cuestiones sobre la existencia de valores constantes de un sistema, periodicidad de trayectorias, comportamientos estables, etc. No obstante, para la resolución de problemas elementales de mecánica, donde el objetivo es la obtención del sistema de ecuaciones diferenciales, el hamiltoniano aporta frecuentemente un camino más largo que el lagrangiano.

1.1. Cálculo de Variaciones

El cálculo de variaciones estudia los valores críticos de funciones definidas en espacios de dimensión infinita. Este tipo de funciones se llaman funcionales. Un espacio típico de esta clase son los espacios de curvas, es decir funciones φ cuyo dominio es un intervalo $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como ejemplo de funcional, podemos considerar la longitud de la curva:

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\varphi}(t)| dt$$

Dado un funcional J definido sobre curvas, una curva φ y otra h , definimos la derivada de Gateaux de J en φ en la dirección de h por:

$$DJ(\varphi)(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(\varphi + \epsilon h) - J(\varphi)}{\epsilon}$$

si tal límite existe.

En general, consideraremos:

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi, \dot{\varphi}, t) dt \tag{1.1}$$

donde $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con L diferenciable y $L = L(q, v, t)$ con $v = \dot{q}$.

Teorema 1.1 Si L es suficientemente diferenciable y existe Φ integrable de modo que $|L| \leq \Phi$, entonces J tiene una derivada y satisface lo siguiente:

$$DJ(\varphi)(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

L y sus derivadas están evaluadas en $(\varphi, \dot{\varphi}, t)$.

Dem.

$$\begin{aligned} DJ(\varphi)(h) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{L(\varphi + \epsilon h, \dot{\varphi} + \epsilon \dot{h}, t) - L(\varphi, \dot{\varphi}, t)}{\epsilon} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{L(\varphi + \epsilon h, \dot{\varphi} + \epsilon \dot{h}, t) - L(\varphi, \dot{\varphi}, t)}{\epsilon} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} h_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{h}_k + \frac{\partial L}{\partial t} 0 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q} h dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \end{aligned}$$

Notar que el paso al límite bajo el signo integral, se logra mediante el teorema de la convergencia mayorada. Además, notemos que dicho teorema vale para funciones de variable continua. \square

Estamos interesados en encontrar puntos críticos de la funcional J dada en (1.1), y en particular mínimos, sobre el conjunto de curvas con los mismos valores extremos.

Definición 1.2 Definimos $C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ como el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables con dominio en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ abierto y cuyo codominio es \mathbb{R}^n . Es decir:

$$C^\infty(I, \mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty \text{ tal que } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n\}.$$

Definición 1.3 Sean a y $b \in \mathbb{R}^n$, y $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto $D_{a,b}$ como el conjunto de todas las funciones φ en C^∞ tales que $\varphi(t_0) = a$ y $\varphi(t_1) = b$. En símbolos:

$$D_{a,b} = \{\varphi \in C^\infty : \varphi(t_0) = a \text{ y } \varphi(t_1) = b\}.$$

Definición 1.4 Sea J definida sobre $C(I, \mathbb{R}^n)$. Un punto crítico de J es una curva φ tal que $DJ(\varphi)(h) = 0 \quad \forall h$. Aquí h es la dirección.

Proposición 1.5 Si φ es un mínimo de J , entonces es un punto crítico.

Dem. Por un lado sabemos que:

$$J(\varphi) \leq J(\psi) \quad \forall \psi \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n).$$

En particular, para $h \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$, ocurre que $J(\varphi) \leq J(\varphi + \epsilon h) \quad \forall \epsilon$.

Sea $\epsilon > 0$ ($\epsilon < 0$), entonces ocurre que:

$$\frac{J(\varphi) - J(\varphi + \epsilon h)}{\epsilon} \leq 0 \quad (\geq 0).$$

O sea que:

$$0 \geq (0 \leq) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(\varphi) - J(\varphi + \epsilon h)}{\epsilon} = -DJ(\varphi)(h).$$

Así ocurre que $DJ(\varphi)(h) = 0$, entonces φ es un punto crítico, tal como queríamos. \square

Lema 1.6 Sea $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, continua y satisfice que $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) dt = 0 \forall h$ continua ($h \in C^\infty$) tal que $h(t_0) = h(t_1) = 0$ entonces $f = 0$.

Dem. Supongamos que $f \neq 0$ en (t_0, t_1) . Entonces existe t^* tal que $f(t^*) \neq 0$. Supongamos que $f(t^*) > 0$.

Por la continuidad de la función f , $\exists \epsilon > 0$ y $\exists \delta > 0$ tal que $f(t) > \epsilon$ con $t \in (t^* - \delta, t^* + \delta)$.

Es posible construir una función $h \in C^\infty((t_0, t_1)) \cap C([t_0, t_1])$ tal que

$$\begin{cases} h(t) = 1 & \text{en } (t^* - \frac{\delta}{2}, t^* + \frac{\delta}{2}) \\ h(t) = 0 & \text{en } (t^* - \delta, t^* + \delta)^c \end{cases}$$

y $0 \leq h \leq 1$.

Reemplazando esta función en la igualdad tenemos que:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t) dt = \int_{t^* - \delta}^{t^* + \delta} f(t)h(t) dt \geq \epsilon \int_{t^* - \delta}^{t^* + \delta} h(t) dt \geq \epsilon \int_{t^* - \frac{\delta}{2}}^{t^* + \frac{\delta}{2}} 1 dt = \epsilon\delta > 0$$

y esto es un absurdo, ya que concluimos que $0 > 0$. \square

Teorema 1.7 Sea $J = \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi, \dot{\varphi}, t) dt$ entonces, φ es un punto crítico de J si y sólo si se cumple lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Esta es conocida como la Ecuación de Euler-Lagrange.

Dem. Sea $h \in C^\infty : h(t_0) = h(t_1) = 0$. Sea además $\varphi \in D_{a,b}$. Se deduce que:

$$\varphi + \epsilon h \in D_{a,b}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Además tenemos que:

$$0 = DJ(\varphi)(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Entonces como el último sumando es cero pues $h(t_0) = h(t_1) = 0$, resulta que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] h dt = 0,$$

de lo que deducimos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

por el lema (1.6). □

Ejemplo 1.8 En el caso de la longitud de una curva, resulta que:

$$J(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\varphi}| dt$$

con $a = \varphi(t_0)$ y $b = \varphi(t_1)$ y $L(q, \dot{q}, t) = |\dot{q}|$.

Tenemos un mínimo si

$$0 = 0 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

entonces $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = c$ con c constante y así $c = \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \Rightarrow c|\dot{\varphi}| = \dot{\varphi}$. Entonces φ tiene la misma dirección y sentido que c .

Ahora bien, integrando $\dot{\varphi}$ entre $[t_0, t]$ obtenemos lo siguiente:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + c \int_{t_0}^t |\dot{\varphi}|(t) dt = \varphi(t_0) + cs(t)$$

donde $s(t)$ es la longitud de la curva entre $[t_0, t]$ y ésto describe una línea recta.

Así φ es una recta como cabría esperar.

1.2. Sistemas Mecánicos

La ecuación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

se llama la Ecuación de Euler-Lagrange del funcional $J(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi, \dot{\varphi}, t) dt$.

Hemos probado que un punto crítico de J satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son n ecuaciones de segundo orden, por ende aparecen $2n$ constantes de integración, que se determinan con las condiciones $\varphi(t_0) = a$ y $\varphi(t_1) = b$.

Las leyes de Newton constituyen una herramienta muy importante porque pueden explicar una amplia variedad de sistemas reales. Sin embargo, existen sistemas acelerados o en rotación, donde las leyes de Newton aplicadas a las fuerzas ejercidas por las partículas no se cumplen.

Los sistemas de referencia inerciales son aquellos en los que se cumplen las leyes de Newton usando sólo las fuerzas que se ejercen entre sí las partículas del sistema.

Los sistemas de referencia no inerciales pueden tratarse siguiendo dos posibilidades:

- 1) Introduciendo fuerzas que tienen que ver con la rotación o aceleración del origen del sistema de referencia.
- 2) Generalizando las leyes de Newton a una forma más amplia que pueda ser aplicable a cualquier sistema de referencia. Esta segunda posibilidad es precisamente el camino que siguieron formulaciones más generales de la mecánica clásica como la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana.

Un sistema de referencia desplazado respecto a uno inercial, girado y que se mueva a velocidad lineal y constante, sigue siendo inercial.

Un sistema de referencia en rotación, o moviéndose con aceleración respecto a un sistema inercial, da lugar a un sistema de referencia no inercial. Es decir, que en él no se cumplen las leyes de Newton.

Vamos a suponer un sistema mecánico gobernado por las ecuaciones de Newton, es decir suponemos un sistema inercial.

Sean m_1, \dots, m_n las masas de n cuerpos materiales con posiciones r_1, \dots, r_n en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 . Además vamos a suponer que sobre los cuerpos actúan fuerzas F_i con $i = 1, \dots, n$ y llamamos $F = (F_1, \dots, F_n)$. Así resulta que

$F : \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3$. Además supondremos que F sólo depende de las posiciones de los cuerpos y no del tiempo, es decir supondremos que F es autónoma.

Acorde a la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i(t)) = F_i \quad (1.2)$$

con $i = 1, \dots, n$. Estas ecuaciones no dependen del Sistema Inercial.

Además supondremos que el campo F es conservativo, es decir que existe una función potencial (sólo depende de las posiciones) $U : \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r_{i1}}, \frac{\partial U}{\partial r_{i2}}, \frac{\partial U}{\partial r_{i3}}\right).$$

Así la ecuación (1.2) se convierte en

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i(t)) = -\frac{\partial U}{\partial r_i}.$$

Por otra parte, definimos

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\dot{r}_i|^2$$

como la energía cinética y U como la potencial. Además, definimos a L como diferencia entre la energía cinética y potencial, es decir, $L = T - U$.

L se llamará el Lagrangiano. Notar que esta definición está basada sobre campos conservativos.

Las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial r_i}$$

respecto al Lagrangiano L , luego son puntos críticos de la integral de acción

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt$$

como ya lo establecimos en el teorema (1.7).

Además definimos la energía total del sistema como $E = T + U$.

El siguiente teorema nos muestra que la energía total es conservada por las soluciones de la ecuación (1.2).

Teorema 1.9 *En un sistema conservativo, E se conserva a lo largo de soluciones, es decir, E es una integral primera del sistema.*

Dem. Para ver esto, debemos derivar E y obtener 0.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\dot{r}_i|^2 + U(r_1, \dots, r_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i| \frac{\dot{r}_i}{|\dot{r}_i|} \cdot \ddot{r}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial r_i} \cdot \dot{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \ddot{r}_i - F_i) \cdot \dot{r}_i = 0. \end{aligned}$$

Y así hemos concluido con la demostración del teorema. □

Teorema 1.10 *Las soluciones de las Ecuaciones de Movimiento son puntos críticos del funcional*

$$J(r(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(r, \dot{r}) dt$$

con $L = T - U$ y $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$.

Dem. Tengamos en cuenta que un punto crítico de un funcional J es una curva φ con $DJ(\varphi) = 0$, es decir, una curva que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Por otro lado

$$L = T - U = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\dot{r}_i|^2 - U(r_1, \dots, r_n).$$

Así tenemos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i},$$

lo que implica que las soluciones de las ecuaciones de movimiento son puntos críticos por el Teorema (1.7). \square

Una de las cuestiones más importantes relacionadas con las ecuaciones de Euler-Lagrange es que se escriben igual relativas a cualquier sistema de variables. Como es de mucha importancia lo descrito anteriormente, demostremos dicho resultado, resumido en el siguiente teorema.

Teorema 1.11 *Sea $L(x, v, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben de la misma manera en cualquier sistema de variables.*

Dem. Para demostrar este resultado hagamos el cambio de variables siguiente:

$$x = f(y) \text{ con } f \text{ difeomorfismo }^1 \text{ y } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ y } g = f^{-1}.$$

Como f es una función de varias variables, entonces pondremos $x_k = f_k(y)$ e

¹aplicación biyectiva y diferenciable y con inversa diferenciable

$$y_k = g_k(x).$$

Las relaciones que quedan son:

$$\begin{aligned} v_k &:= \dot{x}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_j} \dot{y}_j = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial y_j} w_j \\ w_k &:= \dot{y}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_j \frac{\partial y_k}{\partial x_j} v_j. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Además:

$$Dg(f(y)).Df(y) = I$$

Tenemos que $L(x, v, t) = L(f(y), Df(y)\dot{y}, t) =: \bar{L}(y, w, t)$

Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} v_j. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial v_i} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial v_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

debido a que $\frac{\partial w_k}{\partial v_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ por la expresión de w_k en (1.3), y $\frac{\partial y_k}{\partial v_i} = 0$, pues tanto y como v son variables independientes de L , por lo tanto lo son entre ellas.

Además, si calculamos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right) = \sum_j \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j \partial x_i} v_j,$$

obtenemos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = \sum_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \right) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \sum_j \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j \partial x_i} v_j,$$

Restando las expresiones $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right)$ y $\frac{\partial L}{\partial x_i}$, tenemos lo siguiente:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w_k} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial y_k} \right] \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

con $i = 1, \dots, n$.

O vectorialmente podemos escribir lo anterior de la siguiente manera:

$$0 = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} \right] Dg(x)$$

y como Dg es no singular, se sigue inmediatamente lo que queríamos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial y}$$

□

Corolario 1.12 *Si en un sistema mecánico usamos coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n (posiciones de n puntos masa), entonces las ecuaciones del Sistema son:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q}.$$

Notemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange, son independientes de si el sistema es inercial o no.

Ejemplo 1.13 Consideremos un péndulo con una masa de m y con una longitud l . El péndulo ², es un sistema físico que puede oscilar bajo la acción gravitatoria u otra característica física (elasticidad, por ejemplo) y que está configurado por una masa suspendida de un punto o de un eje horizontal fijos, mediante un hilo o una varilla.

Asumiremos también que su movimiento se da en un plano, respecto a un Sistema inercial. Así, el campo de fuerzas es $F = (0, -mg)$.

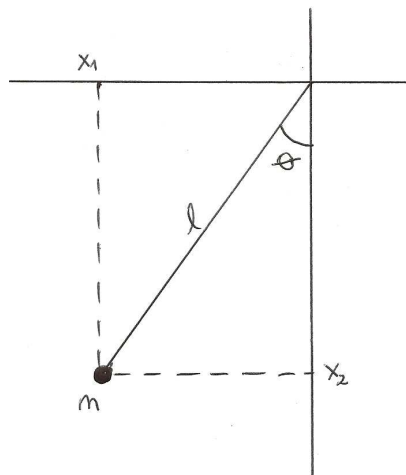


Figura 1.1: Péndulo simple

Este campo es conservativo, pues existe $U(x_1, x_2) = U(x_2) = mgx_2$ tal que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 \\ -\frac{\partial U}{\partial x_2} &= -mg \end{aligned}$$

Luego, la función de Lagrange o Lagrangiano en coordenadas cartesianas respecto

²del latín pendulus, pendiente

al Sistema inercial es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_2.$$

Pero si usamos el ángulo θ (ver dibujo) para describir la posición tenemos que:

$$\begin{aligned}x_1 &= l \operatorname{sen} \theta & v_1 &= \dot{x}_1 = l \cos \theta \dot{\theta} \\x_2 &= -l \cos \theta & v_2 &= \dot{x}_2 = l \operatorname{sen} \theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

Entonces el Lagrangiano será:

$$\bar{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

En el nuevo Sistema de coordenadas se satisfacen, por el teorema (1.11), las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} \\ml^2\ddot{\theta} &= -mgl \operatorname{sen} \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

Y ésta última es la conocida ecuación del péndulo, de la cual se observa que su movimiento es independiente de la masa m .

Definición 1.14 *En mecánica usaremos las siguientes terminologías:*

- * q_i con $i = 1, \dots, n$ son las posiciones generalizadas de n puntos masa.
- * \dot{q}_i con $i = 1, \dots, n$ son las velocidades generalizadas de n puntos masa.
- * $L(q, \dot{q}, t)$ es el Lagrangiano.

* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ son los momentos generalizados.

* $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ son las fuerzas generalizadas.

* $\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ es la integral de acción.

Ejemplo 1.15 Partícula libre en coordenadas cartesianas.

Aquí $L = T = \frac{1}{2}m|\dot{r}|^2$ (no actúa ninguna fuerza sobre ella). En coordenadas cartesianas, tenemos que el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2).$$

Aquí las velocidades generalizadas son \dot{r}_i . Los momentos generalizados son $m\dot{r}_i$.

Además, la ecuación de Lagrange será

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}_i) = 0,$$

y la integral de acción resulta

$$\frac{1}{2}m \int_{t_0}^{t_1} |\dot{r}_i|^2 dt$$

que ya vimos, en el ejemplo (1.8), que sus puntos críticos, son líneas rectas.

Para el péndulo, en coordenada θ tenemos que:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

donde θ es la coordenada generalizada y $\dot{\theta}$ es la velocidad generalizada. El momento generalizado es $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$ y la integral de acción es

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \, dt.$$

Definición 1.16 *Un campo central U es un campo de fuerzas conservativo tal que la energía potencial de una partícula sólo depende de la distancia (escalar) a un punto fijo llamado centro, es decir $U(r) = U(|r|)$ donde r es la posición.*

Ejemplo 1.17 Sea una partícula gobernada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{Mx}{|x|^3}.$$

Veamos que este campo es central.

La función $U(x) = -\frac{M}{|x|}$ es un potencial, pues:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = M|x|^{-2} \frac{x_k}{|x|} = \frac{Mx_k}{|x|^3}.$$

Entonces el gradiente de U será:

$$\nabla U = \frac{Mx}{|x|^3}.$$

Ejemplo 1.18 Encontremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para dos cuerpos materiales ($n = 2$).

El Lagrangiano resulta:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - U((x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Aquí, U es un campo central pues es el del ejemplo anterior.

Lo escribimos en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \\x_2 &= r \sin \theta,\end{aligned}$$

en donde $(x_1, x_2) = x$.

Entonces

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

Que lo podemos reescribir como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Así la expresión para el Lagrangiano queda:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - U(|x|) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r).$$

Derivando a L con respecto a r , \dot{r} , θ y $\dot{\theta}$, resulta:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - U'(r) \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Ahora, como vale que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r},\end{aligned}$$

obtenemos las siguientes conclusiones:

1) De la primera igualdad, deducimos que:

$$mr^2\dot{\theta} = h,$$

con h constante. De esta ecuación se deduce la segunda Ley de Kepler, que establece que el radio vector trazado desde un cuerpo hasta el otro, barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

2) Por otro lado, si observamos la segunda igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - U'(r) \\ \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{U'(r)}{m}. \end{aligned}$$

Definición 1.19 Una variable q_i que no aparece en L , es decir $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, se llama cíclica.

Teorema 1.20 El momento generalizado con respecto a una variable cíclica se conserva, es decir, es otra integral primera, además de la ya establecida en el Teorema (1.9). Recordemos que una integral primera depende de las variables de la ecuación diferencial y sus derivadas, y resulta constante cuando se introduce en ella la dependencia respecto al tiempo.

Dem. Sabemos que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ y debemos ver que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte.$

Como se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

con lo queda demostrado el teorema. □

1.3. Transformada de Legendre

En mecánica clásica se usa una transformada de Legendre para derivar la formulación hamiltoniana partiendo de la formulación lagrangiana, y viceversa.

Eso es posible, puesto que el lagrangiano es un función explícita de las coordenadas posicionales q_j , de las velocidades generalizadas \dot{q}_j y del tiempo. Por su parte el hamiltoniano, es función explícita de las coordenadas posicionales q_j , los momentos p_j y el tiempo. El punto importante es que los momentos pueden ser obtenidos como derivadas del lagrangiano, es decir

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

con lo cual estamos en la condiciones para construir el hamiltoniano a partir del lagrangiano.

Definición 1.21 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la transformada de Legendre como:

$$f^*(p) = \sup_{x \in A} [p \cdot x - f(x)],$$

donde $p \cdot x$ denota el producto escalar o producto interno entre vectores de \mathbb{R}^n .

Si f es convexa y diferenciable, el supremo (si lo hay) ocurre en $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(p))$, donde $p = \nabla f(x(p))$. La igualdad anterior se obtiene derivando la expresión de la transformada con respecto a x e igualando a cero.

Para una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la transformada de Legendre se expresa como:

$$f^*(p) = \sup_{x \in I} [xp - f(x)].$$

En este caso, si el supremo existe, ocurre en $p = f'(x(p))$, de donde podemos escribir que $x(p) = (f')^{-1}(p)$ si existiera la inversa de f' .

Ejemplo 1.22 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, entonces su transformada de Legendre $f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [xp - f(x)]$, resulta:

* Si $p > 1$ entonces $f^*(p) = \infty$.

* Si $p < -1$ entonces $f^*(p) = \infty$.

* Si $-1 \leq p \leq 1$ entonces $f^*(p) = 0$.

Ejemplo 1.23 Sea $f(x) = \frac{1}{2}mx^2$.

Como $f'(x) = mx = p$ es biyectiva entonces $x(p) = \frac{p}{m}$.

Así, resulta que:

$$f^*(p) = pp \frac{1}{m} - f\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Ejemplo 1.24 Sea $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ con $\alpha > 1$ y $x \geq 0$.

Como $f'(x) = x^{\alpha-1} = p$ es biyectiva, entonces $x(p) = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Así, obtenemos lo siguiente:

$$f^*(p) = pp^{\frac{1}{\alpha-1}} - f(p^{\frac{1}{\alpha-1}}) = p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} = \frac{1}{\beta} p^\beta$$

con $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ o equivalentemente $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Teorema 1.25 La transformada de Legendre de $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

Dem. Debemos ver que:

$$f^*(tp_1 + (1-t)p_2) \leq tf^*(p_1) + (1-t)f^*(p_2),$$

para todo p_1 y $p_2 \in A$ y $t \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $f^*(tp_1 + (1-t)p_2) = \sup_x [tp_1 \cdot x + (1-t)p_2 \cdot x - f(x)]$

Ahora bien, si reescribimos a $f(x)$ como $tf(x) + (1-t)f(x)$, obtenemos que lo anterior es igual a:

$$\sup_x [t(p_1 \cdot x - f(x)) + (1-t)(p_2 \cdot x - f(x))] \leq tf^*(p_1) + (1-t)f^*(p_2),$$

ya que el supremo de una suma es menor o igual a la suma de los supremos. \square

Teorema 1.26 Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa con f diferenciable y el gradiente $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertible (determinante de la matriz jacobiana distinto de cero), entonces $f^{**} = f$.

Dem. Sabemos que $f^*(p) = \sup_x [p \cdot x - f(x)]$ y $p = \nabla f(x(p))$

Como $f^*(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$, podemos escribir:

$$f(x(p)) = p \cdot x(p) - f^*(p) \leq \sup_p [p \cdot x(p) - f^*(p)] = f^{**}(x(p)).$$

Así resulta que $f \leq f^{**}$.

Por otro lado, tenemos que:

$$f^*(p) = \sup_x [p \cdot x - f(x)] \geq p \cdot x - f(x)$$

o de manera equivalente

$$p \cdot x \leq f(x) + f^*(p)$$

Entonces

$$f(x) \geq p \cdot x - f^*(p) \quad \forall p$$

³Esta desigualdad es conocida como la desigualdad de Young

Ahora bien, si tomamos supremo sobre p , obtenemos:

$$f(x) \geq \sup_p [p \cdot x - f^*(p)] = f^{**}(x).$$

Así concluimos que $f = f^{**}$. □

1.4. Ecuaciones de Hamilton

Consideremos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

donde

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Asumiremos de ahora en más que el Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexo en $\dot{q} \forall (q, t)$ con $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ biyectiva.

Teorema 1.27 *Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden:*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

donde la función $H(q, p, t)$ es la Transformada de Legendre de $L(q, \dot{q}, t)$ como función de \dot{q} .

A H se lo conoce con el nombre de Hamiltoniano.

