



UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO

FACULTAD DE INGENIERÍA



CONTROL SUPERVISOR ÓPTIMO DE VEHÍCULOS ELÉCTRICOS HÍBRIDOS EN TIEMPO REAL

Laura Virginia Pérez

Tesis presentada para la obtención del grado de
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Director: Ph.D. Víctor Pereyra

Consejero: Dr. Ing. Cristian H. De Angelo

Río Cuarto, 2013

85587

82227

73223

MFN:
Clasif:
T. 005

CONTROL SUPERVISOR ÓPTIMO DE VEHÍCULOS ELÉCTRICOS HÍBRIDOS EN TIEMPO REAL

por

Laura Virginia Pérez



Ph.D. Víctor L. Pereyra
Director

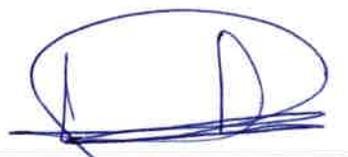


Dr. Ing. Cristian H. De Angelo
Consejero de Tesis

Aprobado por



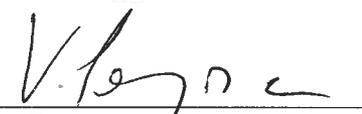
Dr. Pablo A. Lotito
Jurado



Ph.D. Germán A. Torres
Jurado



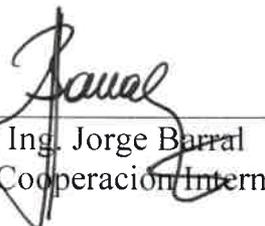
Ph.D. Fernando H. Magnago
Jurado



Ph.D. Víctor L. Pereyra
Director



Dr. Ing. Leonardo Molisani
Secretario de Posgrado de la Facultad de Ingeniería



Mg. Ing. Jorge Barral
Secretario de Posgrado y Cooperación Internacional de la UNRC

Septiembre de 2013

*A mi papá, que me compró en fascículos semanales
la Enciclopedia Estudiantil.*

Resumen

En este trabajo de tesis se desarrollan algoritmos de control supervisor para vehículos eléctricos híbridos (VEH) que minimizan el consumo de combustible y son aplicables en tiempo real. En otras palabras se generan las funciones de referencia de potencia que deben entregar cada una de las fuentes de energía a bordo del vehículo, el motor de combustión y las baterías, de manera de minimizar el consumo de combustible durante el recorrido de un trayecto.

El trabajo se basa en el planteo de un problema de control óptimo con restricciones en el control y en la variable de estado que es resuelto usando el principio del Máximo de Pontryagin(PMP).

El modelo se basa fuertemente en los requerimientos de potencia por parte del conductor, que se impone sean satisfechos en todo momento. La dificultad del problema de control radica en que si bien se busca determinar el control en cada instante con el conocimiento de la potencia requerida hasta ese instante (problema puntual), el objetivo es de naturaleza global, ya que se trata de reducir el consumo en un trayecto, desconociéndose en el instante los requerimientos de potencia a futuro en el resto del trayecto.

Puede verse que en la formulación de la solución basada en el PMP, el estado adjunto representa un peso con el que se penaliza instantáneamente el uso de energía de las baterías, para transformarlo en un equivalente de consumo de combustible. De esta forma, el problema de minimización global, se convierte en un problema de minimización local por lo que el conocimiento del valor del estado adjunto en cada instante permite el diseño de algoritmos aplicables en tiempo real.

En esta tesis mostramos cómo obtener la evolución del estado adjunto con algunas suposiciones sobre las funciones de rendimiento y con conocimiento previo de potencia requerida en el trayecto, tanto para el caso en que las restricciones de estado no devienen activas como en el caso en que sí lo hacen. Se muestra que, para el modelo considerado, el estado adjunto resulta continuo y se describe su evolución en el intervalo en que la restricción de estado deviene activa, lo que determina su comportamiento fuera del mismo.

Las soluciones son obtenidas mediante la formulación de las condiciones de optimalidad y la resolución de las mismas mediante una versátil herramienta de software para

la resolución de valores de contorno (PASVA4), que, entre otras facilidades, maneja discontinuidades en el lado derecho de las ecuaciones diferenciales y también en la solución y permite estimar parámetros adicionales mediante el agregado de condiciones de borde multipuntuales.

En base a las soluciones de los problemas anteriores, se diseñan algoritmos aplicables en tiempo real. Unos se basan en el uso del "factor de consumo equivalente" calculado en base a los requerimientos de potencia de un intervalo inmediato anterior. Otros consisten en usar la solución del problema de control con horizonte finito, mediante las predicciones de los requerimientos de potencia en un intervalo futuro breve, en un esquema de control predictivo.

Abstract

In this thesis, algorithms for supervisory control of hybrid electric vehicles that minimize fuel consumption and may be used on real time are developed. In other words, reference functions for the power that must be delivered by each one of the energy sources on board (the internal combustion engine and the bank of batteries) are generated in such a way that fuel consumption during a trip is minimized. The work is based on the statement of a control and state-constrained optimal control problem, that is solved by the use of Pontryagin Maximum Principle (PMP).

The model depends on power requirements from the driver, which are imposed to be fulfilled at every instant. The difficulty of the control problem arises from the fact that although it is sought to obtain the control action at each instant based on the knowledge of required power up to that instant (pointwise problem), the objective is global in nature, since it is wanted to minimize consumption throughout a trip and the power requirements at future times in the trip are not known.

It can be seen that in the formulation based on PMP, the adjoint state represents a weight that penalizes instantaneously the use of energy from the batteries, to translate it into a fuel consumption. This way, the minimization throughout an interval is turned on a pointwise minimization. This allows the design of real time algorithms.

In this thesis it is shown how to obtain the time evolution of the adjoint state under the hypotheses that the efficiency from the electrical path does not depend on the energy in the batteries and that the power requirements are known a priori for the whole trip. This is done both for the cases where the state constraints become active or not. It is shown that, for the considered model, the adjoint state is continuous and its time evolution in the binding interval, which determines its behaviour outside it, is described.

The problem is solved by stating the optimality conditions and solving the resulting boundary value problem by a versatile software tool, named PASVA4, that, among other facilities, can manage discontinuities in the right hand-side of the differential equations and also in the solution and is able to estimate additional parameters if the corresponding additional multipoint boundary conditions are added.

Based on the above solutions, real time algorithms are designed. Some are based in «Equivalence consumption minimization strategies», where the equivalence factor is computed on the base of power requirements from an immediately prior time interval. Other consist of using the solution of a finite horizon control problem in a short forward time interval, where the future power requirements are predicted, within a model predictive control scheme.

Agradecimientos

El trabajo realizado en esta tesis fue posible gracias a subsidios otorgados por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) y la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC).

Agradezco a mi director el Dr. Víctor Pereyra por su aliento permanente, su aguda orientación y su generosa amistad.

A mi consejero, Cristian de Angelo por su indefectible colaboración y su cariñosa amistad.

A mi director en el CONICET y director del Grupo de Electrónica Aplicada, Guillermo O. García, por abrirme las puertas para desarrollar este trabajo en el seno del Grupo.

Además quiero agradecer a todos los integrantes del Grupo de Electrónica Aplicada por su amistad, colaboración, buena onda y constante apoyo.

Al resto de mis compatriotas, por haber solventado a través de instituciones públicas, con el producto de su trabajo, su esfuerzo y su respeto, este larguísimo camino.

Y por supuesto a mi amado compañero de la vida, a mis hijos y a mi madre, simplemente por su amor, con el que se nutre todo lo que yo pueda hacer.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Índice general	VII
Índice de figuras	XI
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Estado del arte	3
1.3. Contribuciones de esta tesis	5
1.4. Organización del texto	7
Capítulo 2. Modelo y enunciado del problema	9
2.1. Modelo	9
2.2. Balance de potencias	10
2.3. Energía	11
2.4. Función de rendimiento del MCI	12
2.5. Función de rendimiento del SAE	14
2.6. Objetivo de Control	15
2.7. Acción de control y variable de estado	15
2.8. Condiciones iniciales y finales	16
2.9. Restricciones	17
2.10. Enunciado del problema	18

2.11. Hamiltoniano del problema e interpretación del estado adjunto	21
Capítulo 3. Solución del problema de control, sin restricciones de estado	23
3.1. Introducción	23
3.2. Caso sin pérdidas en el segmento eléctrico	25
3.2.1. Condiciones de optimalidad	25
3.2.2. Resolución del problema	26
3.2.3. Implementación computacional	27
3.3. Segunda aproximación: incluyendo las pérdidas eléctricas	28
3.3.1. Solución	30
3.4. Algoritmo en tiempo real	31
3.5. Conclusiones	35
Capítulo 4. Solución del problema con restricciones de estado	37
4.1. Introducción	37
4.2. Planteo del problema restringido	39
4.2.1. Supuestos para simplificar el análisis	39
4.2.2. Diferentes formulaciones de las condiciones de optimalidad	42
4.2.3. Relaciones entre los multiplicadores	44
4.2.4. Condiciones de optimalidad para el enfoque de adjunción directa	45
4.2.5. Solución	47
4.2.6. Adjunción indirecta con estado adjunto continuo	53
4.2.7. Solución	54
4.3. Caso restringido con restricciones en el estado y también en el control	57
4.3.1. Solución	58
4.4. Caso en que se incluyen las pérdidas en el segmento eléctrico	63
4.4.1. Condiciones de optimalidad en el enfoque de adjunción directa	63
4.4.2. Solución cuando el control no alcanza las cotas	64
4.4.3. Solución cuando el control alcanza las cotas	71
4.5. Caso en que $r(t)$ proviene de un ciclo normalizado de velocidad	74
4.5.1. Cómputo de $r'(t)$ en forma numérica	75
4.5.2. Interpolación de $r(t)$	75
4.6. Caso en que f_C y f_B no son cuadráticas	78

4.6.1. Planteo del problema	80
4.6.2. Condiciones de optimalidad	80
4.6.3. Solución	81
4.7. Caso en que la restricción de estado se hace activa más de una vez	88
4.8. Ejemplo de aplicación sobre un ciclo normalizado	88
4.9. Conclusiones	91
Capítulo 5. Algoritmos implementables en tiempo real*	95
5.1. Algoritmo con horizonte deslizante	95
5.2. Criterios y parámetros usados para la implementación del algoritmo	96
5.2.1. Predicción	96
5.2.2. Punto de arranque	97
5.2.3. Condiciones de borde y longitud del intervalo de predicción	97
5.2.4. Problema de control	98
5.3. Resultados	98
5.4. Predicción con incertidumbre	101
5.5. Conclusiones	103
Capítulo 6. Conclusiones	105
6.1. Trabajos futuros	108
Referencias	111
Apéndice A. Aproximación intuitiva a las condiciones de optimalidad	117
A.1. Enunciado del problema de control óptimo	117
A.2. Formulación discreta	117
Apéndice B. Adjunción indirecta con estado adjunto continuo	121
B.1.	121
B.1.1. Condiciones de optimalidad	121
B.2. Derivación de la solución	122
Apéndice C. Apéndice de la sección 4.4.2: soluciones para β	127

Índice de figuras

1	2	
2.1.	Esquema simplificado de un vehículo eléctrico híbrido “serie”	11
2.2.	Mapa de eficiencia de un motor de combustión.	12
2.3.	Funciones $f_C(u)$ y $\eta_C(u)$	13
2.4.	Ciclos de velocidad, potencia y cotas del control	20
3		
3.1.	Resultados para el caso en que las pérdidas eléctricas no son consideradas .	28
3.2.	Resultados para el caso con pérdidas en el segmento eléctrico	30
3.3.	Resultados considerando las pérdidas eléctricas, ciclo sobre vía rápida . . .	32
3.4.	Resultados del primer algoritmo de tiempo real	34
4		
4.1.	Control óptimo en el caso restringido	51
4.2.	Trayectoria de estado óptima en el caso restringido	52
4.3.	Control óptimo con restricciones en el caso restringido	61
4.4.	Tray. óptima en el caso restringido, con restric. en el control	62
4.5.	Control ópt. sin restric. en el control, con pérd. en el segm. eléc.	69
4.6.	Tray. ópt. sin restric. en el control, con pérd. en el segm. eléc.	70
4.7.	Control ópt. con restric. en el control, con pérd. en el segm. eléc.	72
4.8.	Tray. ópt. con restric. en el control, con pérd. en el segm. eléc.	73
4.9.	Secuencia para obtener puntos de arranque	74
4.10.	Control ópt. obtenido calculando los jacobianos numéricamente	76
4.11.	Tray. ópt. obtenida calculando los jacobianos numéricamente	77
4.12.	Control ópt. obtenido cuando la pot. req. viene dada numéricamente	78
4.13.	Tray. ópt. obtenida cuando la pot. req. viene dada numéricamente.	79
4.14.	Control óptimo calculado con MINOS 5.4	86

4.15. Tray. óptima correspondiente al control en la fig. 4.14.	87
4.16. Control óptimo para el caso de un intervalo frontera ficticio	89
4.17. Tray. óptima correspondiente al control en la figura 4.16.	90
4.18. Control óptimo para un ciclo normalizado	92
4.19. Tray. óptima correspondiente al control en la figura 4.18.	93
5	
5.1. Resultados del algoritmo de horizonte deslizante.	99
5.2. Resultados del algoritmo de horizonte deslizante.	100
5.3. Resultados del algoritmo de horizonte deslizante.	102
6 A B C	

Capítulo 1

Introducción

1.1. Descripción del problema

Los vehículos eléctricos híbridos son aquéllos en los que la tracción es llevada a cabo por uno o más motores eléctricos, alimentados por baterías electro-químicas, a los que se suma un motor de combustión interna convencional. La potencia generada por el motor de combustión interna no sólo contribuye a la tracción complementando la potencia entregada por los motores eléctricos, sino que también mueve un generador que recarga las baterías.

Entre las muchas ventajas que presentan estos vehículos a los fines de ahorrar combustible y reducir las emisiones contaminantes, está la del frenado regenerativo. Esto significa que durante el frenado, los motores eléctricos que ejercen la tracción, pueden cambiar su modo de operación, devenir generadores y así reconvertir la energía cinética acumulada en el vehículo en energía eléctrica que es devuelta a las baterías.

De lo anterior se infiere que en el sistema de tracción de este tipo de vehículos se producen múltiples flujos de energía en diferentes direcciones y sentidos. Para que la operación de un vehículo de estas características sea verdaderamente más económica en combustible que la de un vehículo convencional, es necesario definir un sofisticado sistema de control que decida en cada momento cuál de las fuentes de energía debe proveer la potencia necesaria en cada instante y en qué cantidad y dirección. Este problema de gerenciamiento de energía suele ser llamado “control supervisor”, ya que es un control definido en un nivel superior al de los controladores particulares de cada uno de los dispositivos del vehículo (motores eléctricos de tracción, generadores, convertidores de potencia, etc). Se asume que los comandos del control supervisor son ejecutados en un nivel inferior por los controladores de cada uno de los dispositivos, que responden en forma instantánea.

Muchas estrategias de control supervisor en tiempo real para VEH se basan en las llamadas “Estrategias de control de consumo equivalente” (ECMS, por sus siglas en inglés, por *Equivalent Consumption Minimization Strategies*)([1]; [2];[3]). La idea subyacente es la

siguiente. Supongamos que el vehículo realiza un recorrido determinado. Al fin del mismo habrá consumido cierta cantidad de combustible y cierta cantidad de energía eléctrica de las baterías. Si, al fin del ciclo, se pusiese a funcionar el motor de combustión de manera de reponer la energía consumida del sistema de almacenamiento eléctrico (SAE), se produciría un consumo extra de combustible que debería ser sumado al consumo anterior para hacer este consumo comparable con el de un vehículo convencional. Claro está que este consumo dependerá del punto en que se opere el motor de combustión, siendo mínimo si este se opera en su punto de mayor eficiencia. La idea es entonces hallar un factor que indique en cada instante, de acuerdo al punto en que se opera el vehículo, que a su vez depende de los requerimientos del conductor, cuál sería el consumo equivalente de combustible para el correspondiente consumo de energía del SAE. En otras palabras, un factor de peso que multiplique la potencia proporcionada por las baterías de manera de convertirlo en una potencia comparable para ser sumada a la potencia proporcionada por el motor de combustión. Lo interesante de esta idea proviene del hecho de que a través de esta equivalencia, el problema de minimizar el consumo durante todo un trayecto (un problema global) puede ser transformado en una minimización instantánea de esta suma pesada de potencias, permitiendo así su utilización en tiempo real. El problema de control óptimo se reduce entonces al problema de determinar este “factor de consumo equivalente” ([1]; [3]; [4]).

Sin embargo, este factor de peso varía de acuerdo a la eficiencia relativa de las fuentes de energía y a las características del ciclo de trabajo requerido del vehículo. Hay actualmente un gran esfuerzo de investigación orientado a la determinación de este factor ([1]; [2]; [3]; [5]).

En trabajos anteriores ([6]) hemos formulado el problema del control supervisor en vehículos híbridos como un problema de control óptimo con restricciones en el control y en el estado, y hemos planteado las condiciones de optimalidad dadas por el Principio del Máximo de Pontryagin ([7]; [8]; [9]; [10]; [11]; [12]; [13]). Bajo este enfoque, puede observarse que el factor de consumo equivalente está relacionado con el estado adjunto o co-estado del problema de control óptimo ([1]). En consecuencia, resolviendo las condiciones de optimalidad y obteniendo la evolución del estado adjunto sería posible obtener el factor de consumo equivalente. Este es entonces nuestro propósito.

Ahora bien, debe señalarse que la solución numérica de estos problemas no es simple de

obtener. Generalmente las condiciones de optimalidad constituyen ecuaciones algebraico-diferenciales ([14] y [15]). En algunos casos, las ecuaciones algebraicas pueden ser resueltas en función de las variables dinámicas y reducirse el problema a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores de frontera. Se precisa entonces una herramienta para resolver este tipo de problemas. Además en este problema particular, las restricciones en el control y en el estado pueden introducir discontinuidades en el lado derecho de las ecuaciones diferenciales y en la solución. Más aún, en este problema esas discontinuidades están en lugares desconocidos a priori, ya que dependen de la evolución del estado mismo ([6]).

PASVA4 es una herramienta de software capaz de resolver problemas de valores de contorno (PVC) no lineales con discontinuidades en el lado derecho de las ecuaciones diferenciales y en la solución, aún cuando éstas estén en lugares desconocidos, que además puede calcular parámetros desconocidos manejando condiciones de contorno en otros puntos interiores. ([16];[17]). Esta herramienta ha sido usada con éxito para problemas con las dificultades antes mencionadas que aparecen en geofísica, electrónica, mecánica, etc. Usaremos entonces esta herramienta para resolver este problema. Esperamos que además se nos facilite el camino para resolver otros problemas de control óptimo con restricciones.

1.2. Estado del arte

Los primeros antecedentes del uso de la teoría de control óptimo para el control supervisor de VEH aparecen en [11] donde se plantea un problema de control óptimo esencialmente similar al que presentaremos aquí, bajo la suposición del conocimiento previo del ciclo de potencia requerido, que es resuelto mediante las condiciones de optimalidad planteadas en forma discretizada. El control óptimo es obtenido entonces en función del estado adjunto mediante la resolución de un sistema algebraico. El estado adjunto es obtenido mediante una búsqueda dicotómica de manera de conseguir que la energía en las baterías al final del ciclo sea igual a la inicial. En este artículo se supone que la eficiencia del segmento eléctrico no depende de la energía en las baterías. En [13] se agrega un algoritmo que considera esta dependencia. En [18], se remarca la importancia de la solución dada por el enfoque de control óptimo como valor de referencia para la evaluación de estrategias de gerenciamiento de energía implementables en tiempo real. Estos autores también remarcan cómo la suposición de que la eficiencia de segmento eléctrico no depende de la energía

en las baterías tal como es usada en esta tesis, es razonable para los ciclos de velocidad urbanos y relativamente cortos. Claramente no lo es tanto para los recorridos prolongados o sin eventos de frenado regenerativo. En [19] las soluciones basadas en la teoría de control óptimo anteriores, son usadas en un esquema de control predictivo, con el objetivo de diseñar un control aplicable en tiempo real. En este enfoque, el problema de control óptimo es resuelto iterativamente en un intervalo que va corriéndose hacia delante en el tiempo. La estrategia que allí implementan no usa la predicción de los requerimientos futuros de potencia, sino que utiliza los valores de un intervalo anterior en el supuesto de que las condiciones de conducción no varían demasiado. El enfoque es esencialmente el mismo que presentaremos en el capítulo 3, con la diferencia de que allí también el valor del estado adjunto es determinado por una búsqueda dicotómica. Estos mismos autores desarrollan en [20] un control ulterior para rechazar errores de predicción o perturbaciones.

También buscando algoritmos implementables en tiempo real, en [21] proponen uno del estilo de control predictivo. Se basa en la relación entre el principio del máximo y el principio de optimalidad de Bellman. Estos autores dividen el problema de control óptimo en uno con objetivo integral en un intervalo finito corto y una aproximación del costo mínimo desde el final de este intervalo hasta el final del ciclo. Suponen una potencia requerida que decrece exponencialmente en el intervalo de predicción que, por ser breve, puede ser resuelto por programación dinámica.

En [5] se obtiene en forma análoga a lo que se mostrará en esta tesis, una derivación analítica de la estrategia de minimización por consumo equivalente basada en el principio del máximo de Pontryagin. En este artículo, sin embargo, el problema de valores resultante de las condiciones de optimalidad es resuelto mediante algunos procedimientos heurísticos. En primer lugar el valor del estado adjunto se obtiene adivinando un valor inicial observando el valor final del estado obtenido usando el control óptimo e iterando el procedimiento hasta obtener el valor final deseado para el estado. Por otra parte, el control es elegido entre un número finito de valores posibles. El multiplicador que acompaña a la restricción de estado es también elegido por prueba y error.

En [22] se muestra que con el enfoque basado en el principio del máximo de Pontryagin pueden tratarse de una manera unificada problemas de control supervisor de vehículos eléctricos híbridos cada vez más complejos. Se utilizan para ello diferentes modificaciones del problema básico del control supervisor, a saber: a) la adición de nuevos términos al fun-

cional objetivo, como, por ejemplo, tasas de emisión de contaminantes o la integral de las corrientes entrantes o salientes de las baterías, que está relacionada con el envejecimiento de las mismas. b) Variaciones de las condiciones de borde, para considerar por ejemplo el caso de los vehículos denominados “plug-in”, que son aquéllos cuyas baterías se recargan en la red domiciliaria. En la operación de estos vehículos no se busca un “mantenimiento de carga” al recorrer un trayecto, sino que por el contrario se pretende que al momento de llegar al próximo punto de recarga presenten el nivel más bajo de energía admisible. c) Agregado de nuevas variables de estado para mejorar el modelo, como la temperatura del motor de combustión que influye en su mapa de rendimiento, o la del convertidor catalítico que influye en las emisiones contaminantes, o la temperatura de las baterías que influye en su rendimiento y envejecimiento. d) Consideración de nuevas restricciones, como las que afectan las variables de estado que frecuentemente no son tenidas en cuenta y son necesarias en el caso de los vehículos que cuentan adicionalmente con un banco de ultracapacitores para responder a los picos de requerimientos de potencia. De lo antes mencionado, surge el interés por ganar experiencia en el enfoque basado en el principio del máximo.

1.3. Contribuciones de esta tesis

Como puede verse en los artículos de reciente publicación mencionados en la sección anterior, la aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin al problema del control supervisor de vehículos eléctricos híbridos constituye un tema de investigación muy promisorio y de gran actualidad. Coincidentemente, la disponibilidad de una herramienta de software de gran ductilidad como PASVA4, motiva la idea de su utilización a los fines de la resolución del problema de valores de contorno resultante del planteamiento de las condiciones de optimalidad definidas por el Principio del Máximo. Del trabajo realizado con este objetivo, podemos decir que la contribución de esta tesis se refiere a los siguientes resultados:

1. Conseguimos una metodología para calcular el factor de consumo equivalente en forma numérica. Esto se obtuvo en el caso del modelo simplificado que consideramos, bajo la suposición del conocimiento previo de la potencia requerida en un ciclo y bajo ciertas leves hipótesis en las funciones que modelan las pérdidas en los sistemas del vehículo. En la bibliografía estudiada la estimación de este parámetro siempre resulta de alguna

heurística.

2. La evolución del factor de consumo equivalente se obtuvo especialmente en el caso en que las restricciones de estado devienen activas en un intervalo. Se halló que, para el modelo utilizado, este factor es continuo. Es constante fuera de ese intervalo frontera y, por la continuidad, los valores que toma fuera de él dependen de los valores que toma en sus extremos. En el intervalo frontera, evoluciona como función de la potencia requerida. Este resultado será de utilidad en los casos de vehículos equipados con ultracapacitores que pueden ser totalmente descargados o cargados rápidamente. No hemos encontrado el desarrollo de estas soluciones en la bibliografía (ver [22]). Esto probablemente se deba a que los textos de control óptimo con aplicaciones a la ingeniería, en general no analizan las diferentes formulaciones de las condiciones de optimalidad que han sido publicadas y que fueron las que permitieron en este caso llegar a la solución buscada.

3. Usando el factor de consumo equivalente obtenido en tiempo diferido, se presenta un algoritmo de control en tiempo real.

4. Aparte de la obtención del factor de consumo equivalente el enfoque también proporciona la función de control, por lo que la solución numérica encontrada puede usarse en algoritmos de control predictivo.

5. El enfoque utilizado constituye un marco sistemático en que pueden plantearse no solamente otros problemas de control supervisor, sino también otros problemas de control óptimo con restricciones. La concatenación de PASVA4 con herramientas de software de programación no lineal que también se realizó, abre también el camino a problemas en los que las condiciones de optimalidad conducen a ecuaciones algebraico-diferenciales donde el control no puede despejarse de la condición algebraica ($H_u = 0$), que podrían ser resueltos de manera similar.

Relacionados con esta tesis, han aparecido hasta el momento dos artículos publicados en revistas internacionales indexadas, un tercero en una revista nacional y el cuarto ha sido aceptado para ser presentado en un congreso nacional a realizarse próximamente. En [23] se presenta la solución del problema de control sin restricciones de estado (básicamente el contenido del capítulo 3). En [6] se presentan las dificultades para resolver el problema con restricciones de estado, mientras que en [24] se presenta la solución finalmente hallada para este problema (Capítulo 4). Algunos resultados del Capítulo 5 aparecerán en [25].