Dem. Tenemos que:

$$H(q, p, t) = \sup_{\dot{q}} [p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)]$$

El supremo se alcanza en $\dot{q}(q, p, t)$ con

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}(q, p, t), t).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k(q, p, t) \right) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \end{aligned}$$

Derivando H respecto de p_j , obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial p_k}{\partial p_j} \dot{q}_k(q, p, t) + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} \right]$$

Como la derivada $\frac{\partial p_k}{\partial p_j}$ es uno si $j = k$, y cero en otro caso, y además, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$, lo cual es cierto porque se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, ocurre que

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(q, p, t).$$

Así hemos demostrado que:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}.$$

Ahora calculemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} \\
 &= -\frac{\partial L}{\partial q_j} \\
 &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
 &= -\dot{p}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Hemos demostrado que las ecuaciones de Euler-Lagrange implican las ecuaciones de Hamilton.

Para el recíproco, supongamos que se verifican las ecuaciones de Hamilton, y veamos que éstas implican las de Euler-Lagrange, en donde el Hamiltoniano es la transformada de Legendre del Lagrangiano.

Debemos ver que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q},$$

en donde

$$H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$$

y

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t).$$

En primer lugar observemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{p}.$$

Ahora calculemos el término $\frac{\partial L}{\partial q}$.

Despejando L de la expresión del Hamiltoniano, obtenemos:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - H \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, t \right).$$

Ahora bien, derivemos la expresión anterior respecto a q :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}},$$

y sabiendo que se verifican las ecuaciones de Hamilton, obtenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p},$$

con lo que queda culminada la demostración del teorema. \square

El siguiente teorema nos muestra, que si la energía cinética tiene una forma cuadrática, entonces el Hamiltoniano resulta ser suma de dicha energía con la potencial.

Teorema 1.28 *Supongamos que $L = T - U(q)$ y además suponemos que T es una función cuadrática de \dot{q} , es decir,*

$$T(q, \dot{q}, t) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Entonces ocurre que $H = T + U$.

Dem.

Tenemos por hipótesis que $T = \dot{q}^t A(q, t) \dot{q}$ (donde A es la matriz de $n \times n$ con coeficientes a_{ij}), entonces:

$$H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$$

con $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t)$. Además:

$$L = \dot{q}^t A(q, t) \dot{q} - U(q).$$

Derivando L respecto de \dot{q} , obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q, t)\dot{q} + A^t(q, t)\dot{q} = p$$

Reemplazando en H nos queda:

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \\ &= p^t\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \\ &= \dot{q}^t[A(q, t) + A^t(q, t)]\dot{q} - (\dot{q}^t A(q, t)\dot{q} - U(q)) \\ &= \dot{q}^t A^t(q, t)\dot{q} + U \\ &= \dot{q}^t A(q, t)\dot{q} + U \\ &= T + U. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.29 Consideremos ecuaciones de movimiento como la siguiente:

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

con $q \in \mathbb{R}$.

Entonces el Hamiltoniano será:

$$H = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + U(q),$$

ya que la energía cinética es de la forma mencionada en el teorema anterior.

Por lo que resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -U'(q) \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p \end{aligned}$$

con $p = \dot{q}$.

Si aplicamos lo anterior al resorte, $\ddot{x} = -kx$ obtenemos:

$$U(x) = k\frac{x^2}{2}$$

$$H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{k}{2}x^2$$

De lo que obtenemos:

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = kx$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$$

Observemos que los sistemas unidimensionales sin fricción, siempre son conservativos.

Corolario 1.30 Si $(p(t), q(t))$ es solución del Hamiltoniano y H es independiente de t , entonces se conserva.

Dem. Derivemos H respecto de t y veamos que es cero.

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

□

Definición 1.31 Si una coordenada q_i no aparece en el Hamiltoniano se llama cíclica y $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$.

Observación 1.32 q_i es cíclica para H si y sólo si q_i es cíclica para L , pues recordemos que:

$$H(p, q, t) = \sup_{\dot{q}} [p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)].$$

Corolario 1.33 Si q_i es cíclica entonces p es una integral primera. En este caso la variación de las restantes coordenadas es la misma que el sistema de $n - 1$ coordenadas q_2, \dots, q_n y el Hamiltoniano

$$\bar{H}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, t) = H(p_1, \dots, c, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$$

Dem. Supongamos que $i = 1$ y escribamos $p = (p_1, \bar{p})$ y $q = (q_1, \bar{q})$, en donde $\bar{p} = (p_2, \dots, p_n)$ y $\bar{q} = (q_2, \dots, q_n)$.

Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \quad \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}} \quad \dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}.$$

Estas ecuaciones muestran que $p_1 = cte = c$ y aparece en las ecuaciones como un parámetro.

Una vez que resolvamos las $2n - 2$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}} \\ \dot{\bar{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} \end{aligned}$$

se encuentra q_1 por medio de la ecuación:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1},$$

que se resuelve por integración. □

Ejemplo 1.34 En este ejemplo encontraremos las ecuaciones de Hamilton para el problema de los dos cuerpos en coordenadas esféricas.

Sean \mathbf{r}_0 y \mathbf{r}_1 las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 de los cuerpos y sean m_0, m_1 las masas de ellos.

Sabemos que se satisface lo siguiente, por las leyes de Newton (se detallará más sobre esto en el capítulo 2):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0'' &= Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} \\ \mathbf{r}_1'' &= Gm_0 \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^3}.\end{aligned}$$

Aquí G es una constante gravitacional.

En coordenadas “heliocéntricas”, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$. De lo que deducimos que:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_0 = -G(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} = -G(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Como ocurre que:

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = -G(m_0 + m_1) \left(-|\mathbf{r}|^{-2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) = G(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

podemos concluir que el campo

$$U(\mathbf{r}) = \frac{-G(m_0 + m_1)}{|\mathbf{r}|}$$

es conservativo.

El Lagrangiano es: $L = T - U$ donde T es la energía cinética y U la potencial.

$$L = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{2} + \frac{G(m_0 + m_1)}{|\mathbf{r}|},$$

donde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

El Hamiltoniano es entonces:

$$H = \frac{\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2}{2} - \frac{G(m_0 + m_1)}{|\mathbf{r}|} = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}).$$

Ahora escribamos lo anterior a coordenadas esféricas, por lo que tenemos:

$$x = \rho \operatorname{sen}\psi \cos\theta = x_1$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi = x_2$$

$$z = \rho \cos\psi = x_3$$

Derivando obtenemos las siguientes relaciones:

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \operatorname{sen}\psi \cos\theta + \rho \dot{\psi} \cos\psi \cos\theta - \rho \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\rho} \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \rho \dot{\psi} \cos\psi \operatorname{sen}\theta + \rho \dot{\theta} \cos\theta \operatorname{sen}\psi$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\rho} \cos\psi - \rho \dot{\psi} \operatorname{sen}\psi$$

O lo que se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\psi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\psi \end{pmatrix} \dot{\rho} + \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta \\ \cos\psi \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi \end{pmatrix} \rho \dot{\psi} + \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\psi \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \rho \dot{\theta}$$

Estos tres vectores son ortogonales entre sí. Entonces:

$$T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\psi}{2}.$$

Esta es la energía cinética en coordenadas esféricas y $U(\mathbf{r}) = U(\rho)$ es la energía potencial. Así el Lagrangiano resulta:

$$L(\rho, \theta, \psi, \dot{\rho}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\psi}{2} + \frac{G(m_0 + m_1)}{\rho}.$$

Encontremos ahora el Hamiltoniano $H(P_\rho, P_\theta, P_\psi, \rho, \theta, \psi)$, donde:

$$\begin{aligned} P_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \dot{\rho} \\ P_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \rho^2 \dot{\psi} \\ P_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \rho^2 \text{sen} \psi \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Llegamos a la siguiente expresión para el hamiltoniano, utilizando el teorema (1.28):

$$H(P_\rho, P_\theta, P_\psi, \rho, \theta, \psi) = \frac{1}{2} \left(P_\rho^2 + \frac{P_\psi^2}{\rho^2} + \frac{P_\theta^2}{\rho^2 \text{sen}^2 \psi} \right) - \frac{G(m_0 + m_1)}{\rho}.$$

Hay una variable cíclica que es θ , pues no aparece en el Hamiltoniano. Por lo tanto ocurre que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = P_\theta = \text{cte},$$

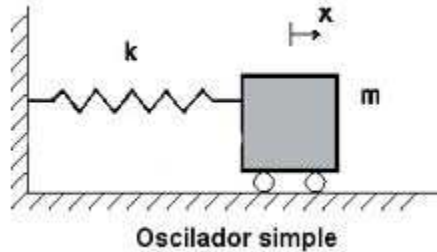
es decir es una integral primera. Entonces $\rho^2 \text{sen}^2 \psi \dot{\theta} = \text{cte}$.

Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\begin{aligned} \dot{P}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \rho^{-3} P_\psi^2 + \frac{\rho^{-3} P_\theta^2}{\text{sen}^2 \psi} - \frac{G(m_0 + m_1)}{\rho^2} \\ \dot{P}_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{P_\theta^2}{\rho^2} \text{sen}^{-3} \psi \cos \psi \\ \dot{P}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial P_\rho} = \frac{2P_\rho}{2} = P_\rho \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial P_\psi} = P_\psi \rho^{-2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{\rho^{-2} P_\theta}{\text{sen}^2 \psi} \end{aligned}$$

Estas últimas seis son las ecuaciones de Hamilton para el problema de los dos cuerpos.

Ejemplo 1.35 Obtener las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x sometida a una fuerza $-Kx$ (K constante positiva).



Se construye el Lagrangiano: La coordenada generalizada es x . La energía cinética (en coordenadas cartesianas) es,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Por otro lado, la única fuerza que actúa sobre la partícula que oscila es $-Kx$ y si se define el potencial cero en el origen,

$$U = \frac{1}{2}Kx^2$$

entonces,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2.$$

Se buscan los momentos generalizados: La coordenada generalizada es x y el momento generalizado es,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Se escribe el Hamiltoniano: Debido a que el sistema es conservativo y el tiempo no aparece en forma explícita, el Hamiltoniano H es justamente la energía total del sistema,

$$H = T + U = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2.$$

Por último, se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton: Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Kx \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}.\end{aligned}$$

Al sustituir la segunda de las ecuaciones anteriores para p_x en la primera, resulta, $Kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$ o equivalentemente, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ con $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, que es la familiar ecuación de movimiento para el resorte (oscilador armónico simple).

1.5. Teorema de Liouville

El teorema de Liouville es un resultado de la mecánica hamiltoniana sobre la evolución en el tiempo de un sistema mecánico. El mismo establece que el volúmen de una determinada región D se mantendrá invariante a pesar de que se estirará y se encogerá a medida que el tiempo transcurra.

Por simplicidad asumiremos que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Definición 1.36 *El $2n$ -dimensional espacio con coordenadas $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ se llama espacio de fases.*

Observación 1.37 Asumiremos que las soluciones $(p(t), q(t))$ están definidas $\forall t$.

Vamos a considerar el flujo de las ecuaciones de Hamilton Φ_t . Por esa razón debemos desarrollar este concepto.

El concepto de flujo es una nueva manera de mirar las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) \quad f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

El flujo es una ecuación $\Phi_t : \Omega \longrightarrow \Omega$, es decir una transformación (movimiento) del espacio de fases \mathbb{R}^n . Supongamos que la ecuación (1.5) corresponde a la trayectoria seguida por una partícula que obedece cierta ley física. Entonces $\Phi_t(x)$ es la posición después de t segundos que ocupa la partícula, que inicialmente está en x . Notemos que al suponer que el Hamiltoniano no depende del tiempo, es irrelevante el valor exacto del tiempo inicial (es lo mismo ver como evoluciona la partícula de x a $\Phi_t(x)$ hoy o mañana). La definición formal del flujo es la siguiente.

Definición 1.38 *El flujo Φ de la ecuación (1.5) es la función $\Phi_t(x) = \varphi(t)$, donde φ es solución de (1.5) y verifica que $\varphi(0) = x$.*

Teorema 1.39 *El flujo Φ_t preserva volúmenes, es decir ocurre que:*

$$\text{vol}(D) = \text{vol}\Phi_t(D).$$

Este es conocido como el Teorema de Liouville.

Antes de demostrar este teorema notemos que si Φ_t es el flujo de $\dot{x} = f(x)$, entonces ocurre que:

$$\Phi_t(x) = x + tf(x) + O(t^2),$$

en efecto, desarrollando Φ_t en serie de Taylor respecto a t y para un x fijo, se obtiene:

$$\Phi_0(x) + \left. \frac{d}{dt} \Phi_t(x) \right|_{t=0} t + O(t^2) = x + f(x)t + O(t^2).$$

Lema 1.40 Si $A = a_{ij}$ es una matriz, entonces:

$$\det(I + At) = 1 + \operatorname{tr} A t + O(t^2).$$

Dem. Sabemos que, por definición

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma_i},$$

donde la suma se calcula sobre todas las permutaciones σ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. La posición del elemento i después de la permutación σ se denota como σ_i . El conjunto de todas las permutaciones es P_n . Para cada σ , $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es la signatura de σ , esto es $+1$ si la permutación es par y -1 si es impar.

Ahora calculemos:

$$\begin{aligned} \det(I + At) &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (I + At)_{i,\sigma_i} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (I + At)_{1,\sigma_1} \dots (I + At)_{n,\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) [(I_{1,\sigma_1} \cdot I_{2,\sigma_2} \dots I_{n,\sigma_n}) + tA_{1,\sigma_1} I_{2,\sigma_2} \dots I_{n,\sigma_n} + \\ &\quad tA_{2,\sigma_2} I_{1,\sigma_1} I_{3,\sigma_3} \dots I_{n,\sigma_n} + \dots] \\ &= 1 + \operatorname{tr} A t + O(t^2). \end{aligned}$$

□

Lema 1.41 Sea

$$V(t) = \text{vol}[\Phi_t(D)] = \int_{\Phi_t(D)} dx = \int_D |\det[D\Phi_t]| dx,$$

entonces ocurre que:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = \int_D \text{div } f dx.$$

Dem. La igualdad $\Phi_t(x) = x + f(x)t + O(t^2)$ dice que $\Phi_t(x) = x + f(x)t + t^2 M(x)$

y derivando respecto de x y haciendo tender $t \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial x} = I + \frac{\partial f(x)}{\partial x} t + O(t^2).$$

Así:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_D \left| \det \left[\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial x} \right] \right| dx \\ &= \int_D \left| \det \left[I + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2) \right] \right| dx \\ &= \int_D |1 + \text{div } f t + O(t^2)| dx \\ &= \int_D 1 + \text{div } f t + O(t^2) dx \end{aligned}$$

Entonces ocurre que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_D [1 + \text{div } f h + O(t^2)] - 1 dx \right) \\ &= \int_D \text{div } f dx. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.42 Si $\operatorname{div} f = 0$ en Φ_t , entonces se preservan los volúmenes.

Dem. Si $\operatorname{div} f = 0$ entonces:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

lo que implica que se preservan los volúmenes por el lema (1.41). \square

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Liouville.

Para las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}$$

y la función f definida como:

$$f = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right),$$

obtenemos que:

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) = 0.$$

Entonces se preservan los volúmenes por el corolario (1.42).

Una aplicación importante del Teorema de Liouville es que en un sistema Hamiltoniano no existen equilibrios ni ciclos límite.⁴

Si suponemos la existencia de un punto de equilibrio x , y consideramos una bola

⁴Un ciclo límite es una trayectoria cerrada y aislada. Es decir que las trayectorias vecinas no son cerradas, son espirales que salen o convergen al ciclo límite.

con centro en él de radio r , el volúmen de ese entorno debería ser constante en todo momento, según el Teorema de Liouville, es decir:

$$|B(x, r)| = |\Phi_t(B(x, r))|,$$

lo que no es cierto pues las trayectorias convergen a x por ser un punto de equilibrio, y entonces ocurre que $|B(x, r)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t(B(x, r))| = 0$. Esto explica porqué no pueden existir puntos de equilibrio o ciclos límite.

Ante esta descripción del conjunto de principios básicos de la mecánica, nos parece válido mencionar que son útiles para el desarrollo de los siguientes capítulos e importantes como primer acercamiento al problema de los dos cuerpos, lo que se puede observar en el ejemplo (1.18).

También es importante destacar que existen diferentes formulaciones de la mecánica, la cual tiene un elevado contenido de modelos matemáticos. Sin embargo, no es la elegancia ni el rigor formal de estos modelos un criterio adecuado para valorar una teoría de la mecánica, pues cada teoría (y sus principios subyacentes) es tan buena como la interpretación que realiza de las observaciones experimentales de la realidad física. Si las predicciones teóricas se corresponden adecuadamente con las observaciones experimentales, la teoría será adecuada, independientemente de su elegancia matemática. Por el contrario, si los resultados no se corresponden con las observaciones, llegaremos a la conclusión de que se precisa otra teoría distinta para el fenómeno en cuestión.

Capítulo 2

El Problema de los dos cuerpos

Introducción

En este capítulo haremos, en primer lugar, una introducción sobre el movimiento de n cuerpos y también estudiaremos el centro de masa de ese sistema de partículas. El momento lineal, el momento angular, la energía y su conservación, serán tratados también en esta primera parte.

En segundo lugar, investigaremos el movimiento de dos cuerpos que están sujetos sólo a atracción mutua. Asumiremos que los cuerpos son simétricamente esféricos y que se mantienen las leyes de Newton, es decir consideraremos un sistema inercial, así los cuerpos pueden ser considerados como puntos masas. Los métodos usados son generales y mucho del lenguaje utilizado será el de un planeta viajando alrededor del sol.

2.1. Ecuaciones de Movimiento para n cuerpos

La ley de movimiento de n puntos masas de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}^3$ en un sistema inercial es:

$$\frac{d(m_i \dot{x}_i)}{dt} = -k^2 m_i \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3}$$

donde $i = 0, 1, \dots, n$ y $k = 0,01720209895 \sqrt{(AU)^3 M^{-1} d^{-2}}$.¹ Esta ley de movimiento se deduce de la Ley de gravitación universal, ya mencionada en la introducción.

Asumiendo que las masas no cambian con el tiempo, podemos escribir:

$$\ddot{x}_i = -k^2 \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3}$$

Podemos escribir el sistema anterior de manera reordenada con otro origen. Sea m_0 una masa que domina al resto. Escribamos el sistema reordenándolo con origen en esa masa.

Llamaremos $\mathbf{r}_i = x_i - x_0$ con $i = 1, \dots, n-1$. Así \mathbf{r}_i son llamadas las coordenadas heliocéntricas del sistema. En estas coordenadas tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= \ddot{x}_i - \ddot{x}_0 = -k^2 \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} + k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_0 - x_j}{|x_0 - x_j|^3} \\ &= -k^2 \sum_{j=0, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} - k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \\ &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) \end{aligned}$$

¹Esta constante es la relacionada al Sistema Solar, pues M es la masa del sol. Además d son días y AU es una unidad astronómica, que es aproximadamente el semieje mayor de la órbita del planeta Tierra alrededor del sol, es decir, $149597870km$.

con $i = 1, \dots, n - 1$.

Este sistema es de $3n - 6$ ecuaciones. Además, es no inercial, pues $\ddot{x}_0 \neq 0$ (el sistema está acelerado).

El término $-k^2(m_0 + m_i)\frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3}$ es conocido como término principal, pues aparece la masa del cuerpo mayor y el término $-k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right)$ se conoce como el término de las perturbaciones.

Si agregamos un nuevo cuerpo de masa $m \ll m_i$ con $i = 1, \dots, n - 1$ (de tal manera que la podamos despreciar y recordando que m_0 es el cuerpo de mayor masa), su posición \mathbf{r} satisface:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 m_0 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - k^2 \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) \quad (2.1)$$

Las ecuaciones

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -k^2(m_0 + m_i)\frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) \quad (2.2)$$

están desacopladas de esta última ecuación (2.1).

El miembro de la derecha de las ecuaciones (2.2) se puede escribir como un gradiente de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i(U_i + R_i) \quad (2.3)$$

con $i = 1, \dots, n - 1$, donde se tiene que:

$$U_i = \frac{k^2(m_0 + m_i)}{|\mathbf{r}_i|}$$

$$R_i = k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right)$$

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial r_{i_1}}, \frac{\partial}{\partial r_{i_2}}, \frac{\partial}{\partial r_{i_3}} \right)$$

U_i es la función fuerza y R_i es la función de perturbación.

La expresión dada en (2.3), nos está diciendo que el sistema es conservativo. Y como ya se trabajó en el capítulo 1, más específicamente en el teorema (1.9), esto dice que la energía total se conserva. A su vez, de esto se puede inferir, por el lema (1.28), que el Hamiltoniano es igual a la energía total, y por el corolario (1.30), concluimos que el Hamiltoniano se conserva.

2.1.1. Movimiento del centro de masa

Definición 2.1 *El centro de masa de un sistema de n partículas se define como el punto cuyo vector de posición R viene dado por:*

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i,$$

en donde M es la suma total de todas las masas.

Supongamos que se tiene un sistema constituido por n partículas que interactúan entre sí y sobre el cual actúan fuerzas externas, entonces la fuerza resultante sobre la i -ésima partícula estará compuesta (en general) por dos partes: una parte es la resultante de todas las fuerzas externas F_i^{ex} y, la otra parte, de todas las fuerzas

internas F_i^{in} que se originan de la interacción de todas las otras $n - 1$ partículas con la i -ésima. La fuerza F_i^{in} podrá ser calculada mediante la suma vectorial de todas las fuerzas individuales F_{ij}^{in} (debe leerse como la fuerza aplicada sobre la i -ésima partícula debida a la j -ésima),

$$F_i^{in} = \sum_{j=1}^n F_{ij}^{in}.$$

Por lo tanto, la fuerza total F_i sobre la i -ésima partícula vendrá dada por:

$$F_i = F_i^{in} + F_i^{ex}.$$

Ahora bien, a partir de la segunda ley de Newton, se puede escribir para la i -ésima partícula,

$$F_i = m_i \ddot{r}_i = F_i^{in} + F_i^{ex},$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_i r_i) = F_i^{ex} + \sum_{j=1}^n F_{ij}^{in},$$

y al sumar sobre i en ambos miembros de esta expresión, obtenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) = \sum_{i=1}^n F_i^{ex} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij}^{in}$$

(en este último sumando $i \neq j$ porque no hay autofuerzas), que representa la fuerza total.

Si sustituimos la expresión del centro de masas en ésta última ecuación, arribamos a:

$$\frac{d^2}{dt^2} (MR) = F^{ex} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij}^{in}$$

donde $F^{ex} = \sum_{i=1}^n F_i^{ex}$. Pero si se supone que se cumple la tercera ley de Newton, tenemos:

$$\sum_{i,j=1 \atop i \neq j}^n F_{ij}^{in} = \sum_{i,j=1 \atop i < j}^n (F_{ij}^{in} + F_{ji}^{in}) = 0,$$

por lo tanto se concluye que:

$$M\ddot{R} = F^{ex},$$

que es un resultado importantísimo que establece que:

El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si fuera una partícula real, de masa igual a la masa total del sistema sobre el cual actúa la fuerza externa total e independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas, siempre que se cumpla la tercera ley de Newton.

2.1.2. Momento lineal y su conservación

El momento lineal de la i -ésima partícula se define como:

$$p_i = m_i \dot{r}_i,$$

y al sumar sobre i en ambos miembros de esta expresión, se obtiene el momento lineal total p del sistema

$$p = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i,$$

o también:

$$p = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right).$$

Si reemplazamos la expresión del centro de masa, tenemos:

$$p = \frac{d}{dt}(MR) = M\dot{R},$$

que dice que:

El momento lineal de un sistema de partículas es el mismo que si fuera una partícula real de masa M localizada en la posición de centro de masa y que se mueve de la manera en que él lo hace. Es decir, el momento lineal del sistema de partículas es el mismo que el de su centro de masa.

Además, si derivamos respecto del tiempo, se tiene:

$$\dot{p} = M\ddot{R} = F^{ex}$$

de la cual se puede enunciar la ley de conservación del momento lineal para un sistema de partículas de la siguiente manera:

El momento lineal para un sistema de partículas libre de fuerzas externas ($F^{ex} = 0$) se conserva (es decir, es constante en el tiempo) y es igual al momento lineal de su centro de masa.