1.4. Organización del texto

En el capítulo 2 describiremos el modelo considerado y el planteo general del problema de control a resolver en la forma tradicional de un problema de control óptimo.

El capítulo 3 muestra la solución analítica y ejemplos de los resultados obtenidos para el problema de control óptimo anterior, pero sin tener en cuenta las restricciones de estado. Este es el camino usual en los casos de control óptimo con restricciones de estado dado que la solución del problema donde éstas no se consideran, arroja luz sobre la solución con restricciones. Éstas son incorporadas en el capítulo 4.

En estos dos capítulos el texto sigue el orden cronológico en que nos fuimos acercando a la solución. En otras palabras, en ambos casos comenzamos resolviendo problemas simplificados de resolución más sencilla y gradualmente vamos agregando las dificultades de a una por vez. En particular, en el capítulo 4, necesitamos inclusive generar un conjunto de datos hipotéticos (potencia requerida, funciones de rendimiento, cotas a la potencias y energía) para probar la corrección del software desarrollado. En el capítulo 5 describimos algunos algoritmos en tiempo real que pueden implementarse sobre la base de las soluciones numéricas halladas en los capítulos anteriores.

Finalmente, en el capítulo 6, resumimos nuestras conclusiones y algunas líneas posibles de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Modelo y enunciado del problema

2.1. Modelo

Siguiendo los lineamientos presentados por Rizzoni et al. ([26]), se considerará que para tratar el problema del control supervisor basta usar un modelo que tenga en cuenta el almacenamiento y la conversión de energía en o entre tres dominios: el químico, el eléctrico y el mecánico. La conversión de energía puede ser bidireccional (ej. un motor eléctrico puede ser motor o generador) o unidireccional (ej. la conversión de energía química en mecánica mediante un proceso de combustión). Cada dominio está caracterizado por dispositivos de almacenamiento (combustible, baterías, ultracapacitores, volantes de inercia). Los dispositivos convertidores de energía establecen vínculos entre los diferentes dominios (ej. un motor de combustión interna (MCI) convierte energía química a mecánica, un motor eléctrico convierte energía eléctrica en mecánica y viceversa). Las variables que interesan en la conversión de energía son de dos tipos: variables de flujo (corriente, velocidad longitudinal y de rotación, flujo de combustible) y variables de esfuerzo (tensión, fuerza, torque, capacidad calorífica). En cada dominio el producto de ambas es un valor de potencia. Además cada elemento está caracterizado por un rendimiento que en general depende simultáneamente de las variables de esfuerzo y flujo. Algunos convertidores actúan en el mismo dominio (ej. rectificadores y convertidores dentro del dominio eléctrico; la caja de velocidades dentro del dominio mecánico) y otros entre diferentes dominios, como los mencionados más arriba. Además todos los elementos tienen restricciones de funcionamiento. Los elementos almacenadores están caracterizados además por una variable interna que es la energía acumulada instantáneamente en cada uno de ellos. Tanto para los VEH como para otros sistemas que contienen generadores, almacenadores y consumidores de energía, este conjunto de elementos puede ser ensamblado de diferentes formas o “configuraciones”. A los efectos de analizar el sistema de tracción basta entonces considerar esos elementos en forma abstracta, dejando de lado los detalles de funcionamiento de cada uno de los elementos particulares y concentrando la atención en los flujos

de potencia que los relacionan [26]. Más aún, a los efectos de analizar el control supervisor basta utilizar un modelo simplificado que considera tres elementos básicos: las fuentes y los sumideros de energía, los flujos de energía entre estos componentes elementales y una función de rendimiento que, tal como se describirá más adelante, da cuenta de la porción realmente aprovechable de estos flujos, teniendo en cuenta las pérdidas. El modelo se esquematiza en la figura 2.1 ([27]; [28]). Se indicará con el subíndice C (C por “combustible”) a los items correspondientes al segmento cuya fuente de energía es el tanque de combustible y donde se produce la conversión de la energía química en eléctrica mediante un MCI más un generador eléctrico asociado. El flujo de potencia en el instante t proveniente de este segmento será considerada nuestra función de control y será indicada por u . Análogamente se indicará con el subíndice B a las variables y elementos del segmento relacionado con el SAE (B por “baterías”). En consecuencia $P_B(t)$ será el flujo neto de potencia en el instante t proveniente del banco de baterías.

La demanda de potencia requerida por el vehículo será denotada por $r(t)$. Ésta puede ser calculada a partir del perfil de velocidad que se desea que el vehículo cumpla mediante el uso de un modelo inverso de la dinámica longitudinal del mismo. En el caso real, la velocidad a desarrollar por el vehículo a futuro es desconocida y depende en realidad de las condiciones del tránsito. Sin embargo, en una primera etapa es necesario partir de un ciclo de velocidad preestablecido, ya que ello proporciona soluciones off-line para situaciones paradigmáticas, de cuyo estudio pueden luego generarse estrategias de control aplicables on-line. Asimismo este enfoque puede extenderse para incluir también el caso real, mediante su aplicación para horizontes cercanos y/o utilizando un modelo estocástico de los requerimientos de potencia en una situación de tránsito real. Establecemos la siguiente convención: *El flujo de energía es positivo cuando ésta fluye desde el SAE hacia las ruedas*. En consecuencia durante el frenado regenerativo el flujo en el segmento del SAE será negativo. Del mismo modo, el flujo $u(t)$ no puede ser negativo: el proceso de conversión en el segmento C es un proceso irreversible, ya que el tanque de combustible no puede absorber ninguna energía.

2.2. Balance de potencias

Del esquema anterior, surge la siguiente ecuación de balance de potencias, que establece que en cada instante la suma de las potencias entregadas por ambas fuentes debe igualar

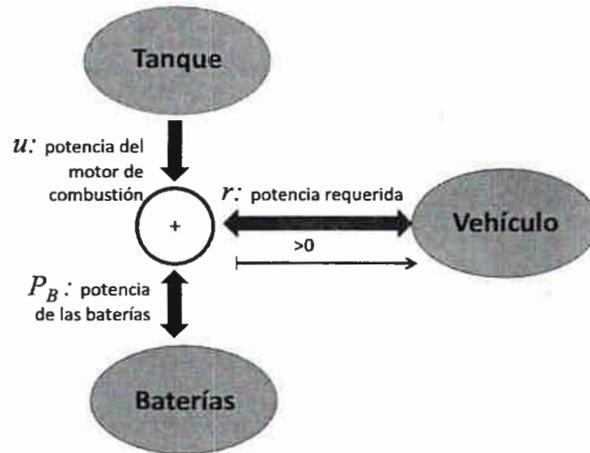


Figura 2.1: Esquema simplificado de un vehículo eléctrico híbrido “serie”.

a la potencia requerida por el vehículo

$$u(t) + P_B(t) = r(t) \quad (2.1)$$

La suma de ambas potencias instantáneas puede ocurrir físicamente en diferentes lugares. En el caso de la configuración serie, esta adición se produce en forma eléctrica; en la configuración paralela la adición se produce en forma mecánica. El problema del control supervisor involucra entonces la determinación en cada instante de los flujos $u(t)$ y $P_B(t)$.

2.3. Energía

En la determinación de la energía neta consumida de las fuentes debe tenerse en cuenta que no toda la potencia entregada por las fuentes es realmente usada para satisfacer la demanda, debido a que en todo proceso de conversión de energía existen pérdidas. En consecuencia sólo una porción de la potencia entregada por una fuente ($P_{entregada}$) puede usarse para satisfacer el balance 2.1. Esta porción será representada por un factor llamado rendimiento o eficiencia que se define como

$$\eta = \frac{P_{entregada} - P_{perd}}{P_{entregada}}. \quad (2.2)$$

donde P_{perd} representa la potencia disipada en el proceso de conversión. Vale que

$$0 \leq \eta \leq 1$$

En realidad η no es un valor fijo sino una función del punto de operación del dispositivo particular.

2.4. Función de rendimiento del MCI

En el caso del MCI la función de rendimiento depende del par velocidad de rotación-torque (ω_C, T_C) del mismo y sus valores son determinados mediante ensayos realizados sobre el conjunto MCI/Arrancador-Generador eléctrico. Un gráfico típico de esta función $\eta_C(\omega_C, T_C)$, extraído de <http://rubydist.com/images/EngEffCurve.pdf>, se muestra en la figura 2.2.

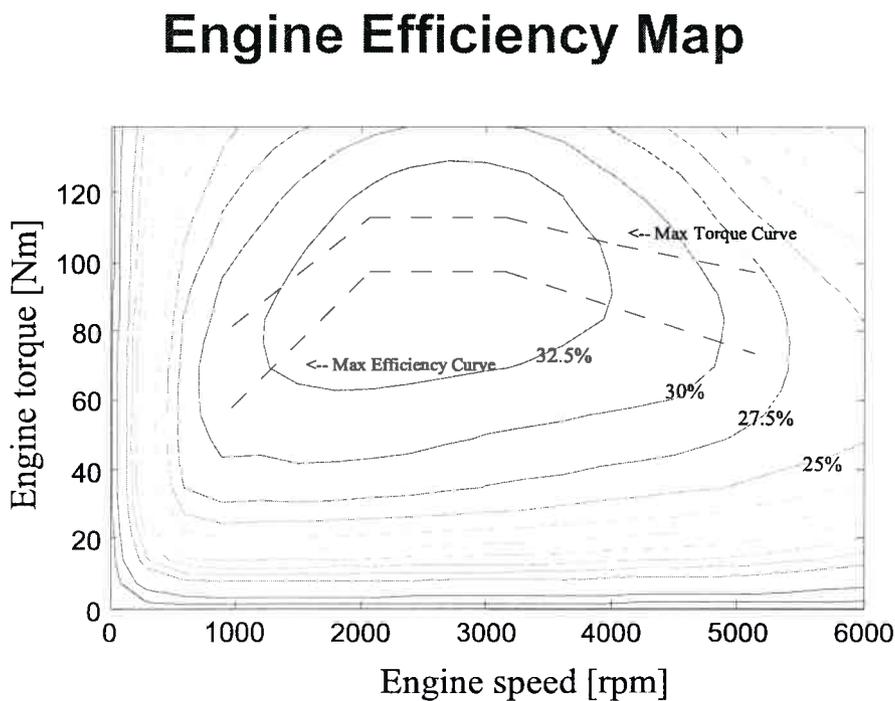


Figura 2.2: Mapa de eficiencia de un motor de combustión.

Se observa que particularmente los motores de combustión interna son convertidores de energía de muy bajo rendimiento (obsérvese que 32,5% es el máximo valor en el ejemplo de la figura 2.2). Esto es evidente si se considera la enorme cantidad de energía en forma

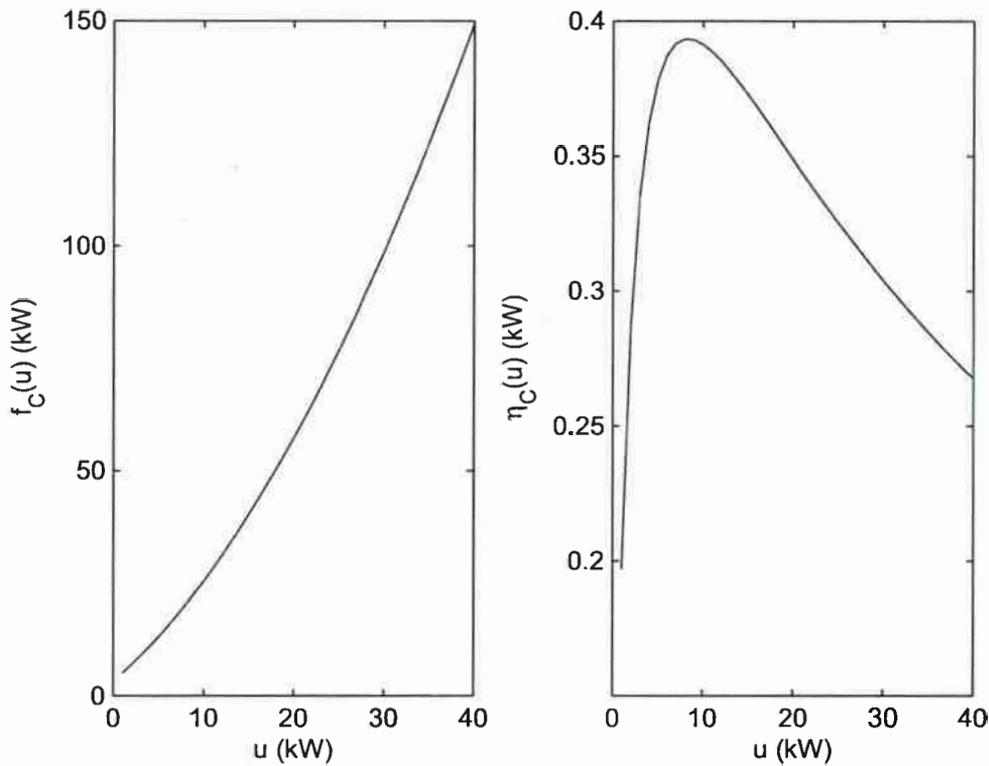


Figura 2.3: Función representativa de las pérdidas en el segmento del motor de combustión y la correspondiente función de rendimiento.

de calor que disipan. Se observa también que existe un punto de operación en el cual el rendimiento es máximo (aproximadamente en el punto 2500 rpm, 95 Nm en el ejemplo). En principio parecería ser deseable que el MCI operara la mayor parte del tiempo cerca de ese punto.

Sin embargo, a pesar de esta dependencia de dos variables, siguiendo a Brahma et al. ([28]) y teniendo en cuenta que a los fines de obtener los aportes de potencia óptimos de cada fuente sólo interesa el punto de operación de máximo rendimiento para cada valor fijo de potencia, consideraremos que el rendimiento sólo depende de esta última y que es igual al valor máximo de todos los pares que correspondan a igual valor de la misma, *i. e.*:

$$\eta_C(u) = \max_{\{(\omega_C, T_C) / T_C \omega_C = u\}} \eta_C(\omega_C, T_C).$$

La figura 2.3b muestra la forma típica de la función $\eta_C(u)$.

La potencia que debe entonces ser entregada por el segmento de la fuente térmica

será entonces $u/\eta_C(u)$. En consecuencia la energía neta consumida de la fuente térmica en el instante t puede entonces expresarse como

$$\int_0^t \frac{u(s)}{\eta_C(u(s))} ds$$

Por comodidad vamos a definir la función

$$f_C(u) = \frac{u}{\eta_C(u)}$$

La forma de esta función, no lineal, se ejemplifica en la figura 2.3a.

2.5. Función de rendimiento del SAE

En el caso del segmento correspondiente a los almacenadores, el rendimiento depende del par tensión-corriente en el que se opera el sistema y también posiblemente del estado de carga del mismo. Esta función debe obtenerse mediante ensayos. También en este caso consideraremos que, a los efectos de interés en esta tesis, basta considerarlo como función de la potencia (producto de tensión por corriente) y del estado, definiéndola por la expresión

$$\eta_B(x, P_B) = \max_{\{(U_B, i_B) / U_B i_B = P_B\}} \eta_B(x, (U_B, i_B))$$

En este caso, debe tenerse en cuenta que si se usa la definición usual de rendimiento (2.2), lo que llamamos $P_{entregada}$ se refiere respectivamente a la potencia obtenida por frenado regenerativo en la carga y a la potencia entregada por las baterías en la descarga. Teniendo en cuenta que

$$0 \leq \eta_B(x, P_B(t)) \leq 1,$$

para representar el hecho de que en ambos procesos se producen pérdidas, calcularemos la energía neta contenida en el SAE en el instante t mediante la siguiente expresión

$$x(t) = x_0 - \int_0^t f_B(x(s), P_B(s)) ds \quad (2.3)$$

donde

$$f_B(x, P_B(t)) = \begin{cases} \eta_B(x, P_B(t)) P_B(t) & \text{si } P_B(t) < 0 \\ \frac{P_B(t)}{\eta_B(x, P_B(t))} & \text{si } P_B(t) \geq 0. \end{cases}$$



De este modo, durante la etapa de aceleración la potencia entregada por las baterías, positiva, es dividida por un factor menor que 1 y en consecuencia resulta mayor a los efectos de calcular la energía real aportada por ellas, dado que deben aportar no sólo la potencia necesaria para cumplir la ecuación de balance (2.1) sino también la requerida para cubrir las pérdidas. A la inversa, durante la etapa de desaceleración, la potencia recibida por el SAE proveniente del frenado regenerativo se multiplica por un factor menor que 1, representando el hecho de que sólo una porción de esta potencia será realmente reintegrada a las baterías.

2.6. Objetivo de Control

Tal como se dijo anteriormente, para plantear el problema del control supervisor, pueden elegirse diferentes formas que difieren según qué se considere como objetivo de control, qué se considere como restricción y qué se considere como acción de control o variable manipulable ([29];[30]). En este particular enfoque consideraremos que el objetivo de control es minimizar el consumo de combustible durante el cumplimiento de un ciclo de velocidad predeterminado en un intervalo de tiempo $[0, T]$, donde T se supone dado. En otras palabras, minimizar la energía neta consumida desde el sistema de almacenamiento de energía químico (el tanque de combustible), que está expresada por

$$\int_0^T f_C(u(t)) dt$$

Veremos en la sección siguiente que será conveniente trabajar con el objetivo equivalente que consiste en maximizar

$$-\int_0^T f_C(u(t)) dt$$

2.7. Acción de control y variable de estado

Se busca entonces determinar para cada instante t en $[0, T]$ los valores de u y P_B que minimizan el objetivo. Como r se considera conocida, puede usarse (2.1) para eliminar una de estas dos funciones expresándola en función de la otra. Como consecuencia el problema puede plantearse de dos maneras alternativas. Cualquiera de estas dos funciones

puede tomarse como la acción de control o variable independiente sobre la cual se realiza la minimización. La otra se considera la variable dependiente en razón de que se obtiene de la primera. Esto significa físicamente que el control puede ejercerse mediante el controlador del MCI o mediante el controlador del SAE. En cada caso el dispositivo alternativo proveerá la potencia restante necesaria para satisfacer la demanda r . De (2.3) resulta que

$$\dot{x}(t) = -f_B(x(t), P_B(t))$$

Por ello, consideraremos la última ecuación como una ecuación de estado y tomaremos a x como la variable de estado. En el caso que P_B sea considerada la variable de control, la ecuación de estado tiene a la misma como entrada. En el caso en que la variable de control sea u , se tiene que

$$P_B(t) = r(t) - u(t) \tag{2.4}$$

y entonces la ecuación de estado resulta

$$\dot{x}(t) = -f_B(x(t), r(t) - u(t)) \tag{2.5}$$

Puede usarse también la variable llamada “estado de carga” (SOC por sus siglas en inglés) definida por

$$SOC(t) = \frac{x(t)}{x_{\text{máx}}}$$

donde $x_{\text{máx}}$ es el valor máximo de energía que puede contener el SAE. Naturalmente esta variable es siempre menor que 1.

2.8. Condiciones iniciales y finales

Es natural considerar un valor como el contenido inicial de energía en el SAE, lo que provee una condición inicial para la ecuación de estado (2.5). Por otra parte, hay que mencionar aquí que existen diferentes modos de operar estos vehículos. Una forma es la conocida como “de agotamiento de carga” (*charge depleting operation*, [30]), que consiste en utilizar la fuente eléctrica hasta su límite inferior posible de carga y al cabo del ciclo prefijado, efectuar la recarga del sistema mediante su conexión a una fuente externa o

por medio del motor de combustión. La opuesta es la llamada de “mantenimiento de carga” (*charge sustaining operation*, [30],[31],[32],[28]) que consiste en operar el vehículo de manera de que al final del ciclo considerado, el contenido de energía en el SAE sea exactamente igual al contenido en el instante inicial. A medio camino entre ambos modos de operación hay una gran gama de posibilidades. Esto significa que podría imponerse una condición final arbitraria $x(T) = x_T$ a la ecuación de estado (2.5). Particularmente en el caso del modo “mantenimiento de carga” se tendría $x_T = x_0$. De esta forma el problema de encontrar la solución de la ecuación de estado se convierte en un problema de valores de contorno.

2.9. Restricciones

Los flujos de potencia en los segmentos C y B están limitados físicamente. En el caso de u , éste está limitado por la potencia máxima $u_{\text{máx}}$ capaz de ser entregada por el sistema MCI-generador. De modo que se tiene

$$0 \leq u(t) \leq u_{\text{máx}} \quad \forall t$$

En el caso del SAE, la limitación proviene principalmente de las corrientes que puedan circular en el sistema. Trabajaremos bajo la hipótesis de que la tensión del sistema permanece constante en su valor nominal U_{nom} por lo que la potencia resulta proporcional a la corriente circulante. De manera que si $I_{B_{\text{máx}}}$ es la corriente máxima que soporta el sistema, se tiene que

$$K_{\text{mín}} = -I_{B_{\text{máx}}} U_{\text{nom}} \leq P_B(t) \leq I_{B_{\text{máx}}} U_{\text{nom}} = K_{\text{máx}} \quad \forall t$$

$K_{\text{máx}}$ y $K_{\text{mín}}$ son las potencias máxima y mínima que puede entregar el SAE, respectivamente.

Usando (2.4) resulta que

$$K_{\text{mín}} \leq r(t) - u(t) \leq K_{\text{máx}} \quad (2.6)$$

Por otra parte, si el SAE está constituido por un banco de baterías, éstas deben ser protegidas tanto de la sobrecarga como de la descarga profunda. Si, como en el caso del

vehículo eléctrico desarrollado en el Grupo de Electrónica Aplicada, las baterías son de plomo-ácido([33]), la sobrecarga puede producir burbujas de gas en el seno del líquido donde se produce la reacción generadora de corriente eléctrica (fenómeno denominado "gaseo"). Por otro lado, una descarga profunda de las baterías puede hacer que las mismas entren en cortocircuito, lo que les produce un daño irreversible. Esto obliga a que la carga del SAE y en consecuencia la energía neta contenida en el mismo deba mantenerse en todo instante dentro de límites preestablecidos. Aparece entonces una nueva restricción al problema que se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \quad \forall t$$

2.10. Enunciado del problema

En base a los elementos del problema de control analizados en la sección anterior, se enunciará el problema de control a resolver. Para mantener la coherencia con la bibliografía en que nos basamos ([7], [9]), maximizaremos el opuesto del funcional que representa el consumo de combustible, en vez de minimizarlo directamente. El problema queda entonces enunciado en los siguientes términos: *Hallar la función de control $u(t)$ que maximice el funcional*

$$-\int_0^T f_C(u(t)) dt$$

sujeto a la ecuación de estado con condiciones de borde

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -f_B(x(t), r(t) - u(t)) \\ x(0) &= x_0 \\ x(T) &= x_T \end{aligned} \tag{2.7}$$

y a las restricciones siguientes

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad \forall t$$

$$K_{\min} \leq r(t) - u(t) \leq K_{\max} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \quad \forall t.$$

$r(t)$, $\eta_C(u)$, $f_C(u)$ y $f_B(u)$ son funciones conocidas, como así también las constantes T , u_{\max} , K_{\min} , K_{\max} , x_{\min} , x_{\max} .

Comentarios

1. La ecuación de estado no es lineal ya que f_B no lo es.
2. Como se dijo, puede agregarse o no una condición final fija $x(T) = x_T$.
3. Hay restricciones sobre la entrada de control y sobre la variable de estado. Con respecto a las restricciones sobre el control, nótese que de 2.6 resulta que

$$r(t) - K_{\text{máx}} \leq u(t) \leq r(t) - K_{\text{mín}} \quad \forall t.$$

De manera que las cotas en el control varían con el tiempo. Resumimos las dos restricciones sobre la función de control definiendo las funciones

$$\underline{U}(t) = \text{máx} \{0, r(t) - K_{\text{máx}}(t)\}$$

$$\bar{U}(t) = \text{mín} \{u_{\text{máx}}, r(t) - K_{\text{mín}}(t)\}.$$

Las restricción para la función de control resulta entonces

$$\underline{U}(t) \leq u(t) \leq \bar{U}(t) \tag{2.8}$$

Gran parte de la dificultad de este problema proviene de la forma de la función $r(t)$. Para el caso de nuestro vehículo, la función que resulta de interés es fuertemente no lineal ya que es la resultante del tren de sucesivas aceleraciones y desaceleraciones que un vehículo de esas características debe realizar en cualquier trayecto urbano. Esta función de potencia requerida determina a su vez la forma de las funciones \underline{U} y \bar{U} . En esta primera etapa, los experimentos se basarán en el Ciclo Europeo Normalizado (NEDS, por las siglas en inglés de *Normalized European Driving Schedule*), escalado de manera que se ajuste a las posibilidades de desempeño del vehículo. Una parte de este ciclo, correspondiente a la sección urbana, se muestra en la parte superior de la figura 2.4. El gráfico central de esa misma figura muestra la correspondiente potencia que este vehículo requiere para realizar el ciclo de velocidad del gráfico superior. Nótese el signo negativo de la potencia durante los intervalos de desaceleración. El gráfico inferior muestra las funciones \underline{U} y \bar{U} que resultan en este caso, considerando que se tomaron $u_{\text{máx}} = 15kW$, $K_{\text{máx}} = 6kW$ y $K_{\text{mín}} = -6kW$. Nótese que el control u debe mantenerse dentro de estas dos funciones límite.