2.1.3. Momento angular y su conservación

El momento angular L_i de la i -ésima partícula en torno al origen del sistema de referencia viene dado por

$$L_i = r_i \times p_i,$$

que al sumar sobre i en sus dos miembros proporciona el momento angular total L del sistema de partículas, pudiéndose escribir:

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n r_i \times p_i = \sum_{i=1}^n (r_i \times m_i \dot{r}_i).$$

Definimos ahora un vector de posición r'_i , que posicione a la i -ésima partícula con respecto al centro de masa del sistema. Es decir, podemos escribir que,

$$r_i = r'_i + R.$$

Ahora si sustituimos esta última expresión en la de L , llegamos a:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n ((r'_i + R) \times m_i(\dot{r}'_i + \dot{R})) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i(r'_i \times \dot{r}'_i + r'_i \times \dot{R} + R \times \dot{r}'_i + R \times \dot{R}) \\ &= \sum_{i=1}^n (r'_i \times m_i \dot{r}'_i) + \left(\sum_{i=1}^n m_i r'_i \right) \times \dot{R} + R \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i r'_i \right) + \sum_{i=1}^n m_i (R \times \dot{R}) \\ &= \sum_{i=1}^n (r'_i \times p'_i) + R \times M \dot{R} \end{aligned}$$

dado que

$$\sum_{i=1}^n m_i r'_i = \sum_{i=1}^n m_i (r_i - R) = \sum_{i=1}^n m_i r_i - \sum_{i=1}^n m_i R = MR - MR = 0.$$

O equivalentemente, podemos escribir:

$$L = \sum_{i=1}^n (r'_i \times p'_i) + R \times p,$$

de la que se puede concluir que:

El momento angular total del sistema de partículas respecto al origen de un sistema de referencia escogido, es la suma del momento angular del centro de masa del sistema respecto a dicho origen (segundo sumando) y el momento angular del sistema con respecto a la posición del centro de masa (primer sumando).

Como ocurre que

$$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt} + \frac{dr}{dt} \times p = r \times F + 0 = M^{ext},$$

donde M^{ext} es el momento de las fuerzas exteriores, el principio de conservación del momento angular afirma que:

Si el momento de las fuerzas exteriores es cero (lo que no implica que las fuerzas exteriores sean cero), el momento angular total se conserva, es decir, permanece constante.

$M^{ext} = r \times F$ será cero si la fuerza y el vector posición tienen la misma dirección. Este tipo de fuerzas se llaman Fuerzas Centrales.

2.1.4. Energía y su conservación

Lema 2.2 *Sea*

$$D = \bigcup_{i \neq j} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n} | x_i = x_j\}.$$

Ocurre que la función $U : \mathbb{R}^{3n} - \{D\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$U(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} K^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|}$$

es un potencial para el sistema de los n -cuerpos, vale decir su gradiente respecto de las variables x_i , es la fuerza sobre la partícula i .

Dem. Debemos demostrar que:

$$\nabla_{x_i} U = -K^2 \sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{m_j m_i}{|x_j - x_i|^3} (x_j - x_i).$$

Empecemos calculando:

$$\nabla_{x_k} U = \frac{1}{2} K^2 \left(\sum_{i=1, i \neq k}^n \nabla_{x_k} \frac{m_i m_k}{|x_k - x_i|} + \sum_{j=1, j \neq k}^n \nabla_{x_k} \frac{m_k m_j}{|x_j - x_k|} \right).$$

Por otro lado,

$$\nabla_{x_k} \frac{1}{|x_k - x_i|} = (-1) |x_k - x_i|^{-2} \frac{(x_k - x_i)}{|x_k - x_i|} = -\frac{(x_k - x_i)}{|x_k - x_i|^3}.$$

Ahora bien, si reemplazamos esta última expresión en la de $\nabla_{x_i} U$ obtenemos lo deseado. □

La energía cinética en este sistema de los n cuerpos, como ya se estableció en el capítulo 1, se define como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{x}_i|^2,$$

mientras que la energía potencial es $P = -U$, donde U es el del lema anterior.

Se define además, la energía total como $E = T + P$ y se conserva. Este resultado sobre la conservación se demostró ya en el teorema (1.9) del capítulo 1 de este escrito.

El teorema de la conservación de la energía mecánica establece que cuando un cuerpo se mueve, debido únicamente a la presencia de un campo conservativo, como lo es el gravitatorio, la suma de su energía cinética y potencial permanece constante en el tiempo.

2.2. Ecuaciones de Movimiento para dos cuerpos

Consideremos el movimiento de dos masas m_1 y m_2 con vectores posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 referidas a algún origen o de un sistema inercial.

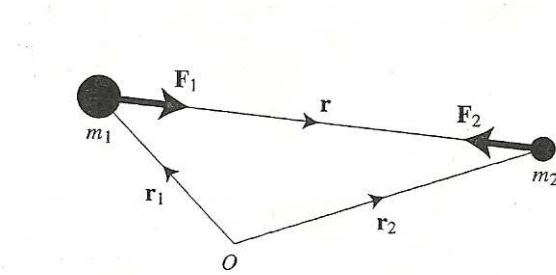


Figura 2.1: Fuerzas actuando sobre dos masas

Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ que denota la posición relativa de la masa m_2 con respecto a la m_1 . Las fuerzas gravitacionales y las aceleraciones de las masas son:

$$\mathbf{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \mathbf{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2, \quad (2.4)$$

donde $G = 6,6726 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$ es la constante gravitacional universal.

La constante de gravitación universal fue medida por primera vez por Henry Cavendish en 1798. La medida de “ G ” ha sido repetida por otros experimentadores con diversas mejoras y refinamientos. Todas las medidas de “ G ” son difíciles a causa de la extremada pequeñez de la atracción gravitatoria. Aunque “ G ” fue una de las primeras constantes físicas universales determinadas, sigue siendo una de las conocidas con menor exactitud. Esta constante determina la intensidad de la fuerza de atracción gravitatoria entre los cuerpos. Se denota por G y aparece tanto en la Ley de gravitación universal de Newton como en la Teoría general de la relatividad de Einstein.

Entonces:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0,$$

y ésta última puede ser integrada directamente:

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a}$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b} \quad (2.5)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes.

Sea

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

que denota el vector de posición del centro de masas para dos cuerpos, entonces la ecuación (2.5) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{m_1 + m_2},$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{a}}{m_1 + m_2}.$$

Esto implica que el centro de masas es estacionario (si $\mathbf{a} = 0$) o que se mueve en línea recta (a través del origen) y a velocidad constante. Esto es un caso particular del ya tratado en (2.1.1).

Ahora consideremos el movimiento de m_2 respecto a m_1 . Para simplificar el problema, escribimos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y usando la ecuación (2.4), obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 0 \quad (2.6)$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$. Esta es la ecuación relativa del movimiento y debemos encontrar las constantes del movimiento para resolver el problema.

Haciendo el producto vectorial entre el vector \mathbf{r} y la ecuación (2.6), tenemos que $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$. Entonces

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.7)$$

con \mathbf{h} un vector constante (de modulo h). Este vector \mathbf{h} es perpendicular a \mathbf{r} y a $\dot{\mathbf{r}}$, pues es el resultado del producto vectorial, entonces el movimiento de m_2 sobre m_1 yace en un plano perpendicular a la dirección definida por \mathbf{h} . Esto implica que la posición y velocidad siempre están en el mismo plano.

La ecuación (2.7) es llamada generalmente momento angular, como ya se estableció en la sección (2.1.3)

Ya que \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ siempre viven en el mismo plano, es natural que ahora restrinjamos el movimiento a un plano (ver figura).

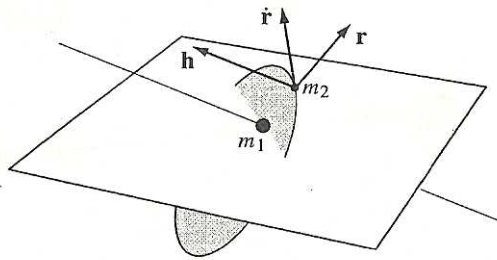


Figura 2.2: El movimiento de m_2 respecto a m_1 define un plano orbital

Transformemos entonces el sistema a coordenadas polares (r, θ) en el plano orbital, referidos al origen (centrado en m_1) y una línea referencial arbitraria correspondiente a $\theta = 0$. Para esto, enunciemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3 Sean $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ vectores unitarios, paralelo y perpendicular al radio vector \mathbf{r} respectivamente, y preservando una orientación dada, entonces la posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos sobre el plano mencionado, en

coordenadas polares de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}} \\
 \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aquí, denotamos r como el módulo de \mathbf{r} , \dot{r} como la derivada del módulo de \mathbf{r} y \ddot{r} como la derivada segunda del módulo de \mathbf{r} .

Dem. Como $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin\theta, \cos\theta)$, ocurre que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathbf{r}}} &= (-\sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta} \\
 \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene la siguiente relación:

$$\ddot{\hat{\mathbf{r}}} = \ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\theta}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{r}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + r\ddot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Y así queda demostrado lo que queríamos. □

Sustituyendo la expresión de $\dot{\mathbf{r}}$ en la ecuación (2.7) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h} &= \mathbf{r} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= \mathbf{r} \times \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times (r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= 0 + r\hat{\mathbf{r}} \times r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &= r^2\dot{\theta}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ es un vector unitario perpendicular al plano de la órbita. En consecuencia, resulta que $|\mathbf{h}| = h = r^2\dot{\theta}$. En el desarrollo de (2.9), usamos que \mathbf{r} y $\hat{\mathbf{r}}$ son vectores paralelos y además utilizamos que $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ de (2.8).

Que $|\mathbf{h}| = h = r^2\dot{\theta} = cte$ (como ya se observó en el ejemplo (1.18)), nos da información como para establecer el siguiente teorema.

Teorema 2.4 *El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Dicho resultado es conocido como la segunda ley de Kepler del movimiento planetario.*

Dem. Para demostrar lo explicitado anteriormente, consideremos el movimiento de la masa m_2 durante el intervalo de tiempo δt (ver dibujo)

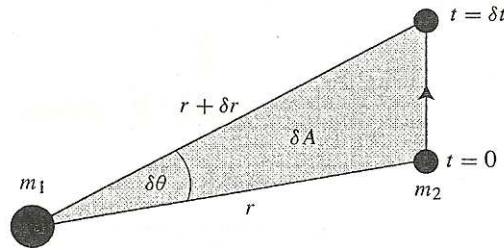


Figura 2.3: Área δA en el tiempo δt

Para $t = 0$ tenemos las coordenadas polares (r, θ) y para el tiempo $t + \delta t$ las

coordenadas polares son $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$. El área barrida por el radio vector en el tiempo δt es:

$$\delta A \approx \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \approx \frac{1}{2} r(r + \delta r) \text{sen}(\delta\theta) \approx \frac{1}{2} r^2 \delta\theta.$$

Dividiendo por δt y tomando límite para $\delta t \rightarrow 0$, tenemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h. \quad (2.10)$$

Como h es constante, eso dice que el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Y así concluimos con la prueba del teorema. \square

2.3. Posición Orbital y Velocidad

Comparando las componentes de \hat{r} en (2.8) y (2.6) tenemos que:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.11)$$

Ahora vamos a encontrar r como función de θ . Para ello necesitamos hacer la sustitución $u = \frac{1}{r}$ y eliminar el tiempo para usar que $h = r^2\dot{\theta}$.

Diferenciando r respecto del tiempo tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -h \frac{du}{d\theta} \\ \ddot{r} &= -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

Recordando que $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$, la ecuación (2.11) puede ser escrita como:

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{r h^2}{r^4} = -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2$$

Entonces en esta última ecuación si dividimos por $-h^2 u^2$, obtenemos:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}.$$

Esta última es una ecuación diferencial lineal con solución general dada por:

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{h^2}.$$

Expresando a A y B en coordenadas polares, $A = \alpha \cos \bar{\omega}$ y $B = \alpha \sin \bar{\omega}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \alpha \cos \bar{\omega} \cos \theta + \alpha \sin \bar{\omega} \sin \theta + \frac{\mu}{h^2} \\ &= \alpha (\cos(\theta - \bar{\omega})) + \frac{\mu}{h^2}. \\ &= \frac{\mu}{h^2} \left(1 + \frac{h^2 \alpha}{\mu} \cos(\theta - \bar{\omega}) \right) \end{aligned}$$

Si llamamos $e = \frac{h^2 \alpha}{\mu}$, la ecuación anterior queda escrita como:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos(\theta - \bar{\omega}))$$

Además como $u = \frac{1}{r}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(t)} &= \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \right)^{-1} \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \end{aligned}$$

que es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares con centro en un foco, donde e se llama excentricidad y $p = \frac{h^2}{\mu}$ se conoce como el semilactus rectus. (Esta afirmación será demostrada en el teorema siguiente y en un caso particular). Recordemos además que $\mu = G(m_1 + m_2)$.

Hay cuatro posibles casos:

Tipo	Excentricidad	Semilactus rectus	Pericentro
Círculo	$e = 0$	$p = a$	a
Elipse	$0 < e < 1$	$p = a(1 - e^2)$	$a(1 - e)$
Parábola	$e = 1$	$p = 2q$	$q = \frac{p}{2}$
Hipérbola	$e > 1$	$p = a(e^2 - 1)$	$a(e - 1)$

donde a es el semieje mayor de la cónica. En el caso especial de la parábola, p es definido en términos de q (distancia del foco al pericentro. El pericentro es el punto más cercano al foco en el que se encuentra uno de los cuerpos).

Para el caso de la elipse, se demostrará más adelante porque el semilactus rectus asume ese valor.

Demostraremos a continuación el siguiente resultado.

Teorema 2.5 *Una cónica en coordenadas polares se escribe como*

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Dem. Lo haremos para una elipse, entonces $p = a(1 - e^2)$. Tomamos además $\bar{\omega} = 0$, es decir consideraremos una elipse no rotada.

En coordenadas cartesianas sabemos que una elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con a y b semieje mayor y menor respectivamente. Además se cumple que:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = ae + r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(ae + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} &= 1 \\ e^2 + \frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{2er\cos\theta}{a} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

De la igualdad anterior, si trabajamos con el segundo y cuarto término y reemplazamos $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ y $b^2 = a^2(1 - e^2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2(1 - \cos^2\theta)}{a^2(1 - e^2)} &= \frac{(1 - e^2)r^2\cos^2\theta + r^2 - r^2\cos^2\theta}{a^2(1 - e^2)} \\ &= \frac{r^2 - r^2e^2\cos^2\theta}{a^2(1 - e^2)} \\ &= \frac{(1 - e^2\cos^2\theta)r^2}{(1 - e^2)a^2}. \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando en (2.12), tenemos que:

$$\frac{1 - e^2\cos^2\theta}{(1 - e^2)a^2}r^2 + \frac{2er\cos\theta}{a}r + e^2 - 1 = 0$$

que es una ecuación cuadrática en r .

Calculemos sus raíces.

$$r = \frac{\frac{-2e\cos\theta}{a} \pm \sqrt{\frac{4e^2\cos^2\theta}{a^2} - \frac{4(1-e^2\cos^2\theta)}{(1-e^2)a^2}(e^2-1)}}{\frac{2(1-e^2\cos^2\theta)}{(1-e^2)a^2}}$$

$$= \frac{\frac{-2e\cos\theta}{a} \pm \frac{2}{a}}{\frac{2(1-e^2\cos^2\theta)}{(1-e^2)a^2}}$$

De aquí salen dos soluciones, a saber:

$$1) \ r_1 = \frac{-2a(e\cos\theta - 1)}{2(1 - e^2\cos^2\theta)} = \frac{-a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

$$2) \ r_2 = \frac{-2(e\cos\theta - 1)(1 - e^2)a^2}{2a(1 - e\cos\theta)(1 + e\cos\theta)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Observamos que r_1 no tiene sentido, porque toma valores negativos (ya que en una elipse la excentricidad e es menor que 1), entonces demostramos lo que queríamos. \square

En el contexto del problema de los dos cuerpos, el movimiento de un planeta alrededor del sol es elíptico en un espacio inercial cerrado (no actúan fuerzas externas). Este hecho es conocido como la primera Ley de Kepler.

La masa m_1 está en uno de los focos de la elipse, mientras que el otro foco está vacío (observar figura siguiente).

Para calcular la longitud del segmento (paralelo al eje vertical), con extremos en el foco y en el gráfico de la elipse (es decir, el semilactus rectus), tomemos la

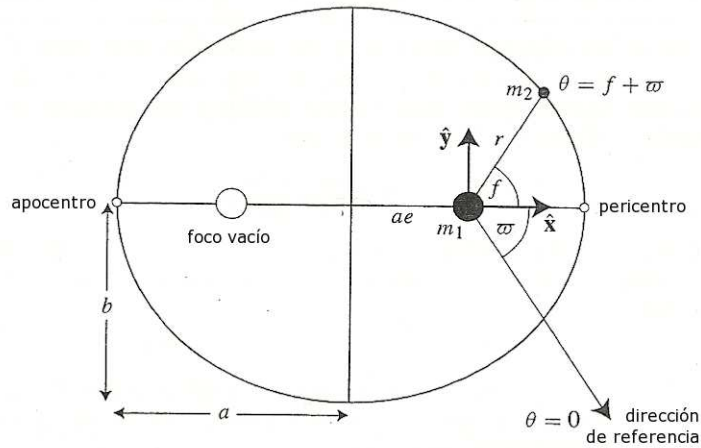


Figura 2.4: Elipse de semieje mayor a , semieje menor b , excentricidad e y longitud del pericentro $\bar{\omega}$

abscisa del foco que es $x = ae$ y reemplacemoslá en la ecuación de la elipse para obtener el valor de p correspondiente.

$$\begin{aligned} \frac{(ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ e^2 + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ y^2 &= (1 - e^2) b^2 \\ y &= \sqrt{1 - e^2} b = \sqrt{1 - e^2} a \sqrt{1 - e^2} \\ y &= a(1 - e^2) = p. \end{aligned}$$

Así, hemos visto que $p = a(1 - e^2)$ para el caso de la elipse.

Aunque la órbita de muchos cometas pueden tener $e \approx 1$ (es decir, tienen órbitas aproximadamente parabólicas), la mayoría de los miembros conocidos del siste-

ma solar tienen excentricidad mucho menor que 1. Hay notables excepciones de tal cuestión, como el ex-planeta Plutón con $e = 0,25$, Mercurio con $e = 0,21$, Nereida (luna de Neptuno) con $e = 0,75$, que es la excentricidad más grande conocida de un satélite natural, el asteroide Dioresta con $e = 0,9008$ y el asteroide 2002 RN109 con $e = 0,996$.

En el caso de una elipse, $p = a(1 - e^2)$, las cantidades “ a ” y “ e ” están relacionadas como ya dijimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2(1 - e^2) \\ r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

En mecánica celeste es costumbre usar el término longitud cuando nos referimos a un ángulo medido con respecto a la línea fija del espacio inercial. El ángulo θ es llamado “longitud verdadera”. Una simple inspección de (2.13) muestra que el mínimo y el máximo del radio de la órbita son $r_p = a(1 - e)$ y $r_a = a(1 + e)$ que ocurren cuando $\theta = \bar{\omega}$ y $\theta = \bar{\omega} + \pi$ respectivamente. Estos puntos son llamados pericentro y apocentro respectivamente, aunque otros nombres pueden ser usados en sistemas particulares, como por ejemplo, perihelio (referido al Sol), o perijove (referido a Júpiter). La distancia del centro de la elipse al foco es ae .

El ángulo $\bar{\omega}$ es llamado “longitud del pericentro”. Aunque es constante en el problema de los cuerpos, puede variar cuando se introducen perturbaciones adicionales. Es conveniente referenciar la coordenada angular desde el radio del pericentro a la línea que contiene al radiovector. Introducimos el ángulo $f = \theta - \bar{\omega}$, que es llamado “anomalía verdadera”. Puesto que $\bar{\omega}$ es constante, la curva es cerrada y la posición angular está descrita por f o θ .

Así la ecuación (2.13) puede ser escrita como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (2.14)$$

Luego si usamos coordenadas cartesianas centradas en la masa m_1 con el eje x hacia el pericentro, las componentes del vector posición son:

$$x = r \cos f \quad e \quad y = r \sin f. \quad (2.15)$$

En una órbita de período T , el área que barre el radiovector es simplemente el área de la elipse que es $A = \pi ab$. De la ecuación (2.10), observamos que esta área es igual a $\frac{hT}{2}$ y así, dado que $h^2 = \mu a(1 - e^2)$ (semilactus rectus), tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\pi ab}{T} &= \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{p\mu} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 a^2 (1 - e^2)}{p\mu} \\ &= \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{a(1 - e^2)\mu} \\ &= \frac{4\pi^2}{\mu} a^3. \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3. \quad (2.16)$$

Esto último corresponde a la tercer ley de Kepler del movimiento planetario. Observar que el período de una órbita elíptica es independiente de la excentricidad e y sólo es función de “ a ” y “ μ ”.

Consideremos el caso de dos objetos de masas m y m' , sin interacción, orbitando

un objeto central de masa m_c . Sean a y a' los semiejes mayores de estos objetos y sus períodos que sean T y T' respectivamente.

De la ecuación (2.16) obtenemos que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad y \quad T'^2 = \frac{4\pi^2 a'^3}{\mu'},$$

Así, resulta que:

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \frac{G(m_c + m)}{G(m_c + m')}.$$

Es decir, tenemos la siguiente relación:

$$\frac{m_c + m}{m_c + m'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2.$$

En el caso que dos planetas de masa m y m' estén orbitando alrededor del sol (de masa m_c), tenemos que

$$m, m' \ll m_c$$

(es decir, despreciamos m y m'), ocurre que:

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Además, si a y T denotan los valores del semieje mayor y del período de la órbita del planeta Tierra, la unidad de distancia usada es la Unidad Astronómica UA y la unidad de tiempo es un año (el período aproximado de la órbita de la Tierra), así obtenemos que $T' \approx (a')^{\frac{3}{2}}$.

Si algún objeto en el Sistema Solar (por ejemplo, asteroides o cometas) tiene un pequeño satélite natural o artificial, entonces las observaciones de la distancia, el período del satélite y la tercera ley de Kepler, pueden usarse para estimar la masa

del objeto.

Consideremos la ecuación (2.16) aplicada al objeto-sol y objeto-satélite (aplicada a ese sistema). Sean m_c , m y m' las masas del sol, objeto y satélite respectivamente; y de igual manera definimos las distancias de los semiejes mayores y períodos. Obtenemos lo siguiente:

$$\frac{m + m'}{m_c + m} \approx \frac{m}{m_c} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2, \quad (2.17)$$

pues $m' \ll m$ y $m \ll m_c$. Esto muestra que la masa del objeto puede ser estimada desde las propiedades orbitales de su satélite (suponiendo conocida m_c).

Ejemplo 2.6 Sistema Sol-Tierra.

El Sol es una estrella que se encuentra en el centro del Sistema Solar, constituyendo la mayor fuente de energía electromagnética de este sistema planetario. La Tierra y otros cuerpos (incluyendo a otros planetas, asteroides, meteoroides, cometas y polvo) orbitan alrededor del Sol. Por sí solo, representa alrededor del 98,6 % de la masa del Sistema Solar. La distancia media del Sol a la Tierra es de aproximadamente 149600000 de kilómetros, o 92960000 millas, y su luz recorre esta distancia en 8 minutos y 19 segundos. La energía del Sol, en forma de luz solar, sustenta a casi todas las formas de vida en la Tierra a través de la fotosíntesis, y determina el clima de la Tierra y la meteorología.