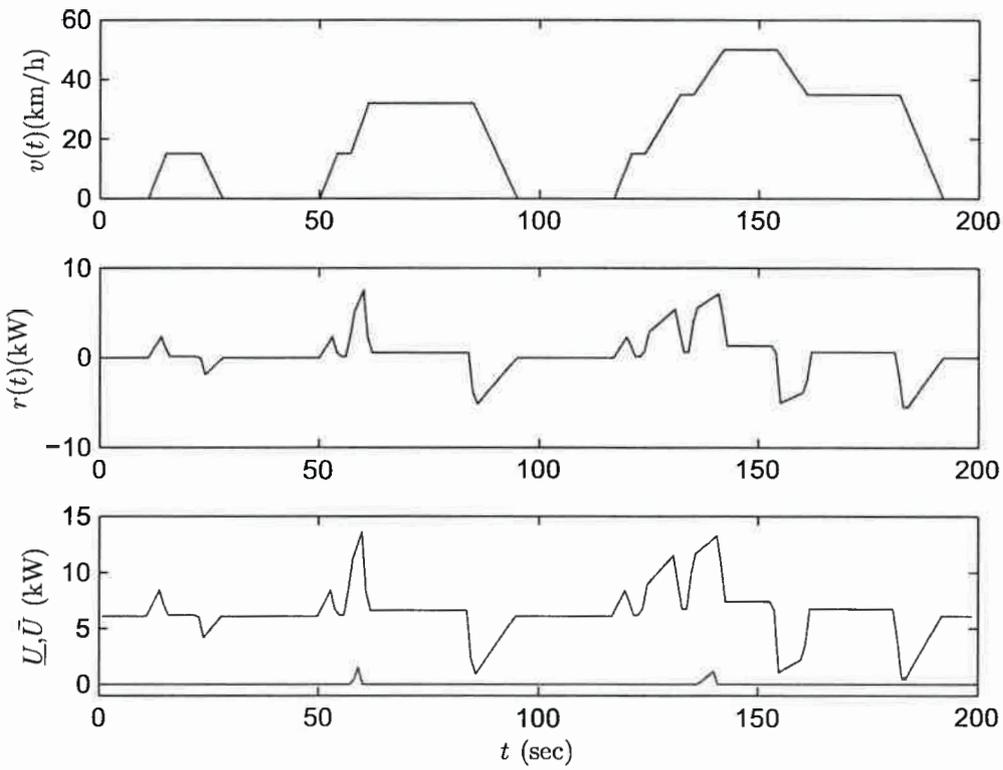


Figura 2.4: Ciclo de velocidad requerido, potencia requerida correspondiente para nuestro vehículo eléctrico urbano (VEU) y funciones límite superior e inferior.

2.11. Hamiltoniano del problema e interpretación del estado adjunto

Para resolver este problema usando las condiciones de optimalidad dadas por el Principio del Máximo de Pontryagin, es necesario definir el Hamiltoniano correspondiente a este problema, que resulta

$$H(t, x, \lambda, u) = -f_C(u(t) - \lambda(t)f_B(x(t), r(t) - u(t))),$$

donde λ es el estado adjunto.

Más adelante, las restricciones algebraicas se agregan formando el *Hamiltoniano aumentado* o *Lagrangiano*. No obstante puede verse que aún considerando las restricciones, la solución óptima es la función $u(t), t \in [0, T]$, que maximiza H o equivalentemente minimiza $-H$, en el conjunto de las funciones que satisfacen (2.8). Esto significa que el control u óptimo minimiza la suma de la potencia que tiene que ser aportada por el segmento térmico, incluyendo las pérdidas en el mismo, más la potencia complementaria que tiene que ser provista por el segmento eléctrico multiplicada por el estado adjunto. De manera que $\lambda(t)$ puede ser interpretado como un factor de peso que escala el “costo” de usar potencia del segmento eléctrico, contra el “costo” de usar potencia del segmento térmico. Si este “factor de equivalencia” fuese conocido con anterioridad, el control óptimo podría calcularse simplemente minimizando el Hamiltoniano instante a instante, necesitando solamente el valor actual de $r(t)$. Sin embargo, como la evolución de λ con el tiempo depende de la solución global del problema en todo el intervalo, el conjunto de las condiciones de optimalidad debe ser resuelto en forma global, usando los valores de $r(t)$ de todo el intervalo $[0, T]$.

No obstante, puede calcularse $\lambda(t)$ en tiempo diferido, para formas típicas de $r(t)$ o sobre intervalos de tiempo cortos, anteriores al tiempo presente, de manera de obtener valores representativos de λ que puedan ser usados en el diseño de algoritmos que permitan calcular funciones de control subóptimas mediante una minimización instantánea. Éste será nuestro propósito.

Capítulo 3

Solución del problema de control, cuando no se consideran las restricciones de estado

3.1. Introducción

Para encarar la solución del problema de control óptimo planteado se procedió en etapas, empezando por planteos más simples del problema, y agregando luego las dificultades paso a paso. Una primera simplificación, usada habitualmente para tratar problemas de control óptimo con restricciones es hallar primero la solución del problema sin las restricciones de estado. La solución así hallada da orientación para luego buscar la solución con restricciones.

La segunda simplificación utilizada para comenzar fue la de suponer que la eficiencia del segmento eléctrico no varía con el estado de carga de las baterías. El estado de carga es el cociente entre la energía instantánea en el sistema de almacenamiento eléctrico y la energía máxima que pueda contener el mismo. En otras palabras el estado de carga es una constante por la energía contenida en las baterías, es decir, un múltiplo de la variable de estado. En consecuencia, esta simplificación corresponde a despreciar la variación de la eficiencia con el estado. Puede verse que esto implica que el estado adjunto es constante en el intervalo $[0, T]$. Muchos trabajos sobre optimización del control supervisor utilizan esta hipótesis (por ejemplo [27], [28], [11], [13], [5], [1]). En realidad, la misma parece ser bastante aceptable en cierto rango de la energía en las baterías.

La tercera suposición realizada se refiere a considerar que las funciones de eficiencia de ambos segmentos, eléctrico y térmico, pueden ser aproximadas por polinomios de grado menor o igual que 2. Bajo esta suposición es factible obtener una expresión analítica única para el control minimizante. Ésta estará en función del estado y del estado adjunto en general. Esta suposición evita tener que utilizar un algoritmo de minimización del Hamiltoniano en cada instante de manera de obtener el control minimizante o la búsqueda

entre varias soluciones posibles.

La cuarta simplificación consistió en despreciar directamente las pérdidas en el segmento eléctrico. Esta suposición es también bastante razonable dado que las pérdidas en este segmento son pequeñas frente a las que se producen en el segmento del motor de combustión. Desde el punto de vista matemático, esta simplificación es de gran ayuda para facilitar la resolución del problema ya que en este caso el control entra linealmente en la ecuación de estado. También esto resultaba en un problema más sencillo en el caso del método de transcripción directa (ver [34]). Como se verá en este capítulo, con esta simplificación puede resolverse el problema tomando un punto de arranque sencillo para la herramienta de resolución del problema de valores de contorno. La solución obtenida para este problema simplificado es luego usada para el problema donde las pérdidas eléctricas sí se tienen en cuenta.

En este caso, como se dijo, el estado adjunto, que representa el factor de consumo equivalente, resulta constante en el intervalo. Esta aproximación ha sido utilizada en numerosas publicaciones. En ellas, el valor de esta constante es estimado mediante una búsqueda dicotómica que implica la resolución reiterada del problema a partir de un valor inicial tentativo. Nuestra propuesta, en cambio, requiere dos resoluciones. La primera bajo la suposición de ausencia de pérdidas eléctricas. Obtenida ésta, la misma es utilizada para el problema que incluye las pérdidas. Esta última, pese a que es la solución de un problema simplificado, es, por lo antedicho, aceptable como primera solución del problema. De hecho, muchas publicaciones presentan soluciones con ésta u otras simplificaciones semejantes. Por tal motivo este capítulo concluye con la definición de un algoritmo muy simple basado en una estrategia de minimización por consumo equivalente aplicable en tiempo real.

Se consignan aquí los resultados obtenidos para datos provenientes del vehículo eléctrico urbano desarrollado en el Grupo de Electrónica Aplicada (GEA), agregándosele datos hipotéticos para los ítems relacionados con el segmento del motor de combustión (potencia del mismo, función de rendimiento, etc.). Los programas fueron también experimentados con los datos de potencia requeridos por el vehículo de transporte de carga liviana desarrollado previamente en este laboratorio.

3.2. Primera aproximación: sin considerar las pérdidas en el segmento eléctrico

En esta primera aproximación, como es usual en control óptimo [7], no tendremos en cuenta las restricciones de estado. Para favorecer al menos un comportamiento que mantenga la carga de las baterías, impondremos la condición final $x(T) = x_0$. Suponemos además que la función de eficiencia del segmento eléctrico no depende del estado de las baterías x , sino solamente de la potencia entregada por éstas $r - u$.

Supondremos que la función de eficiencia del segmento térmico es aproximable por una cuadrática

$$f_C(u) = a_C u^2 + b_C u + c_C$$

Más aún suponemos que no se producen pérdidas en el segmento eléctrico por lo cual la potencia entregada por el mismo es directamente la potencia complementaria a la entregada por el segmento térmico u para satisfacer las demanda requerida r . Entonces

$$f_B(u) = r - u$$

Con las hipótesis anteriores, el problema queda entonces enunciado así:

Hallar u continua a trozos que maximice

$$- \int_0^T f_C(u) dt \tag{3.1}$$

sujeto a

$$\dot{x} = -(r(t) - u(t)) \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.2}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \tag{3.3}$$

$$\underline{U}(t) \leq u(t) \leq \bar{U}(t). \tag{3.4}$$

3.2.1. Condiciones de optimalidad

Para obtener las condiciones de optimalidad necesitamos definir el Hamiltoniano aumentado o Lagrangiano ([7])

$$H(t, u, x, \lambda, \bar{\theta}, \underline{\theta}) = -(a_C u^2 + b_C u + c_C) - \lambda(r - u) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u). \quad (3.5)$$

donde $\underline{\theta}(t)$ y $\bar{\theta}(t)$ son incógnitas a resolver junto con el resto del problema. La derivación de las condiciones de optimalidad puede verse en las referencias [7] y [8]. En el Apéndice A consignamos algunos argumentos que, sin constituir una demostración, muestran su plausibilidad.

Usando (3.6), las condiciones de optimalidad resultan:

$$u = \operatorname{argmax}\{H\} \quad (3.6)$$

$$u \leq \bar{U} \quad \bar{\theta} \geq 0 \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0 \quad (3.7)$$

$$\underline{U} \leq u \quad \underline{\theta} \geq 0 \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0 \quad (3.8)$$

$$\dot{x} = H_\lambda = -(r(t) - u(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.9)$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

3.2.2. Resolución del problema

Usando (3.6),(3.7),(3.8), obtenemos:

Si $\underline{\theta} \neq 0 \Rightarrow u = \underline{U}$.

Si $\bar{\theta} \neq 0 \Rightarrow u = \bar{U}$.

Si $\underline{\theta} \neq 0$ y $\bar{\theta} \neq 0 \Rightarrow u = \underline{U} = \bar{U}$ lo cual sucede solamente si $\underline{U} = \bar{U}$

Si $\underline{\theta} = 0$ y $\bar{\theta} = 0 \Rightarrow u = \operatorname{argmax}(-(a_C u^2 + b_C u + c_C) - \lambda(r - u))$ sujeto a $\underline{U}(t) \leq u(t) \leq \bar{U}(t)$. Si existiese un máximo interior, diferenciando se obtiene

$$-2a_C u - b_C + \lambda = 0 \Rightarrow u = \frac{\lambda - b_C}{2a_C}, \quad (3.10)$$

entonces

$$u = \begin{cases} \underline{U} & \text{si } \frac{\lambda - b_C}{2a_C} < \underline{U} \\ \frac{\lambda - b_C}{2a_C} & \text{si } \underline{U} \leq \frac{\lambda - b_C}{2a_C} \leq \bar{U} \triangleq \operatorname{sat}\left(\frac{\lambda - b_C}{2a_C}, \underline{U}, \bar{U}\right) \\ \bar{U} & \text{si } \frac{\lambda - b_C}{2a_C} \geq \bar{U}. \end{cases}$$

De manera que el PVC a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(r(t) - \text{sat}(\frac{\lambda - b_C}{2a_C}, \underline{U}, \bar{U})) \\ \dot{\lambda} &= 0 \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) = x_T.\end{aligned}\tag{3.11}$$

El lado derecho de la ecuación está definido a trozos, y alterna entre ellos según el valor del estado adjunto. Esta situación es típica en los llamados problemas de combustible mínimo cuando hay restricciones. Nótese que, como f_B no depende del estado x , λ resulta constante.

3.2.3. Implemetación computacional

El PVC anterior fue resuelto usando PASVA4. Esto implica calcular los Jacobianos del lado derecho de la ecuación diferencial respecto del estado y del estado adjunto y el Jacobiano de las condiciones de borde respecto de $x(0)$, $\lambda(0)$, $x(T)$ y $\lambda(T)$. La solución fue encontrada aún cuando el punto de arranque no era cercano a la solución. Particularmente, la solución fue obtenida cuando el punto de arranque fue tomado como la trayectoria correspondiente al modo de operación puramente eléctrico, o sea $u(t) = 0$ para todo t . De modo que esta trayectoria, no necesariamente una solución factible (pues posiblemente no cumpla las restricciones), pero posible de ser calculada a priori a partir de los datos de entrada, puede ser tomada como punto de arranque en todos los casos.

Con respecto al punto de arranque para el estado adjunto, los resultados convergieron siempre al mismo valor, independientemente del punto de arranque usado, tanto para el estado como para el estado adjunto. Incluso se llegó al mismo valor arrancando de $\lambda \equiv 0$. En el ejemplo que se muestra más abajo, en que $f_B(u) = 0.0476u^2 + 1.7517u + 3.2738$, el resultado fue $\lambda \equiv 1.802$.

En la figura 3.1 se muestran los resultados obtenidos para un ciclo urbano. Para los ejemplos de las figuras se usó $K_{max} = 6kW$, $K_{min} = -6kW$, que son las potencias nominales máxima y mínima de los motores eléctricos de este vehículo, $T = 200sec$ y $x_0 = 400kWsec$. Este último valor es ficticio y ha sido elegido pequeño para luego poder mostrar el comportamiento de la estrategia cuando el estado llega a su límite inferior. Las dos primeras partes de la figura 3.1 muestran respectivamente el control

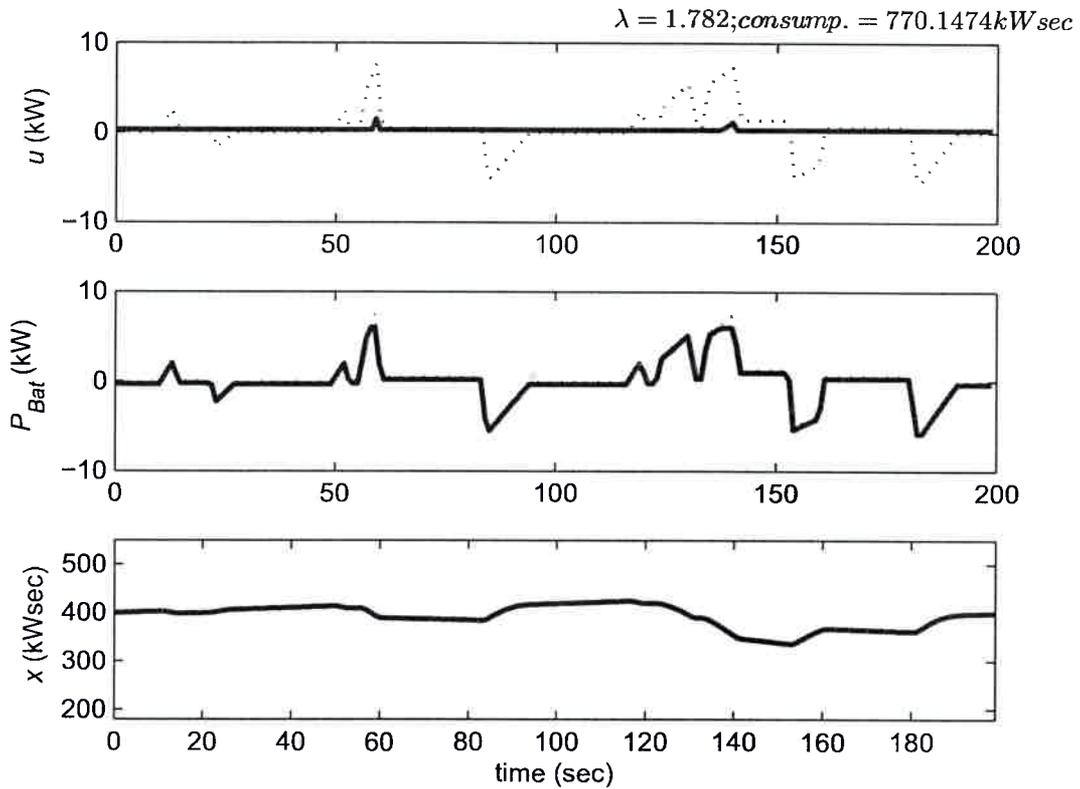


Figura 3.1: Resultados para el caso en que las pérdidas eléctricas no son consideradas; ciclo urbano.

u que minimiza el consumo de combustible y la potencia complementaria que debe ser aportada por las baterías. La potencia requerida r fue incluida también en estos gráficos (línea punteada) como referencia. En el gráfico inferior se representa la trayectoria de estado correspondiente, esto es, la evolución de la energía en el sistema de almacenamiento eléctrico. Nótese que en este ejemplo se usó $x_0 = x_T$. Se indican también el valor del objetivo en el mínimo y el factor de consumo equivalente λ .

3.3. Segunda aproximación: incluyendo las pérdidas eléctricas

Ahora, resolveremos el problema usando una función de la forma $f_B(u) = a_B u^2 + u$ para representar las pérdidas que se producen en el segmento eléctrico. Particularmente en el ejemplo se utilizó $a_B = 0.0684$. Esta función es en realidad ficticia, ya que hasta el momento disponemos de un sólo valor experimental del rendimiento del segmento

eléctrico de nuestro vehículo. Éste es el que corresponde a la potencia nominal de los motores, $u = 3kW$. Esta función ficticia, fue construida de la forma de un polinomio de segundo grado, con características particulares que emulan un comportamiento típico de la potencia extraída o ingresada al sistema de almacenamiento eléctrico en función de la potencia verdaderamente entregada. Es necesario que valga 0 en el origen y además que sea siempre mayor que la función identidad. Esto se debe a que la potencia extraída debe ser necesariamente mayor a la efectivamente entregada. Además, la potencia ingresada a las baterías, de signo negativo, debe ser en valor absoluto menor a la generada por frenado regenerativo.

La expresión correspondiente para el Hamiltoniano es ahora

$$\begin{aligned} H(t, u, x, \lambda, \bar{\theta}, \underline{\theta}) = & -(a_C u^2 + b_C u + c_C) - \\ & -\lambda(a_B(r - u)^2 + (r - u)) + \\ & +\underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u). \end{aligned} \quad (3.12)$$

La deducción del control maximizante procede de la misma forma que en la sección anterior. Las condiciones de optimalidad se completan con el siguiente PVC

$$u = \operatorname{argmax} H \quad (3.13)$$

$$u \leq \bar{U} \quad \bar{\theta} \geq 0 \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0 \quad (3.14)$$

$$\underline{U} \leq u \quad \underline{\theta} \geq 0 \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\dot{x} = -(a_B(r(t) - u(t))^2 + (r(t) - u(t))) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.16)$$

$$\dot{\lambda} = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T,$$

donde

$$\begin{aligned} u = \begin{cases} \underline{U} & \text{si } \frac{b_C - \lambda(2a_B r(t) + 1)}{2(a_C + a_B \lambda)} < \underline{U} \\ \frac{b_C - \lambda(2a_B r(t) + 1)}{2(a_C + a_B \lambda)} & \text{si } \underline{U} \leq \frac{b_C - \lambda(2a_B r(t) + 1)}{2(a_C + a_B \lambda)} \leq \bar{U} \\ \bar{U} & \text{si } \frac{b_C - \lambda(2a_B r(t) + 1)}{2(a_C + a_B \lambda)} \geq \bar{U} \end{cases} \\ \triangleq \operatorname{sat}\left(\frac{b_C - \lambda(2a_B r(t) + 1)}{2(a_C + a_B \lambda)}, \underline{U}, \bar{U}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

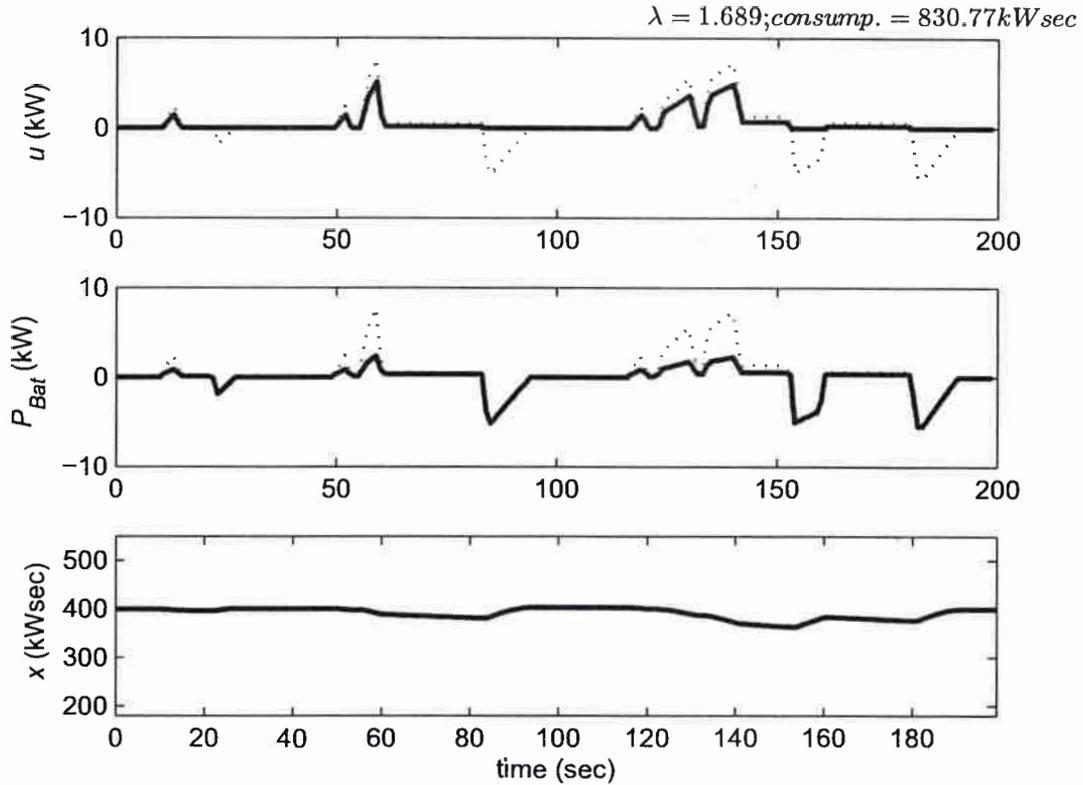


Figura 3.2: Resultados para el caso en que las pérdidas en el segmento eléctrico son tenidas en cuenta; ciclo urbano.

3.3.1. Solución

Para facilitar la convergencia, se tomó en este caso como punto de arranque para PASVA4, la solución hallada en la sección anterior. Los resultados aparecen en la figura 3.2. Debido a la inclusión de las pérdidas eléctricas en el modelo, el consumo se incrementó respecto del de la sección anterior. En cambio, el factor de consumo equivalente decreció.

Tras numerosas pruebas del algoritmo, se observó que λ cambia de acuerdo a

- a) el tamaño relativo de x_T respecto de x_0 ,
- b) la forma de $r(t)$,
- c) la longitud del intervalo del intervalo T ,
- d) la forma de f_C ,
- e) la forma de f_B .

En relación a a) se observa que λ decrece según decrece la diferencia $x_T - x_0$. La tabla

Tabla 3.1

$x_T - x_0$	λ
40 kW	1.774
0 kW	1.691
-20 kW	1.631

3.1 muestra los valores hallados para el ciclo usado en las figuras 3.2 y 3.1 para diferentes valores de esa diferencia.

En lo que respecta a b), si el vehículo cumple un ciclo donde la velocidad permanece aproximadamente constante por un período de tiempo relativamente prolongado (como por ejemplo en una avenida o una vía rápida), la potencia requerida es menor, ya que en ese intervalo no se requiere potencia para aceleraciones o desaceleraciones, sino solamente la potencia necesaria para compensar las fuerzas de resistencia mecánica. En la figura 3.3 se ilustra tal situación. Se esperaría que el valor de λ fuese mayor en este caso, dado que en ausencia de situaciones de frenado regenerativo, el costo de utilizar el segmento eléctrico debería incrementarse. Los resultados fueron $\lambda = 1.885$ contra $\lambda = 1.691$ obtenido para un trayecto urbano de similares características, o sea de igual longitud de tiempo y valores máximos de potencia similares.

Con respecto a los demás aspectos, la forma en que λ cambia no es para nada intuitiva. Esta es la razón por la cual un algoritmo en tiempo real debe actualizar el valor de λ en forma permanente.

3.4. Algoritmo en tiempo real

Hay muchas posibilidades de diseño de algoritmos en tiempo real. A manera de ejemplo, proponemos a continuación un algoritmo muy simple, que consiste básicamente en actualizar λ cada T_w segundos usando el método descrito anteriormente. Como éste requiere el conocimiento previo de la potencia requerida, haremos la suposición de que en los próximos T_w segundos el ciclo será igual al de los T_w segundos inmediatamente anteriores. Como también se necesita imponer una condición final, tomaremos a ésta como igual a la condición inicial en cada uno de los intervalos.

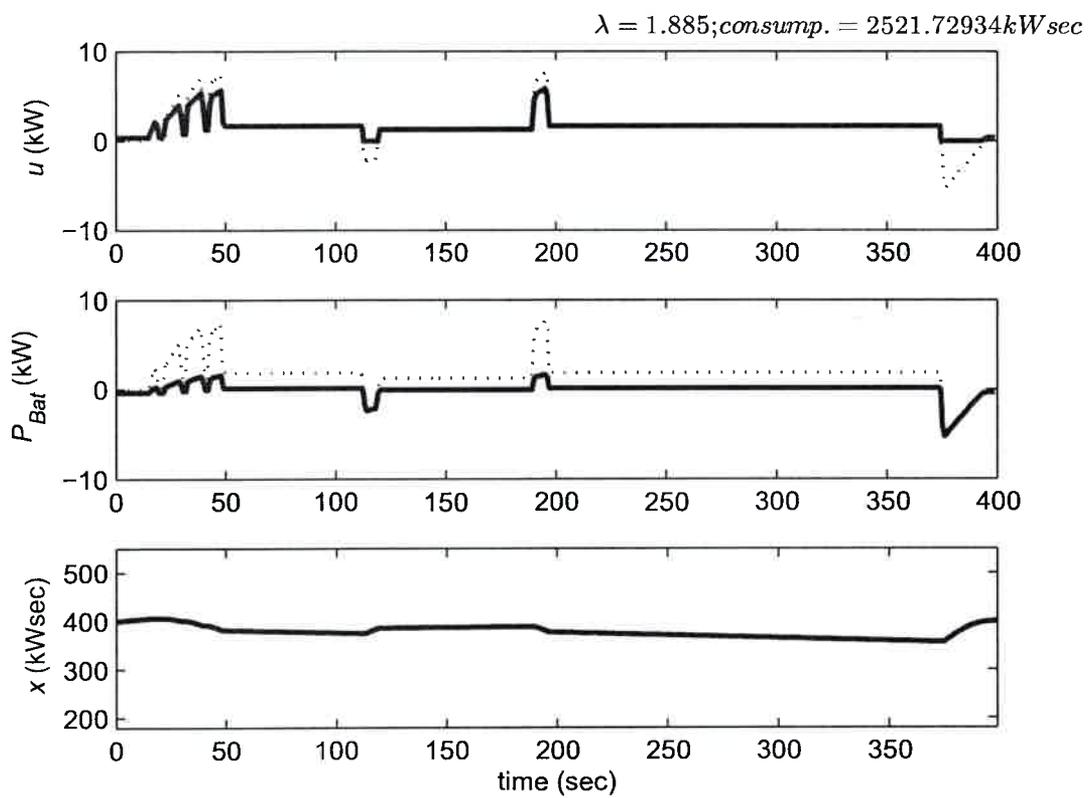


Figura 3.3: Resultados considerando las pérdidas eléctricas, ciclo sobre vía rápida

ALGORITMO

Se define el arreglo $r[1...T_w]$, inicializa λ

Para $INTERVAL=1, NINTERVAL$

Para $t = 1, T_w$

*$s = t + INTERVAL * T_w$*

Lee $r[s]$ (lee la potencia requerida en el instante presente)

Calcula $u^ = argmin_u(f_C(u) + \lambda * f_B(r[s] - u))$*

(minimiza instantáneamente usando el valor de λ actual)

fin para.

Calcula λ usando $r[1, \dots, T_w]$

(cada T_w seg. recalcula λ resolviendo cond. optim.)

fin para.

En la figura 3.4 se muestran los resultados de la aplicación de este algoritmo sobre una modificación del Ciclo Europeo Normalizado, adaptada para las características del vehículo eléctrico urbano desarrollado en el GEA. Este ciclo presenta un intervalo urbano ([0sec, 800sec]) seguido de un intervalo ([800sec, 1200sec]) donde la velocidad es aproximadamente constante (sin aceleraciones ni desaceleraciones). El ciclo fue elegido de manera de ilustrar el comportamiento del algoritmo con respecto a cambios en la circulación. T_w se tomó igual a 200seg.

La figura 3.4 muestra el control minimizante obtenido por la resolución de las condiciones de optimalidad en el intervalo completo tomando $x_T = x_0$ en el gráfico superior y los controles (subóptimos) dados por el algoritmo en los gráficos restantes. El valor inicial de λ es arbitrario. La curva en el gráfico central muestra la solución dada por el algoritmo cuando el valor de λ inicial fue simplemente 0 y la del gráfico inferior la que resulta cuando suponemos tener una estimación mejor del valor de λ . Para este ciclo, las únicas diferencias significativas entre las funciones de control resultantes aparecen en el primer intervalo (debido a la elección arbitraria del λ inicial), y en el último intervalo debido que allí cambia la forma de circulación. Nótese que el consumo de combustible fue finalmente menor en el caso de los controles subóptimos, pero a expensas de un consumo positivo de energía de las baterías.

El parámetro T_w es un parámetro arbitrario que debe ser sintonizado de acuerdo al tipo de vehículo y de ciclo. Otro aspecto a decidir es la manera de dar un punto de arranque

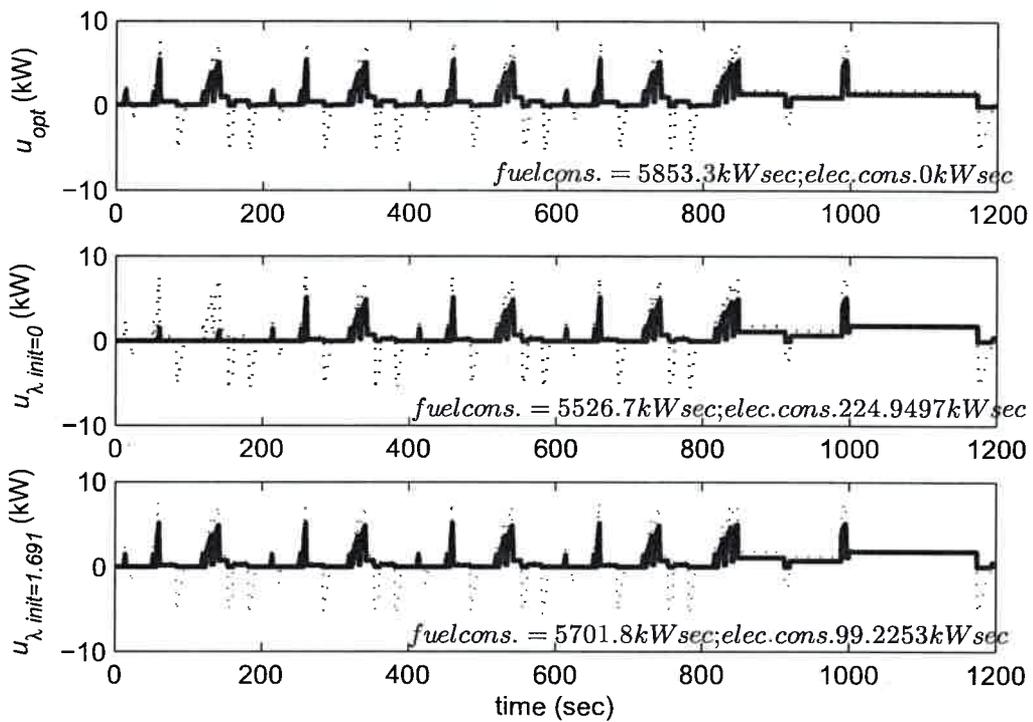


Figura 3.4: Comparación de la función de control óptima con las funciones de control subóptimas calculadas con un algoritmo simple basado en consumo equivalente.

al problema de control en cada intervalo que asegure la convergencia a la solución. Una opción puede ser la misma solución del problema obtenida en el intervalo anterior. Otra opción es resolver sucesivamente, como ya se describió, primero el problema donde no se consideran las pérdidas eléctricas, arrancando con una trayectoria inicial nula en primer lugar, resolviendo luego el problema considerando las pérdidas. Si se impone que el estado inicial sea igual al estado final, un buen punto de arranque para intervalos cortos es una trayectoria de estado constante igual a ese valor. Para el estado adjunto, como se ha explicado, el punto de arranque es menos crítico. No obstante, como las soluciones en cada intervalo pueden calcularse independientemente (excepto cuando se re-usan como puntos de arranque), si se diese el caso de que no hubiese convergencia en algún intervalo, el algoritmo podría modificarse de manera de mantener el valor de λ sin modificar, hasta el próximo intervalo en que se recuperara la convergencia. En cuanto a las condiciones de frontera en cada intervalo, también podrían plantearse variantes, que dependerán del modo de operación elegido. Como se menciona en [22], por ejemplo, podría proponerse una evolución de la energía en las baterías semejante a un perfil de descarga nominal y ajustar las condiciones de borde del algoritmo con ese objetivo.

3.5. Conclusiones

En este capítulo hemos calculado el factor de consumo equivalente λ , con la condición de que la energía en el sistema de almacenamiento eléctrico al finalizar el ciclo fuese la misma que al momento inicial. Para muchos ciclos de trabajo, esta condición es suficiente para asegurar que la trayectoria de estado no se desvíe demasiado del valor inicial, evitando de esta forma que la misma alcance sus cotas superior o inferior. Más aún, el valor de energía final en el sistema de almacenamiento eléctrico es un parámetro del algoritmo que puede elegirse de manera de forzar una trayectoria estable.

Muchos autores sólo tienen en cuenta las restricciones de estado de la manera precedente, es decir, a través de la sola imposición de la condición de frontera terminal igual a la inicial. Otras veces, alguna función de la diferencia $x_T - x_0$ es adicionada al objetivo como un término de penalización del uso de energía de las baterías. Esta formulación conduce a problemas de control óptimo que pueden ser resueltos de manera similar usando PASVA4. A manera de ejemplo hemos resuelto el caso en que el término de penalización es de la forma cuadrática $\frac{1}{2}(x_T - x_0)^2$, que conduce a un problema de valores de contorno

con condiciones de frontera mixtas. Los resultados numéricos fueron bastante parecidos a los presentados aquí. El caso en que el término de penalización se elige como $|x_T - x_0|$, conduce a dos valores diferentes de λ , dependiendo del signo de esa diferencia.

Hay sin embargo muchos ciclos en los que de todas formas la trayectoria de estado puede alcanzar sus cotas superior o inferior, por lo que en el capítulo siguiente analizaremos esa situación.

Capítulo 4

Solución del problema con restricciones de estado

4.1. Introducción

Cuando se tratan las condiciones de optimalidad para el problema con restricciones de estado, lo primero que surge es que la formulación de estas condiciones no es única. Aparecen en la literatura diversas formulaciones, las cuales usan diferentes definiciones tanto del estado adjunto como de los multiplicadores.

La formulación más difundida en la literatura, que fue la primera con la que se trabajó, presentó dificultades a los fines de determinar la solución del problema a partir de las condiciones de optimalidad. Específicamente, tal como se describió en [6], la formulación presentada en [7], conduce a un estado adjunto que puede tener una discontinuidad de salto en la entrada o la salida del intervalo en que la restricción de estado es activa. El valor de este salto no pudo ser determinado a partir del conjunto de las condiciones de optimalidad dadas allí, como así tampoco los instantes de entrada y la salida de ese mismo intervalo. Tampoco pudieron en consecuencia determinarse los multiplicadores que acompañan a las restricciones en el control ni a la restricción de estado que completan la solución del problema. Esto mismo es manifestado en numerosas publicaciones (como, por ejemplo, en [5], donde se resuelve el problema de control óptimo buscando los valores del estado adjunto mediante una búsqueda dicotómica).

En este capítulo intentamos, comenzando con un ejemplo muy particular, obtener una comprensión más profunda acerca de los saltos en el estado adjunto que se producen en la entrada y salida del intervalo en que la restricción de estado deviene activa. Se verá que, en nuestro problema, el estado adjunto es en realidad continuo y que los valores que toma fuera de él dependen de su evolución durante el intervalo en que la restricción de estado es activa.

En [9], se presentan tres formulaciones diferentes para los problemas con restricciones de estado. Las mismas varían de acuerdo a la forma en que se adjunta la restricción de

estado al Hamiltoniano. Estas son básicamente las siguientes:

- a) la restricción de estado se adjunta en forma directa,
- b) la restricción de estado se adjunta en forma indirecta, esto es, se adjunta la primera derivada total respecto del tiempo de la restricción, en la que aparezca explícitamente la función de control,
- c) la restricción de estado se adjunta en forma indirecta, pero se impone la continuidad del estado adjunto.

Como se dijo, cada una de ellas involucra una definición diferente para el estado adjunto y para el multiplicador que acompaña a la restricción de estado. En el mismo artículo se analizan finalmente las relaciones que ligan a los estados adjuntos y a los multiplicadores de la restricción de estado de las diferentes formulaciones.

Otro aporte del artículo mencionado es que define condiciones sobre el comportamiento de la mencionada derivada total de la restricción de estado respecto del tiempo, las cuales permiten determinar, en la primera formulación, si el estado adjunto es o no discontinuo en los extremos del intervalo en que la restricción es activa.

Un análisis prolongado de las tres formulaciones en este caso, permitió obtener informaciones fundamentales para la resolución del problema.

La primera es que el estado adjunto debe ser continuo. Las formulaciones a) y c) son las que permiten calcular las discontinuidades de salto en el estado adjunto, que por ser continuo, resultan iguales a 0.

Otra se refiere a la interpretación del estado adjunto, en relación con el factor de consumo equivalente, cuya determinación era el objetivo de utilizar PASVA4 para resolver este problema. En [9] se muestra que el estado adjunto en la formulación a) es igual a la suma del estado adjunto más el multiplicador de la restricción en la formulación c) y puede verse que esta suma es el valor que debe interpretarse como el factor de consumo equivalente buscado.

En ese mismo artículo se desarrollan varios ejemplos, calculándose para ellos todos los multiplicadores involucrados en cada una de las tres formulaciones. Si bien la reproducción de estos ejemplos proporciona un interesante entrenamiento en la resolución de estos problemas, al intentar aplicarlos a este problema se presentaron nuevamente dificultades

para llegar a una solución completa, en el sentido de obtener la evolución temporal de todos los multiplicadores involucrados.

Como primer paso se planteó entonces un ejemplo que, por ser un caso muy particular, permite hallar la solución completa del problema. Específicamente, si se estudia un caso en que las restricciones sobre el control nunca sean activas en el intervalo, por las condiciones de holgura complementarias, los multiplicadores que las acompañan se hacen cero, desapareciendo como incógnitas del problema y quedando entonces aislado el multiplicador de la restricción de estado. Asimismo, en este caso la función de control tiene una expresión sin “conmutaciones” en cada intervalo de continuidad, lo que facilita las derivaciones algebraicas.

Esta particularización permitió formular un problema de valores de contorno capaz de ser resuelto con PASVA4. Como para este problema pueden obtenerse muchas expresiones analíticas para describir la evolución de las variables involucradas, su resolución permite validar muchos de los resultados numéricos obtenidos ya sea usando PASVA4 o los programas ya desarrollados dentro del enfoque de programación dinámica. Por analogía con esta primera solución, se fueron obteniendo las soluciones de los problemas más generales, que fueron a su vez comparadas con las soluciones de programación dinámica correspondientes, pudiéndose comprobar que los resultados son similares. De manera que este capítulo describe primero la derivación de la solución a partir de las condiciones de optimalidad en este caso particular y luego se derivan las soluciones en los casos más generales.

4.2. Planteo del problema restringido

A los efectos de resolver el problema, comenzamos por realizar una serie de supuestos o restricciones que simplifican su tratamiento. Los mismos son enumerados en la sección siguiente. Estos supuestos irán siendo eliminados en forma sucesiva a lo largo del capítulo. El conocimiento de la solución en cada caso, facilita a derivación de la resolución del problema más amplio subsiguiente.

4.2.1. Supuestos para simplificar el análisis

- 1) Hay una sola restricción para el estado (cota inferior).
- 2) Se conoce el número de veces que el estado alcanza el intervalo frontera.

- 3) Más aún, hay un único intervalo en que la restricción es activa, esto es, el intervalo frontera se alcanza una sola vez.
- 4) Un único cruce por cero de la potencia requerida después de entrar en el intervalo frontera.
- 5) Los parámetros elegidos aseguran que el control nunca alcanza sus cotas (superior e inferior).
- 6) f_C es una función cuadrática.
- 7) $f_B = Id$ (no hay pérdidas en el segmento eléctrico).
- 8) Se conoce una expresión analítica para r (no es preciso interpolar cuando PASVA4 necesita evaluar en puntos intermedios).
- 9) Se conoce una expresión analítica para r' (para poder calcular con funciones intrínsecas del lenguaje el jacobiano del lado derecho de las ecuaciones diferenciales, necesario para PASVA4) sin necesidad de aproximarlos por un esquema numérico.

Con respecto a las suposiciones 1), 2) y 3) es importante remarcar que hemos analizado primeramente el caso en que la restricción de estado deviene activa en un único intervalo interior al intervalo de interés. En el problema del control supervisor, puede en realidad haber más de un intervalo frontera. Que la restricción de estado devenga activa significa en este problema que la energía en las baterías ha alcanzado su límite inferior ($x(t) = x_{\min}$), por lo que no pueden aportar más potencia para satisfacer los requerimientos del conductor. Esto implica que en el intervalo frontera, la potencia para la tracción debe ser entregada enteramente desde el segmento del motor de combustión. La salida de este intervalo se produce cuando la energía en las baterías aumenta, ya sea por frenado regenerativo o por aporte extra desde el motor de combustión, separándose de su cota inferior ($x(t) > x_{\min}$).

Es claro que en una situación real de circulación estas situaciones pueden repetirse. Como estas repeticiones complican la obtención de la solución por medio de las condiciones de optimalidad, trabajaremos en principio suponiendo que el intervalo frontera se recorre una única vez y por lo tanto existen un único punto de entrada y un único punto de salida

de este intervalo en el lapso a considerar. Se verá más adelante si se puede generar un algoritmo para tratar el caso general.

Llamaremos respectivamente t_1 y t_2 a los instantes de entrada y salida de ese intervalo frontera. Por lo dicho, en t_1 se produce un cambio en el lado derecho de la ecuación de estado, ya que el control u , que es la potencia que aporta el segmento del motor de combustión, debe pasar a ser igual a toda la potencia requerida y las baterías no pueden aportar más potencia. En t_2 , al salir de este intervalo, se produce un nuevo cambio en el lado derecho de la ecuación de estado, pues se produce un nuevo cambio en el control al revertirse la situación anterior.

Tal como lo hemos planteado, los instantes de entrada y salida de este intervalo son estimados por PASVA4 como parámetros adicionales. Se verá que finalmente el problema consiste en dos problemas de frontera libre.

El supuesto en 5) es fundamental para poder encontrar una primera solución, ya que, como se dijo, elimina dos multiplicadores del Lagrangiano o Hamiltoniano aumentando simplificando, como se verá, la derivación de la solución. Los parámetros de este caso no corresponden a un caso real pero son tales que la función de control nunca alcanza sus cotas superior ni inferior, con lo que, por las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, estos multiplicadores resultan iguales a cero en todo el intervalo. Los valores para el ejemplo se eligieron usando las soluciones dadas por algoritmos de programación dinámica desarrollados con anterioridad.

El supuesto en 6) se hace con el objetivo de que el Hamiltoniano presente un único extremo en el intervalo en que se hallan los controles admisibles en cada instante, facilitando también la derivación de la solución y luego la programación.

Los supuestos en 8) y 9) se hacen con el objetivo de facilitar la evaluación del lado derecho de la ecuación diferencial y del jacobiano del mismo respecto de las variables de estado. En el caso general la potencia requerida será una función dada por una tabla por lo que se hace necesario algún mecanismo de interpolación para su evaluación en puntos intermedios. Para evitar las complicaciones que pudiese introducir esta interpolación, elegimos para comenzar una función incorporada al lenguaje computacional de modo de evaluarla directamente. Elegimos una onda sinusoidal con una constante sumada tal que presenta una parte positiva y una parte negativa. De esta forma representa básicamente un intervalo que corresponde a una "aceleración" seguida de un intervalo que corresponde a

“frenado”. Asimismo, presenta un único cruce por cero en el intervalo de interés y resulta derivable respecto de las variables de estado en el interior del mismo. En la figura 4.1 puede verse en línea gris punteada esta función $r(t)$.

4.2.2. Diferentes formulaciones de las condiciones de optimalidad

Como se expresó en la introducción, existen por lo menos tres formulaciones diferentes de las condiciones de optimalidad. Éstas difieren a partir de la forma en que se adjunta la restricción de estado al Hamiltoniano.

El Hamiltoniano para este problema, en el caso restringido, está dado por

$$H(x, u, \lambda, t) = -f_C(u) - \lambda(r - u) \quad (4.1)$$

En el enfoque llamado “de adjunción directa”, el Lagrangiano se define por

$$L(x, u, \lambda, \underline{\theta}, \bar{\theta}, \mu, t) = -f_C(u) - \lambda(r - u) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) + \mu(x - x_{\min}) \quad (4.2)$$

En otras palabras, la restricción del estado se adjunta al Hamiltoniano con un multiplicador de Lagrange, en forma análoga a la que se adjuntan las restricciones en el control. En [9] se muestra que, usando esta definición del Lagrangiano, el estado adjunto λ debe ser absolutamente continuo solamente a trozos. La información sobre las discontinuidades debe extraerse de las condiciones de optimalidad.

El enfoque llamado “de adjunción indirecta con holgura complementaria” fue sugerido por Pontryagin y puede aplicarse en casos como el presente, en que la restricción de estado es función exclusiva del estado (y no del control) y que es de orden 1. Se dice que la restricción (en este caso unidimensional) es de orden 1 cuando la primera derivada total respecto del tiempo en que aparece explícitamente el control es la primera. En este caso se tiene que la restricción es de la forma

$$h(x, t) \geq 0 \quad (4.3)$$

y su derivada total primera

$$h^1(x, t) = h_x \dot{x} + h_t. \quad (4.4)$$

La idea es la siguiente: si la trayectoria de estado toca la frontera en el instante, digamos, t_1 , o sea $h(t_1) = 0$, para que se mantenga sobre la frontera hasta t_2 debe ser constante en

el intervalo $[t_1, t_2]$. Debe ser entonces

$$h^1(x, t) = 0 \quad (4.5)$$

En el punto de salida debe ser

$$h^1(x(t_2^+), t_2^+) \geq 0 \quad (4.6)$$

Entonces formalmente uno podría imponer la restricción

$$h^1 \geq 0 \quad (4.7)$$

siempre que

$$h = 0, \quad (4.8)$$

para evitar que la trayectoria viole la restricción $h \geq 0$. Esto motiva las siguientes definiciones del Hamiltoniano y Lagrangiano

$$H^1(x, u, \lambda^1, t) = -f_C(u) - \lambda^1(r - u) \quad (4.9)$$

$$L^1(x, u, \lambda^1, \underline{\theta}, \bar{\theta}, \mu^1, t) = -f_C(u) - \lambda^1(r - u) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) + \mu^1 h^1(x, u, t) \quad (4.10)$$

El nombre de este enfoque proviene de que se adjunta la derivada temporal h^1 en vez h directamente. En este caso también, el estado adjunto λ^1 resulta absolutamente continuo a trozos y la información sobre las discontinuidades aparece entre las condiciones de optimalidad.

Para este problema la idea es la siguiente: la restricción es

$$h(x, t) = x - x_{\min} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq x_{\min} \quad (4.11)$$

y su derivada temporal primera

$$h^1(x, t) = \dot{x} = -(r - u). \quad (4.12)$$

Si la trayectoria de estado, o sea la energía en las baterías, toca la frontera en el instante t_1 , entonces $x(t_1) = x_{\min}$. Como esta energía no puede bajar de ese valor, para que se

mantenga sobre la frontera hasta t_2 , x debe ser constante en el intervalo $[t_1, t_2]$. Debe ser entonces

$$h^1(x, t) \equiv 0 \Leftrightarrow h^1(x, t) = \dot{x} = 0 \Leftrightarrow (r - u) \equiv 0 \Leftrightarrow P_B \equiv 0. \quad (4.13)$$

En otras palabras, cuando la energía en las baterías alcanza su mínimo valor, éstas no pueden entregar más potencia, por lo que el control u , que es la potencia entregada por el segmento del motor de combustión, debe ser igual a la totalidad de la potencia requerida r .

En el punto de salida de este intervalo, debe volver a ser $x > x_{\min}$, por lo que se pide que

$$\dot{x} = -(r - u) > 0. \quad (4.14)$$

En [6] analizamos las condiciones de optimalidad bajo este enfoque y mostramos las dificultades que aparecen a los efectos de hallar la solución al problema. Específicamente, es difícil obtener condiciones que definan la magnitud de los saltos que se producen en los puntos de discontinuidad.

El tercer enfoque para formular las condiciones de optimalidad, es el llamado “de adjunción indirecta con estado adjunto continuo”. Este enfoque es similar al descrito anteriormente, excepto que en este caso se impone que el estado adjunto, ahora llamado $\bar{\lambda}$, sea continuo.

En este caso el Hamiltoniano se define directamente como

$$\bar{H}(x, u, \bar{\lambda}, u, \underline{\theta}, \bar{\theta}, \bar{\mu}, t) = -f_C(u) - \bar{\lambda}(r - u) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) - \bar{\mu}(r - u) \quad (4.15)$$

Detalles sobre esta formulaciones pueden encontrarse en [9]. En la sección siguiente mostraremos cómo el enfoque en a) permite, bajo las hipótesis mencionadas en la sección anterior obtener la solución completa, incluyendo la descripción de la evolución del multiplicador μ .

4.2.3. Relaciones entre los multiplicadores de los distintos modos de adjunción

Los estados adjuntos y multiplicadores que aparecen en las distintas formulaciones, están relacionados entre sí. En el artículo antes mencionado ([9]) se realiza un pormenorizado análisis de estas relaciones. Para nuestro problema solamente usaremos que

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(t) + \bar{\mu}(t)h_x(t) \quad (4.16)$$

Como en este caso

$$h_x(t) = 1 \quad (4.17)$$

Tenemos que

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(t) + \bar{\mu}(t) \quad (4.18)$$

Por lo anterior, es importante notar, que, como se señaló en el capítulo anterior, nuestro objetivo al resolver las condiciones de optimalidad se centraba en obtener la evolución del estado adjunto, ya que este podía interpretarse como el “factor de consumo equivalente” (factor que penaliza en cada instante a la potencia entregada por las baterías para dar cuenta del consumo futuro de combustible que implica la utilización instantánea de aquéllas). Esta interpretación se deriva del hecho de que una de las condiciones de optimalidad es la minimización del Hamiltoniano (o la maximización de su opuesto aditivo), con respecto a todos los controles admisibles u . Si miramos la expresión del Hamiltoniano en (4.15), vemos que tanto el estado adjunto $\bar{\lambda}$ como el multiplicador $\bar{\mu}$ son factores que multiplican la potencia entregada por las baterías $r - u$. De manera que en la búsqueda de un factor de consumo equivalente en el caso del problema con restricciones de estado, parecería razonable tener en cuenta a la suma de ambos. Esto lo refuerza la relación mencionada en (4.18) ya que en el caso de “adjunción directa” la potencia entregada por el segmento eléctrico aparece solamente afectada por el estado adjunto. De manera que en el caso de existir restricciones de estado consideraremos esta suma como factor de consumo equivalente o sea, el estado adjunto λ correspondiente al enfoque de “adjunción directa” de la restricción de estado.