La Tierra es el tercer planeta desde el Sol, el quinto más grande de todos los planetas del Sistema Solar y el más denso de todos. Se desplaza en una trayectoria apenas elíptica alrededor del Sol. El volumen de la Tierra es más de un millón de

veces menor que el del Sol, mientras que la masa terrestre es 81 veces mayor que la de su satélite natural, la Luna.²

Sean m y m_c las masas de la Tierra y del Sol respectivamente. De acuerdo con la relación (2.17), tenemos que:

$$\frac{m}{m_c} = \left(\frac{384399}{15 \cdot 10^7} \right)^3 \left(\frac{365}{27} \right)^2 = (3,4) \cdot 10^{-6},$$

que es justamente la razón entre la masa de la Tierra y la masa del Sol (El lector puede corroborarlo: $m = (5,9736) \cdot 10^{24}$ y $m_c = (1,9891) \cdot 10^{30}$). Notemos que 384399 km corresponde al semieje mayor de la luna, $15 \cdot 10^7$ km corresponde al semieje mayor de la Tierra y las cantidades 365 y 27 están medidas en días y corresponden al período orbital de la tierra y luna, respectivamente. Así, damos por concluído el ejemplo.

Como el ángulo θ cubre 2π radianes en una órbita periódica, podemos definir la velocidad “media” angular, o “media” del movimiento (o movimiento medio), “ n ” como:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (2.18)$$

y, usando además (2.16), podemos escribir:

$$\mu = n^2 a^3$$

$$h = (n^2 a^3 a(1 - e^2))^{\frac{1}{2}} = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (2.19)$$

Aunque el movimiento medio n es constante en el problema de los dos cuerpos, la velocidad angular instantánea \dot{f} es una función de la longitud (ángulo) f .

²Información extraída de Wikipedia. Wikipedia es un proyecto para escribir comunitariamente una enciclopedia libre en todos los idiomas. Fue fundada por Jimmy Wales y Larry Sanger.

Podemos encontrar una constante de movimiento haciendo el producto escalar de $\dot{\mathbf{r}}$ con la ecuación (2.6) y usar las expresiones de \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ de (2.8), para obtener la siguiente ecuación escalar:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = 0$$

que puede ser integrada fácilmente, y resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} &= 0 \\ \mu \frac{\dot{r}}{r^2} &= -\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \\ \mu \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} &= -\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \\ \mu \frac{1}{r^2} dr &= -\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} dt \\ -\frac{\mu}{r} &= -\frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{2} + C \end{aligned}$$

de lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C \quad (2.20)$$

donde $v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ es el cuadrado de la velocidad y “ C ” es una constante de movimiento.

La ecuación (2.20) muestra que la energía orbital por unidad de masa es conservada, como ya hemos visto en (2.1.4).

Buscando otra expresión de v^2 , podemos arribar hacia otra expresión de C . Como $\bar{\omega}$ es fijo, tenemos que:

$$\dot{\theta} = \frac{d(f + \bar{\omega})}{dt} = \dot{f},$$

y usando la definición de $\dot{\mathbf{r}}$ de la ecuación (2.8) obtenemos que:

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \dot{r}^2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + r^2\dot{\theta}^2\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Diferenciando la fórmula (2.14) tenemos la siguiente relación:

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)\text{esenf}\dot{f}}{(1+\text{ecosf})^2} = \frac{r\dot{f}\text{esenf}}{1+\text{ecosf}}$$

Por otro lado, usando que $r^2\dot{f} = r^2\dot{\theta} = h = na^2\sqrt{1-e^2}$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\text{ecosf})\text{esenf}}{a(1-e^2)(1+\text{ecosf})} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\text{esenf} \\ r\dot{f} &= \frac{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\text{ecosf})}{a(1-e^2)} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1+\text{ecosf}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Entonces, la ecuación (2.21) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2a^2}{1-e^2}(1+2\text{ecosf}+e^2) \\ &= \frac{n^2a^2}{1-e^2} \left(\frac{2a(1-e^2)}{r} - (1-e^2) \right). \end{aligned}$$

Así, podemos establecer que:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.23)$$

Ahora bien, si comparamos las expresiones de (2.23) y (2.20), resulta que:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} - \frac{\mu}{r} \\ &= -\frac{\mu}{2a}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Esta es la energía total. La misma corresponde a la de una órbita elíptica y es función del semieje mayor y es independiente de la excentricidad. Similarmente podemos encontrar la energía para órbitas parabólicas e hiperbólicas. Estas son $C_{parb} = 0$ y $C_{hiprb} = \frac{\mu}{2a}$.

Por último, la velocidad del cuerpo en la órbita es un máximo en el pericentro ($f = 0$) y un mínimo en el apocentro ($f = \pi$). Los respectivos valores son:

$$v_p = na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad y \quad v_a = na\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

La primera expresión sale de reemplazar en la relación (2.23) el valor de r por $a(1-e)$, pues esa es la distancia al pericentro cuando $f = 0$. (Para demostrar la segunda relación se debe reemplazar r por $a(1+e)$).

Podemos encontrar las componentes x e y del vector velocidad, derivando las expresiones de x e y en la ecuación (2.15) y sustituyendo las expresiones de \dot{r} y \dot{f} por las de las relaciones en (2.22):

$$\begin{aligned} x &= r \cos f \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos f - r \operatorname{sen} f \dot{f} \\ &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} e \operatorname{sen} f \cos f - \operatorname{sen} f \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos f) \\ &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} f (e \cos f - 1 - e \cos f) \\ &= \frac{-na}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} f. \end{aligned}$$

De manera análoga, obtenemos que:

$$\dot{y} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos f).$$

Observemos de lo anterior, que conocidos los valores de f , a y e de un cuerpo, podemos calcular las expresiones de \dot{x} e \dot{y} , es decir, su velocidad. Y de la ecuación (2.14), se puede inferir el valor del radio orbital r , del cuál, a partir de las ecuaciones escritas en (2.15), podemos encontrar la posición x e y del cuerpo.

2.4. Anomalías excéntrica y media

En la sección previa hemos visto que, dado el valor de la anomalía verdadera f , podíamos calcular el radio orbital y velocidad de un cuerpo suponiendo que conocíamos su excentricidad y el semieje mayor de la órbita. Además, en la práctica queremos conocer usualmente la posición de un cuerpo en un tiempo dado, y nuestra solución al problema de los dos cuerpos, no contiene el tiempo explícitamente (remitirse a la ecuación (2.14)). Aunque f y r son funciones del tiempo t , no hemos visto tal dependencia, aunque es obvia si $e = 0$, ya que en este caso tenemos una circunferencia y r y v son constantes.

Idealmente queremos usar un ángulo que no sólo sea 2π -periódico, sino que sea una función lineal del tiempo. Usando nuestra definición del movimiento medio “ n ” en la ecuación (2.18), podemos definir la anomalía media M como:

$$M = n(t - \tau), \quad (2.25)$$

donde τ es el tiempo del pasaje por el pericentro. Aunque M tiene dimensiones de un ángulo, no es simple su interpretación geométrica. Además, desde nuestra definición de M y la ecuación (2.14), es claro que cuando $t = \tau$ (pasaje por el pericentro), $M = f = 0$; y cuando $t = \tau + \frac{T}{2}$ (pasaje por el apocentro), $M = f = \pi$; similares relaciones se darán para los múltiplos aditivos de la órbita de período T .

Aunque M no tiene una interpretación simple, podemos relacionarlo con un ángulo como el que sigue: consideremos una circunferencia de radio a circunscripta en una elipse de semieje mayor a y excentricidad e y que además sea concéntrica con ella. Una línea perpendicular al semieje mayor de la elipse, es extendida de manera que cruza a través del cuerpo sobre la elipse. Definimos E , la “anomalía excéntrica”, como el ángulo entre el semieje mayor de la elipse y el radio desde el centro al punto de intersección con la circunferencia. Así, $E = 0$ corresponde a $f = 0$ y $E = \pi$ corresponde a $f = \pi$. Veamos esto en un gráfico.

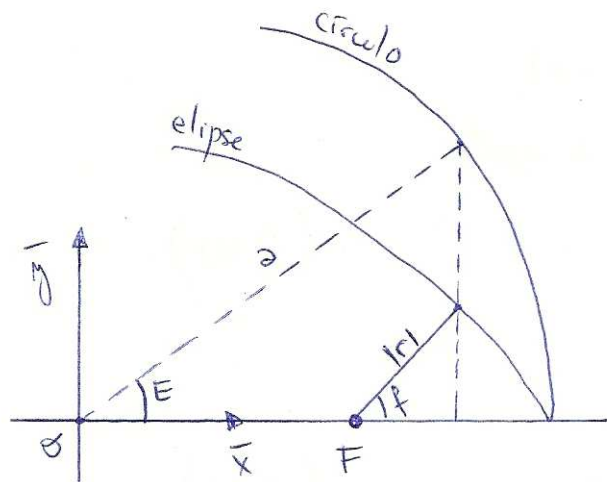


Figura 2.5: Relación entre la anomalía verdadera f y la anomalía excéntrica E

La ecuación de una elipse centrada en el origen, con semieje mayor a y semieje menor b , en coordenadas rectangulares es la siguiente:

$$\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 = 1.$$

De la figura anterior se deduce que $\bar{x} = a \cos E$ y así resulta que $\bar{y}^2 = b^2 \sin^2 E$, que sale de reemplazar la expresión de \bar{x} en la ecuación de la elipse, y desde la

ecuación (2.13) tenemos que $\bar{y} = a\sqrt{1 - e^2}\text{sen}E$.

Como $\bar{x} = a\cos E$ y $\bar{x} = ae + x$, entonces

$$\begin{aligned} ae + x &= a\cos E \\ x &= a\cos E - ae \\ &= a(\cos E - e). \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} \\ &= a\sqrt{1 - e^2}\text{sen}E. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las proyecciones de r en la dirección horizontal y vertical son:

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - e) \\ y &= a\sqrt{1 - e^2}\text{sen}E. \end{aligned} \tag{2.26}$$

De la ecuación (2.14), y reemplazando $\cos f = \frac{x}{r}$ (mirar 2.15), obtenemos que:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + \frac{ex}{r}}.$$

Y usando que $x = a(\cos E - e)$, tenemos:

$$\begin{aligned} r + ex &= a - ae^2 \\ r &= a - ae^2 - ex \\ &= a - ae^2 - ea(\cos E - e) \\ &= a(1 - e\cos E) \end{aligned} \tag{2.27}$$

y también se deduce que:

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}. \tag{2.28}$$

Podemos ahora encontrar una relación entre E y f :

$$\begin{aligned} 1 - \cos f &= 1 - \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E} \\ 1 + \cos f &= 1 + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Usando las expresiones dadas en (2.29) y la fórmula de ángulo doble para el coseno, es decir

$$\cos(2f) = \cos^2 f - \sin^2 f,$$

podemos escribir que:

$$\begin{aligned} 2\sin^2\left(\frac{f}{2}\right) &= \frac{1 + e}{1 - e \cos E} 2\sin^2\left(\frac{E}{2}\right) \\ 2\cos^2\left(\frac{f}{2}\right) &= \frac{1 - e}{1 - e \cos E} 2\cos^2\left(\frac{E}{2}\right) \end{aligned}$$

y así resulta la siguiente relación:

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (2.30)$$

De este modo, conociendo E , podemos determinar f y r de manera única de las ecuaciones (2.27) y (2.30), ya que E y f siempre están en el mismo semiespacio de la elipse. Sin embargo, para localizar un cuerpo en la órbita en un tiempo t , necesitamos encontrar una relación entre M y E .

Usando que $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{f})^2$ y las ecuaciones (2.22) y (2.23), se deduce que:

$$\dot{r}^2 = n^2 a^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{n^2 a^4 (1 - e^2)}{r^2}. \quad (2.31)$$

Así, sacando denominador común de la expresión (2.31) y completando cuadrados, llegamos a la siguiente relación:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2} \quad (2.32)$$

La ecuación diferencial (2.32) puede ser integrada haciendo la sustitución

$$r - a = -a \cos E,$$

que se deduce de la ecuación (2.27).

Como $\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}$, y además, $\frac{dr}{dt} = (-ae) \left(-\operatorname{sen} E \frac{dE}{dt} \right)$, (esta expresión sale de derivar r en (2.27)) resulta:

$$\begin{aligned} ae \operatorname{sen} E \frac{dE}{dt} &= \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 E} \\ &= \frac{na}{a - a \cos E} ae \operatorname{sen} E \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{n}{1 - e \cos E}. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que la ecuación (2.32) puede escribirse como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}.$$

La ecuación anterior es fácilmente integrada (es a variables separables), de lo que resulta que:

$$n(t - \tau) = E - e \operatorname{sen} E \quad (2.33)$$

donde τ es la constante de integración y usada en la condición de frontera $E = 0$ cuando $t = \tau$. Así tenemos de (2.25) que:

$$M = E - e \operatorname{sen} E. \quad (2.34)$$

Esta es la ecuación de Kepler y su solución es fundamental para encontrar la posición orbital de un cuerpo en un tiempo dado.

Para un valor de tiempo t , podemos hacer:

- i) Encontrar M de la ecuación (2.25).
- ii) Resolver la ecuación (2.34) para E .
- iii) Usar las ecuaciones (2.26) o las ecuaciones (2.28) y (2.14) para encontrar r y f .

Hasta el momento hemos definido la longitud verdadera (θ), la anomalía verdadera (f), la anomalía media (M), la anomalía excéntrica (E) y la longitud del pericentro ($\bar{\omega}$). Para completar con estas definiciones, culminaremos con la de longitud media (λ) dada por:

$$\lambda = M + \bar{\omega}.$$

De allí, λ es una función lineal del tiempo y no tiene interpretación geométrica, excepto en el caso particular de una órbita circular. Es importante notar que todas las longitudes ($\theta, \bar{\omega}, \lambda$) están definidas respecto de un sistema común.

La ecuación de Kepler no es fácil de resolver y se debe encarar con métodos numéricos. Podemos considerar dos técnicas de iteración: una produciendo soluciones en serie y la otra soluciones numéricas.

Algunos valores de E , para valores fijos de la excentricidad e y anomalía media M , se muestran en la siguiente tabla. Dichos valores son calculados con métodos iterativos y en donde la primera aproximación o valor inicial es $E_0 = M$.

e	M	E
0.1	5°	5.554589°
0.2	5°	6.246908°
0.3	5°	7.134960°
0.4	5°	8.313903°
0.5	5°	9.950063°
0.6	5°	12.356653°
0.7	5°	16.167990°
0.8	5°	22.656579°
0.9	5°	33.344447°
0.99	5°	45.361023°

2.5. La órbita en el espacio

En la sección (2.2) hemos encontrado los vectores posición y velocidad de la masa m_2 con respecto a la masa m_1 , siempre viviendo en el plano perpendicular al vector “momento angular” \mathbf{h} . Los valores de $\mathbf{r} = (x, y)$ y $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$ (o alternativamente r, θ, \dot{r} y $\dot{\theta}$) de la masa m_2 respecto a la masa m_1 en un tiempo dado, definen una única órbita y definen una posición en esa órbita por medio de tres constantes a, e y $\bar{\omega}$ y por medio de la variable f . Nuestro análisis siguiente se concentró en el movimiento en el plano orbital. Sin embargo, en el movimiento del Sistema Solar, debemos considerar las representaciones en tres dimensiones de una órbita en el espacio (ver figura posterior).

Aunque hemos mostrado que el movimiento de los cuerpos está sobre un plano

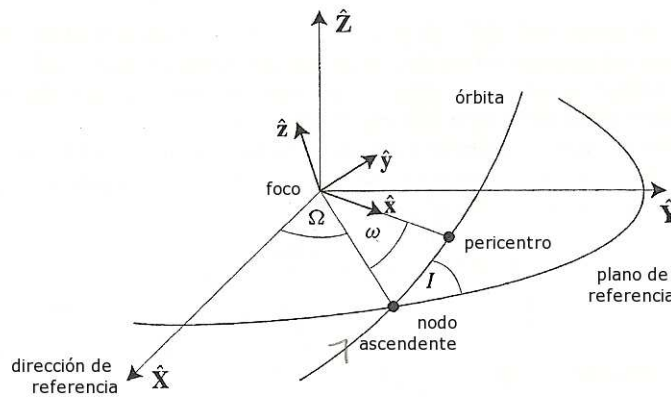


Figura 2.6: Movimiento orbital con respecto al plano de referencia en el espacio tridimensional

orbital fijo, consideraremos un Sistema de Coordenadas Cartesianas en tres dimensiones con respecto a un punto arbitrario que tiene un vector posición dado por $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. El eje x es tomado a lo largo del semieje mayor de la elipse en dirección al pericentro; el eje y es perpendicular al eje x y vive en el plano orbital; mientras que el eje z es mutuamente perpendicular al eje x e y , orientado por la regla de la mano derecha.

Deseamos ahora referir el plano orbital a un plano estándar de referencia. La dirección de la línea de referencia en el plano de referencia forma el eje X de nuestro Sistema estándar de coordenadas. El eje Y está en el plano de referencia en ángulo recto del eje X , mientras que el eje Z es perpendicular a ambos ejes, direccionado por la regla de la mano derecha. Por ejemplo, cuando consideramos el movimiento de los planetas alrededor del sol, es costumbre usar el Sol como centro o un sistema de coordenadas heliocéntricas, donde el plano de referencia

es el plano de la órbita de la Tierra (la eclíptica) y la línea de referencia está en la dirección del equinoccio de primavera boreal (primavera en el polo norte), a lo largo de la línea de intersección del plano del ecuador de la Tierra y la eclíptica.

En general, el plano de la órbita está inclinado con respecto al plano de referencia en un ángulo I , llamado la inclinación de la órbita. La línea de intersección entre el plano orbital y el plano estándar de referencia es llamada línea de nodos. El punto donde la órbita cruza al plano de referencia de abajo hacia arriba es llamado nodo ascendente, mientras que el ángulo entre la línea de referencia y el radio vector hacia el nodo ascendente, es llamado la longitud del nodo ascendente Ω . El ángulo entre este mismo radio vector y el pericentro de la órbita es llamado el argumento del pericentro ω .

La inclinación siempre está entre 0 y 180°. Si $I < 90^\circ$, el movimiento se dice progrado, mientras que si $I \geq 90^\circ$, el movimiento es retrógrado. En el límite cuando I tiende a cero, el plano de la órbita coincide con el plano de referencia y tenemos que

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega \quad (2.35)$$

donde $\bar{\omega}$ es la longitud del pericentro, que fue introducido en la sección (2.3). Sin embargo, la definición de $\bar{\omega}$ en (2.35) es usada en el caso inclinado, en donde Ω y ω viven en planos diferentes. En general $\bar{\omega}$ es un ángulo “doblado”, es decir, vive el planos diferentes.

La figura siguiente muestra las relaciones entre el sistema de coordenadas del plano de la órbita y el sistema del plano de referencia. Es claro que el sistema de

coordenadas en un sistema puede ser expresado en términos del otro, mediante una serie de tres rotaciones sobre los ejes.

En *a*), la transformación puede ser realizada a través de una serie de tres rotaciones aplicadas originalmente a ejes coincidentes. En *b*), la primera rotación se hace en un ángulo positivo ω a través del eje \hat{Z} . En *c*), la segunda rotación se hace a través de un ángulo positivo I sobre el eje \hat{X} . En *d*), la rotación final se hace a través del ángulo Ω sobre el eje \hat{Z} .

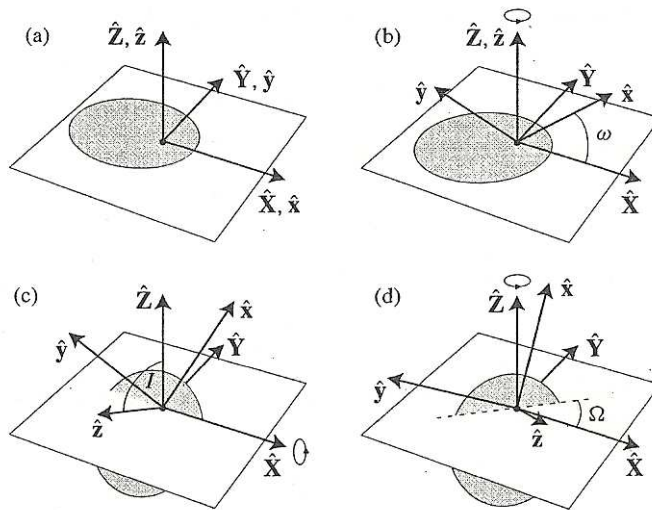


Figura 2.7: Relaciones entre los vectores \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} , \hat{X} , \hat{Y} , \hat{Z} y los ángulos ω , I y Ω

Podemos representar estas transformaciones por matrices de rotación de 3×3 , denotadas por P_1 , P_2 y P_3 respectivamente:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\text{sen}\omega & 0 \\ \text{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\operatorname{sen} I \\ 0 & \operatorname{sen} I & \cos I \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\operatorname{sen} \Omega & 0 \\ \operatorname{sen} \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Consecuentemente tenemos las siguientes dos relaciones:

$$\begin{aligned} (X \ Y \ Z)^T &= P_3 P_2 P_1 (x \ y \ z)^T \\ (x \ y \ z)^T &= P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} (X \ Y \ Z)^T \end{aligned}$$

donde P_j^{-1} es la inversa de P_j . Como todas las matrices de rotación son ortogonales, entonces P_j^{-1} son las transpuestas de P_j .

Si consideramos que estamos en el plano de la órbita, tenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \operatorname{sen} f \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + f) - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen}(\omega + f) \cos I \\ \operatorname{sen} \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \operatorname{sen}(\omega + f) \cos I \\ \operatorname{sen}(\omega + f) \operatorname{sen} I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Observación 2.7 Notar que los valores de a y e no se han modificado al considerar la elipse en este nuevo Sistema de coordenadas, ya que las transformaciones rotacionales preservan ángulos.

Ejemplo 2.8 Posición del planeta Júpiter.

Júpiter es el quinto planeta del Sistema Solar. Forma parte de los denominados planetas exteriores o gaseosos. Recibe su nombre del dios romano Júpiter (Zeus

en la mitología griega). Se trata del planeta que ofrece un mayor brillo a lo largo del año dependiendo de su fase. Es, además, después del Sol, el mayor cuerpo celeste del Sistema Solar, con una masa casi dos veces y media la de los demás planetas juntos (con una masa 318 veces mayor que la de la Tierra y 3 veces mayor que la de Saturno).

Júpiter es un cuerpo masivo gaseoso, formado principalmente por hidrógeno y helio, carente de una superficie interior definida. Entre los detalles atmosféricos se destacan la gran mancha roja, un enorme anticiclón situado en las latitudes tropicales del hemisferio sur, la estructura de nubes en bandas y zonas, y la fuerte dinámica de vientos zonales con velocidades de hasta 140 m/s (504 km/h). Se piensa que puede ser una “Estrella fallida” debido a sus grandes cantidades de hidrógeno y helio.³

Los elementos orbitales en un tiempo dado, son: $a_j = 5,20332 \text{ UA}$, $e_j = 0,0484007$, $I_j = 1,30537^\circ$, $\Omega_j = 100,535^\circ$, $\bar{\omega}_j = 14,7392^\circ$ y $\lambda_j = 204,234^\circ$, donde el subíndice j hace referencia a los valores de Júpiter. Así, $M_j = \lambda_j - \bar{\omega}_j = 189,495^\circ$.

La solución numérica de la ecuación de Kepler (2.33) arroja un valor de anomalía excéntrica de $E_j = 189,059^\circ$, y de esta manera, desde las ecuaciones (2.26), obtenemos que:

$$x_j = -5,39027 \text{ UA} \quad y_j = -0,818277 \text{ UA}.$$

Sustituyendo los valores de I_j , Ω_j y $\bar{\omega}_j$ en las expresiones de P_1 , P_2 y P_3 , obtene-

³Información sustraída de Wikipedia.

mos:

$$P_j = P_3 P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0,966839 & -0,254401 & 0,0223971 \\ 0,254373 & 0,967097 & 0,00416519 \\ -0,0227198 & 0,00167014 & 0,99974 \end{pmatrix},$$

y de este modo las coordenadas de Júpiter son:

$$X_j = -5,00336 \quad Y_j = -2,16249 \quad Z_j = 0,121099.$$

Este procedimiento puede ser aplicado para encontrar las posiciones de otros planetas, tal como se hizo en este ejemplo con Júpiter.