4.2.4. Condiciones de optimalidad para el enfoque de adjunción directa

Para obtener las condiciones de optimalidad usamos el teorema que aparece en [9] con el número 4.1 y los comentarios sobre sus diferentes demostraciones allí mencionados. Presentaremos aquí directamente la aplicación al caso restringido descrito más arriba. El enunciado de problema restringido resulta entonces el siguiente:

Hallar u que maximice

$$-\int_0^T (a_C u^2 + b_C u + c_C) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = -(r - u)$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = x_T$$

$$x \geq x_{\text{mín}}$$

donde $r(t) = A \sin(\frac{2\pi}{T}t) + B$.

Un requerimiento del teorema mencionado es que se cumpla la siguiente "calificación" de las restricciones:

$$rg \begin{bmatrix} 1 & u - \underline{U} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{U} - u & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad (4.19)$$

Esto es verdadero excepto en los casos anormales en que u , \bar{U} y \underline{U} coincidan, que expresamente excluimos en este ejemplo o que $u = u_{\text{máx}} = \bar{U} = r$ o $u = 0 = \underline{U} = r$ mientras $x = x_{\text{mín}}$ que dejamos para un análisis posterior.

Recordemos que el Hamiltoniano y el Lagrangiano en este caso están dados por

$$H(x, u, \lambda, t) = -f_C(u) - \lambda(r - u) \quad (4.20)$$

$$L(x, u, \lambda, \underline{\theta}, \bar{\theta}, \mu, t) = -f_C(u) - \lambda(r - u) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) + \mu(x - x_{\text{mín}}) \quad (4.21)$$

Las condiciones de optimalidad resultan

$$u(t) = \arg \max_{u \in \Omega} H(x, u, \lambda, t), \quad (4.22)$$

siendo

$$\Omega(x, t) = \{u/\underline{U} \leq u \leq \bar{U}\} \quad (4.23)$$

$$L_u = -2a_C u - b_C + \lambda + \underline{\theta} - \bar{\theta} = 0 \quad (4.24)$$

$$\dot{x} = -(r - u), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (4.25)$$

$$\dot{\lambda} = -L_x = \mu, \quad (4.26)$$

$$\underline{\theta} \geq 0, \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0, \quad \bar{\theta} \geq 0, \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{dH}{dt} = H_t \quad (4.28)$$

$$\underline{\theta}, \bar{\theta} \text{ y } \mu \text{ son continuos a trozos} \quad (4.29)$$

$$\mu \geq 0, \quad \mu(x - x_{\min}) = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

En el instante final T

$$\lambda(T) = \beta + \gamma, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma(x(T) - x_{\min}) = 0 \quad (4.31)$$

donde β y γ son parámetros a determinar.

Para todo τ en un intervalo frontera o punto de contacto, el estado adjunto λ puede tener una discontinuidad dada por las siguientes condiciones de salto:

$$\begin{aligned} \lambda(\tau^-) &= \lambda(\tau^+) + \eta(\tau) \\ H(\tau^-) &= H(\tau^+), \quad \eta(\tau) \geq 0, \quad \eta(\tau)(x - x_{\min}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.2.5. Solución

Partiendo del instante final T y suponiendo que $x(T) \neq x_{\min}$ tenemos que de (4.31) resulta que $\gamma = 0$, $\lambda(T) = \beta$; de (4.30), $\mu(T) = 0$. En $(t_2, T]$, como $x(t) > x_{\min}$, por (4.30)

$$\mu(t) \equiv 0. \quad (4.33)$$

Entonces por (4.26) se tiene que $\dot{\lambda} = -L_x = \mu = 0$ por lo que λ es constante en este subintervalo, o sea, $\lambda \equiv \beta$.

Como supusimos que en este ejemplo $\underline{U} < u < \bar{U}$, de (4.27), resulta $\underline{\theta} = \bar{\theta} = 0$, por lo que, usando (4.24), se tiene que

$$L_u = -2a_C u - b_C + \lambda = 0 \quad (4.34)$$

Entonces

$$u = \frac{\lambda - b_C}{2a_C} \quad (4.35)$$

Si se conociese t_2 , resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(r - u) = -(r - \frac{\lambda - b_C}{2a_C}) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x_{\min} \\ x(T) &= x_T, \end{aligned} \quad (4.37)$$

se podría obtener el valor de $\lambda \equiv \beta$ en $(t_2, T]$. Como aún desconocemos el valor de t_2 , necesitamos información adicional para obtener el valor del estado adjunto.

En el intervalo $(t_1, t_2]$, $x \equiv x_{\min}$ por lo que $\dot{x} = 0$ y por (4.25), $u \equiv r$.

De (4.34)

$$L_u = -2a_C r - b_C + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(t) = 2a_C r(t) + b_C \quad (4.38)$$

y usando (4.26)

$$\mu = -L_x = -\dot{\lambda} = -2a_C \dot{r}(t). \quad (4.39)$$

Usando ahora (4.32) resulta que

$$\begin{aligned} 2a_C r(t_2) + b_C &= \beta + \eta(t_2) \\ -a_C r(t_2)^2 - b_C r(t_2) - c_C &= -a_C \left(\frac{\beta - b_C}{2a_C}\right)^2 - b_C \left(\frac{\beta - b_C}{2a_C}\right) - c_C - \beta \left(r(t_2) - \frac{\beta - b_C}{2a_C}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Despejando β de la segunda ecuación resulta

$$\beta = 2a_C r(t_2) + b_C. \quad (4.41)$$

Esta relación provee la información adicional que juntamente con (4.36) y (4.37) conforma un sistema de frontera libre que puede ser resuelto con PASVA4, con t_2 como un parámetro extra a estimar.

Nótese que de (4.41) y de (4.40) surge que $\eta(t_2) = 0$ y por lo tanto λ resulta continuo en t_2 .

En el intervalo $[t_2, T]$, el control u resulta entonces constante y

$$u = \frac{\lambda(t_2) - b_C}{2a_C} = r(t_2). \quad (4.42)$$

Nótese que el control también es entonces continuo en t_2 y que la solución en este intervalo es independiente de la condición en el primer intervalo. Se observa también que en el intervalo $[t_1, t_2]$, el estado adjunto evoluciona como una función afín de la potencia requerida r . En ese intervalo el multiplicador de Lagrange μ puede calcularse a partir de (4.39).

En el intervalo $[0, t_1]$, se tiene una situación similar a la del intervalo final. Allí nuevamente como $x > x_{\min}$, $\mu = 0$, por lo que $\dot{\lambda} = 0$ y entonces λ es constante. Usando nuevamente (4.34), las ecuaciones dinámicas para el estado y el estado adjunto son como en (4.36) cambiando solamente las condiciones de contorno que son ahora

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(t_1) &= x_{\min}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Tampoco en este caso se conoce el valor de t_1 , pero usando (4.32) resulta que

$$\begin{aligned} H(t_1^-) &= -a_C \left(\frac{\lambda(t_1^-) - b_C}{2a_C} \right)^2 - b_C \left(\frac{\lambda(t_1^-) - b_C}{2a_C} \right) - c_C - \lambda(t_1^-) \left(r(t_1) - \frac{\lambda(t_1^-) - b_C}{2a_C} \right) = \\ &= H(t_1^+) = -a_C r(t_1)^2 - b_C r(t_1) - c_C \end{aligned}$$

de donde operando algebraicamente resulta que

$$\lambda(t_1^-) = 2a_C r(t_1) + b_C$$

y en consecuencia $\lambda \equiv 2a_C r(t_1) + b_C$, relación que permite estimar a t_1 como parámetro adicional juntamente con la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales. Nótese que nuevamente el estado adjunto y el control resultan continuos en t_1 .

Tabla 4.1

	x	λ	u	μ
$[0, t_1]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - r(t_1)), x(0) = x_0, x(t_1) = x_{\min}$	$2a_C r(t_1) + b_C$	$r(t_1)$	0
$(t_1, t_2]$	x_{\min}	$2a_C r(t) + b_C$	r	$-2a_C \dot{r}$
$(t_2, T]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u), x(T) = x_T, x(t_2) = x_{\min}$	$2a_C r(t_2) + b_C$	$r(t_2)$	0

En síntesis, el estado adjunto, cuya evolución queríamos conocer pues está asociada al factor de consumo equivalente, es la siguiente: en los primeros instantes, hasta t_1 toma un valor constante que depende de t_1 , el instante en que la restricción de estado se hace activa. A partir de ese instante, el estado adjunto evoluciona variando como una función afín de la potencia requerida según (4.38). Nótese que en este intervalo, sin embargo, el factor de consumo equivalente no tiene una interpretación física clara, ya que no pudiendo en ese intervalo el sistema de almacenamiento eléctrico aportar potencia alguna, es claro que el control óptimo es el único posible, o sea el que indica entregar toda la potencia requerida desde el segmento del motor de combustión. A partir de t_2 , el estado adjunto permanece nuevamente constante, manteniendo el valor que tiene en t_2 . Nótese entonces que los valores del factor de consumo equivalente en este caso dependen fuertemente de los instantes t_1 y t_2 .

En la tabla 4.1, se resumen los resultados anteriores. En la figura 4.1 se muestra la función de control obtenida en este caso (línea llena) juntamente con la solución del mismo problema obtenida con el algoritmo de programación dinámica desarrollado previamente en la tesis de maestría [35] (línea punteada). Como se dijo anteriormente, en línea de trazos gris se presenta la potencia requerida, sinusoidal. Otras dos curvas (punteadas) presentan las cotas superior e inferior del control que, como se dijo, en este ejemplo no son nunca alcanzadas. La figura 4.2 muestra la evolución de la energía en las baterías, o sea, la trayectoria de estado. Los parámetros usados en este ejemplo se resumen en la tabla 4.2, y los valores obtenidos para los límites del intervalo frontera, para el estado adjunto y para el consumo en la tabla 4.3. Obsérvese que la función de control toma un valor constante en el intervalo $[0, t_1]$, es igual a la potencia requerida en el intervalo (t_1, t_2) en que la variable de estado alcanza su cota inferior, y toma un valor constante diferente en el intervalo $[t_2, T]$.

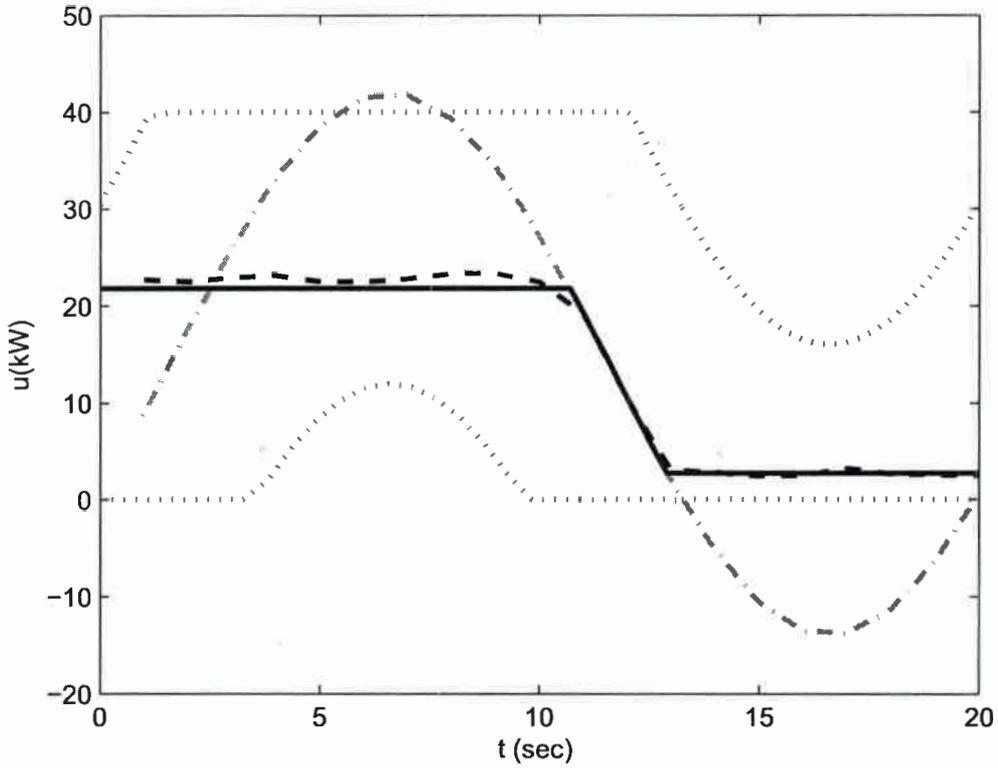


Figura 4.1: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de trazos) en el caso restringido tomado como punto de partida; se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

Tabla 4.2

$x_{\text{máx}}$	120 kWs
$x_{\text{mín}}$	10 kWs
$u_{\text{máx}}$	40 kW
$K_{\text{máx}}$	30 kW
$K_{\text{mín}}$	-30 kW
$f_C(u)$	$0.0476u^2 + 1.7517u + 3.2738$
$f_B(u)$	u
T	20 s
$x_0 = x_T$	90 kWs

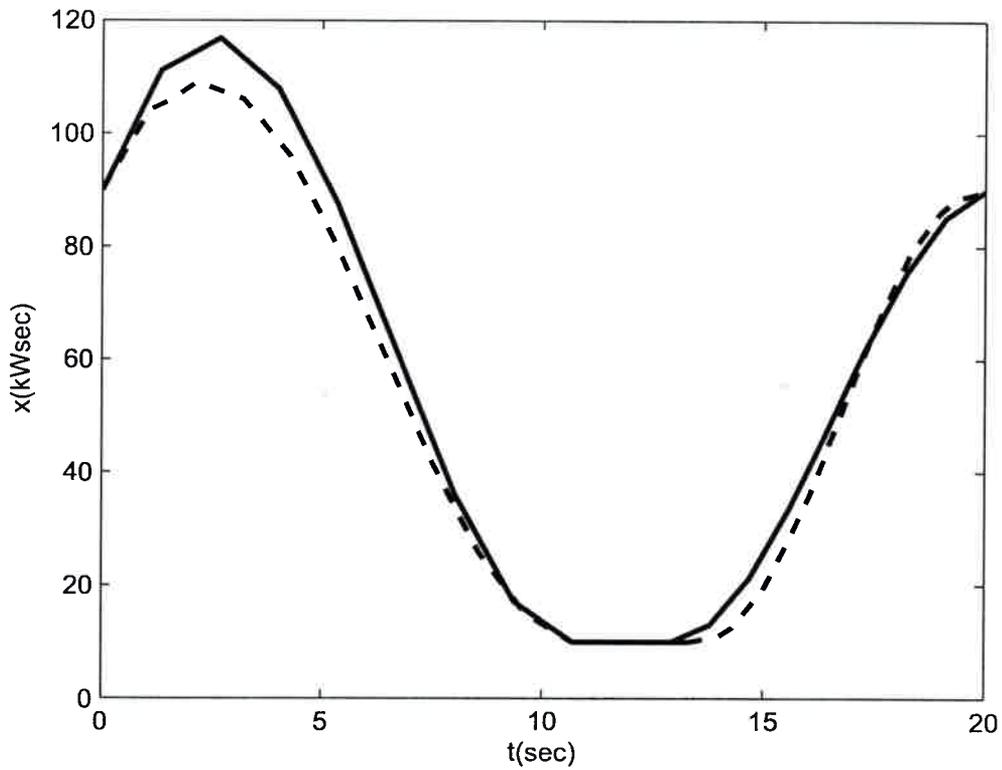


Figura 4.2: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4(línea llena) y usando programación dinámica (línea de trazos), en el caso restringido tomado como punto de partida

Tabla 4.3

t_1	10.5 s
t_2	13.0 s
$\lambda \in [0, t_1)$	3.8213
$\lambda \in [t_2, T]$	2.6037
consumo	270.4348 kW _s

4.2.6. Condiciones de optimalidad para el enfoque de adjunción indirecta con estado adjunto continuo

Presentaremos en esta sección la derivación de la misma solución obtenida en la sección anterior usando el enfoque de adjunción directa. El objetivo es simplemente corroborar la solución obtenida previamente y también la relación entre los multiplicadores señalada en (4.18). Para obtener las condiciones de optimalidad usamos el teorema que aparece en [9] con el número 7.1, cuya demostración aparece en las referencias allí mencionadas. Presentaremos aquí directamente la aplicación al caso restringido descrito más arriba.

Un requerimiento de este teorema es que se cumpla la llamada calificación fuerte de las restricciones, que en este caso se refiere a que

$$rg \begin{bmatrix} 1 & u - \underline{U} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{U} - u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x - x_{\min} \end{bmatrix} = 3 \quad (4.44)$$

Esto es verdadero excepto en los casos anormales en que u , \bar{U} y \underline{U} coincidan, que expresamente excluimos en este ejemplo, o que $u = u_{\max} = \bar{U} = r$ o $u = 0 = \underline{U} = r$ mientras $x = x_{\min}$.

Las condiciones resultan

$$u(t) = \arg \max_{u \in \bar{\Omega}} \bar{H}(x, u, \bar{\lambda}, u, \bar{\theta}, \bar{\mu}, t), \quad (4.45)$$

siendo

$$\bar{\Omega}(x, t) = \{u/\underline{U} \leq u \leq \bar{U}\} \quad (4.46)$$

$$\bar{H}_u = 0, \quad (4.47)$$

$$\dot{x} = -(r - u), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (4.48)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\bar{H}_x = 0, \quad (4.49)$$

$$\underline{\theta} \geq 0, \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0, \quad \bar{\theta} \geq 0, \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0 \quad (4.50)$$

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{H}_t \quad (4.51)$$

$$\underline{\theta}, \bar{\theta} \text{ y } \bar{\mu} \text{ son continuos en los intervalos de continuidad de } u \quad (4.52)$$

$$\dot{\bar{\mu}} \leq 0 \quad (4.53)$$

$$\bar{\mu} \text{ es continuo toda vez que } h^1 \text{ es discontinuo} \quad (4.54)$$

$$\bar{\mu} \text{ es constante en los intervalos en que } x > x_{\min} \quad (4.55)$$

En el instante final T

$$\bar{\lambda}(T) = \beta \quad (4.56)$$

$$\bar{\mu}(T) = 0 \quad (4.57)$$

4.2.7. Solución

Obtendremos la solución a partir de las condiciones anteriores en el caso restringido que mencionamos al principio y usando la siguiente condición que caracteriza los extremos del intervalo frontera en que el estado adjunto es continuo ([9], Proposición 4.2.): si la restricción es de orden 1, $\bar{\lambda}$ es continuo en una juntura τ si $-(r(\tau^-) - u(\tau^-)) < 0$ o $-(r(\tau^+) - u(\tau^+)) > 0$. En otras palabras, si la entrada o la salida del intervalo frontera se producen en forma no tangencial.

Partiendo del instante final T , tenemos que de $\bar{\mu}(T) = 0$, $\bar{\lambda}(T) = \beta$. En $(t_2, T]$, como $x(t) > x_{\min}$, por (4.55)

$$\bar{\mu}(t) \equiv 0 \quad (4.58)$$

Como supusimos que en este ejemplo $\underline{U} < u < \bar{U}$, por tratarse de un Hamiltoniano cuadrático, el máximo tiene que ser interior, por lo que usando (4.45) o (4.47) se tiene que

$$\bar{H}_u = -2a_C u - b_C + \underline{\theta} - \bar{\theta} + \bar{\lambda} = 0 \quad (4.59)$$

Por otra parte, del supuesto $\underline{U} < u < \bar{U}$, por (4.50) resulta $\underline{\theta} = \bar{\theta} = 0$ y entonces

$$-2a_C u - b_C + \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow u = \frac{\bar{\lambda} - b_C}{2a_C} \quad (4.60)$$

Resolviendo ahora el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(r - u) = -\left(r - \frac{\bar{\lambda} - b_C}{2a_C}\right) \\ \dot{\bar{\lambda}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x_{\min} \\ x(T) &= x_T, \end{aligned} \quad (4.62)$$

podemos obtener el valor de $\bar{\lambda}$ (constante) en $(t_2, T]$. Falta aún conocer el valor de t_2 .

En el intervalo $(t_1, t_2]$, $x \equiv x_{\min}$ por lo que $\dot{x} = 0$ y por (4.48), $u \equiv r$.

De (4.47)

$$\bar{H}_u = -2a_C r - b_C + \bar{\lambda} + \bar{\mu} = 0 \Rightarrow \bar{\mu} = 2a_C r + b_C - \bar{\lambda}. \quad (4.63)$$

Como por (4.49) $\bar{\lambda}$ es constante y (en este enfoque) continuo, resulta $\bar{\lambda}(t) \equiv \bar{\lambda}(t_2^-) = \bar{\lambda}(t_2^+)$ y entonces

$$\bar{\mu}(t) = 2a_C r(t) + b_C - \bar{\lambda}(t_2). \quad (4.64)$$

Si en t_2 fuese $h^1(t_2^+) > 0$ (salida del intervalo frontera no tangencial), $\bar{\mu}$ resultaría continuo en t_2 :

$$\bar{\mu}(t_2^+) = 0 = 2a_C r(t_2) + b_C - \bar{\lambda}(t_2), \quad (4.65)$$

de donde $\bar{\lambda}(t_2) = 2a_C r(t_2) + b_C$. Como $\bar{\lambda}$ es continuo y su derivada nula, éste es su valor en todo el intervalo, mientras que en $(t_1, t_2]$, $\bar{\mu} = 2a_C(r(t) - r(t_2))$

Si en t_2 , $h^1(t_2^+) = 0$ resultaría

$$-(r(t_2) - (\frac{\bar{\lambda}(t_2) - b_C}{2a_C})) = 0, \quad (4.66)$$

y entonces igualmente $\bar{\lambda}(t_2) = 2a_C r(t_2) + b_C$.

En $[0, t_1]$, por la continuidad del estado adjunto se tiene también $\bar{\lambda}(t) \equiv 2a_C r(t_2) + b_C$.

De (4.47), se tiene que

$$\bar{H}_u = -2a_C u - b_C + 2a_C r(t_2) + b_C + \bar{\mu} = 0 \quad (4.67)$$

de donde

$$u = \frac{\bar{\mu} + 2a_C r(t_2)}{2a_C} \quad (4.68)$$

Nuevamente si $h^1(t_1^-) < 0$, o sea que la salida del intervalo frontera es no tangencial, $\bar{\mu}$ es continuo en t_1 por lo que

$$\bar{\mu}(t_1^-) = \bar{\mu}(t_1^+) = 2a_C(r(t_1) - r(t_2)) \quad (4.69)$$

y como $\bar{\mu}$ es constante en este intervalo

$$\bar{\mu}(t) \equiv 2a_C(r(t_1) - r(t_2)). \quad (4.70)$$

Si en cambio $h^1(t_1) = 0$

$$-(r(t_1) - \frac{\bar{\mu} + 2a_C r(t_2)}{2a_C}) = \frac{-2a_C r(t_1) + \bar{\mu} + 2a_C r(t_2)}{2a_C} = 0 \quad (4.71)$$

y entonces también resulta $\bar{\mu} = 2a_C(r(t_1) - r(t_2))$ y en consecuencia $u = r(t_1)$.

Para obtener t_1 resolvemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(r - r(t_1)) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \lambda(t_1) &= 2a_C r(t_2) + b_C \end{aligned} \quad (4.73)$$

con t_1 como un parámetro desconocido, caracterizado por la condición $x(t_1) = x_{\text{mín}}$.

Tabla 4.4

	x	$\bar{\lambda}$	u	$\bar{\mu}$
$[0, t_1]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u)$, $x(0) = x_0, x(t_1) = x$	$2a_C r(t_2) + b_C$	$r(t_1)$	$2a_C(r(t_1) - r(t_2))$
$(t_1, t_2]$	$x_{\text{mín}}$	$2a_C r(t_2) + b_C$	$r(t)$	$2a_C(r(t) - r(t_2))$
$(t_2, T]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u)$, $x(T) = x_T, x(t_2) = x_{\text{mín}}$	$2a_C r(t_2) + b_C$	$r(t_2)$	0

En resumen, las características de la solución se muestran en la tabla 4.4

Obsérvese que el factor de consumo equivalente (que es la suma $\bar{\lambda} + \bar{\mu}$), es constante en el primer intervalo, varía en función de la potencia requerida r en el intervalo en que la energía en las baterías alcanza su valor mínimo y es constante nuevamente en el último intervalo, pero con un nuevo valor. El valor en el primer intervalo depende de la condición inicial del estado x_0 , ya que t_1 depende fuertemente de ese valor, mientras que en el último intervalo depende de la condición final, que a su vez condiciona el valor de t_2 . Nótese también que estos resultados son coincidentes con los obtenidos con el enfoque de la sección anterior.

4.3. Caso restringido con restricciones en el estado y también en el control

En la sección anterior se observa que el estado adjunto en el último y primer intervalos es una constante. A su vez el control es constante y tal que la trayectoria del estado pasa de su valor inicial a su valor mínimo permitido y de su valor mínimo al valor final respectivamente. Los valores de estos controles constantes son respectivamente $r(t_1)$ y $r(t_2)$. En el intervalo central el control es independiente del estado adjunto y resulta igual a la potencia requerida.

En base a esta observación y a los resultados de la sección anterior, postulamos que la solución al problema con restricciones en el estado y también en el control es similar a la anterior, con el agregado de las conmutaciones en la función de control que se producen cuando ésta alcanza las cotas superior o inferior del mismo. En otras palabras, la solución es la que se muestra a continuación, después de consignar, para mayor claridad,

el enunciado del problema.

Hallar u continua a trozos que maximice

$$-\int_0^T f_C(u)dt \quad (4.74)$$

sujeito a

$$\dot{x} = -(r(t) - u(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.75)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (4.76)$$

$$\underline{U}(t) \leq u(t) \leq \bar{U}(t) \quad (4.77)$$

$$x \geq x_{\min}. \quad (4.78)$$

4.3.1. Solución

En $(t_2, T]$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(r - u) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

donde u es ahora

$$u(t) = \begin{cases} \underline{U}(t) & \text{si } r(t_2) < \underline{U}(t) \\ r(t_2) & \text{si } \underline{U}(t) \leq r(t_2) \leq \bar{U}(t) \\ \bar{U}(t) & \text{si } \bar{U}(t) \leq r(t_2) \end{cases}$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned} x(t_2^+) &= x_{\min} \\ x(T) &= x_T \end{aligned}$$

Si conociésemos t_2 , resolviendo este sistema podríamos obtener el valor constante de λ y la trayectoria de x . En este intervalo el multiplicador μ resulta idénticamente nulo.