Observación 2.9 Las posiciones encontradas en el ejemplo anterior, están expresadas en el Sistema de Referencia $J2000$. Este corresponde al 1° de enero de 2000, 12 : 00 del Tiempo terrestre y en donde J significa días julianos. El calendario juliano es un método para identificar el día actual a través de la cuenta del número de días que han pasado desde una fecha pasada y arbitraria. El número de días se llama día juliano, abreviado como DJ . El origen, $DJ = 0$, es el 1° de enero de 4713 A.C. (o 1° de enero de -4712 , ya que no hubo año 0). Los días julianos son muy útiles porque hacen que sea muy sencillo determinar el número de días entre dos eventos, sólo con restar los números de sus días julianos. Hacer ese cálculo con el calendario normal (gregoriano) es muy difícil, ya que los días se agrupan en meses, que contienen un número variable de días, complicado además por la presencia de los años bisiestos.

Ahora bien, podemos encontrar un algoritmo que me permita conocer los seis elementos orbitales a , e , I , Ω , ω , y f , y el tiempo del pasaje por el pericentro τ , en función de los vectores posición (X, Y, Z) y velocidad $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ de un objeto

en una órbita elíptica en un tiempo t dado. Dicho objeto viviendo en el plano de referencia estándar. Asumiremos que las masas de los objetos (central y orbital) son m_1 y m_2 respectivamente. Tenemos las siguientes relaciones:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2$$

$$\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}$$

$$\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{h} = (Y\dot{Z} - Z\dot{Y}, Z\dot{X} - X\dot{Z}, X\dot{Y} - Y\dot{X})$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ denota el radiovector y $R = r$ denota la longitud del radio vector.

Además, vamos a demostrar la siguiente relación:

$$\dot{R} = \pm \sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}}, \quad (2.38)$$

en donde \dot{R} es la rapidez de cambio y $h = |\mathbf{h}|$. El signo de \dot{R} es tomado del signo de $\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}$, ya que R siempre es positivo.

Por un lado, ocurre que:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{2(X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z})}{2R} = \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}}{R}.$$

Y por otro lado, si desarrollamos el término derecho de la igualdad (2.38):

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}} &= \pm \sqrt{\frac{R^2 V^2 - h^2}{R^2}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{X^2 \dot{X}^2 + Y^2 \dot{Y}^2 + Z^2 \dot{Z}^2 + 2XZ\dot{X}\dot{Z} + 2XY\dot{X}\dot{Y} + 2YZ\dot{Y}\dot{Z}}{R^2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z})^2}{R^2}} = \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}}{R} \end{aligned}$$

con lo que probamos la igualdad planteada.

Proyectando $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ en los tres planos, obtenemos:

$$h \cos I = h_z \quad (2.39)$$

Además, tenemos que:

$$h \operatorname{sen} I \operatorname{sen} \Omega = \pm h_x \quad (2.40)$$

$$h \operatorname{sen} I \cos \Omega = \mp h_y$$

y donde h_z tiene el mismo signo que la inclinación.

Entonces tenemos que

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{h_x}{h_y}$$

y para poder calcular Ω debemos saber exactamente en qué cuadrante cae. El signo superior en ambas ecuaciones de (2.40) es tomado si $h_z > 0$ y el signo inferior si $h_z < 0$. Notemos que $\operatorname{sen} I$ es no nulo, debido a que I no es 0 ni 180 grados, en tal caso el vector $\mathbf{h} = (0, 0, h_z)$.

Estamos ya en condiciones de desarrollar el procedimiento para calcular los elementos orbitales en función de la posición y velocidad de un cuerpo u objeto:

1) Calcular a de la ecuación (2.20):

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}$$

$$a = -\frac{1}{\frac{2}{\mu} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}} \right)} = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}} = \left(\frac{2}{R} - \frac{v^2}{G(m_1 + m_2)} \right)^{-1} \quad (2.41)$$

2) Calcular e usando las ecuaciones (2.19) y (2.41):

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\ \frac{h^2}{\mu a} &= 1 - e^2 \\ e &= \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{G(m_1 + m_2)a}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

3) Calcular I usando la ecuación (2.39):

$$I = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right).$$

4) Calcular Ω usando la expresión del $\text{sen}\Omega$ y $\text{cos}\Omega$ dadas en las ecuaciones (2.40):

$$\text{tg}\Omega = -\frac{h_x}{h_y}$$

y además encontrar el cuadrante en el que se encuentra Ω . La elección del signo es determinada por el signo de h_z .

5) Calcular $\omega + f$ desde las expresiones $\frac{Z}{R}$ y $\frac{X}{R}$ en la ecuación (2.37), recalando que $r = R$.

Como ocurre que:

$$\begin{aligned} X &= R(\text{cos}\Omega \text{cos}(\omega + f) - \text{sen}\Omega \text{sen}(\omega + f) \text{cos}I) \\ Z &= R \text{sen}(\omega + f) \text{sen}I \end{aligned}$$

entonces de allí despejamos la expresión para $\text{cos}(\omega + f)$ y $\text{sen}(\omega + f)$ respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{sen}(\omega + f) &= \frac{Z}{R \text{sen}I} \\ \text{cos}(\omega + f) &= \text{sec}\Omega \left(\frac{X}{R} + \text{sen}\Omega \text{sen}(\omega + f) \text{cos}I \right). \end{aligned}$$

- 6) Calcular f desde las expresiones de $\text{sen}f$ y $\text{cos}f$ derivadas de las ecuaciones (2.14) y (2.22), recalcando que $\dot{r} = \dot{R}$:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

$$\text{cos}f = \frac{a(1 - e^2)}{eR} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \left(\frac{a(1 - e^2)}{R} - 1 \right)$$

Por otro lado

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} e \text{sen}f,$$

entonces

$$\text{sen}f = \frac{\dot{R}\sqrt{1 - e^2}}{nae} = \frac{\dot{R}a(1 - e^2)}{nea^2\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\dot{R}a(1 - e^2)}{he}$$

En la última igualdad usamos la expresión de h dada por (2.19).

Una vez calculado f de este procedimiento, calculamos ω del punto 5.

- 7) Calcular τ , pero primero calcular E desde la ecuación (2.27) y usar las ecuaciones (2.19) y (2.33).

$$n\tau = nt - (E - e \text{sen}E),$$

$$\tau = t - \frac{E - e \text{sen}E}{\sqrt{G(m_1 + m_2)a^{-3}}}.$$

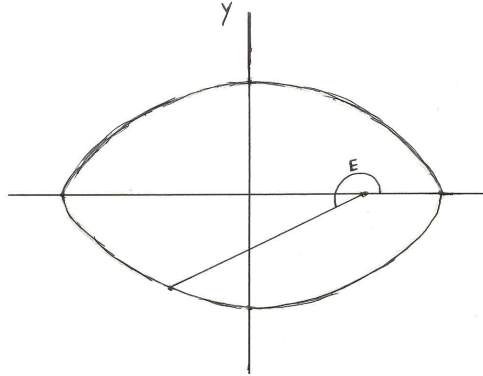
De la ecuación (2.27) calculo el valor de $\text{cos}E$. Luego determino el signo del ángulo E , a partir del valor de y .

Observando la figura posterior, vemos que si

$$y < 0 \text{ entonces } E > 180^\circ$$

$$y > 0 \text{ entonces } E < 180^\circ.$$

Recordemos que el valor de y se puede obtener a partir del de Y (este es el dato que conocemos).

Figura 2.8: Relación entre E e y

2.6. Órbitas perturbadas

Hemos visto en la sección (2.5) que en el problema de los dos cuerpos los elementos orbitales a , e , I , ω , Ω y τ son constantes y que además están unívocamente determinadas por los vectores posición y velocidad de los cuerpos orbitantes. Sin embargo, cuando una órbita está sujeta a perturbaciones significativas, sus elementos orbitales están dados para un tiempo determinado, es decir, varían con el tiempo. A estos elementos se los conoce como osculadores.

La manera en que los elementos osculadores cambian con el tiempo es una manera útil de demostrar los efectos de las perturbaciones sobre la órbita de un cuerpo. Burns (1976) mostró que las ecuaciones de las derivadas con respecto al tiempo de a , e , I , ω , Ω y τ pueden ser encontradas de manera directa usando dinámica elemental.

Siguiendo con lo anterior, consideremos una pequeña fuerza perturbadora:

$$d\mathbf{F} = \bar{R}\hat{\mathbf{r}} + \bar{T}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \bar{N}\hat{\mathbf{z}}$$

donde \bar{R} , \bar{T} y \bar{N} son las magnitudes radial, tangencial y normal de la fuerza respectivamente y \hat{r} , $\hat{\theta}$ y \hat{z} son los vectores unitarios estándares introducidos en la sección (2.2). En el resto de la sección encontraremos expresiones para \dot{a} , \dot{e} , \dot{I} , $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ y $\dot{\tau}$ como función de esas componentes (\bar{R} , \bar{T} , \bar{N}) y mostraremos como la fuerza ($d\mathbf{F}$) da lugar a cambios en elementos orbitales en particular.

Podemos derivar con respecto al tiempo la constante de energía $C = -\frac{\mu}{2a}$, como el trabajo hecho por el cuerpo que orbita, por unidad de masa y por unidad de tiempo. Así, como sabemos que $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ y

$$\text{Trabajo} = \text{Cambio energía} = \text{Desplazamiento} \cdot \text{Fuerza}$$

concluimos que:

$$\dot{C} = \dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{F} = \dot{r}\bar{R} + r\dot{\theta}\bar{T}.$$

Por otro lado, arribamos a la siguiente expresión:

$$\dot{C} = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a} \quad (2.43)$$

De las expresiones de \dot{r} y $r\dot{\theta}$ ($= r\dot{f}$) en las ecuaciones dadas en (2.22) y sabiendo que $\mu = n^2a^3$, obtenemos que:

$$\dot{a} = 2 \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} [\bar{R}e \operatorname{sen} f + \bar{T}(1 + e \operatorname{cos} f)]. \quad (2.44)$$

Esto implica que sólo la fuerza en el plano de la órbita puede cambiar al semieje mayor. (Si $d\mathbf{F} = \bar{N}\hat{z} \Rightarrow \dot{a} = 0 \Rightarrow a = \text{cte}$).

Usando las ecuaciones (2.42) y (2.24), tenemos que:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2h^2C}{\mu^2}} \quad (2.45)$$

y de esta manera obtenemos que:

$$\dot{e} = \frac{e^2 - 1}{2e} \left(2\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{C}}{C} \right).$$

Por otro lado, como $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} = (r, 0, 0)$, tenemos que:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r & 0 & 0 \\ \bar{R} & \bar{T} & \bar{N} \end{vmatrix} = r\bar{T}\hat{\mathbf{z}} - r\bar{N}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

A continuación, derivemos el módulo de \mathbf{h} , es decir $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{h}}}{h} = \frac{\mathbf{h} \cdot (r\bar{T}\hat{\mathbf{z}} - r\bar{N}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{h}.$$

Pero, si recordamos que:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\boldsymbol{\theta}}) = r^2\dot{\boldsymbol{\theta}}\hat{\mathbf{z}},$$

entonces obtenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{r^2\dot{\boldsymbol{\theta}}\hat{\mathbf{z}} \cdot (r\bar{T}\hat{\mathbf{z}} - r\bar{N}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{h} = \frac{r^3\dot{\boldsymbol{\theta}}\bar{T}|\hat{\mathbf{z}}|}{h} = r\bar{T}.$$

Así, hemos demostrado que:

$$\frac{dh}{dt} = r\bar{T} \quad (2.46)$$

Por lo tanto, la componente $-r\bar{N}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ cambia la dirección de \mathbf{h} , pero no afecta su magnitud. Desde la ecuación (2.27) y las fórmulas para C , h , \dot{C} , \dot{a} y \dot{h} en las ecuaciones (2.24), (2.19), (2.43), (2.44) y (2.46) tenemos que:

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} [\bar{R}\text{sen}f + \bar{T}(\text{cos}f + \text{cos}E)].$$

Esto implica que la excentricidad sólo puede cambiar por la aplicación de fuerzas en el plano orbital.

Diferenciando la ecuación (2.39), llegamos a la siguiente expresión:

$$\dot{I} = \frac{\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\dot{h}_z}{h_z}}{\left(\left(\frac{h}{h_z} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.47)$$

Ahora bien, podemos expresar las componentes X , Y y Z de $\dot{\mathbf{h}}$ usando lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{pmatrix} = P_3 P_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega + f) & -\text{sen}(\omega + f) & 0 \\ \text{sen}(\omega + f) & \cos(\omega + f) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r\bar{N} \\ r\bar{T} \end{pmatrix}$$

donde las matrices P_3 y P_2 están dadas en las expresiones de (2.36).

Esto nos da lugar a las siguientes relaciones:

$$\dot{h}_x = r(\bar{T}\text{sen}I\text{sen}\Omega + \bar{N}\text{sen}(\omega + f)\cos\Omega + \bar{N}\cos(\omega + f)\cos I\text{sen}\Omega) \quad (2.48)$$

$$\dot{h}_y = r(-\bar{T}\text{sen}I\cos\Omega + \bar{N}\text{sen}(\omega + f)\text{sen}\Omega - \bar{N}\cos(\omega + f)\cos I\cos\Omega) \quad (2.49)$$

$$\dot{h}_z = r(\bar{T}\cos I - \bar{N}\cos(\omega + f)\text{sen}\Omega) \quad (2.50)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.19), (2.39), (2.46) y (2.50) en (2.47), obtenemos:

$$\dot{I} = \frac{\sqrt{a\mu(1-e^2)}\bar{N}\cos(\omega + f)}{1 + e\cos f}$$

que puede ser escrita como:

$$\dot{I} = \frac{r\bar{N}\cos(\omega + f)}{h}$$

Como \dot{I} sólo depende de \bar{N} , sólo la fuerza normal del plano orbital, puede cambiar la inclinación.

Dividiendo la primer ecuación por la segunda de (2.40), llegamos a:

$$\tan\Omega = -\frac{h_x}{h_y}$$

que puede ser diferenciada con respecto al tiempo:

$$\dot{\Omega} = \frac{h_x \dot{h}_y - h_y \dot{h}_x}{h^2 - h_z^2}$$

o equivalentemente

$$\dot{\Omega} = \frac{\text{sen}\Omega \dot{h}_y + \text{cos}\Omega \dot{h}_x}{h \text{sen}I} \quad (2.51)$$

Ahora bien, sustituyendo las ecuaciones (2.19), (2.14), (2.48) y (2.49) en la ecuación (2.51), arribamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}(1-e^2)} \frac{\bar{N} \text{sen}(\omega+f)}{\text{sen}I(1+e \text{cos}f)} \\ &= \frac{r \bar{N} \text{sen}(\omega+f)}{h \text{sen}I} \end{aligned}$$

En esta ecuación, $r \bar{N} \text{sen}(\omega+f)$ es el momento actuando en el plano de la órbita y $h \text{sen}I$ es la componente del vector del momento angular que une la normal con la línea de los nodos en el plano XY .

Como $\dot{\Omega}$ sólo depende de \bar{N} , sólo la fuerza normal del plano orbital puede cambiar la longitud del nodo ascendente.

Para encontrar una expresión para $\dot{\omega}$, debemos retornar a la ecuación de la elipse (2.14) y luego usar las expresiones de e y h dadas en las ecuaciones (2.45) y

(2.19). Así obtenemos:

$$h^2 = \mu r \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Ch^2}{\mu^2} \cos(\theta - \omega)} \right] \quad (2.52)$$

donde $\theta = \omega + f$ y elegimos θ desde la posición del ángulo medido a la línea de los nodos. Si estamos interesados en el cambio de los elementos orbitales debido a aplicaciones instantáneas de una fuerza perturbadora $d\mathbf{F}$, entonces C , h y ω cambian, pero r estaría fijo.

Diferenciando la ecuación (2.52) obtenemos:

$$\dot{\omega} = 2h\dot{h} \frac{r^{-1} + C(e\mu)^{-1} \cos(\theta - \omega)}{e\mu \sin(\theta - \omega)} + \dot{\theta} - \frac{h^2 \dot{C}}{e^2 \mu^2} \cot(\theta - \omega) \quad (2.53)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.43) y (2.46) en (2.53), llegamos a la siguiente expresión:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{a}{\mu} (1 - e^2)} \left[-\bar{R} \cos f + \bar{T} \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right] - \dot{\Omega} \cos I$$

El último término de la ecuación anterior surge del término de $\dot{\theta}$ en la ecuación (2.53), usando el hecho de que el cambio instantáneo en θ es debido al cambio en la longitud del nodo ascendente, así θ está referido a la posición nodal (Burns 1976).

Sólo la fuerza en el plano orbital, y no la normal, puede cambiar la longitud del pericentro.

La ecuación para $\dot{\tau}$ es encontrada desde la derivación de la ecuación de Kepler (2.33). Haciendo $\chi = n\tau$, tenemos:

$$\dot{\chi} = \frac{\dot{C}}{C} \left(-\frac{3}{2} n\tau + \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} (2e - \cos f - e \cos^2 f)}{2e^2 \sin f (1 + e \cos f)} \right) - \frac{\dot{h}}{h} \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2} \cot f.$$

Escribiendo $\dot{\chi} = -n\dot{\tau} - \dot{n}\tau$, tenemos:

$$\dot{\chi} = \left[3(\tau - t) \frac{a^{\frac{1}{2}}}{(\mu(1 - e^2))^{\frac{1}{2}}} e \operatorname{sen} f + a^2 \mu^{-1} (1 - e^2) \left(-\frac{\operatorname{cos} f}{e} + \frac{2}{1 + e \operatorname{cos} f} \right) \right] \bar{R}$$

$$+ \left[3(\tau - t) \frac{a^{\frac{1}{2}}}{(\mu(1 - e^2))^{\frac{1}{2}}} (1 + e \operatorname{cos} f) + a^2 \mu^{-1} (1 - e^2) \left(\frac{\operatorname{sen} f (2 + e \operatorname{cos} f)}{e(1 + e \operatorname{cos} f)} \right) \right] \bar{T}.$$

Nuevamente, sólo la fuerza en el plano orbital, y no la normal, puede cambiar el tiempo del pasaje por el pericentro.

2.7. Formulación Hamiltoniana

Para la mayoría de las aplicaciones, la aproximación newtoniana es la adecuada, pero hay algunos tópicos en donde se requiere una aproximación diferente, tal como se comentó en el capítulo 1. Esto explica el porqué demostraremos la formulación Hamiltoniana para el problema de los cuerpos, en particular para dos cuerpos.

En la sección (2.2) hemos formulado las ecuaciones de movimiento del problema de los dos cuerpos (dos objetos de masa m_1 y m_2 moviéndose bajo la fuerza de atracción gravitacional) en términos de la posición cartesiana (x, y) y la velocidad (\dot{x}, \dot{y}) de m_2 con respecto a m_1 , y hemos llegado a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

cuya solución es una cónica.

Antes, en nuestro análisis, habíamos tomado el plano de referencia como el plano

orbital. No obstante, esta ecuación vectorial es igualmente aplicable al movimiento en tres dimensiones, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. En lo que sigue introduciremos las variables \mathbf{r} y \mathbf{p} donde, usando ligeramente una notación diferente,

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}.$$

Aquí, \mathbf{r} es el vector posición relativo, y

$$\mathbf{p} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}$$

es el momento lineal del sistema y, como es usual, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ es la velocidad.

Ahora podemos escribir las ecuaciones vectoriales de movimiento en la forma:

$$\dot{\mathbf{r}} = +\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_{Kepler}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{H}_{Kepler}$$

donde $\nabla_{\mathbf{p}}$ y $\nabla_{\mathbf{r}}$ son los vectores operadores diferenciales dados por:

$$\nabla_{\mathbf{p}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial p_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial p_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial p_z}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial r_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial r_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial r_z}$$

y

$$\mathcal{H}_{Kepler} = \frac{p^2}{2\mu^*} - \frac{\mu\mu^*}{r}, \quad (2.54)$$

que ya fue calculado en el ejemplo (1.34) del capítulo 1.

Aquí, como ya se ha establecido, $\mu = G(m_1 + m_2)$. Además, $p = |\mathbf{p}|$ y $r = |\mathbf{r}|$.

La nueva cantidad

$$\mu^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

es llamada la masa reducida del sistema. La cantidad \mathcal{H}_{Kepler} se refiere al Hamiltoniano del problema de Kepler (es decir, dos cuerpos).

Tenemos ahora reemplazadas tres ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas, por un sistema análogo de seis ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, dadas por:

$$\begin{aligned}\nabla_p \mathcal{H} &= \frac{2p}{2\mu^*} \frac{\mathbf{p}}{p} = \frac{\mathbf{p}}{\mu^*} = \dot{\mathbf{r}} \\ \nabla_r \mathcal{H} &= \frac{\mu\mu^*}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \mu\mu^* \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\dot{\mathbf{p}}.\end{aligned}$$

Es decir, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\mathbf{p}}{\mu^*} \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{-\mu\mu^*}{r^3} \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Si comparamos las ecuaciones (2.54) y (2.20), llegamos a la siguiente conclusión:

$$\mathcal{H}_{Kepler} = \mu^* \left(\frac{p^2}{2(\mu^*)^2} - \frac{\mu}{r} \right) = \mu^* \left(\frac{p^2}{2(\mu^*)^2} + C - \frac{1}{2}v^2 \right) = \mu^* C.$$

Es decir obtenemos que $\mathcal{H}_{Kepler} = \mu^* C$.

En nuestra nueva formulación, \mathcal{H}_{Kepler} es la suma de la energía cinética y energía potencial del sistema y es igual a la energía total, una constante del sistema, tal como ya lo establecimos anteriormente.

Lo desarrollado anteriormente, son muestra de que las ecuaciones de Hamilton son de primer orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer un dato por

incógnita para fijar las constantes arbitrarias de integración. Además, son muestra de que la formulación hamiltoniana se emplea con preferencia cuando se trata de resolver cuestiones sobre la existencia de valores constantes de un sistema (es decir, integrales primeras), periodicidad de trayectorias, comportamientos estables, etc. En el ejemplo del problema de los dos cuerpos materiales, una integral primera es la energía total del sistema.

Capítulo 3

El problema de los tres cuerpos

Introducción

En el capítulo anterior hemos mostrado que el problema del movimiento de dos masas moviéndose bajo la atracción gravitacional mutua, puede ser resuelto analíticamente y la solución es siempre una cónica en el espacio inercial. Extenderemos este análisis a la interacción de tres cuerpos, prestando una particular atención al problema en el que el tercer cuerpo es despreciable con respecto a los otros dos. El problema de los tres cuerpos, ha atraído la atención de grandes matemáticos, entre los que destacamos a Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Le Verrier, Hamilton, Poincaré y Birkhoff.

Si dos de los cuerpos en el problema se mueven en órbitas circulares y coplanares sobre su centro de masas común y la masa del tercer cuerpo no afecta las masas de los otros dos cuerpos, el problema del movimiento de los tres cuerpos es llamado “movimiento restringido circular”.

En este capítulo describiremos las ecuaciones de movimiento del problema de los tres cuerpos y discutiremos la posición de los puntos de equilibrio con referencia a una constante particular del movimiento, la integral de Jacobi, en el caso del movimiento restringido al que hacíamos referencia anteriormente. Además, demostraremos las relaciones entre las curvas definidas por la integral de Jacobi y la curva orbital de la partícula.

3.1. Ecuaciones de Movimiento

Consideremos el movimiento de una pequeña partícula de masa despreciable, moviéndose bajo la influencia gravitacional de dos masas m_1 y m_2 . Asumiremos que estas dos masas tienen órbitas circulares sobre su centro de masas común y que la fuerza externa del tercero no afecta la de estos dos.

Consideremos también, un conjunto de ejes ξ , η , ζ en un espacio inercial (el de los tres cuerpos) referido al centro de masas del sistema (ver figura 3 · 1). Consideramos el eje ξ a lo largo de la línea desde m_1 a m_2 en el tiempo $t = 0$, el eje η perpendicular a él y al plano orbital de las dos masas y el eje ζ perpendicular al plano $\xi\eta$, a lo largo del vector momento angular. Las coordenadas de las dos masas en este sistema de referencia (no rotado) son las siguientes: (ξ_1, η_1, ζ_1) y (ξ_2, η_2, ζ_2) . Las dos masas tienen una separación constante y además tienen la misma velocidad angular sobre su centro de masas común.

Elegimos la unidad de masa de tal manera que $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$. Si asu-

mimos que $m_1 > m_2$ y definimos

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

entonces en este sistema de unidades, las dos masas son:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= Gm_1 = 1 - \bar{\mu} \\ \mu_2 &= Gm_2 = \bar{\mu}\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $\bar{\mu} < \frac{1}{2}$ (esta desigualdad se demuestra con la suposición $m_1 > m_2$). La unidad es elegida para que la separación entre las masas sea constantemente 1. Además, se tiene que el movimiento medio común n , de las dos masas es también 1, ya que:

$$n = \frac{\mu^2}{a^3} = \frac{1}{1} = 1.$$

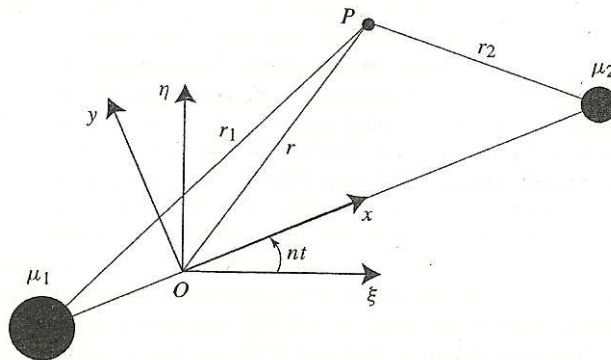


Figura 3.1: Vista plana de la relación entre las coordenadas del sistema inercial (ξ, η, ζ) y las coordenadas (x, y, z) (sistema rotado) de la partícula en el punto P . El origen O está sobre el centro de masas de los dos cuerpos. El eje ζ y el eje z coinciden con el eje de rotación.

Sean las coordenadas de la partícula en el sistema inercial o sideral (ξ, η, ζ) .

Las ecuaciones de movimiento de la partícula son:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ \ddot{\zeta} &= \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde de la figura 3 · 1 se observa que:

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \\ r_2^2 &= (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2\end{aligned}$$

Notar que estas ecuaciones son válidas en el problema general de los tres cuerpos, ya que no requieren ninguna suposición sobre las trayectorias de las dos masas.

Si las dos masas están moviéndose en órbitas circulares, entonces la distancia entre ellos es fija y se mueven sobre su centro de masas común a una velocidad angular fija, que es el movimiento medio n . En estas circunstancias es natural considerar el movimiento de la partícula en un sistema de referencia rotado, en donde las posiciones de las masas están fijas también.

Consideremos un nuevo sistema de referencia rotado (x, y, z) que tenga el mismo origen que el sistema ξ, η pero que esté rotando a razón uniforme n en la dirección positiva (observar nuevamente la figura previa). Notar que este nuevo sistema es no inercial, tal como se estableció en el capítulo 1 de este documento.

La dirección del eje x es elegida de tal manera que las dos masas siempre vivan a

lo largo de una línea con coordenadas

$$(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0) \quad (x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0).$$

Así, desde las ecuaciones (3.1) y la figura 3 · 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde (x, y, z) son las coordenadas de la partícula con respecto al sistema de rotación o sistema sinódico. Estas coordenadas están relacionadas a las coordenadas en el sistema sideral por una simple rotación:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\operatorname{sen} nt & 0 \\ \operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Aunque en nuestro sistema de unidad $n = 1$, retenemos n en las ecuaciones para notar que esos términos están acelerados.

Del sistema dado en (3.4), deducimos que

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos nt - y \operatorname{sen} nt \\ \eta &= x \operatorname{sen} nt + y \cos nt \\ \zeta &= z \end{aligned}$$

Si diferenciamos estas ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{x} \cos nt - nx \operatorname{sen} nt - ny \operatorname{cos} nt - \dot{y} \operatorname{sen} nt \\ \dot{\eta} &= \dot{x} \operatorname{sen} nt + nx \operatorname{cos} nt - ny \operatorname{sen} nt + \dot{y} \operatorname{cos} nt \\ \dot{\zeta} &= \dot{z} \end{aligned}$$

las cuales pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\operatorname{sen} nt & 0 \\ \operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

y por lo tanto, si derivamos por segunda vez, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\operatorname{sen} nt & 0 \\ \operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Notar que el cambio a un sistema de referencia rotado ha introducido términos $n\dot{x}$ y $n\dot{y}$, llamado la aceleración de Corioli y también se introdujeron términos n^2x y n^2y llamado la aceleración centrífuga en las ecuaciones de movimiento. Es importante aclarar que estas fuerzas no son originadas por una causa fija, sino que se originan sólo por el hecho de estar en un sistema no inercial, es decir rotado.

Usando las sustituciones para ξ , η , ζ , $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$ y $\ddot{\zeta}$ y las ecuaciones (3.2) tenemos que:

$$\begin{aligned} & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\operatorname{sen} nt = \\ & \left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \cos nt + \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \operatorname{sen} nt \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\operatorname{sen} nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos nt = \\ & \left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right) \operatorname{sen} nt - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \cos nt \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\ddot{z} = - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) z$$

Si multiplicamos la ecuación (3.6) por $\cos nt$ y la ecuación (3.7) por $\sin nt$ y sumamos ambos resultados; y luego multiplicamos la ecuación (3.6) por $-\sin nt$ y la (3.7) por $\cos nt$ y sumamos también; las ecuaciones de movimiento en el sistema sinódico o rotado resultan:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= - \left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \\ \ddot{z} &= - \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) z \end{aligned}$$

Estas “aceleraciones” pueden ser escritas como el gradiente de una función escalar U de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $U = U(x, y, z)$ viene dada por:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (3.9)$$

En esta ecuación, el término en $x^2 + y^2$ es el potencial centrífugo y el término en $\frac{1}{r_1}$ y $\frac{1}{r_2}$ es el potencial gravitacional.

Los términos $-2n\dot{y}$ y $2n\dot{x}$ en las dos primeras ecuaciones de (3.8) son los términos de Corioli, que dependen de la velocidad de la partícula en el sistema de referencia rotado. Las fuerzas de Corioli forman un ángulo de 90° con la velocidad, puesto que el producto escalar entre los vectores $(-2n\dot{y}, 2n\dot{x}, 0)$ y $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ es 0.

Notar que U es positivo, desde su definición. Escribimos $U^* = -U$ y las ecuaciones de movimiento quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} &= -\frac{\partial U^*}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= -\frac{\partial U^*}{\partial y} \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial U^*}{\partial z}\end{aligned}$$

U no es potencial, pero sí lo tomaremos como un pseudo-potencial.

3.2. La integral de Jacobi

Multiplicando las ecuaciones (3.8) por \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} respectivamente y sumando tenemos:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}.$$

Esta puede ser integrada, y obtenemos lo siguiente:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_j$$

donde C_j es la constante de integración. Además, como $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$, obtenemos la siguiente expresión:

$$v^2 = 2U - C_j$$

o usando la ecuación (3.9), obtenemos:

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2.$$

Esto demuestra que la ecuación $2U - v^2 = C_j$ es una constante del movimiento. Esta es la integral de Jacobi, o constante de Jacobi (de allí se entiende su subíndice j). La integral de Jacobi es sólo una integral en el problema circular restringido de los tres cuerpos y esto significa que el problema no puede resolverse de forma total para el caso general, sino salvo para simplificaciones del problema.

La expresión de C_j puede ser escrita en términos de la posición y velocidad de la partícula en el sistema inercial. En este sentido, usando la ecuación (3.4), y el hecho de que una matriz de rotación es ortogonal y por ende no singular, y que su inversa es justamente la transpuesta, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ -\operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Para la velocidad, usamos la ecuación (3.5), y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - n y \\ \dot{y} + n x \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ -\operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Además, si utilizamos las ecuaciones dadas en (3.10), tenemos la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - n y \\ \dot{y} + n x \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \operatorname{sen} nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Y así, restando (3.11) con (3.12), podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ -\operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \operatorname{sen} nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Si ponemos

$$A = \begin{pmatrix} \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ -\operatorname{sen} nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} nt & -\cos nt & 0 \\ \cos nt & \operatorname{sen} nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces desde la ecuación (3.13), tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} A^T A \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} A^T B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &\quad - n \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} B^T A \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + n^2 \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} B^T B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
&- n \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + n^2 \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\
&= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + n^2(\xi^2 + \eta^2) + 2n(\dot{\xi}\eta - \eta\dot{\xi})
\end{aligned}$$

donde A^T y B^T son las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

Desde la ecuación (3.4) tenemos que $x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ya que las matrices de rotación preservan longitudes. Además obtenemos que:

$$C_j = 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) + 2n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2$$

para la expresión de la constante de Jacobi en términos de las coordenadas siderales.

Podemos escribir esto como:

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}C_j \quad (3.14)$$

donde $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, \mathbf{h} es el momento angular y el término de la izquierda es la energía total por unidad de masa de la partícula. Dado que $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ no es constante, se explica el porqué la energía no es conservada en el problema restringido de los tres cuerpos. Como ya dijimos, la constante de Jacobi es sólo una integral del movimiento circular restringido de los tres cuerpos. No podemos usar la constante de Jacobi para encontrar una solución exacta del movimiento orbital, sin embargo puede usarse para determinar regiones donde la partícula no puede permanecer o

estar.

La utilidad de la constante de Jacobi puede ser apreciada fuertemente cuando consideramos las posiciones asociadas a velocidades nulas. En este caso tenemos que $2U = C_j$. O también podemos escribir:

$$n^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = C_j \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) define un conjunto de superficies para valores particulares de C_j . Así, las superficies, conocidas como superficies de velocidad cero, juegan un importante rol en las cotas del movimiento de la partícula. Por simplicidad nos restringiremos al plano xy . En este caso la intersección de las superficies de velocidad cero con el plano xy produce un conjunto de curvas de velocidad cero.

La figura siguiente muestra ejemplos para estas curvas en el caso que $\mu_2 = 0,2$; el movimiento medio n es 1. ($C_j = 2U - T$, entonces como $T \geq 0$ ocurre que $2U \geq C_j$, por eso una partícula no puede pasar de una región otra).

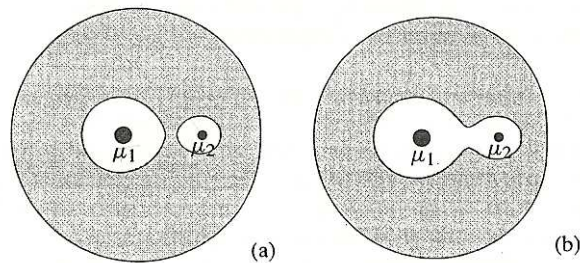


Figura 3.2: Curvas de velocidad cero para dos valores de la constante de Jacobi cuando $\mu_2 = 0,2$. Los valores de C_j son 3,9 para el caso a) y 3,7 para el caso b). Las zonas sombreadas denotan las regiones excluidas.

Desde la expresión (3.14), es claro que debemos tener siempre $2U \geq C_j$ (como ya dijimos anteriormente), ya que de otra manera la velocidad v sería compleja. Así la ecuación (3.15) define curvas frontera de regiones donde el movimiento de la partícula no es posible. De esta manera, como el problema de los tres cuerpos restringido no es integrable, la existencia de la integral de Jacobi nos permite encontrar regiones del plano xy donde la partícula no puede estar.

La zona sombreada denota las regiones donde el movimiento es imposible. En *a*), si la partícula con valor C_j está en órbita en la región no sombreada alrededor de la masa μ_1 , entonces nunca puede orbitar la masa μ_2 o escapar del sistema, ya que tendría que cruzar a la zona excluida. En *b*), ocurre lo contrario, si la partícula está orbitando la masa μ_1 puede pasar a orbitar la masa μ_2 , pero nunca escapar del sistema. Este concepto es el de estabilidad de Hill. Sin embargo, es útil recordar que tales declaraciones sólo son válidos bajo las suposiciones inherentes al problema restringido de los tres cuerpos (es decir, las dos masas se mueven en órbitas circulares sobre su centro de masas común y la masa del tercer cuerpo no influye gravitacionalmente en los otros dos).

3.3. La relación Tisserand

Consideremos un cometa con semieje mayor inicial a , excentricidad e , e inclinación I . Siguiendo una aproximación cercana a Júpiter, los elementos orbitales devienen en a' , e' e I' respectivamente.

Podemos usar la integral de Jacobi y una simple aproximación, para relacionar estos dos conjuntos de elementos. La integral de Jacobi, dada por $C_j = 2U - v^2$, permanece constante a través del encuentro.

En el espacio inercial tridimensional, tiene vector posición dado por $r = (\xi, \eta, \zeta)$ y vector velocidad $\dot{r} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$. En este sistema podemos usar la ecuación (3.14) para escribir la constante de Jacobi como:

$$C_j = 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) + 2n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2 \quad (3.16)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias del cometa al sol y de Júpiter al sol respectivamente. Elegiremos las unidades de modo que el semieje mayor y el movimiento medio de la órbita de Júpiter sean 1, ya que la masa de Júpiter y el cometa son muy pequeñas con respecto a la masa del sol,

$$G(m_{sol} + m_{com}) \approx G(m_{sol} + m_{jup}) = 1 \quad G(m_1 + m_2) = 1,$$

donde m_{sol} , m_{com} y m_{jup} son las masas del sol, cometa y Júpiter respectivamente. Desde la integral de energía del problema de los dos cuerpos “sol-cometa”(ver ecuación (2.23)), tenemos:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \quad (3.17)$$

donde hemos elegido $\mu = 1$ en concordancia con nuestro sistema de unidades y donde asumimos que $r_1 \approx r$, ya que la masa del cometa y del planeta Júpiter son despreciables comparadas con la masa del sol.

El momento angular \mathbf{h} por unidad de masa de la órbita del cometa está dado por:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}},$$

como ya lo hemos trabajado en el capítulo 2.

Si I es la inclinación entre la órbita del cometa y el plano de la órbita de Júpiter (ver figura posterior), entonces la componente ζ del vector momento angular \mathbf{h} está dada por:

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = h \cos I$$

en donde h es perpendicular al plano de la órbita del cometa y $h^2 = a(1 - e^2)$ en nuestro sistema de unidades (remitirse a la expresión dada en (2.19)). Así obtenemos, a partir de la integral de Jacobi en la ecuación (3.16) y observando las expresiones (3.17) y (3.1), lo siguiente:

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)}\cos I = \frac{2}{r} - 2\mu_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) - C_j. \quad (3.18)$$

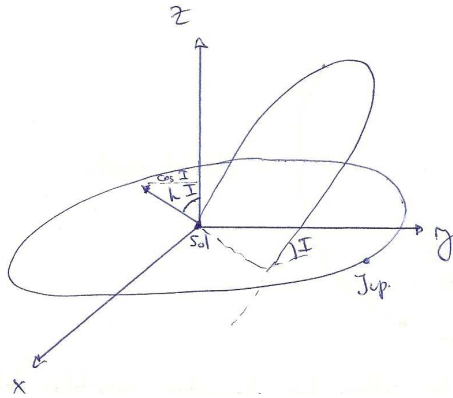


Figura 3.3: Órbitas del cometa y del planeta Júpiter separadas por una inclinación I .

Si asumimos que el cometa no está cerca de Júpiter, de manera que $\frac{1}{r^2}$ es siempre una cantidad pequeña y despreciamos el término de μ_2 , tenemos que:

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1 - e^2)}\cos I \approx \text{constante}. \quad (3.19)$$

que resulta de dividir por -2 toda la expresión (3.18).

Además, la relación aproximada entre los elementos orbitales del cometa antes y después del encuentro con Júpiter está dada por:

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1 - e^2)}\cos I = \frac{1}{2a'} + \sqrt{a'(1 - e'^2)}\cos I'.$$

Esta es conocida como la relación de Tisserand (Tisserand 1896) y puede ser usada para determinar si un cometa recién descubierto es un objeto previamente conocido o no, que ha tenido sus elementos orbitales cambiados debido a una aproximación cercana a un planeta.

Un ejemplo de esto lo encontramos para el caso de un cometa hipotético dibujado en la figura siguiente.

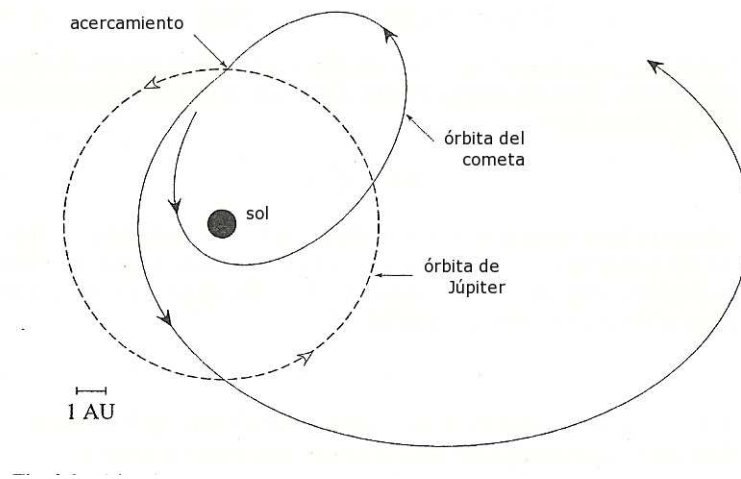


Figura 3.4: Cambios en la órbita de un cometa hipotético que tiene un encuentro cercano con Júpiter. El encuentro produce grandes cambios en los elementos orbitales del cometa

Un acercamiento a Júpiter altera los elementos orbitales del cometa con el semieje mayor incrementado por más de 8 unidades astronómicas. Los elementos orbitales iniciales del cometa son $a = 4,81 UA$ ($= 0,924$ en nuestras unidades), $e = 0,763$ e $I = 7^{\circ},47$; mientras que los elementos finales son $a' = 10,8 UA$, $e' = 0,731$ e $I = 21^{\circ},4$.

No obstante, la relación de Tisserand es sólo una aproximación de la constante

de Jacobi y se deriva asumiendo que Júpiter tiene una órbita circular. La cantidad (3.19) es una constante aproximada en el movimiento, donde la excentricidad de Júpiter no es cero.

Las diferencias en la órbita del cometa antes y después del acercamiento a Júpiter mostradas en la figura anterior, ilustra los efectos dramáticos de los encuentros planetarios. La misma técnica es usada para obtener asistencias gravitatorias para las naves espaciales que viajan a planetas exteriores de nuestro Sistema Solar, tal como lo son las naves espaciales Voyager 1 y 2. La Voyager 1 fue lanzada el 5 de septiembre de 1977 desde Cabo Cañaveral. Pasó por Júpiter en 1979 y por Saturno en 1980. La Voyager 2 fue enviada el 20 de agosto de 1977, pasando por Júpiter y Saturno para llegar a Urano en 1986 y Neptuno en 1989. La Voyager 2 es la única que ha visitado esos dos planetas. Ambas llevan consigo un disco de oro con una selección de una hora y media de duración de música proveniente de varias partes y culturas del mundo, saludos en 55 idiomas humanos, un saludo del entonces Secretario General de las Naciones Unidas y una mezcla de sonidos característicos del planeta. También contiene 115 imágenes donde se explica en lenguaje científico la localización del Sistema Solar, las unidades de medida que se utilizan, características de la Tierra y características del cuerpo y la sociedad humana.

El análisis anterior está basado en el problema restringido circular donde la masa del tercer cuerpo (cometa o nave espacial) es despreciable y así no hay conservación de la energía.

La relación de Tisserand permanece casi constante, es por eso que su estudio resulta de suma utilidad, como ya hemos establecido anteriormente.

3.4. Puntos Lagrangianos de equilibrio

Hemos mostrado en las secciones previas que cuando las masas m_1 y m_2 se mueven en órbitas cíclicas sobre su centro de masas común O , sus posiciones son estacionarias en un sistema rotado con una velocidad angular igual al movimiento medio n de cualquiera de sus masas. Vamos a abordar el tema de los puntos de equilibrio teniendo en cuenta la ubicación de puntos donde podría estar una partícula P , con la velocidad apropiada en el sistema inercial, y en donde la posición de dicha partícula permanece estacionaria en el sistema rotado. Es importante recordar que la posición de un punto de equilibrio de una partícula, está sujeta a numerosas fuerzas y que está moviéndose en una órbita kepleriana en el sistema inercial.

Sea a , b y c las posiciones de las masas m_1 , el centro de masas O , y la masa m_2 con respecto al punto P (ver figura 3.5).

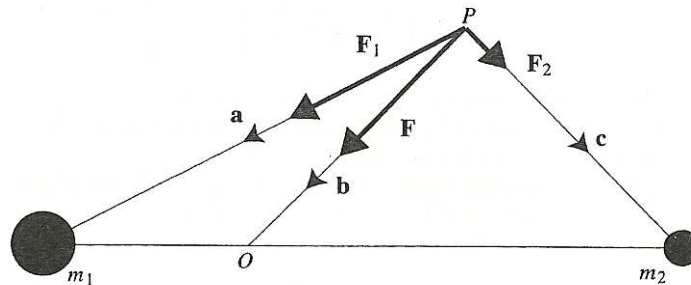


Figura 3.5: Las fuerzas que experimenta una partícula P de prueba, debido a la atracción gravitatoria de las dos masas m_1 y m_2 . El punto O denota la posición del centro de masas de m_1 y m_2 .

Con F_1 y F_2 denotamos las fuerzas por unidad de masa en dirección hacia

las masas m_1 y m_2 respectivamente. Para el punto P que está fijo en el sistema rotado, debe haber una distancia fija b desde O , que es el único punto fijo en el sistema inercial. Además P está sujeto a la aceleración centrífuga en la dirección $-\mathbf{b}$ y es balanceada por la suma de los vectores:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

que vive en dirección de \mathbf{b} y pasa a través del centro de masas. (la suma de las fuerzas va hacia el centro de masas, pues P está quieto y la fuerza de Corioli es cero, entonces la suma de las fuerzas es igual a la fuerza centrífuga).

La posición de O está dado por:

$$\mathbf{b} = \frac{m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}}{m_1 + m_2}$$

(el centro de masas siempre se escribe así en cualquier sistema de coordenadas).

O también podemos expresarlo así:

$$m_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m_2(\mathbf{b} - \mathbf{c}). \quad (3.20)$$

Realizando producto vectorial entre el vector $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y la ecuación (3.20), obtenemos:

$$m_2(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{c}) + m_1(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{a}) = 0.$$

Como el ángulo entre \mathbf{F}_1 y \mathbf{c} es el opuesto entre el de \mathbf{F}_2 y \mathbf{a} , podemos escribir la ecuación de la siguiente manera (usamos además la siguiente propiedad del producto vectorial: $|A \times B| = |A||B|\text{sen}(A, B)$):

$$m_2 F_1 c = m_1 F_2 a, \quad (3.21)$$

en donde F_1 , F_2 , a y c son los módulos de los vectores \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{a} y \mathbf{c} respectivamente.

En el caso de las fuerzas gravitacionales, $F_1 = \frac{Gm_1}{a^2}$ y $F_2 = \frac{Gm_2}{c^2}$ y así, de la ecuación (3.21), resulta que $a = c$. De esta manera, el triángulo formado por la partícula y las dos masas es isósceles. Esto implica que P vive en la mediatriz del segmento $\overline{m_1 m_2}$ (observar la figura siguiente, en donde la línea punteada denota dicha mediatriz).

Para balancear o equilibrar la aceleración centrífuga de la partícula P con las fuerzas por unidad de masa y dirigidas hacia el centro de masas, debemos tener lo siguiente:

$$n^2 b = F_1 \cos \beta + F_2 \cos \gamma \quad (3.22)$$

donde β es el ángulo entre \mathbf{F}_1 y \mathbf{b} y γ entre \mathbf{F}_2 y \mathbf{b} . El término $n^2 b$ es la velocidad de rotación.