En $(t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \Rightarrow x \equiv x_{\min} \\ \lambda &= 2a_C r + b_C \\ u &= r \text{ si } \underline{U} \leq r \leq \bar{U}\end{aligned}$$

Nótese que si $r > \bar{U}$ el problema no tiene solución, ya que en esta situación la energía de las baterías está en su valor mínimo x_{\min} y en consecuencia el segmento eléctrico no puede entregar potencia alguna, mientras que el requerimiento de esta última es mayor que la potencia máxima que puede aportar el segmento del motor de combustión (nótese que $r > \bar{U} \rightarrow r > u_{\max}$).

Por otra parte si $r < \underline{U}$, sería o bien $r < r - K_{\max}$ (imposible pues $K_{\max} > 0$) o bien $r < 0$ lo que implica que $u = r < 0$, potencia imposible de ser entregada por el segmento del motor de combustión. De manera que debe ser $\underline{U} \leq r = u \leq \bar{U}$ por lo que $u = r$ es un máximo interior de H y entonces $H_u = 0$

La expresión (4.32) no cambia respecto del caso sin restricciones en el control ya que las funciones h y H no cambian, por lo que, igual que en ese caso, resulta

$$\lambda(t_2^-) = \lambda(t_2^+) = 2a_C r(t_2) + b_C \quad (4.79)$$

condición algebraica extra que nos permitirá calcular t_2 simultáneamente con la resolución de las ecuaciones diferenciales.

En $[0, t_1]$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(r - u) \\ \dot{\lambda} &= 0\end{aligned}$$

donde

$$u(t) = \begin{cases} \underline{U}(t) & \text{si } r(t_1) < \underline{U}(t) \\ r(t_1) & \text{si } \underline{U}(t) \leq r(t_1) \leq \bar{U}(t) \\ \bar{U}(t) & \text{si } \bar{U}(t) \leq r(t_1) \end{cases}$$

y t_1 es tal que $x(t_1) = x_{\min}$. En este intervalo

$$\lambda = 2a_C r(t_1) + b_C$$

Tabla 4.5

$x_{\text{máx}}$	120 kW _s
$x_{\text{mín}}$	10 kW _s
$u_{\text{máx}}$	40 kW
$K_{\text{máx}}$	15 kW
$K_{\text{mín}}$	-15 kW
$f_C(u)$	$0.0476u^2 + 1.7517u + 3.2738$
$f_B(u)$	u
T	20 s
$x_0 = x_T$	90 kW _s

La demostración de la optimalidad de esta solución a partir de las condiciones dadas por el principio del máximo es engorrosa, debido a que deben contemplarse por separado cada uno de los casos en que conmuta el control. Para ilustrar su validez, la comparamos con la solución discreta, obtenida usando programación dinámica. Con este fin, tomamos el mismo ejemplo anterior, pero reduciendo los valores de potencia máxima y mínima del segmento eléctrico. Esto redundará en que se estrecha la franja en la que debe moverse el control y entonces éste toca efectivamente las cotas superior e inferior. En la figura ?? se muestran las curvas obtenidas para el conjunto de parámetros indicado en la tabla 4.5.

La curva de línea llena es el control óptimo obtenido, mientras que la curva de trazos es el control obtenido usando el algoritmo de programación dinámica. Se señalan en línea punteada los límites superior e inferior admisibles para el control y en línea de puntos y rayas el ciclo de potencia requerida. En la figura 4.4 se muestra la trayectoria de estado correspondiente y su comparación con la obtenida usando programación dinámica. Obsérvese que en los intervalos inicial y final, el control es constante excepto cuando alcanza sus cotas superior o inferior en que se pega a ellas. En el intervalo $[t_1, t_2]$ el control es igual a la potencia requerida, de la misma forma que en el problema anterior.

En lo concerniente a la solución numérica, la solución que se muestra en el gráfico se obtuvo utilizando como punto de arranque la solución de programación dinámica. El valor de t_1 es correctamente estimado aún partiendo de valores iniciales que difieren del

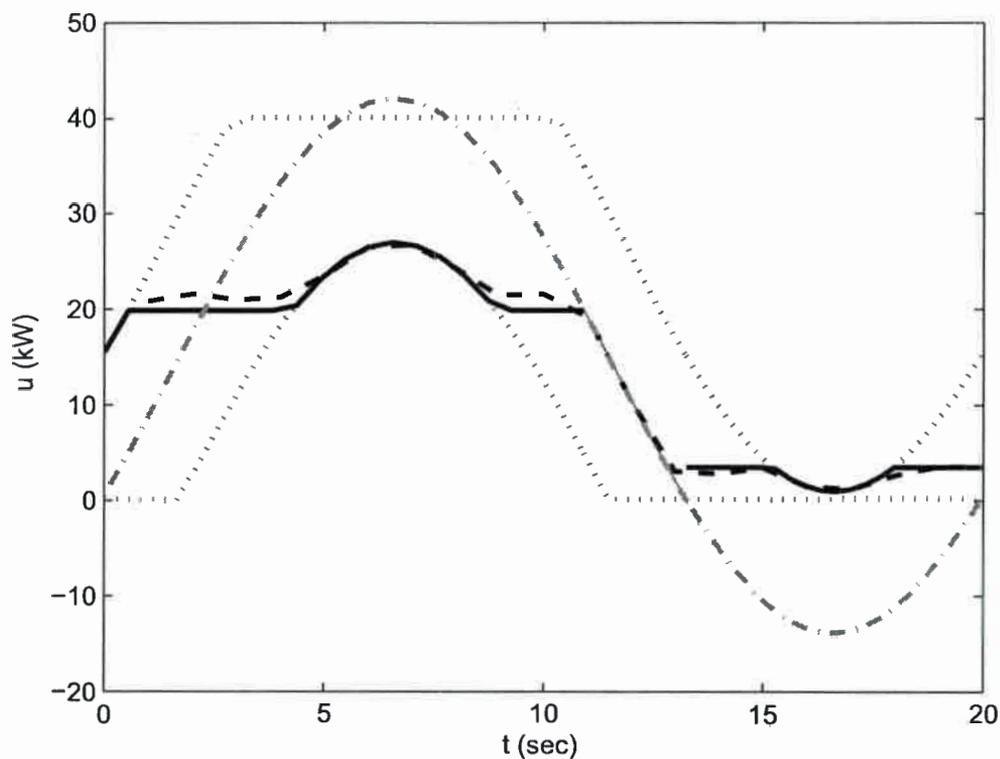


Figura 4.3: (línea llena) y usando programación dinámica (línea de trazos) en el caso en que se consideran las restricciones en el control pero no las pérdidas en el segmento eléctrico; se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

Tabla 4.6

t_1	10.9192199 s
t_2	12.847302 s
$\lambda \in [0, t_1)$	3.7
$\lambda \in (t_2, T]$	2.1
consumo	279.0412 kW _s

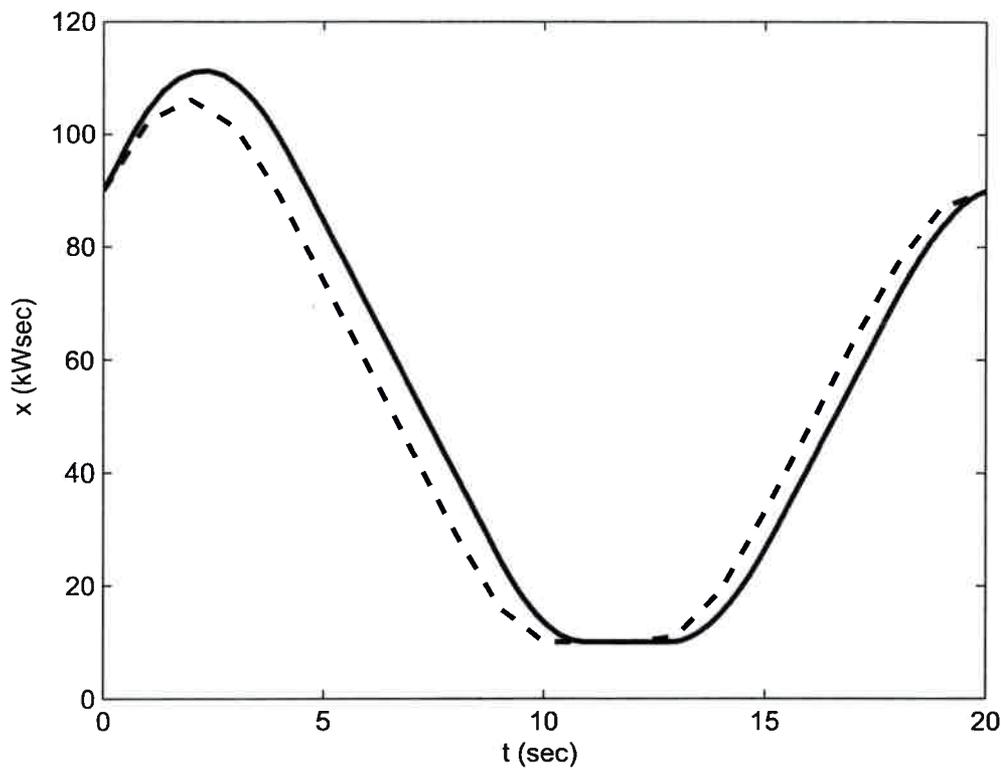


Figura 4.4: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4(línea llena) y usando programación dinámica (línea de trazos) en el caso en que se consideran las restricciones en el control pero no las pérdidas en el segmento eléctrico.

valor correcto. Cabe mencionar que en este caso el cómputo de los jacobianos necesarios para usar PASVA4 es engorroso también debido a que éstos presentan discontinuidades de salto en los puntos en que el control conmuta.

4.4. Caso en que se incluyen las pérdidas en el segmento eléctrico

En forma similar a lo realizado en el capítulo anterior, representaremos aquí las pérdidas que se producen en el segmento eléctrico por una función f_B que depende de la potencia entregada por las baterías $r - u$ y que toma la forma cuadrática siguiente:

$$f_B(r - u) = a_B(r - u)^2 + (r - u)$$

Para facilidad de la presentación, mantenemos todas las hipótesis simplificatorias mencionadas en la sección 4.2.1, excepto las número 5 y 7. El problema queda entonces planteado así

Hallar u continua a trozos que maximice

$$- \int_0^T a_C u^2 + b_C u + c_C dt \quad (4.80)$$

sujeto a

$$\dot{x} = -a_B(r(t) - u(t))^2 - (r(t) - u(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.81)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (4.82)$$

$$\underline{U}(t) \leq u(t) \leq \bar{U}(t) \quad (4.83)$$

$$x \geq x_{\min}. \quad (4.84)$$

4.4.1. Condiciones de optimalidad en el enfoque de adjunción directa en el caso en que se incluyen pérdidas en el segmento eléctrico

Nuevamente, para definir el Lagrangiano, usamos el enfoque de adjunción directa.

$$H(x, u, \lambda, t) = -a_C u^2 - b_C u - c_C - \lambda(a_B(r - u)^2 + (r - u))$$

$$L(x, u, \lambda, \bar{\theta}, \underline{\theta}, \mu, t) = -a_C u^2 - b_C u - c_C - \lambda(a_B(r - u)^2 + (r - u)) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) + \mu(x - x_{\min})$$

La función h que define la restricción de estado (4.3) es nuevamente $h(x, t) = x - x_{\min}$, su derivada respecto de x es $h_x(x, t) = 1$ y su derivada total respecto del tiempo es $h^1(x, t) = \dot{x} = -(a_B(r - u)^2 + (r - u))$.

Las condiciones de optimalidad resultan entonces las siguientes ([9]):

$$u(t) = \arg \max_{u \in \Omega} H(x, u, \lambda, t), \quad (4.85)$$

$$\text{con } \Omega(t) = \{u/\underline{U} \leq u \leq \bar{U}\}$$

$$L_u = -2a_C u - b_C + 2\lambda a_B(r - u) + \lambda + \underline{\theta} - \bar{\theta} = 0$$

$$\dot{\lambda} = -L_x = -\mu$$

$$\underline{U} \leq u \leq \bar{U}, \quad \underline{\theta} \geq 0, \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0, \quad \bar{\theta} \geq 0, \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0$$

$$\mu \geq 0, \quad \mu(x - x_{\min}) = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\lambda(T) = \beta + \gamma, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma(x(T) - x_{\min}) = 0$$

En $\tau = t_1$ y $\tau = t_2$

$$\lambda(\tau^-) = \lambda(\tau^+) + \eta(\tau)$$

$$H(\tau^-) = H(\tau^+)$$

$$\eta(\tau) \geq 0, \quad \eta(\tau)(x(\tau) - x_{\min}) = 0$$

4.4.2. Solución del caso que incluye pérdidas en el segmento eléctrico, cuando el control no alcanza sus cotas

En $t = T$, suponemos $x(T) \neq x_{\min}$ por lo que $\gamma = 0$ y entonces $\lambda(T) = \beta$. En el intervalo $(t_2, T]$, $x(t) > x_{\min}$ entonces $\mu = 0$ por lo que

$$\dot{\lambda} = 0$$

y entonces λ es constante e igual a β .

Analizaremos primeramente el caso en que la función de control no alcanza nunca sus cotas superior e inferior. De manera que el máximo en (4.85) es siempre interior, por lo cual

$$L_u = -2a_C u(t) - b_C + 2\lambda a_B(r - u) + \lambda = 0 \quad (4.86)$$

y entonces

$$u = \frac{b_C - 2\lambda a_B r - \lambda}{-2a_C - 2\lambda a_B} \quad (4.87)$$

y

$$\underline{\theta} = \bar{\theta} = 0 \quad (4.88)$$

Entonces si conociésemos t_2 , bastaría resolver el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(a_B(r - u(\lambda))^2 + r - u(\lambda)) \\ \dot{\lambda} &= 0 \\ x(T) &= x_T, \quad x(t_2) = x_{\min}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Nótese que u depende de λ y de r .

En (t_1, t_2) , $x \equiv x_{\min}$, entonces $\dot{x} = -(a_B(r - u)^2 + r - u) = 0$ de donde

$$r = u \quad \text{o} \quad u = r + \frac{1}{a_B}$$

Como $a_B > 0$, $r + \frac{1}{a_B} > r$. Además el coeficiente a_B es en general pequeño dado que la función f_B que representa las pérdidas en el segmento eléctrico, no se aleja demasiado de la función identidad. De ahí que $\frac{1}{a_B}$ resulte relativamente grande frente a r . Esto permite descartar la segunda solución y usar que $u = r$. De (4.86)

$$-2a_C r - b_C + 2\lambda a_B(r - r) + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2a_C r + b_C \quad \text{y} \quad \mu = -\dot{\lambda} = -2a_C \dot{r}.$$

En t_2 ,

$$\begin{aligned} \lambda(t_2^-) &= \lambda(t_2^+) + \eta(t_2) \\ H(t_2^-) &= H(t_2^+) \end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned}
 2a_C r(t_2) + b_C &= \beta + \eta(t_2) \quad \Rightarrow \quad \eta(t_2) = 2a_C r(t_2) + b_C - \beta \\
 -a_C r^2(t_2) - b_C r(t_2) - c_C &= -a_C u^2(t_2^+) - b_C u(t_2^+) - c_C \\
 -\beta(a_B(r(t_2) - u(t_2^+))^2 + r(t_2) - u(t_2^+)) &
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Como

$$u(t_2^+) = \frac{b_C - 2\beta a_B r(t_2) - \beta}{-2a_C - 2\beta a_B}, \tag{4.91}$$

reemplazando en la expresión anterior resulta una expresión en β a partir de la cual, tras alguna manipulación algebraica (ver Apéndice C) se obtiene

$$\beta = 2a_C r(t_2) + b_C \tag{4.92}$$

por lo que $\eta(t_2) = 0$. La expresión (4.92) es la condición algebraica adicional que nos permite calcular t_2 al resolver (4.89).

Si reemplazamos β en (4.87) resulta que

$$u = \frac{b_C - 2(2a_C r(t_2) + b_C)a_B r - (2a_C r(t_2) + b_C)}{-2a_C - 2(2a_C r(t_2) + b_C)a_B} = \frac{2a_C r(t_2)a_B r + b_C a_B r + a_C r(t_2)}{a_C + 2a_C r(t_2)a_B + b_C a_B}$$

lo que muestra que en este caso el control es una función afín de la potencia requerida $r(t)$. Con esta expresión para u estamos en condiciones de resolver el problema de valores de contorno dado por (4.89) más la condición algebraica adicional (4.92).

En $[0, t_1]$ tenemos nuevamente que $x > x_{\min}$ por lo que $\mu \equiv 0$. Entonces $\dot{\lambda} = 0$ por lo que λ resulta constante en el subintervalo. En la suposición de que el control nunca toca sus cotas superior e inferior, se tiene que $L_u = H_u = 0$, de donde igual que en $(t_2, T]$

$$u = \frac{b_C - 2\lambda a_B r - \lambda}{-2a_C - 2\lambda a_B}. \tag{4.93}$$

En t_1 ,

$$\begin{aligned}
 \lambda(t_1^-) &= \lambda(t_1^+) + \eta(t_1) \\
 \Rightarrow \quad \lambda &= 2a_C r(t_1) + b_C + \eta(t_1) \\
 \Rightarrow \quad \eta(t_1) &= \lambda - 2a_C r(t_1) - b_C
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 H(t_1^-) &= H(t_1^+) \\
 -a_C u^2(t_1^-) - b_C u(t_1^-) - c_C - \lambda(a_B(r(t_1) - u(t_1^-))^2 + (r(t_1) - u(t_1^-))) &= -a_C r^2(t_1) - b_C r(t_1) - c_C \\
 \Rightarrow -a_C(r^2(t_1) - u^2(t_1^-)) - b_C(r(t_1) - u(t_1^-)) + \lambda a_B(r(t_1) - u(t_1^-))^2 + \lambda(r(t_1) - u(t_1^-)) &= 0 \\
 \Rightarrow [-a_C(r(t_1) + u(t_1^-)) - b_C + \lambda a_B(r(t_1) - u(t_1^-)) + \lambda](r(t_1) - u(t_1^-)) &= 0.
 \end{aligned}$$

Si $r(t_1) = u(t_1^-)$,

$$r(t_1) = \frac{b_C - 2\lambda a_B r(t_1) - \lambda}{-2a_C - 2\lambda a_B}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 -2a_C r(t_1) - 2\lambda a_B r(t_1) &= b_C - 2\lambda a_B r(t_1) - \lambda \\
 \Rightarrow \lambda &= 2a_C r(t_1) + b_C
 \end{aligned}$$

Si fuese 0 el otro factor de 4.94, tras una engorrosa manipulación algebraica (ver Apéndice C) puede verse que resulta igualmente $\lambda = 2a_C r(t_1) + b_C$.

Podemos ahora resolver el problema de valores de contorno con frontera libre dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -a_B(r - u(\lambda))^2 + r - u(\lambda) \\
 \dot{\lambda} &= 0 \\
 x(0) &= x_0, \quad x(t_1) = x_{\min}
 \end{aligned}$$

con la condición algebraica adicional

$$\lambda = 2a_C r(t_1) + b_C$$

que nos permitirá determinar t_1 . Obsérvese que también en este subintervalo el control u resulta una función afín de la potencia requerida r .

La tabla (4.7) resume la evolución del estado, estado adjunto, control, y multiplicador de Lagrange en cada subintervalo.

Las figuras 4.5 y 4.6 muestran los resultados obtenidos y su comparación con los obtenidos para el mismo problema usando programación dinámica. En el ejemplo mostrado en la figura, se utilizó como punto de arranque, la solución obtenida en el caso en que no se consideran las pérdidas eléctricas, tratado en la sección 4.3. Los parámetros usados para estas figuras son los consignados en la tabla 4.8 y el resto de los resultados se muestran en la tabla 4.9

Tabla 4.7

	x	λ	u	μ
$[0, t_1]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u)$ $x(0) = x_0, x(t_1) = x_{\text{mín}}$	$2a_C r(t_1) + b_C$	$\frac{b_C - 2\lambda a_B T - \lambda}{-2a_C - 2\lambda a_B}$	0
$(t_1, t_2]$	$x_{\text{mín}}$	$2a_C r(t) + b_C$	r	$-2a_C \dot{r}$
$(t_2, T]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u)$ $x(T) = x_T, x(t_2) = x_{\text{mín}}$	$2a_C r(t_2) + b_C$	$\frac{b_C - 2\lambda a_B T - \lambda}{-2a_C - 2\lambda a_B}$	0

Tabla 4.8

$x_{\text{máx}}$	120 kW
$x_{\text{mín}}$	10 kW
$u_{\text{máx}}$	40 kW
$K_{\text{máx}}$	15 kW
$K_{\text{mín}}$	-15 kW
$f_C(u)$	$0.0476u^2 + 1.7517u + 3.2738$
$f_B(u)$	$0.0093(r - u)^2 + (r - u)$
T	20 s
$x_0 = x_T$	90 kW

Tabla 4.9

t_1	11.25641 s
t_2	12.2792698 s
$\lambda \in [0, t_1)$	3.4
$\lambda \in [t_2, T]$	2.5
consumo	279.2984 kW

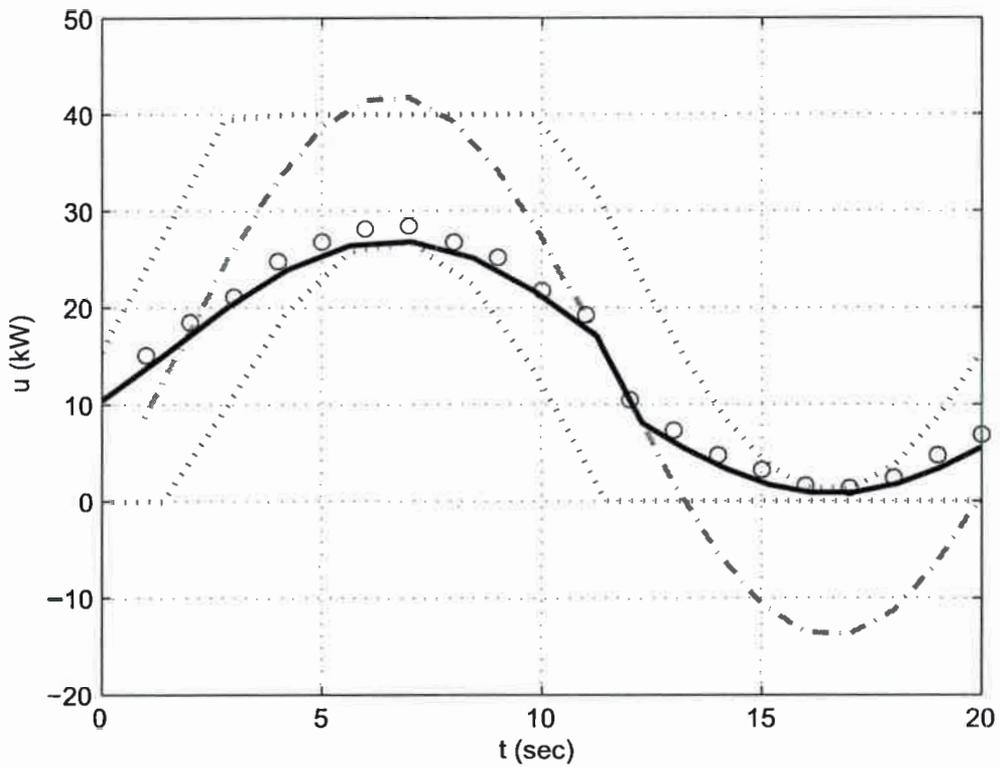


Figura 4.5: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas pero el control no alcanza sus cotas; se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

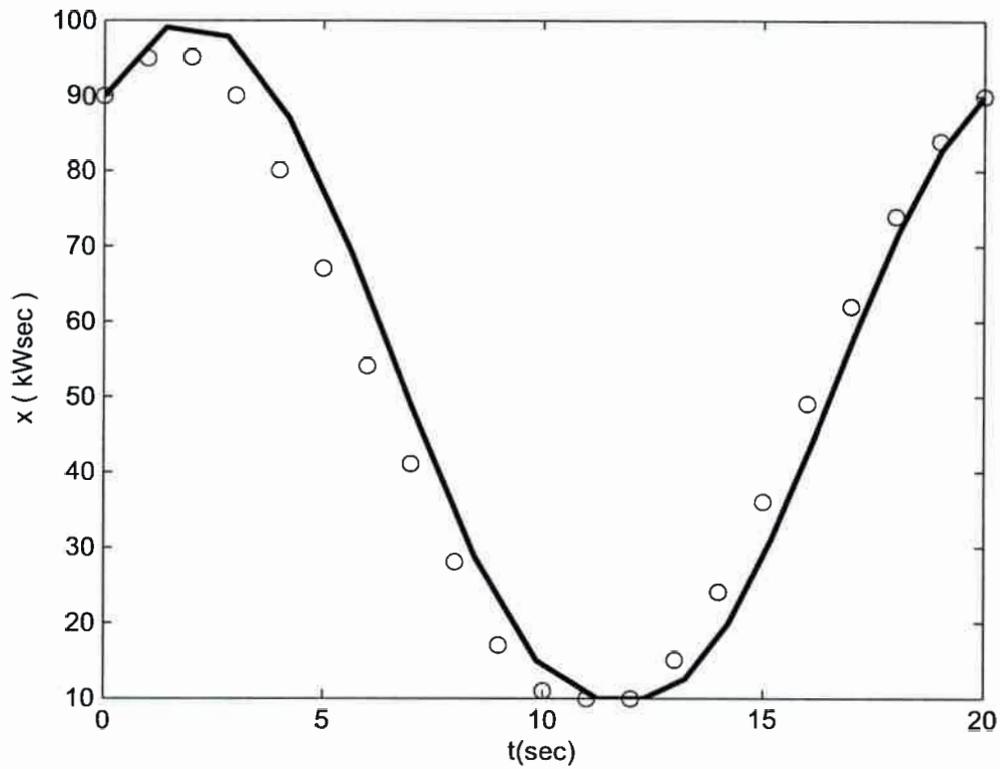


Figura 4.6: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas pero el control no alcanza sus cotas.