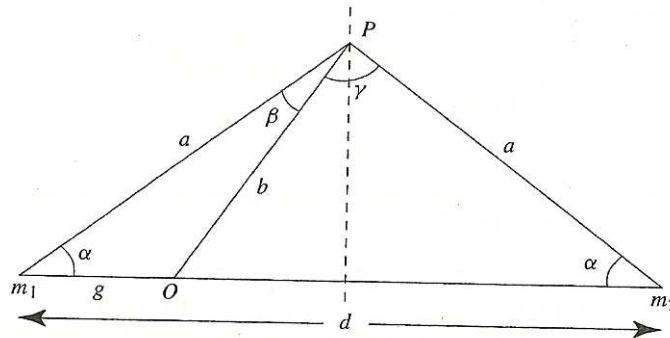


Figura 3.6: Geometría del balance o equilibrio de fuerzas donde P denota la ubicación de la partícula de prueba en una posición de equilibrio. La línea punteada indica la bisectriz perpendicular a la línea que une a las dos masas, este es el lugar geométrico de las posiciones de equilibrio en el caso de las fuerzas gravitacionales.

Resulta entonces, de la ecuación (3.22):

$$n^2 = \frac{G}{a^2 b^2} (m_1 b \cos \beta + m_2 b \cos \gamma) \quad (3.23)$$

Además, por inspección de los triángulos formados por O , P y las dos masas, tenemos que:

$$\begin{aligned} b \cos \beta &= a - g \cos \alpha \\ b \cos \gamma &= a - (d - g) \cos \alpha \end{aligned}$$

donde d es la distancia entre m_1 y m_2 ; g es la distancia entre m_1 y O y

$$\cos \alpha = \frac{d}{2a}. \quad (3.24)$$

Por otro lado, por la definición del centro de masas, tenemos:

$$\begin{aligned} g &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \\ d - g &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} d. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.23) es equivalente a la siguiente expresión:

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3 b^2} \left(a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2 \right). \quad (3.26)$$

A partir de la ecuación (3.24) y por el teorema del coseno, tenemos la relación siguiente (observar la figura anterior):

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos \alpha = a^2 + g^2 - gd.$$

Sustituyendo en esta última ecuación las expresiones para g desde la ecuación (3.25), obtenemos:

$$b^2 = a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2.$$

De esta manera, la ecuación (3.26) queda expresada como:

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}.$$

Además, el sistema de referencia está rotado (en el sistema inercial) con una velocidad angular n , y de la ecuación (2.16) tenemos que:

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3},$$

de lo que resulta que $a = d$ (mirando las dos últimas ecuaciones).

En el caso de las fuerzas gravitacionales ejercidas por m_1 y m_2 , el sistema tiene un punto de equilibrio en el vértice del triángulo equilátero con base formada por la línea que une las dos masas. Este resultado implica la existencia de otro punto de equilibrio localizado en la misma línea, pero en el vértice que queda por debajo. Estos son los puntos de equilibrio Lagrangianos L_4 y L_5 respectivamente. En el problema clásico hay tres puntos más de equilibrio, L_1 , L_2 y L_3 que viven a lo largo de la línea que une las dos masas m_1 y m_2 .

Nosotros hemos considerado fuerzas gravitacionales, pero sin embargo este análisis puede hacerse para otro tipo de fuerzas.

3.5. Posición de puntos de equilibrio

Aunque el problema de los tres cuerpos circular restringido no es integrable, podemos encontrar un número especial de soluciones. Esto puede ser realizado buscando puntos donde la partícula tiene velocidad y aceleración cero en el sistema de rotación. Tales puntos son llamados puntos de equilibrio del sistema. Desde ahora en adelante asumiremos que todos los puntos están en el plano xy . Elegimos

la distancia entre las dos masas como uno. Entonces se sigue que $n = 1$, como ya se explicitó en la sección (3.1). Nada de lo que asumimos cambia la esencia dinámica del sistema.

Para facilitar el cálculo de la posición de los puntos de equilibrio seguiremos el ejemplo de Brouwer y Clemence (1961) y reescribiremos U en una forma diferente (U es el pseudo-potencial descrito en (3.9)).

Si multiplicamos la primera ecuación de (3.3) por μ_1 y la segunda ecuación de (3.3) por μ_2 y luego sumamos ambas expresiones, (recordemos que $z = 0$, pues nos movemos en el plano xy y $\mu_1 + \mu_2 = 1$) tenemos:

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2.$$

Así, resulta que:

$$U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2. \quad (3.27)$$

La ventaja de esto es que U no depende explícitamente de x e y ; y por lo tanto el cálculo de las derivadas parciales es más simple. Notar que r_1 y r_2 son siempre positivas, ya que son distancias.

Consideraremos ahora las ecuaciones de movimiento y las dos primeras ecuaciones de (3.8), con $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$.

Para encontrar la posición de los puntos de equilibrio debemos resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0, \quad (3.29)$$

usando la expresión de $U = U(r_1, r_2)$ establecida en la ecuación (3.27).

Evaluando las derivadas parciales, podemos escribir las ecuaciones de la posición de los puntos de equilibrio como:

$$\mu_1 \left(\frac{-1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{x + \mu_2}{r_1} + \mu_2 \left(\frac{-1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{x - \mu_1}{r_2} = 0 \quad (3.30)$$

$$\mu_1 \left(\frac{-1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{y}{r_1} + \mu_2 \left(\frac{-1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{y}{r_2} = 0 \quad (3.31)$$

Inspeccionando las ecuaciones (3.28) y (3.29) se observa la existencia de una solución trivial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r_1} &= \mu_1 \left(\frac{-1}{r_1^2} + r_1 \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r_2} &= \mu_2 \left(\frac{-1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

que da $r_1 = r_2 = 1$ en nuestro sistema de unidades.

Usando las ecuaciones dadas en (3.3), las dos ecuaciones anteriores implican:

$$(x + \mu_2)^2 + y^2 = 1$$

$$(x - \mu_1)^2 + y^2 = 1$$

que tiene dos soluciones, a saber:

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2 \quad e \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $r_1 = r_2 = 1$, cada uno de los dos puntos definidos por las ecuaciones anteriores $(\frac{1}{2} - \mu_2, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(\frac{1}{2} - \mu_2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ forman un triángulo equilátero con las masas

μ_1 y μ_2 . Estos son los puntos de equilibrio Lagrangianos triangulares referidos en la sección (3.4) como L_4 y L_5 .

Es claro que desde la ecuación (3.31), $y = 0$ es solución, por lo que también lo es de la ecuación (3.29). Lo cual está indicando que los puntos de equilibrio permanecen a lo largo del eje x y satisfacen la ecuación (3.28). Hay, de echo, tres soluciones correspondientes a los puntos de equilibrio Lagrangianos colineales (los que están a lo largo del eje x), denotados por L_1 , L_2 y L_3 , tal como ya lo dijimos. El punto L_1 vive entre las masas μ_1 y μ_2 , el L_2 fuera de la masa μ_2 y el L_3 vive en el eje negativo x . Debemos encontrar una aproximación de sus posiciones.

Para el L_1 tenemos:

$$r_1 + r_2 = 1 \quad r_1 = x + \mu_2 \quad r_2 = -x + \mu_1 \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{\partial r_2}{\partial x} = 1.$$

Así, sustituyendo en la ecuación (3.30), obtenemos:

$$\mu_1 \left(\frac{-1}{(1-r_2)^2} + 1 - r_2 \right) - \mu_2 \left(\frac{-1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0,$$

o equivalentemente:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{(1-r_2 + \frac{r_2^2}{3})}{(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3}. \quad (3.32)$$

Si definimos

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.33)$$

entonces para r_2 pequeño es claro que $r_2 = \alpha$ es una solución. Si calculamos Taylor de orden 4 en (3.32), tenemos que:

$$\alpha = r_2 + \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{53}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \quad (3.34)$$

Consideremos ahora la siguiente función:

$$f(r_2) = \frac{(1 - r_2 + \frac{r_2^2}{3})}{(1 + r_2 + r_2^2)(1 - r_2)^3}.$$

Usaremos el método de inversión de Lagrange (el cuál no se tratará aquí) para invertir esta serie y expresar r_2 como una función de α . Comparando la ecuación (3.34) con la ecuación del método de inversión, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} r_2 &= \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{3})^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j \\ r_2 &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nos falta encontrar L_2 y L_3 .

Para el punto L_2 , tenemos:

$$r_1 - r_2 = 1 \quad r_1 = x + \mu_2 \quad r_2 = x - \mu_1 \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = 1.$$

Haciendo las sustituciones para r_1 en la ecuación (3.30) obtenemos:

$$\mu_1 \left(\frac{-1}{(1 + r_2)^2} + 1 + r_2 \right) + \mu_2 \left(\frac{-1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0,$$

o equivalentemente:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{(1 + r_2 + \frac{r_2^2}{3})}{(1 + r_2)^2(1 - r_2^3)}.$$

Usando la definición de α en la ecuación (3.33) llegamos a:

$$\begin{aligned} \alpha &= r_2 - \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{1}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \\ r_2 &= \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para el punto L_3 , tenemos las siguientes relaciones:

$$r_2 - r_1 = 1 \quad r_1 = -x - \mu_2 \quad r_2 = -x + \mu_1 \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = -1.$$

Haciendo las sustituciones para r_2 en la ecuación (3.30), obtenemos:

$$\mu_1 \left(\frac{-1}{r_1^2} + r_1 \right) + \mu_2 \left(\frac{-1}{(r_1 + 1)^2} + 1 + r_1 \right) = 0,$$

o equivalentemente:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(1 - r_1^3)(1 + r_1)^2}{r_1^3(r_1^2 + 3r_1 + 3)}.$$

Si ponemos $r_1 = 1 + \beta$ (que implica que $r_2 = 2 + \beta$) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} &= -\frac{12}{7}\beta + \frac{144}{49}\beta^2 - \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4) \\ \beta &= -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La posición de todos los puntos Lagrangianos y las curvas de velocidad cero para tres valores críticos de la constante de Jacobi para $\mu_2 = 0,2$, se muestran en la figura 3·7. En la figura 3·8 la superficie definida por las curvas de velocidad cero se muestra para el mismo valor de μ_2 .

Remitiendonos a las dos figuras mencionadas, el punto L_1 tiene el valor de la constante de Jacobi más grande ($C_j = 3,805$ para $\mu_2 = 0,2$) y se encuentra en un punto crítico de la curva interior. Hay otra rama de la misma curva en donde se encuentra el punto L_2 (que tiene $C_j = 3,552$ para $\mu_2 = 0,2$). L_1 y L_2 son puntos silla en las curvas de velocidad cero. Una partícula con $C_j < C_{L_2}$ debería orbitar en el interior o exterior de las regiones del plano. Dos ramas de las curvas

de velocidad cero se encuentran en el punto L_3 ($C_j = 3,197$ para $\mu_2 = 0,2$). Los puntos de equilibrio triangulares L_4 y L_5 tienen el valor más bajo de la constante de Jacobi ($C_j = 2,84$ para $\mu_2 = 0,2$); si una partícula tiene una constante de Jacobi $C_j < C_{L_{4,5}}$, entonces no hay regiones del plano que queden excluidas. Esto no implica que la partícula atravesase todas las regiones accesibles, sólo que la constante de Jacobi no puede proveer cotas del movimiento.

Tengamos en cuenta que todos los puntos L_i tienen velocidad cero porque son equilibrios.

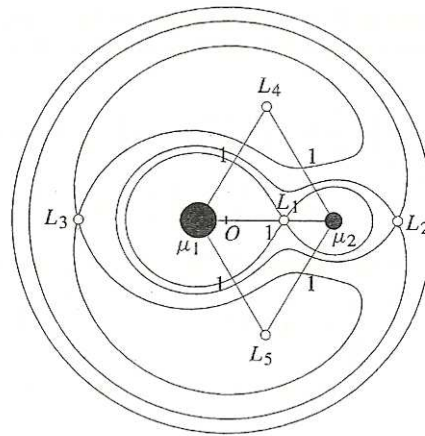


Figura 3.7: Posición de puntos de equilibrio Lagrangianos asociados a las curvas de velocidad cero con $\mu_2 = 0,2$. El gráfico muestra las curvas de velocidad cero para tres valores críticos de la constante de Jacobi 3, 805, 3, 552 y 3, 197 que pasan a través de los puntos L_1, L_2 y L_3 para el mismo valor de μ_2 . El punto O denota el centro de masas del sistema.

No está universalmente aceptado el sistema de los puntos Lagrangianos de equilibrio. Elegimos el nombre de los puntos, de acuerdo al valor que tome la

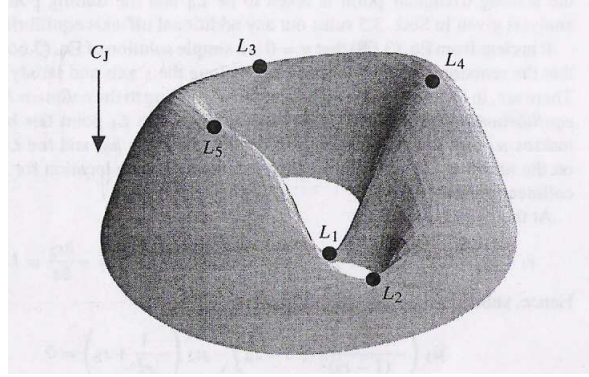


Figura 3.8: Superficie tridimensional definida por $C_j = 2U$ y la posición de puntos lagrangianos para distintos valores críticos de la constante de Jacobi y para una masa $\mu_2 = 0,2$. Los puntos L_1 , L_2 y L_3 son puntos silla de la superficie. La superficie está dibujada de forma que la altura vertical representa el valor negativo de la constante de Jacobi C_j .

constante de Jacobi, el más grande corresponde a L_1 , y los más pequeños para L_4 y L_5 . Podemos calcular esos valores de la constante de Jacobi usando series de expansión en la ecuación (3.15) (y tomando $n = 1$) con los valores apropiados de x e y o r_1 y r_2 . Incluyendo términos hasta los de $\mathcal{O}(\mu_2)$ en la expansión, obtenemos:

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{\frac{4}{3}} \mu_2^{\frac{2}{3}} - 10 \frac{\mu_2}{3}$$

$$C_{L_2} \approx 3 + 3^{\frac{4}{3}} \mu_2^{\frac{2}{3}} - 14 \frac{\mu_2}{3}$$

$$C_{L_3} \approx 3 + \mu_2$$

$$C_{L_4} \approx 3 - \mu_2$$

$$C_{L_5} \approx 3 - \mu_2$$

Demostremos los casos para C_{L_4} y C_{L_5} .

Sabemos que:

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces,

$$C_j = \left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)^2 + \frac{3}{4} + 2(\mu_1 + \mu_2)$$

$$= 3 - \mu_2 + \mu_2^2$$

$$= 3 - \mu_2 + \mathcal{O}(\mu_2),$$

y así demostramos lo que queríamos.

En la expresión de C_{L_1} , debemos usar que:

$$\beta = -\frac{7}{12} \frac{\mu_2}{1 - \mu_2}$$

$$r_1 = 1 + \beta \approx \frac{12 - 19\mu_2}{12(1 - \mu_2)},$$

luego reemplazo en la expresión de C_j y obtengo lo deseado más un $\mathcal{O}(\mu_2)$.

Notar que las ecuaciones (3.3) y (3.15) son idénticas si reemplazamos y por $-y$, por lo que las curvas de velocidad cero deben ser simétricas respecto al eje x (esto se ve claramente en las figuras 3·2 y 3·7), y los valores de la constante de Jacobi para L_4 y L_5 son los mismos.

El valor más grande para $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ en el sistema solar, ocurre en el sistema Plutón-Charón (luna de Plutón), donde $\mu_2 \approx 10^{-1}$. El sistema Tierra-Luna tiene $\mu_2 \approx 10^{-2}$, pero todo otro par planeta-satélite y sol-planeta tienen valores de μ_2 mucho más pequeños. De esta manera, como estamos interesados en aplicaciones

del sistema solar, consideraremos las curvas de velocidad cero y los puntos de equilibrio Lagrangianos para valores pequeños de μ_2 .

Desde las ecuaciones de C_{L_1} y C_{L_2} , es claro que cuando $\mu_2 \rightarrow 0$, $C_{L_1} \rightarrow C_{L_2}$. Además de las expresiones de r_2 dadas en (3.35) y (3.36), vemos que cuando $\mu_2 \rightarrow 0$, los términos de $\mathcal{O}(\alpha^2)$ pueden ser ignorados y así L_1 y L_2 equidistan de la masa μ_2 . El punto L_3 está a distancia $1 + \beta$ de la masa central, donde $\beta < 0$ está dado por la expresión para β en la ecuación (3.37). Además, cuando $\mu_2 \rightarrow 0$, el punto L_3 se aproxima a un círculo unitario. Los puntos triangulares (L_4 y L_5) viven sobre un círculo unitario centrado en la masa μ_1 y está a distancia $r = (1 - \mu_2 + \mu_2^2)^{\frac{1}{2}}$ del centro de masas (para determinar este valor de r aplico el teorema del coseno al triángulo con vértices en μ_1 , L_4 y O). Puesto que la cantidad μ_2 es también la distancia entre la masa μ_1 y el centro de masas del sistema, cuando $\mu_2 \rightarrow 0$, el círculo unitario centrado en μ_1 se aproxima al círculo unitario centrado en el centro de masas.

La figura siguiente (figura 3 · 9) muestra las curvas de velocidad cero y la posición de los puntos de equilibrio Lagrangianos para el caso donde $\mu_2 = 0,01$, un valor comparable para el sistema Tierra-Luna. Notemos que los puntos L_1 y L_2 están equidistantes de la masa μ_2 y que el punto L_3 está sobre un círculo unitario. Aunque la línea punteada de la figura mencionada denota un círculo unitario centrado en la masa μ_1 , un cambio del 1 % de su radio produciría un círculo unitario centrado en el centro de masas del sistema.

Se puede mostrar que en primer lugar los puntos L_3 , L_4 y L_5 y luego los puntos L_1 y L_2 se posicionan sobre un círculo de radio unitario cuando $\mu_2 \rightarrow 0$. Esta propiedad de curvas de velocidad cero y puntos de equilibrio nos permite hacer

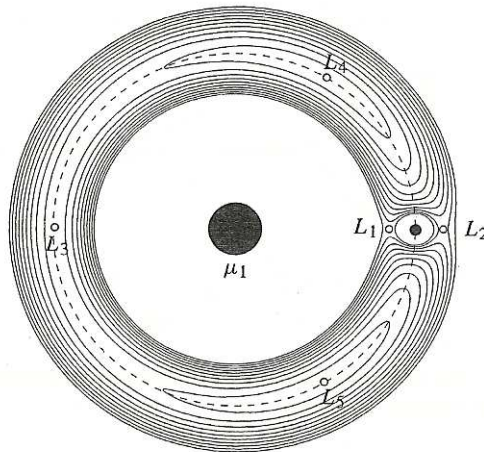


Figura 3.9: Posición de puntos de equilibrio Lagrangianos asociados a curvas de velocidad cero con $\mu_2 = 0,01$. La línea punteada denota un círculo unitario centrado en la masa μ_1 .

aproximaciones útiles cuando se discute el movimiento de la partícula de prueba en el caso de un sistema con una masa pequeña.

Los puntos de equilibrio son puntos en el espacio donde se equilibran los campos gravitatorios de dos cuerpos masivos, como el sol y la tierra por ejemplo. Los campos gravitatorios se combinan para proporcionar un equilibrio a un tercer organismo de masa despreciable.

Por ejemplo, el punto L_2 se encuentra a 1,5 millones de kilómetros de la Tierra en la dirección opuesta al Sol, que le permite al satélite mantener sus paneles solares hacia el sol y apuntando su telescopio hacia el sistema solar exterior. El punto L_2 es ideal para observar el universo profundo. El satélite WMAP está en este punto desde el año 2001. El satélite GAIA se asentó allí en 2011, y el telescopio espacial

James Webb lo hará en 2013.

Entre los cinco puntos de equilibrio, sólo L_4 y L_5 son estables, lo que significa que la materia y el polvo tiende a acumularse en estas regiones. Los puntos L_1 , L_2 y L_3 son inestables, por lo que no pueden retener a los satélites naturales. Sin embargo, los satélites artificiales sólo periódicamente pueden corregir su órbita, y así permanecer en estas zonas.

Capítulo 4

Métodos Numéricos

Introducción

En la mayoría de los casos, cuando planteamos un problema que está gobernado mediante una ecuación diferencial ordinaria, su solución exacta es muy difícil de encontrar. Es por eso que recurrimos al análisis cualitativo de las soluciones y la utilización de algún método numérico con el cuál podamos aproximar esas soluciones con cierto margen de tolerancia.

Los métodos numéricos constituyen un medio para reforzar la comprensión de las matemáticas, aumentando su capacidad de comprensión y entendimiento del problema planteado.

Existen distintos tipos de métodos, los de un paso y los de muchos pasos (multipaso). Los primeros se llaman así porque en el cálculo de cada punto sólo se usa la información del último punto. Los segundos, en cambio, utilizan la información de los puntos previos.

Entre los métodos de un paso para la resolución de ecuaciones diferenciales

ordinarias, los de Taylor y los de Runge-Kutta son los más utilizados. El método más sencillo es el de Euler, aunque también es el que mayores errores produce. En cambio, el método de Runge-Kutta de cuarto orden proporciona soluciones con una precisión más aceptable y ha sido y es ampliamente utilizado en diferentes campos científicos. Los métodos multipaso tienen una mayor complicación ya que en cada paso se tiene que resolver una ecuación generalmente no lineal. Los más utilizados son los métodos de Adams-Bashforth-Moulton y el de Milne-Simpson.

Si se utiliza un tamaño de paso variable, se puede mejorar la eficiencia de los métodos. En este sentido, los métodos adaptativos de paso variable ajustan el tamaño de paso para que el error cometido se mantenga siempre por debajo de una cierta tolerancia fijada a priori. Los más populares son el de Runge-Kutta-Fehlberg y el Predictor-Corrector de Adams con paso variable.

El método de colocación (y sobre el cual se harán algunos comentarios) es ampliamente conocido por ser un procedimiento altamente eficiente y preciso para la solución numérica de ecuaciones diferenciales. Una característica que lo distingue es que su formulación es muy simple. Su aplicación se da generalmente en espacios donde las funciones y sus derivadas pueden tener discontinuidades de salto. Los métodos de colocación, también se pueden formular con un paso variable y se los conoce como métodos de colocación adaptativos.

4.1. Método de Euler

Consideremos el siguiente problema a valores iniciales (P.V.I.):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

con $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, en donde Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^n , e I es un intervalo de \mathbb{R} .

El sistema (4.1) puede ser no autónomo.

Integrando la ecuación $\dot{x} = f(t, x(t))$ entre t_0 y t y usando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds\end{aligned}\tag{4.2}$$

Hemos convertido la ecuación diferencial en una ecuación integral. En varias oportunidades utilizaremos esta formulación de la ecuación (4.1). Notemos además que la ecuación (4.2) ya “contiene información del valor inicial, pues si x satisface (4.2):

$$x(t_0) = x_0 + 0 = x_0.$$

No obstante, la ecuación (4.2) tiene a x en el primer y segundo miembro, de modo que no puede ser usada en forma directa para encontrar x .

Miremos la ecuación (4.2) en un intervalo “pequeño” de tiempo $[t_0, t_0 + h]$:

$$x(t_0 + h) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f(s, x(s)) ds\tag{4.3}$$

Si el intervalo es suficientemente pequeño uno esperaría que $f(t_0, x_0)$ sea una buena aproximación a $f(s, x(s))$ cuando $s \in [t_0, t_0 + h]$.

Reemplazando $f(s, x(s))$ por $f(t_0, x_0)$ en la ecuación (4.3) tenemos:

$$x_1 := x(t_0 + h) \approx x_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} f(t_0, x_0) ds = x_0 + hf(t_0, x_0)$$

Ahora hagamos lo mismo en el punto (t_1, x_1) , con $t_1 = t_0 + h$ y consideremos

$$t_2 = t_1 + h \quad x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1).$$

Y así continuamos construyendo las sucesiones t_k y x_k como sigue:

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) \quad t_{k+1} = t_k + h.$$

Uno esperaría que que los puntos (t_k, x_k) sean buenas aproximaciones a los respectivos sobre la gráfica de la solución real. Llamaremos a h el paso del método.

Programar el método es muy sencillo:

$$t_0 = \text{tiempo inicial}$$

$$t_{final} = \text{tiempo final}$$

$$x_0 = \text{valor inicial}$$

$$h = \text{paso}$$

$$n = \frac{t_{final} - t_0}{h}$$

$$\text{for } i = 1, \dots, n$$

$$y_{i+1} = x_0 + hf(t_i, y_i)$$

end

El método funciona ya sea una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales, dando la sucesión y_i de números o vectores respectivamente.

Como vimos, este método consiste en encontrar una aproximación en cada subdominio $[t_0, t_0 + h]$ sobre el cual se ha particionado el dominio de integración.

4.2. Forma de Newton del polinomio interpolante

Dados $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n todos en \mathbb{R}^n y todos distintos y $f(x_k) = y_k$, con $k = 0, 1, \dots, n$, para alguna función f definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a los nodos distintos x_0, x_1, \dots, x_n . El polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n que interpola a f en los datos dados, puede expresarse en la forma:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

para ciertas constantes b_i .

La pregunta es entonces: ¿Cómo calculamos esas constantes?

Puesto que

$$P_n(x_k) = y_k = f(x_k),$$

con $k = 0, 1, \dots, n$, entonces $P_n(x_0) = b_0 = f(x_0)$, así que $b_0 = f(x_0)$.

Por otro lado, tenemos

$$P_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f(x_1),$$

así que $b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Hagamos un paso más

$$P_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2),$$

así que $b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$.

Después de hacer algunas manipulaciones algebraicas en esta última expresión, arribamos a:

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)}.$$

Los otros coeficientes b_3, b_4, \dots, b_n se pueden obtener consecutivamente, siguiendo el método anterior.

Para facilitar la escritura de los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_n del polinomio interpolante obtenido de esta manera, se introduce la siguiente notación de diferencia dividida hacia adelante o progresiva de Newton.

Definición 4.1 *Dados $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ con x_0, x_1, \dots, x_n números distintos y f alguna función, definimos:*

a) *La diferencia dividida cero de f con respecto a x_k es*

$$f[x_k] = f(x_k),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Así que, con respecto al polinomio interpolante $P_n(x)$, se tiene que $b_0 = f[x_0]$.

b) *La diferencia dividida uno de f con respecto a x_k y x_{k+1} es*

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k},$$

$$\text{con } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Observemos que las diferencias divididas uno dependen de las diferencias divididas cero y que, mientras hay $n+1$ diferencias divididas cero, hay n diferencias divididas uno. También observemos que $b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$.

c) *La diferencia dividida dos de f con respecto a x_k, x_{k+1} y x_{k+2} es*

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k},$$

con $k = 0, 1, \dots, n - 2$.

Observe que las diferencias divididas dos dependen de las diferencias divididas uno y que, mientras hay n diferencias divididas uno, hay $n - 1$ diferencias divididas dos.

También observemos que $b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$.

d) En general, conocidas las $n - (i - 1) + 1 = n - i + 2$ diferencias divididas $i - 1$ de f con respecto a $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}$, se definen las $n - i + 1$ diferencias divididas i de f con respecto a $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}$, así

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k},$$

con $k = 0, 1, \dots, n - i$.

Con esta notación de diferencia dividida se tiene que

$$b_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i],$$

$i = 0, 1, \dots, n$ y así el polinomio interpolante toma la forma siguiente:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Esta forma del polinomio interpolante se conoce como fórmula de diferencia dividida (progresiva) interpolante de Newton o forma progresiva de Newton del polinomio interpolante, y se usa en los cálculos numéricos cuando se interpola en un punto x que está más cerca de x_0 que de x_n (suponemos ordenados los nodos x_0, x_1, \dots, x_n). Si el punto x en el cual vamos a interpolar está más cerca de x_n que

de x_0 se usa la fórmula de diferencia dividida (regresiva) interpolante de Newton:

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Es muy importante tener en cuenta que el polinomio progresivo y el polinomio regresivo de Newton son el mismo polinomio (siempre y cuando se usen los mismos datos); lo que ocurre es que en la fórmula progresiva el dato que más “pesa” es $f[x_0]$, mientras que en la regresiva el que más “pesa” es $f[x_n]$.

La forma de Newton del polinomio interpolante tiene la ventaja de que el cálculo de los coeficientes va usando la información anterior.

4.3. Métodos de Colocación

Los métodos de colocación son un procedimiento para la solución de ecuaciones diferenciales con valores de frontera, que se basa en la aproximación de una función general por una clase de funciones más simples. Este procedimiento es muy eficiente y muy utilizado. La clase de funciones de aproximación más comunes es la de los polinomios, aunque también se pueden utilizar funciones trigonométricas, exponenciales y racionales. De todas estas, la interpolación polinomial es la más utilizada y es por eso que se introdujeron en la sección (4.2).

La función general que se quiere aproximar es la solución de la ecuación diferencial y es expresada como la suma de aquellas funciones más simples multiplicadas por un coeficiente, que en principio es una incógnita. El método de colocación interpola en puntos conocidos, llamados nodos, así como en el interior de los intervalos utilizando ciertos puntos de colocación que por razones que no analizaremos

aquí son los ceros del polinomio de Legendre de cada intervalo. Así se construye un sistema de ecuaciones para despejar el valor de los coeficientes.

Sea f una función definida sobre un intervalo real $[a, b]$. Consideremos una partición de dicho intervalo:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_j < t_{j+1} < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Consideremos a su vez una partición del intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ de la siguiente manera:

$$t_j = t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_{q-k+1}} = t_{j+1},$$

en donde q es el grado del polinomio interpolante en la subdivisión y k es el grado del polinomio interpolante de $[t_j, t_{j+1}]$. Obviamente $q > k$, ya que, al agregar más puntos para interpolar, el grado del polinomio aumenta.

Este método intenta mejorar el método de Euler dado en (4.1), y para ello se definen épocas extras en un intervalo de una partición del intervalo.

El polinomio P que aproxima la solución en $[t_j, t_{j+1}]$, es

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^q \frac{y_i}{i!} (t - t_j)^i$$

A los valores de y_0, \dots, y_{k-1} los determinamos como lo hicimos con el método de Euler (mirar (4.1)) (o son condiciones iniciales o resultan de aplicar el polinomio en condiciones anteriores).

En nuestro caso, faltan averiguar los valores de y_k, \dots, y_q que son vectores en \mathbb{R}^n .

Haciendo el cambio de variable

$$x_j = y_{k+j},$$

los valores a encontrar son x_0, \dots, x_{q-k} .

El polinomio puede ser escrito como:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y_i}{i!} (t - t_j)^i + \sum_{i=k}^q \frac{x_{i-k}}{i!} (t - t_j)^i,$$

en donde debe cumplirse que

$$P^{(k)}(t_{j_s}) = f(t_{j_s}, P(t_{j_s}), \dots, P^{(k-1)}(t_{j_s})). \quad (4.4)$$

Derivando k veces el polinomio, obtenemos:

$$\begin{aligned} P^{(k)}(t) &= \sum_{i=k}^q \frac{x_{i-k}}{(i-k)!} (t - t_j)^{i-k} \\ &= \sum_{l=0}^{q-k} \frac{x_l}{l!} (t - t_j)^l \end{aligned}$$

Aquí, hemos cambiado $i - k$ por l . Además supondremos que el paso es fijo, es decir, tomamos $h = t_{j+1} - t_j \quad \forall j$.

También tomaremos como supuesto que cada subintervalo en $[t_j, t_{j+1}]$ es equidistante, es decir

$$t_{j_s} = t_j + s \frac{h}{q - k}, \quad s = 0, \dots, q - k.$$

Ahora si evaluamos la derivada k -ésima de P en t_{j_s} , obtenemos:

$$P^{(k)}(t_{j_s}) = \sum_{l=0}^{q-k} \frac{x_l}{l!} \frac{s^l h^l}{(q-k)^l} = \sum_{l=0}^{q-k} x_l C_{ls} = [x_0 | \dots | x_{q-k}] \cdot C_{*s}. \quad (4.5)$$

En donde C_{ls} representa una matriz y C_{*s} indica la columna s de dicha matriz.

No perdamos de vista en este desarrollo que justamente x_0, \dots, x_{q-k} son los vectores que debemos determinar. Es importante notar que a la hora de programar

este método, la matriz C debe calcularse una sólo vez, es decir debe ir programada fuera del bucle, para evitar pérdida de tiempo y realización de cuentas extra por la computadora.

Como dijimos antes, debe verificarse lo escrito en (4.4).

Si llamamos

$$f_s := f(t_{j_s}, P(t_{j_s}), \dots, P^{(k-1)}(t_{j_s})),$$

debería cumplirse que

$$P^{(k)}(t_{j_s}) = f_s.$$

Llamemos

$$f_0 = \Delta_0^0 \quad f_1 = \Delta_1^0 \quad \dots \quad f_{q-k-1} = \Delta_{q-k-1}^0 \quad f_{q-k} = \Delta_{q-k}^0$$

Además, llamemos

$$\Delta_1^0 - \Delta_0^0 = \Delta_1^1 \quad \dots \quad \Delta_{q-k}^0 - \Delta_{q-k-1}^0 = \Delta_{q-k-1}^1$$

y así seguimos definiendo $\Delta_s^2, \Delta_s^3, \dots, \Delta_s^s$. Todos estas diferencias Δ_i^j son vectores en \mathbb{R}^n .

Por otro lado, podemos escribir lo siguiente:

$$P^{(k)}(t_{j_s}) = \Delta_0^0 + \Delta_0^1 s + \dots + \Delta_0^s \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \quad s = 0, \dots, q-k, \quad (4.6)$$

en donde Δ_0^j son diferencias y además $\Delta_0^j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Igualando las expresiones (4.5) y (4.6), obtenemos:

$$[x_0 | \dots | x_{q-k}] C_{*s} = \Delta_0^0 + \Delta_0^1 s + \dots + \Delta_0^s \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix},$$

en donde

$$X = [x_0 | \dots | x_{q-k}] \in \mathbb{R}^{n \times (q-k+1)}$$

y la matriz real C tiene dimensiones $(q-k+1) \times (q-k+1)$.

Entonces

$$X.C = \Delta F.B,$$

en donde

$$\Delta F = [\Delta_0^0 | \Delta_0^1 | \dots | \Delta_0^s] \in \mathbb{R}^{n \times (q-k+1)}$$

y la matriz $B \in \mathbb{R}^{(q-k+1) \times (q-k+1)}$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \binom{q-k}{0} \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \binom{q-k}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \binom{q-k}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \binom{q-k}{q-k} \end{pmatrix}$$

debemos tener en cuenta que

$$\Delta F = \Delta F(X),$$

es decir depende de las incógnitas.

Entonces ocurre que:

$$\begin{aligned} X.C &= \Delta F(X).B \\ X &= \Delta F(X).B.C^{-1} \\ &= \Delta F(X).D \end{aligned}$$

Y esta última es una expresión de punto fijo. Por lo tanto debemos comenzar con un buen valor inicial X_0 y luego iteramos la siguiente relación de recurrencia:

$$X_{n+1} = \Delta F(X_n).D.$$

Este método converge a la solución de la ecuación anterior. En el primer paso se pueden utilizar $q - k$ iteraciones para obtener buenos resultados. En los demás pasos, se suele utilizar una menor cantidad de pasos.

Para el primer paso se puede utilizar como valor inicial lo siguiente:

$$X_0 = f(t_j, y_0, \dots, y_{j-1}) \quad X_1 = 0 \quad \dots \quad X_{q-k} = 0$$

4.4. Programando un método de colocación en el lenguaje MATLAB

MATLAB (Laboratorio de Matrices) es un sistema de computación interactivo que combina cálculo numérico, gráficos, visualización y un lenguaje de programación de alto nivel. Fue desarrollado inicialmente por Cleve Moler entre 1977 y 1984 como ayuda para la docencia.

MATLAB puede realizar operaciones aritméticas reales y complejas con matrices y escalares, resolver sistemas de ecuaciones no lineales, integrar funciones y sistemas de ecuaciones diferenciales y algebraicas, polinomios e interpolación, regresión, entre otras cosas.

Vamos a resolver numéricamente el problema de los n cuerpos tratados en la sección (2.1). Notemos que este es un problema que se modeliza con ecuaciones diferenciales de orden dos. Por lo tanto, todo lo que se implemente de ahora

en adelante es para resolver ecuaciones de ese tipo.

La siguiente función implementa un método de colocación para resolver problemas autónomos de segundo orden. En particular se aplica al problema de los n -cuerpos.

Los siguientes items son valores que el usuario debe introducir para comenzar con la ejecución del método

- . t_ini = tiempo inicial
- . posicion = posicion inicial de los cuerpos
- . velocidad = velocidad inicial de los cuerpos
- . iteraciones = cantidad de iteraciones para resolver la ecuación no lineal en cada paso del método
- . orden = orden del método
- . pasos = longitud del paso (fijo)
- . cant_pasos = cantidad de pasos a realizar
- . fuerza_nb = funcion

La salida del programa es: solucion_epocas_almacenadas
y velocidad_epocas_almacenadas.

```

function[solucion_epocas_almacenadas, velocidad_epocas_almacenadas] =
metodo_colocacion(valores iniciales)
%warning off;
Pasos = t(j + 1) - t(j) %Los datos ingresados deben estar como columnas
orden_ecu = 2;
mat_dim = orden - orden_ecu;
H = matriz_dif(orden, orden_ecu);
C2 = matriz_C2(pasos, orden, orden_ecu);
B = matriz_B(mat_dim);
m = vector_fila(pasos, mat_dim);
m1 = vector_fila1(pasos, mat_dim); %pasos de extrapolacion
G = matriz_G(pasos, orden, orden_ecu); %matriz de extrapolacion
D = vector_D(pasos, orden, orden_ecu); %vector de derivada
C = C2(orden_ecu : orden, :);
C1 = C2(1 : orden - orden_ecu + 1, :);
M = B * inv(C1);
n = length(posicion);
f = fuerza_nb;

X(:, 1) = f(posicion);
X(:, 2 : mat_dim + 1) = zeros(n, mat_dim);
solucion_epocas = repmat(posicion, [1, mat_dim + 1]) + velocidad * m + X * C;
solucion_epocas_almacenadas = zeros(n, cant_pasos);

%La aproximacion de solucion epocas esta en columnas

```

```

funcion_epocas = f(solucion_epocas);
delta_F = funcion_epocas * H;

for I = 1 : mat_dim
    X = delta_F * M;
    solucion_epocas = repmat(posicion, [1, mat_dim+1]) + velocidad*m + X*C;
    funcion_epocas = f(solucion_epocas);
    delta_F = funcion_epocas * H;
end

for j = 1 : cant_pasos
    solucion_epocas = repmat(posicion, [1, mat_dim + 1]) + velocidad * m1 +
    X * G;
    posicion = solucion_epocas(:, 1);
    velocidad = velocidad + X * D;
    solucion_epocas_almacenadas(:, j) = posicion;
    velocidad_epocas_almacenadas(:, j) = velocidad;

    for I = 1 : iteraciones
        funcion_epocas = f(solucion_epocas);
        delta_F = funcion_epocas * H;
        X = delta_F * M;
        solucion_epocas = repmat(posicion, [1, mat_dim+1]) + velocidad*m + X*C;
    end
    solucion_epocas_almacenadas(:, j) = solucion_epocas(:, mat_dim + 1);

```



```
%guardamos la ultima columna de solucion epocas  
end end
```

MATRICES Y FUNCIONES AUXILIARES

```
function C = matriz_C2(pasos, orden, orden_ecu)  
mat_dim = orden - orden_ecu;  
C = (repmat((0 : 1 : mat_dim) * pasos/mat_dim, [orden + 1, 1])  
repmat((0 : 1 : orden)', [1, mat_dim + 1])) ./  
(repmat(factorial(0 : 1 : orden)', [1, mat_dim + 1]));  
end
```

```
function H = matriz_dif(orden, orden_ecu)  
mat_dim = orden - orden_ecu + 1;  
A = eye(mat_dim);  
for i = 1 : mat_dim - 1  
B = zeros(mat_dim);  
for j = i : mat_dim - 1  
B(j, j + 1) = -1;  
end  
A = A * (eye(mat_dim) + B);  
end  
H = A;  
end
```

```

function B = matriz_B(mat_dim)
B = eye(mat_dim + 1, mat_dim + 1);
for i = 1 : mat_dim + 1
for j = i + 1 : mat_dim + 1
B(i, j) = nchoosek(j - 1, i - 1);
end end end

```

```

function m = vector_fila(pasos, mat_dim)
m = (0 : 1 : mat_dim) * pasos/mat_dim;
end

```

```

function G = matriz_G(pasos, orden, orden_ecu)
mat_dim = orden - orden_ecu;
G = ( repmat(((0 : 1 : mat_dim) * pasos/mat_dim) + pasos, [mat_dim + 1, 1]) ^
 repmat((orden_ecu : 1 : orden)', [1, mat_dim + 1]))
 ./ ( repmat(factorial(orden_ecu : 1 : orden)', [1, mat_dim + 1])));
end

```

```

function m1 = vector_fila1(pasos, mat_dim)
m1 = zeros(1, mat_dim + 1);
m1 = (0 : 1 : mat_dim) * pasos/mat_dim + pasos;
end

```

```

function D = vector_D(pasos, orden, orden_ecu)
mat_dim = orden - orden_ecu;

```

```

D = (ones(mat_dim + 1, 1) * pasos).^(1 : 1 : orden - 1)'.(factorial(1 : 1 :
orden - 1)');
end

function estado_aceleracion = fuerza_nb(estado, GM, indices, Indicador)
n = size(GM, 1);
s_est = size(estado, 1);
R = permute(reshape(estado', [3, n, s_est]), [2, 1, 3]);
sR = size(R);
R0 = reshape((-[-GM(2, n+1), GM(1, 1 : n-1)]/GM(1, n))*R(:, :), [1, sR(2 :
end)]);
R = cat(1, R, R0);
diferencias = R(indices(:, 1), :, :) - R(indices(:, 2), :, :);
norma_diferencias = (sum(diferencias.^2, 2)).^(1/5);
diferencias = repmat(norma_diferencias, [1, 3, 1]). * diferencias;
diferencias = diferencias(Indicador, :, :);
sdif = size(diferencias);
estado_aceleracion = permute(reshape(-GM * diferencias(:, :), [n, sdif(2 :
end)]), [2, 1, 3]);
estado_aceleracion = reshape(estado_aceleracion, [3 * n, s_est])';

```

En esta última función, los valores de *GM*, *estado*, *indices* e *indicador* están cargados en otro archivo, el cual se debe ejecutar antes de comenzar con el arranque del método en sí. A su vez las posiciones y velocidades iniciales usadas en el método de colocación, están dentro de la variable *estado*.

Los valores de la posición y la velocidad de los cuerpos, los valores de GM y demás información necesaria, se encuentra disponible en una base de datos proporcionada por la NASA. La misma se actualiza diariamente y en ella consta la información de 8 planetas, 175 satélites planetarios, 3153 cometas, 587581 asteroides, el sol y naves espaciales selectas, como el Voyager mencionado en el capítulo 3. Toda esta información es accesible mediante la página

$$\text{http} : // \text{ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi} \quad (4.7)$$

COMENTARIOS FINALES

La importancia del empleo de modelos para el estudio de algún sistema radica en la posibilidad de trabajar con una representación alternativa e indirecta de la realidad, es decir, tener la posibilidad de contar con algo que se comporte, parezca o reaccione como el sistema que deseamos estudiar. También es claro que un modelo será mejor en cuanto más fidedigna sea la información que se obtenga de él. El concepto de modelo matemático en este estudio tiene, quizás, un nivel de abstracción mayor, ya que se refiere a una ecuación que contiene la mayor información posible acerca del sistema a estudiar basada en las leyes que rigen su comportamiento. De este modo, al analizar dicha ecuación mediante , la variación de los posibles parámetros que contenga, la obtención de su representación gráfica, la solución de sus incógnitas, etcétera, nos permitirá obtener conocimiento acerca del sistema original al cual modelamos.

En el estudio de sistemas de partículas, que es el problema central de esta tesis,

el empleo de modelos matemáticos es indispensable, ya que uno de los objetivos de la Física es la predicción de su comportamiento. Para ello, se cuentan con las reglas que gobiernan su evolución, es decir, los cambios que sufre cuando se modifica alguno de sus parámetros. Dichos cambios pueden ser representados a través del concepto matemático de la derivada, de modo que al plantear la relación que sostiene ésta con las reglas antes mencionadas, empleando una ecuación, se tendrá como resultado un modelo matemático.

Ante esto, como se ha mostrado, hemos construido e implementado un método numérico a nuestro problema. Vale mencionar, que el método de colocación desarrollado en este capítulo nos ha llevado bastante tiempo. Sin embargo, una vez finalizada su programación, hemos comprobado, con datos oficiales de la NASA (en la página web (4.7) mencionada), que las salidas de nuestro programa no se corresponden con los mismos. Notando de esta manera que nuestro programa presentaba ciertos errores, que si bien se intentaron detectar y solucionar no fue posible.

Por esta razón, es que nos fue proporcionado otro método de colocación, que resuelve el mismo problema. Dicho método es aún más eficiente que el desarrollado en términos teóricos, ya que utiliza un paso variable en vez de fijo, por eso es que recibe el nombre de Método de Colocación Adaptativo (el término “adaptativo” permite el refinamiento de la discretización sólo localmente). Aunque el mismo no fue desarrollado por nosotros, su análisis y aplicación a nuestro problema tanto para los n cuerpos como para los tres resultó una valiosa experiencia de estudio y producción matemática.

Con este nuevo método de colocación hemos podido determinar la evolución del estado (posición y velocidad) de cualquier cuerpo de nuestro sistema con origen en algún otro. Tomando en particular el planeta Tierra, y el Sol como centro (coordenadas heliocéntricas), podemos determinar aproximaciones de su estado dentro de varios años.

Aplicando dicho método se determinó que la posición y velocidad de nuestro planeta el primero de enero del 2100 serán:

Posición

$$(-1,5730914765493 \cdot 10^{-01}; 9,7065394214171 \cdot 10^{-01}; -2,1821552308329 \cdot 10^{-04})$$

Velocidad

$$(-1,7258774565285 \cdot 10^{-02}; -2,8133371537586 \cdot 10^{-03}; 1,6997859718205 \cdot 10^{-06})$$

En donde, la posición está expresada en Unidades Astronómicas (una unidad astronómica es igual a 149597870,691 kilómetros) y la velocidad está expresada en Unidades Astronómicas por día (*UA/día*). Dichos datos se corresponden con una buena aproximación a los proporcionados por la NASA.

Por último, creo pertinente mencionar una valoración personal sobre esta etapa de programación que me ha permitido un buen acercamiento a lo que es el trabajo de investigación, más allá del mal funcionamiento que presentó nuestro programa. Creo fuertemente que este trabajo de estudio me ha fortalecido y ampliado la mirada sobre lo que es la investigación científica.

Bibliografía

- [1] C. D. Murray, S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University. Printed in the United States of America (1999).
- [2] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. Copyright 2000 – 2004. Vienna. Austria. (2004).
- [3] Terenzio Soldovieri C. *Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton*. Copyright 2011. Venezuela. (2010).
- [4] E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer Series in Computational Mathematics ISSN 0179 – 3632. (2008).
- [5] Luis Rández. *Introducción a MATLAB*. Universidad de Zaragoza. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática Aplicada. (2007).
- [6] Luis Rodríguez Valencia. *Mecánica Clásica*. Universidad de Santiago de Chile. (2004).
- [7] V. I. Arnold. Russian Math. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Springer. 1997.
- [8] J. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer. (1971).

-
- [9] Jet Propulsion Laboratory. *Solar System Dynamics*. NASA Portal. <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>.
- [10] Astronoo. *El universo en todos sus estados*. © copyright: Astronoo. (2009).
- [11] E. Myles Standish, James G. Williams. *Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets*. (2003).
- [12] Gerhard Beutler. *Methods of Celestial Mechanics Volume I: Physical, Mathematical, and Numerical Principles*. Springer Berlin Heidelberg NewYork. Printed in Germany. (2005).
- [13] Gerhard Beutler. *Methods of Celestial Mechanics Volume II: Application to Planetary System, Geodynamics and Satellite Geodesy*. Springer Berlin Heidelberg NewYork. Printed in Germany. (2005).
- [14] Alessandro Morbidelli. *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*. (2006).