4.4.3. Solución en el caso en el que se consideran las pérdidas eléctricas y el control alcanza las cotas

Tal como se procedió en el caso en que no se consideraron las pérdidas eléctricas, en el caso en que el control toca efectivamente las cotas impuestas, planteamos directamente la solución por analogía a la solución obtenida en el caso de la sección anterior. Procedemos de esta manera ya que la derivación de la solución a partir de las condiciones de optimalidad en esta situación se vuelve muy engorrosa debido a las sucesivas conmutaciones que se producen en el control maximizante definido en (4.85), cuando las restricciones sobre él se hacen activas, lo que obliga a analizar separadamente cada situación. Validamos nuestra solución mediante la comparación con los resultados que para el mismo caso fueron obtenidos usando programación dinámica (Figuras 4.7 y 4.8).

Postulamos entonces que, con el mismo razonamiento que seguimos en la sección anterior, en $(t_2, T]$ el control que satisface (4.85) es en este caso

$$u(t) = \begin{cases} \underline{U} & \text{si } \frac{b_C + 2\lambda a_{BR}(t) - \lambda}{-2a_C + 2\lambda a_B} < \underline{U} \\ \frac{b_C + 2\lambda a_{BR}(t) - \lambda}{-2a_C + 2\lambda a_B} & \text{si } \underline{U} \leq \frac{b_C + 2\lambda a_{BR}(t) - \lambda}{-2a_C + 2\lambda a_B} \leq \bar{U} \\ \bar{U} & \text{si } \bar{U} < \frac{b_C + 2\lambda a_{BR}(t) - \lambda}{-2a_C + 2\lambda a_B} \end{cases} \quad (4.95)$$

de donde el estado y el estado adjunto evolucionan nuevamente según (4.89). Nuevamente resolvemos este sistema con t_2 como parámetro adicional a ser estimado conjuntamente, mediante el agregado de la condición algebraica

$$\lambda(t_2^+) = 2a_C r(t_2) + b_C.$$

En $[t_1, t_2]$, nuevamente $u = r$, $x \equiv x_{\min}$ y $\lambda = 2a_C r(t) + b_C$. Si en algún t de este intervalo $u = r > \bar{U}$ ó $u = r < \underline{U}$ el problema no tiene solución por el mismo razonamiento consignado en la sección (4.3).

En $[0, t_1)$, u es nuevamente como en (4.95), de donde de resolver el sistema en (4.89) pero con condiciones de borde $x(0) = x_0, x(t_1) = x_{\min}$ y con la condición algebraica adicional $\lambda(t_1^-) = 2a_C r(t_1) + b_C$, resulta que λ es idénticamente igual a este último valor.

Las figuras 4.7 y 4.8 comparan los resultados anteriores con la solución de programación dinámica. Nuevamente en este caso tenemos que λ resulta continuo, constante cuando la restricción de estado no es activa y una función afín de la potencia requerida, cuando la

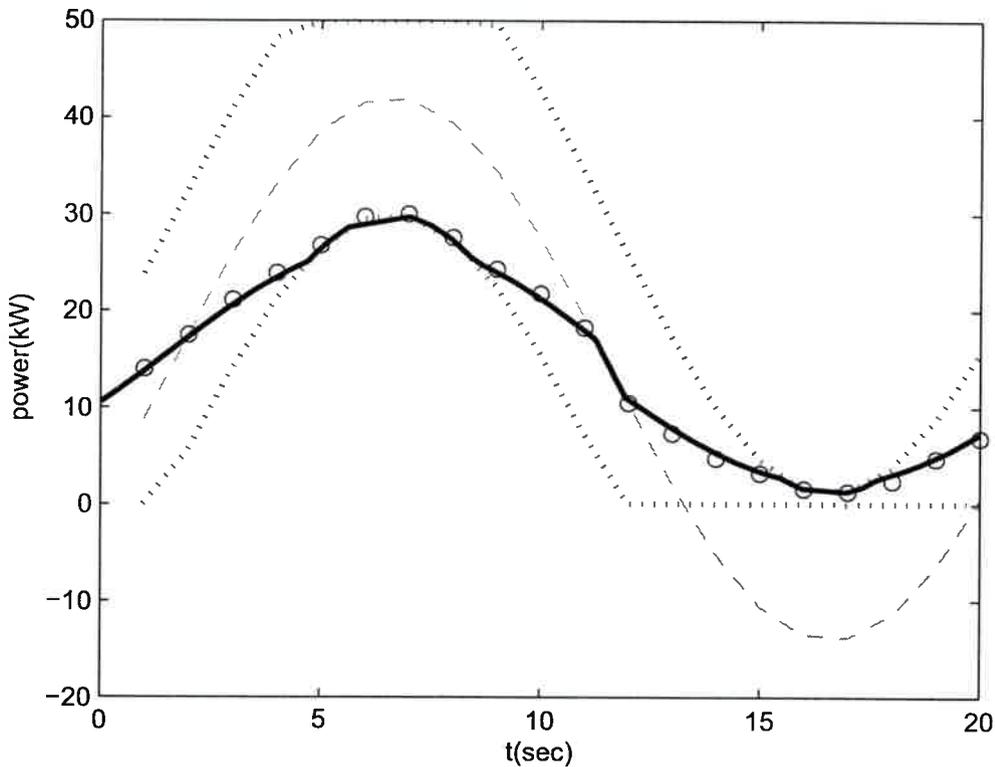


Figura 4.7: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas y el control alcanza efectivamente las cotas impuestas; se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

restricción de estado es activa. Los parámetros usados en este caso son los consignados en la tabla 4.8 y los valores obtenidos para el estado adjunto, los tiempos de entrada y salida del intervalo frontera y el consumo, se consignan en la tabla 4.10.

Hasta aquí hemos extendido la solución al problema más general eliminando las hipótesis simplificatorias 5 y 7. En otras palabras, tenemos resuelto el problema enunciado en (4.80)-(4.84). En el apéndice B incluimos la derivación de la solución para este mismo caso usando el enfoque de adjunción indirecta con estado adjunto continuo, que conduce a idénticos resultados.

Para la resolución numérica del problema usando PASVA4, se tomaron como puntos de arranque la solución del problema donde se descartan las pérdidas eléctricas descrito en la sección anterior y la solución del problema con pérdidas eléctricas pero sin restric-

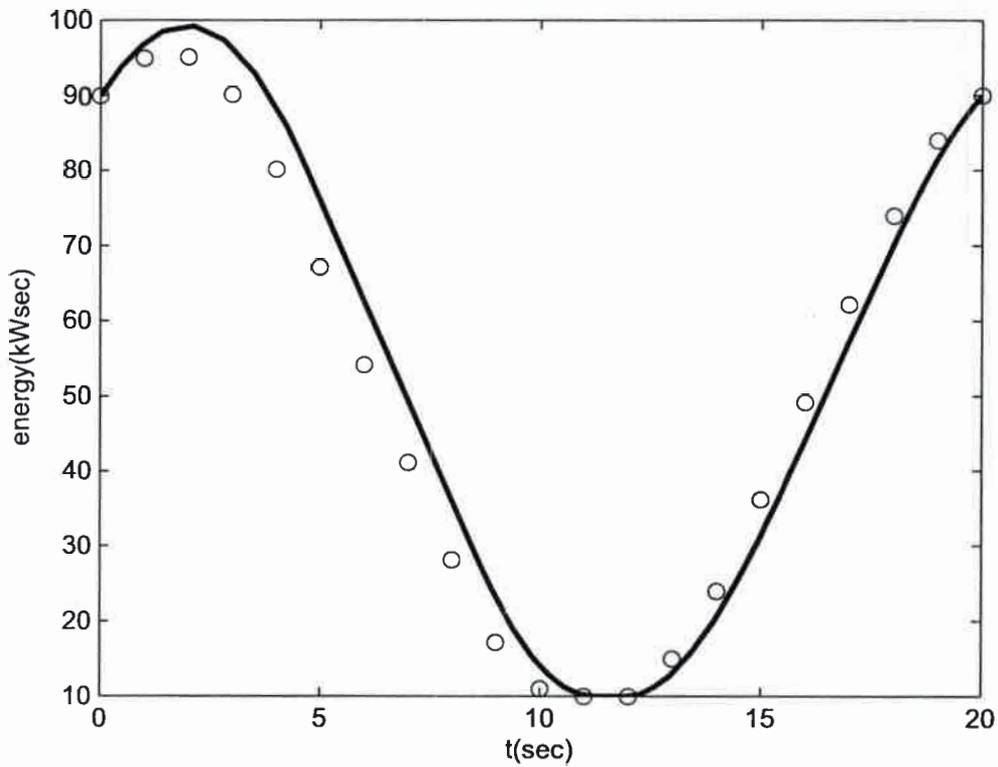


Figura 4.8: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas y el control alcanza efectivamente las cotas impuestas.

Tabla 4.10

t_1	11.4540428 s
t_2	12.2760209 s
$\lambda \in [0, t_1)$	3.2
$\lambda \in [t_2, T]$	2.5
consumo	279.7097 kW _s

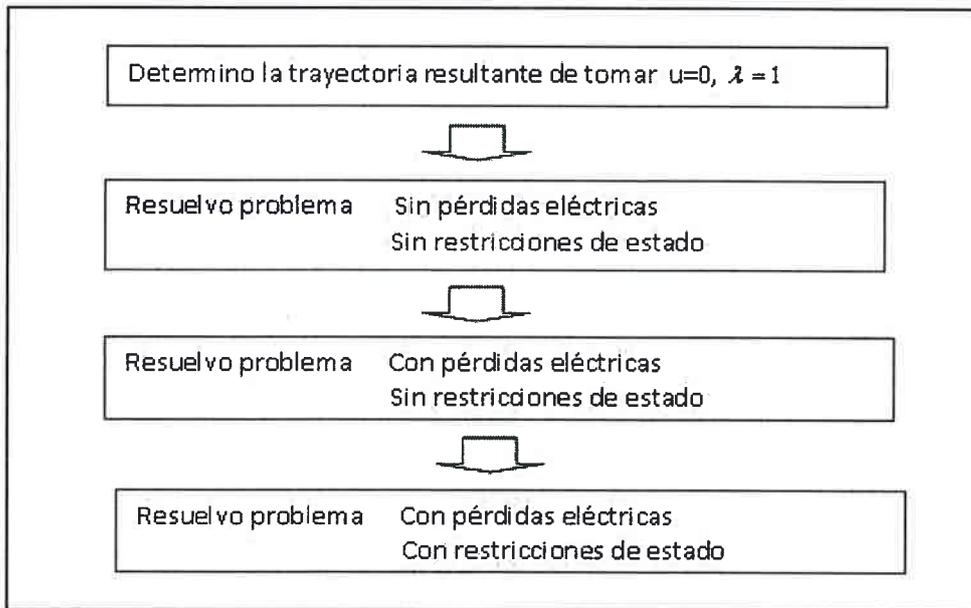


Figura 4.9: Secuencia para obtener puntos de arranque.

ción de estado tratado en el capítulo anterior. En ambos casos la solución dió los mismos resultados, que son los que aparecen en la figura . Como se dijo en el capítulo anterior, el problema con pérdidas eléctricas sin restricciones de estado puede resolverse numéricamente usando como punto de arranque la solución del problema sin pérdidas eléctricas y sin restricciones de estado, la que a su vez puede ser obtenida usando como punto de arranque la trayectoria de estado correspondiente al modo de operación puramente eléctrico ($u = 0$) y cualquier valor de arranque para el estado adjunto, por ejemplo $\lambda = 1$.

Por consiguiente, para lograr convergencia podría llegar a ser necesario resolver sucesivamente los tres problemas según el esquema de la figura 4.9:

4.5. Caso en que $r(t)$ proviene de un ciclo normalizado de velocidad

Hasta aquí hemos considerado que disponemos de una expresión analítica para la potencia requerida $r(t)$. Para extender los resultados a los casos en que la potencia requerida es el resultado de aplicar un modelo de la dinámica inversa del vehículo a un ciclo de velocidad estandarizado, se necesita modificar el software desarrollado de dos maneras. Por un lado se requiere usar una forma numérica de computar la derivada temporal de $r(t)$, que aparece en los jacobianos usados por PASVA4. En segundo lugar, como PASVA4 adecua

Tabla 4.11

t_1	11.4540083 s
t_2	12.2760177 s
$\lambda \in [0, t_1)$	3.2
$\lambda \in [t_2, T]$	2.5
consumo	279.7103 kW _s

el paso temporal para mantener controlado el error, se necesita la incorporación de algún algoritmo de interpolación para la evaluación de esa función en puntos intermedios. Estas dos modificaciones son tratadas en las secciones subsiguientes.

4.5.1. Cómputo de $r'(t)$ en forma numérica

En esta sección se muestran los resultados obtenidos eliminando la suposición 9 realizada al principio del capítulo. En este caso, en los jacobianos necesarios para usar PASVA4 en que aparece $r'(t)$ se reemplazó el cómputo realizado con la fórmula analítica por diferencias finitas. Se utilizaron para ello diferencias hacia adelante y diferencias centrales, dando estas últimas resultados prácticamente iguales a los obtenidos anteriormente, como puede verse en las figuras 4.10 y 4.11 y en los valores de la tabla 4.11.

En este punto merece observarse que PASVA4 precisa calcular las derivadas temporales de las funciones \underline{U} y \bar{U} . Estas derivadas presentan discontinuidades de salto dado que \underline{U} y \bar{U} tienen puntos angulosos cada vez que la función de control alcanza su cota superior o inferior como puede verse en las figuras. Sin embargo, como se dijo, los resultados prácticamente no variaron. El punto de arranque para resolver el PVC fue el mismo que se tomó en la sección anterior.

4.5.2. Interpolación de $r(t)$

En esta sección se muestran los resultados de resolver el problema eliminando la restricción que al principio del capítulo, en la sección 4.2.1 numeramos como 8. Para probar estos algoritmos tendientes al gerenciamiento de energía en vehículos, suelen usarse ciclos de potencia requerida correspondientes a ciclos de velocidad normalizados, por lo que la

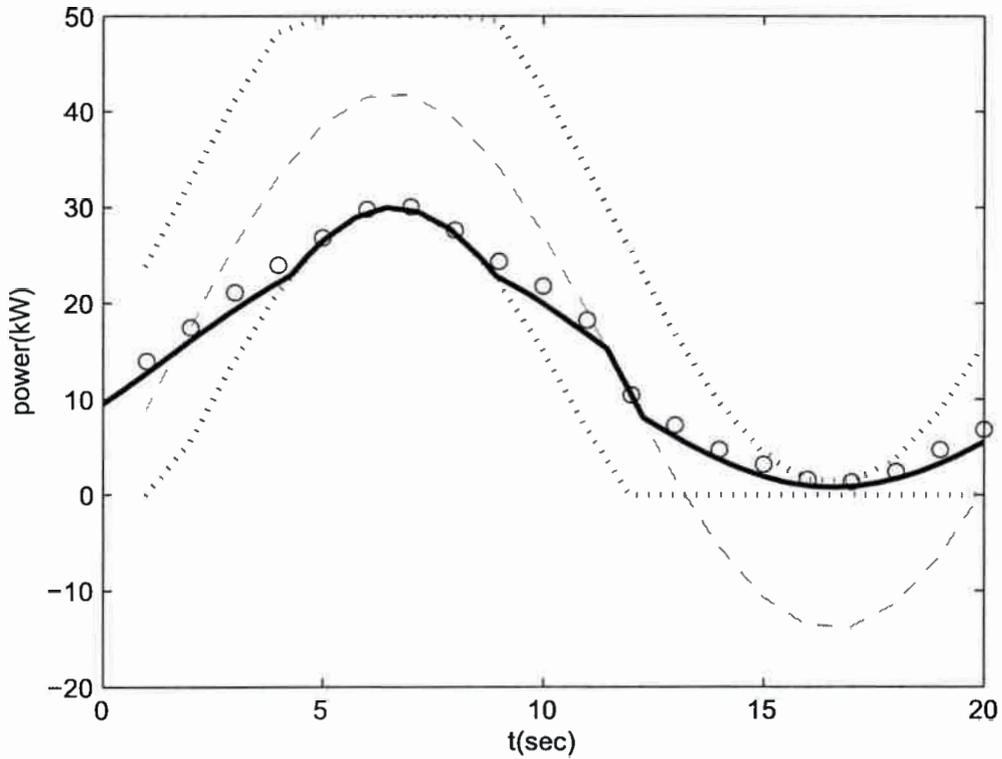


Figura 4.10: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas, el control alcanza efectivamente las cotas impuestas y los jacobianos se calculan por diferencias centradas. Se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

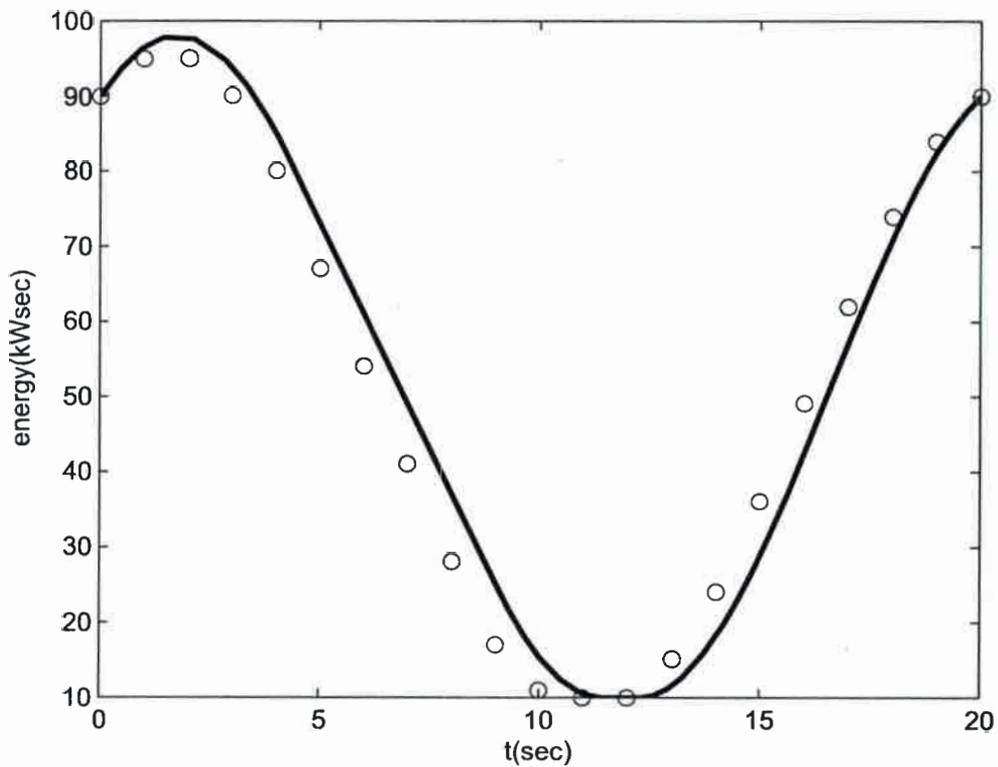


Figura 4.11: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas, el control alcanza efectivamente las cotas impuestas y los jacobianos se calculan por diferencias centradas.

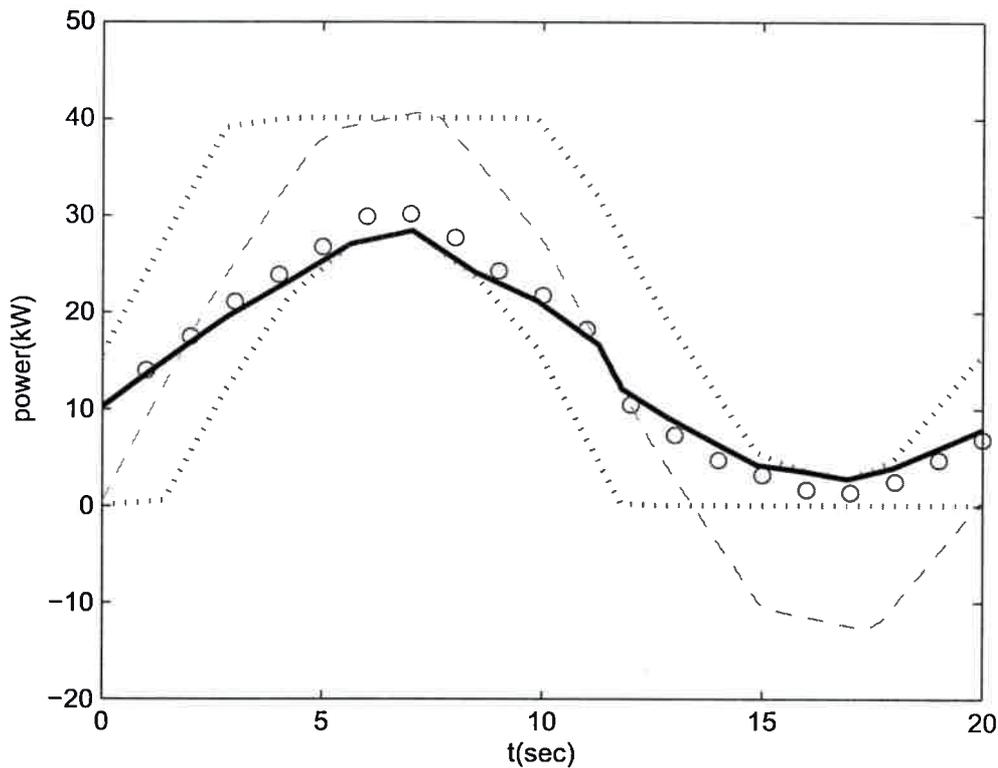


Figura 4.12: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas, el control alcanza efectivamente las cotas impuestas, los jacobianos se calculan por diferencias centradas y la potencia requerida viene dada por una tabla de valores. Se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

función $r(t)$ puede venir dada por una tabla. Como PASVA4 adecua el paso temporal para mantener controlado el error, se necesita la incorporación de algún algoritmo de interpolación para la evaluación de esa función en puntos intermedios. Se incorporó entonces a este fin una rutina de interpolación lineal. Las figuras 4.12 y 4.13 muestran los resultados obtenidos en este caso.

4.6. Caso en que f_C y f_B no son cuadráticas

En esta sección eliminamos las hipótesis sobre la forma de las funciones f_C y f_B , que fue enumerada al principio del capítulo como 6).

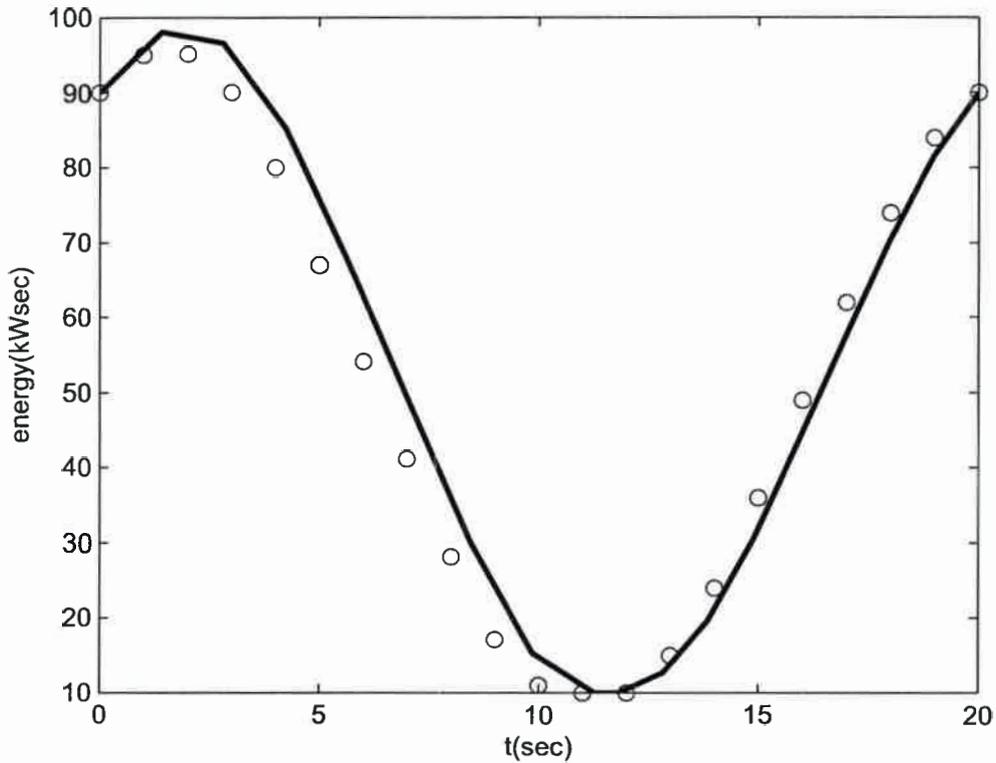


Figura 4.13: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el caso en que se incluyen las pérdidas eléctricas, el control alcanza efectivamente las cotas impuestas, los jacobianos se calculan por diferencias centradas y la potencia requerida viene dada por una tabla de valores.

Para mayor claridad, repetiremos aquí el planteo del problema y consignaremos el Hamiltoniano, el Lagrangiano y las condiciones de optimalidad.

4.6.1. Planteo del problema

Hallar u continua a trozos tal que maximice

$$\int_0^T -f_C(u) du$$

sujeto a

$$\dot{x} = -f_B(r - u), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

$$\underline{U} \leq r \leq \bar{U}$$

$$x \geq x_{\min}$$

El Hamiltoniano se define como

$$H(x, u, \lambda, t) = -f_C(u) - \lambda f_B(r - u)$$

y el Lagrangiano, según el enfoque de adjunción directa

$$L(x, u, \lambda, \bar{\theta}, \underline{\theta}, \mu) = -f_C(u) - \lambda f_B(r - u) + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) + \mu(x - x_{\min})$$

4.6.2. Condiciones de optimalidad

Las condiciones de optimalidad resultan entonces

$$u(t) = \arg \max_{u \in \Omega} H(x, u, \lambda, t),$$

donde $\Omega = u/\underline{U} \leq u \leq \bar{U}$,

$$L_u = - \left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|_{s=u} + \lambda(t) \left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|_{s=r-u} + \underline{\theta} - \bar{\theta} = 0 \quad (4.96)$$

$$\dot{x} = -f_B(r - u), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = -\mu$$

$$\underline{\theta} \geq 0, \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0, \quad \bar{\theta} \geq 0, \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0 \quad (4.97)$$

$$\mu \geq 0, \quad \mu(x - x_{\min}) = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{dt}$$

$$\lambda(T^-) = \beta + \gamma$$

$$\gamma \geq 0, \quad \gamma(x - x_{\min}) = 0 \quad (4.98)$$

Para todo τ en un intervalo frontera o instante de entrada o salida de un intervalo frontera, λ puede tener una discontinuidad dada por las siguientes condiciones de salto

$$\begin{aligned} \lambda(\tau^-) &= \lambda(\tau^+) + \eta(\tau) \\ H(\tau^-) &= H(\tau^+), \quad \eta(\tau) \geq 0, \quad \eta(\tau)(x(\tau) - x_{\min}) = 0 \end{aligned} \quad (4.99)$$

4.6.3. Solución

La derivación de la solución es completamente análoga a la de los casos anteriores. Partiendo del instante final se tiene que suponiendo $x(T) \neq x_{\min}$ debe ser, por (4.98), $\gamma = 0$ y entonces $\lambda(T^-) = \beta$. En el intervalo $(t_2, T]$, $x > x_{\min}$, por lo que $\mu \equiv 0$ y en consecuencia $\lambda \equiv \beta$. En este intervalo $u(t) = \arg \max_{u \in \Omega} H = u(\beta)$. Nuevamente si conociésemos t_2 , el valor de β , es decir de λ , resultaría de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f_B(r - u(\lambda)) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

con condiciones de borde $x(t_2^+) = x_{\min}$ y $x(T) = x_T$ y donde la acción de control u es de la forma

$$u = \begin{cases} \underline{U} & \text{si } u < \underline{U} \\ u(t, \lambda) & \text{si } \underline{U} \leq u \leq \bar{U} \\ \bar{U} & \text{si } \bar{U} < u. \end{cases} \quad (4.101)$$

lo que resulta de 4.97 y de resolver (4.96) para $u(t, \lambda)$. Sin embargo se necesita una ecuación adicional pues no se conoce t_2 .

En el intervalo (t_1, t_2) , $x \equiv x_{\min}$, por lo que $\dot{x} = 0$ y entonces $-f_B(r - u) = 0$. Es razonable suponer que f_B tiene una forma tal que $f_B(0) = 0$. Esto implica que $u \equiv r$ en este intervalo. Por (4.99), para $\tau = t_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda(t_2^-) &= \beta + \eta(t_2) \\ -f_C(r(t_2)) &= -f_C(u(t_2^+)) - \beta f_B(r(t_2) - u(t_2^+)). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Esta última ecuación relaciona β con t_2 y constituye entonces una ecuación adicional que permite resolver el problema de valores de frontera libre dado por (4.100) y hallar simultáneamente el valor de t_2 . Nótese que $\beta = \lambda(t_2^-)$ y que $u(t_2^+)$ depende de este valor.

Por otra parte, en (t_1, t_2) , con el mismo razonamiento usado en los casos anteriores, $L_u = 0$ y $\underline{\theta} = \bar{\theta} = 0$, esto es

$$-\left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|_{s=r} - \lambda(t) \left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|_{s=r-u} \frac{d(r-u)}{du} = -\left. \frac{df_C}{ds} \right|_{s=r} + \lambda(t) \left. \frac{df_B}{ds} \right|_{s=0} = 0$$

donde con $\left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|$ y $\left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|$ indicamos la derivada de f_C y f_B respecto de su variable respectivamente. De aquí resulta que

$$\lambda(t) = \frac{\left. \frac{df_C}{ds} \right|_{s=r}}{\left. \frac{df_B}{ds} \right|_{s=0}} \quad (4.103)$$

en todo el intervalo (t_1, t_2) y también en t_2^- . Reemplazando el valor de

$$\lambda(t_2^-) = \frac{\left. \frac{df_C}{ds} \right|_{s=r(t_2)}}{\left. \frac{df_B}{ds} \right|_{s=0}} \quad (4.104)$$

en (4.102), se obtiene $\eta(t_2)$. Como $\dot{\lambda} = -\mu$, $\mu = -\left(\left. \frac{df_B}{ds} \right|_{s=0}\right)^{-1} \left. \frac{d^2 f_C}{ds^2} \right|_{s=r} \dot{r}$.

Análogamente en t_1 , de las condiciones (4.99) resulta

$$\begin{aligned} \lambda(t_1^-) &= \lambda(t_1^+) + \eta(t_1) \\ H(t_1^-) &= H(t_1^+), \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} \lambda(t_1^-) &= \frac{\left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|_{s=r(t_1)}}{\left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|_{s=0}} + \eta(t_1) \\ -f_C(u(t_1^-)) - \lambda(t_1^-) f_B(r(t_1) - u(t_1^-, \lambda(t_1^-))) &= -f_C(r(t_1)) - \lambda(t_1^+) \underbrace{f_B(r(t_1) - u(t_1^+))}_0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

En el intervalo $[0, t_1)$, nuevamente $x > x_{\min}$, por lo que $\mu = 0$ y entonces λ es constante. Particularmente $\lambda \equiv \lambda(t_1^-)$. Entonces igual que en $(t_2, T]$ podemos expresar la acción de control u en función de $\lambda(t_1^-)$, usando

$$-\left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|_{s=u(t_1^-)} + \lambda(t_1^-) \left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|_{s=r(t_1)-u(t_1^-)} = 0$$

de donde resulta una expresión similar a (4.101).

Uniendo (4.105) al sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f_B(r(t) - u(t, \lambda)) \\ \dot{\lambda} &= 0 \\ x(0) &= x_0, \quad x(t_1) = x_{\min} \end{aligned} \tag{4.106}$$

resulta un problema de condiciones de contorno con frontera libre que puede resolverse usando PASVA4, obteniéndose conjuntamente el valor desconocido de t_1 .

Nótese que

$$u(t_1^-, \lambda(t_1^-)) = r(t_1)$$

es siempre solución de la segunda ecuación en (4.105). Nótese también que hemos usado que $df_C(s)/ds$ y $df_B(s)/ds$ existen, lo que implica que si las funciones de eficiencia vienen dadas por una tabla de valores, deben usarse aproximaciones con esa suavidad. Hemos usado además que $df_B(s)/ds$ es, en $s = 0$, distinta de 0 (en nuestra aproximación con cuadráticas esta derivada tomaba el valor 1 en el 0).

De (4.105) tenemos que

$$\eta(t_1) = \frac{\left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|_{s=u(t_1^-, \lambda(t_1^-))}}{\left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|_{s=r(t_1)-u(t_1^-, \lambda(t_1^-))}} - \frac{\left. \frac{df_C(s)}{ds} \right|_{s=r(t_1)}}{\left. \frac{df_B(s)}{ds} \right|_{s=0}}$$

que resulta 0 si $u(t_1^-, \lambda(t_1^-)) = r(t_1)$, con lo que resulta que el estado adjunto λ no presenta salto y es por lo tanto continuo en t_1 .

Resumimos los resultados obtenidos en la tabla 4.12 donde $f'_\alpha(s)$ indica $\frac{df_\alpha(s)}{ds}$, para $\alpha = C, B$ y $f''_C(s)$ indica $\frac{d^2 f_C(s)}{ds^2}$.

En cuanto al control $u(t, \lambda)$, se obtiene de (4.96). Si no puede expresarse explícitamente en función de λ como en los casos anteriores, puede intentarse efectuar una minimización numérica en cada instante para el valor corriente de λ , como se explica en lo que sigue. Nótese que el PVC en (4.106) es en realidad un sistema algebraico-diferencial por lo que la resolución puede presentar severas dificultades ([14]).

Tabla 4.12

	x, λ, y, t_i solución de	λ	u	μ
$[0, t_1]$	$\dot{x} = -f_B(r - u(t, \lambda))$ $\dot{\lambda} = 0$ $x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_{\min}$ $-f_C(u(t_1^-)) - \lambda(t_1^-)f_B(r(t_1) - u(t_1^-)) =$ $= -f_C(r(t_1))$	$\frac{f'_C(u(t_1))}{f'_B(r(t_1) - u(t_1^-))}$	$\arg \max_{\underline{U} \leq u \leq \bar{U}} H$ (4.101)	0
$(t_1, t_2]$	x_{\min}	$f'_C(r(t)) / f'_B(0)$	r	$-f''_C(r(t))\dot{r} / f'_B(0)$
$(t_2, T]$	$\dot{x} = -f_B(r - u(t, \lambda))$ $\dot{\lambda} = 0$ $x(T) = x_T, \quad x(t_2) = x_{\min}$ $-f_C(r(t_2)) =$ $= -f_C(u(t_2^+) + \lambda(t_2^+)f_B(r(t_2) - u(t_2^+)))$	$\frac{f'_C(r(t_2))}{f'_B(r(t_2) - u(t_2^+))}$	$\arg \max_{\underline{U} \leq u \leq \bar{U}} H$ (4.101)	0

Para realizar la minimización numérica, realizamos una prueba con MINOS 5.4, una conocida herramienta computacional desarrollada en lenguaje FORTRAN diseñada en realidad para resolver problemas de optimización no-lineal de gran escala con restricciones [36, 37]. En este caso, no hace falta usar muchas de las facilidades que esta herramienta ofrece, sino solamente su capacidad para resolver problemas en recintos acotados, en este caso, el conjunto $\Omega = \{u / \underline{U} \leq u \leq \bar{U}\}$.

El interés en utilizar una herramienta numérica en esta maximización radica en la intención de eliminar la suposición 6, acerca de la forma cuadrática de la función f_B y también la suposición adicional introducida en la sección (4.4) acerca de la misma forma cuadrática de la función f_C . Si estas funciones son cuadráticas, el Hamiltoniano resulta cuadrático en u por lo que es fácil expresar el máximo que será el que satisface $H_u = 0$, si es interior a Ω , o alguno de los extremos en caso contrario. Además este máximo es único pues H_u es lineal, lo que facilita la programación. Esta suposición nos ha permitido en los casos anteriores expresar el control minimizante u en función del estado y el estado adjunto, para luego proceder a resolver un PVC con una frontera libre en estas variables.

La idea era la siguiente: si no pudiese expresarse explícitamente el control u en función

del estado y el estado adjunto, se puede igualmente obtener el control u minimizando el Hamiltoniano en cada instante t para los valores corrientes de $\lambda(t)$ y $x(t)$ en forma numérica y utilizarlo en cada iteración del resolutor del PVC.

Claramente no es necesario utilizar una herramienta tan poderosa como MINOS para este fin. Fue elegida sencillamente por la familiaridad que tenía con su uso, resultante de trabajos anteriores ([34]). MINOS tiene la facilidad de permitir su uso como subrutina FORTRAN 77 (subrutina MINOSS). De esta forma la rutina que evalúa el lado derecho del PVC a resolver (subrutina F de PASVA4), llama cada vez a la subrutina MINOSS para obtener el valor de u . Al usar MINOS se abren muchas posibilidades, tendientes a eliminar la suposición 6. En primer lugar, podemos relajarla suponiendo nada más que f_C y f_B son representables por alguna expresión analítica cualquiera con la única condición que el Hamiltoniano resulte suave y convexo. Por ejemplo, si estas funciones viniesen dadas por tablas como es usual, supongamos que podemos representarlas por expresiones analíticas ajustadas a ellas por cuadrados mínimos o por alguna forma de interpolación. De esta forma, en un primer ensayo y con el objeto de testear el software implementado para el algoritmo propuesto, utilizamos las mismas cuadráticas ya usadas, reemplazando solamente el cómputo analítico de u por el computado por MINOS. Los resultados se presentan en las figuras 4.14 y 4.15.

MINOS necesita el gradiente de la función objetivo, en este caso, el Hamiltoniano, el que puede ser provisto por el usuario o en caso contrario, puede ser computado numéricamente en forma automática. Para los resultados de la figura anterior, este gradiente fue provisto por el usuario. No conseguimos convergencia cuando intentamos que el mismo fuese computado numéricamente por MINOS.

Otro problema más profundo que surge si se quiere usar una herramienta numérica para calcular el control maximizante, aparece cuando se necesita calcular el jacobiano del lado derecho de las ecuaciones diferenciales, donde aparece el control u que es función de uno de los estados: el estado adjunto λ . Claramente el jacobiano incluye la derivada de u respecto de λ por lo que habría que encontrar una forma de calcularla numéricamente. Sin embargo, el diseño de PASVA4 no permite disponer más que del valor corriente de los estados. La herramienta de minimización sólo evalúa el control maximizante u para cada instante del tiempo y sólo para el valor corriente del estado adjunto λ . En el caso cuyos resultados se muestran en las figuras anteriores, si bien se calculó el valor de u

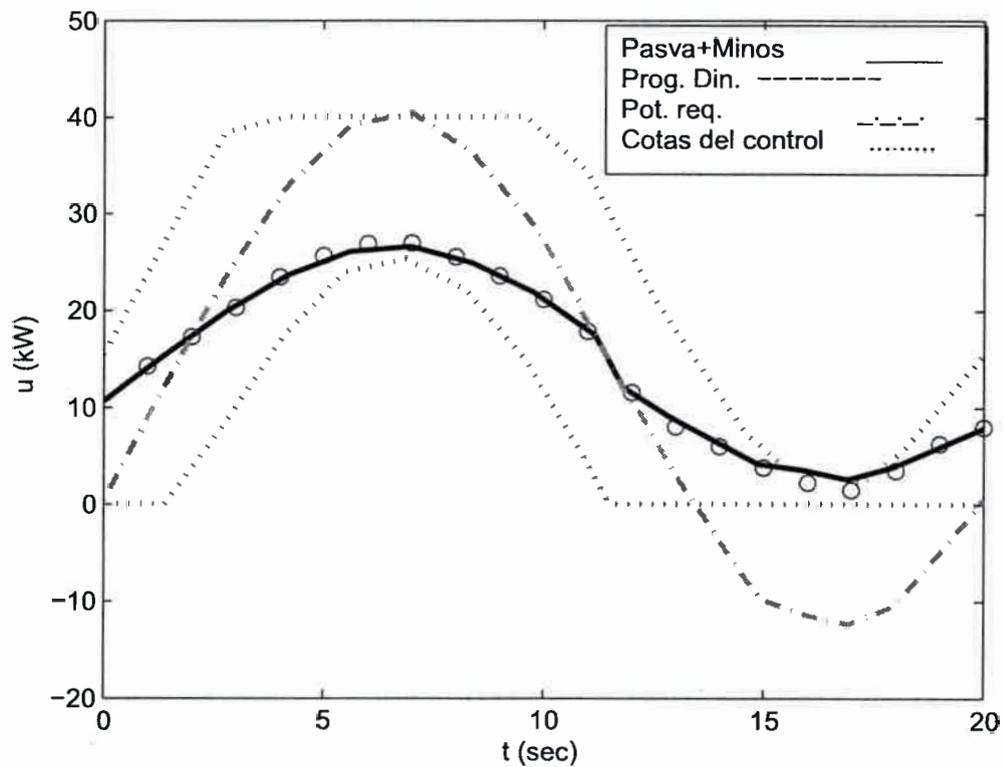


Figura 4.14: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (puntos discretos) en el mismo caso de la figura 4.12 pero con el control maximizante calculado por MINOS 5.4. Se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de puntos y rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

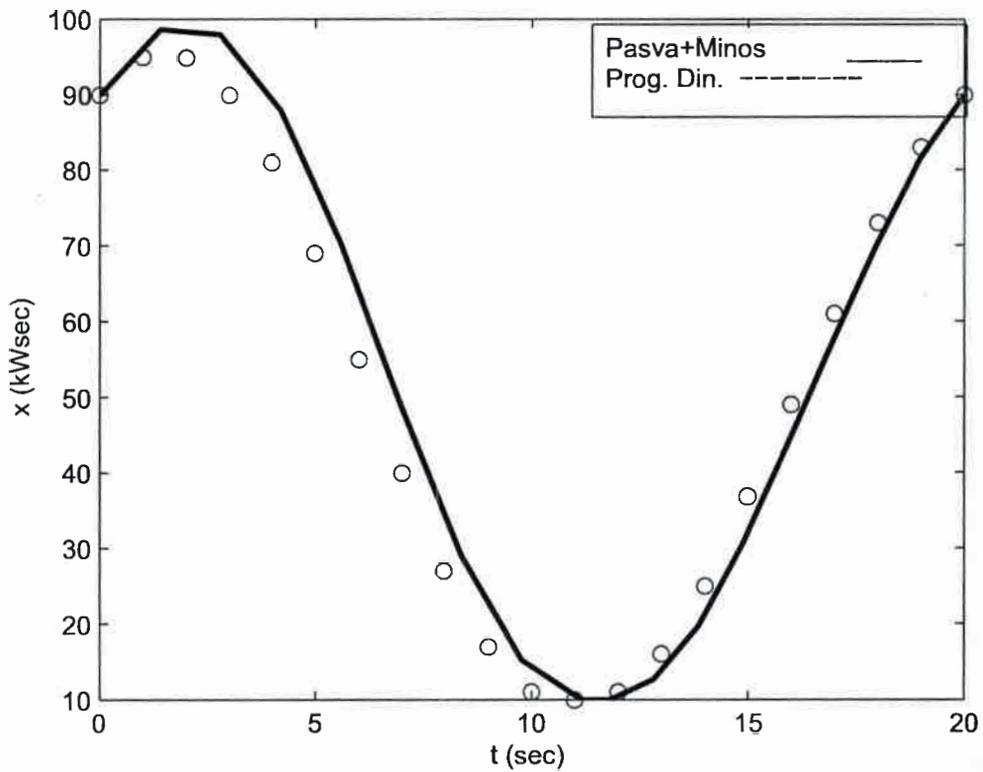


Figura 4.15: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el mismo caso de la figura 4.13 pero con el control maximizante calculado por MINOS 5.4.

minimizando el Hamiltoniano mediante MINOS 5.4, los jacobianos se calcularon a partir de la expresión explícita de u en función de λ (4.95).

Tal como se consigna en el párrafo anterior, podrían estudiarse numerosas variantes explotando las diferentes opciones que ofrece MINOS para su uso. La necesidad de analizar una u otra opción dependerá en cada caso de las funciones f_B y f_C por lo que, habiendo mostrado la posibilidad de la propuesta, no avanzaremos más allá con este tema ahora.

4.7. Caso en que la restricción de estado se hace activa más de una vez

En esta sección, analizamos la posibilidad de eliminar los supuestos que se realizaron al principio del capítulo, numerados como 2) y 3). Para ello consideramos la siguiente idea: si el software puede calcular los tiempos de inicio y finalización del intervalo frontera t_1 y t_2 , podría indicársele un conjunto de subintervalos “posibles”. Si los instantes de entrada y salida del intervalo resultaran coincidentes ($t_1 = t_2$), esto significaría que en realidad ese subintervalo no era en realidad uno en que la restricción fuese activa sino uno ficticio. Con este objetivo, realizamos una primera prueba, bajando el valor de la cota inferior del estado a un valor tal que no fuese alcanzada durante el ciclo. Efectivamente, el software calculó valores para t_1 y t_2 que diferían en un valor igual al paso temporal de la solución final (recuérdese que PASVA4 recalcula la malla para controlar el error global). Los resultados se muestran en las figuras 4.16 y 4.17.

4.8. Ejemplo de aplicación sobre un ciclo normalizado

En esta sección ejemplificamos los resultados usando los datos de potencia requerida obtenidos a partir de aplicar el modelo de dinámica longitudinal inversa del vehículo eléctrico en desarrollo en el Grupo de Electrónica Aplicada, con el perfil de velocidad de un ciclo normalizado. En este caso consideramos el ciclo US-EPA-Highway Fuel Economy Test, dado que el ciclo normalizado Europeo que utilizamos en el capítulo anterior, no permite ilustrar el caso en que la restricción de estado alcanza su cota inferior. El ciclo fue escalado para adecuarlo a las capacidades del vehículo. La figura 4.18 muestra en línea de rayas la potencia requerida por el vehículo con los parámetros de la tabla 4.13

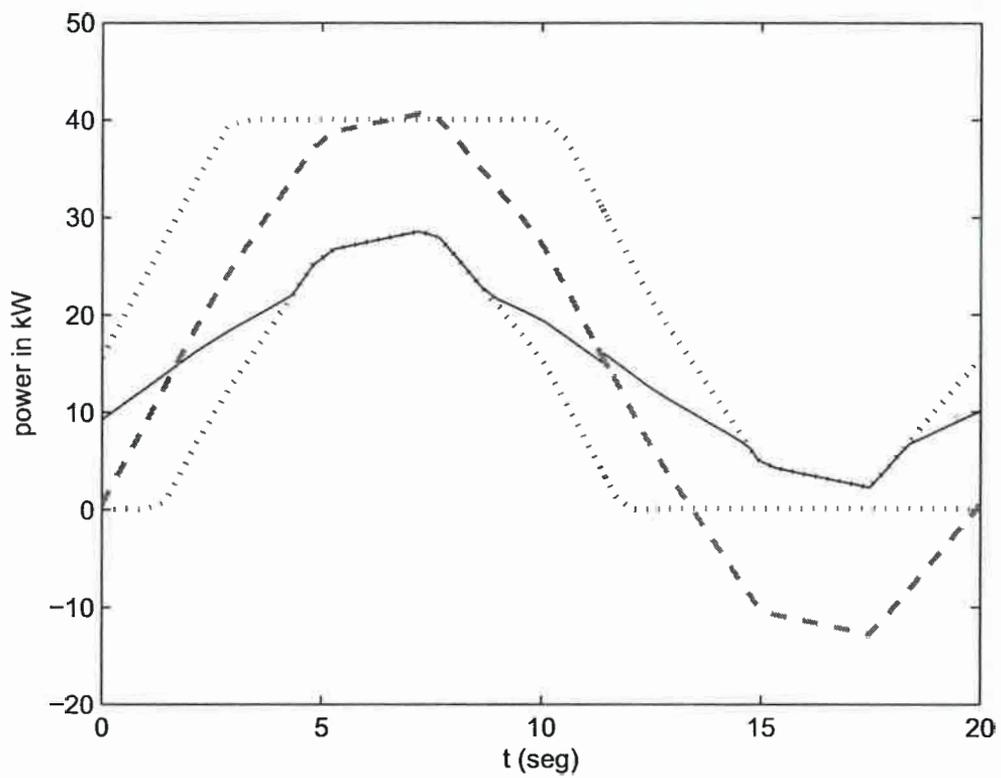


Figura 4.16: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena). Se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

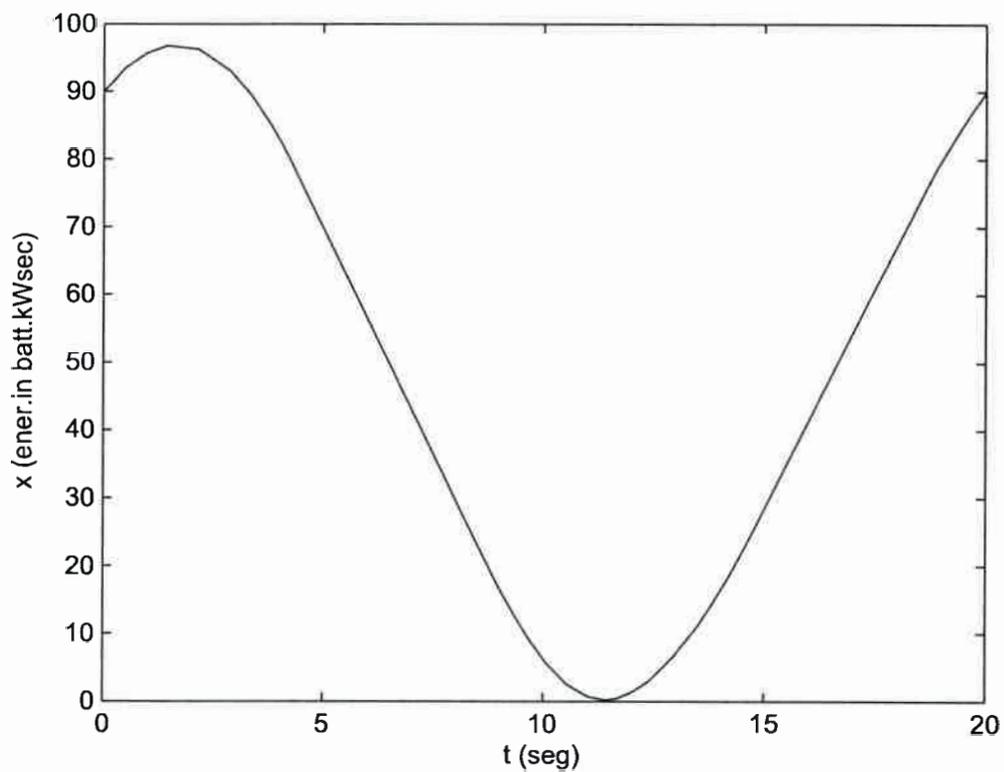


Figura 4.17: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el mismo caso de la figura 4.13.

Tabla 4.13

$x_{\text{máx}}$	0.1389 kWh
$x_{\text{mín}}$	0.1 kWh
$u_{\text{máx}}$	15 kW
$K_{\text{máx}}$	6 kW
$K_{\text{mín}}$	-6 kW
$f_C(u)$	$0.0476u^2 + 1.7517u + 3.2738$
$f_B(u)$	$0.0684(r - u)^2 + (r - u)$
T	765 s
$x_0 = x_T$	0.1111 kWh

Tabla 4.14

t_1	720.337507 s
t_2	727.994241 s
$\lambda \in [0, t_1)$	1.913
$\lambda \in [t_2, T]$	1.851
consumo	1.4183 kWh

para cumplir el ciclo de velocidad y en línea llena el control óptimo obtenido. Se señalan además, con línea de círculos, el control óptimo obtenido para la misma situación usando programación dinámica. Se indican también, con línea de puntos, las funciones que acotan el control \underline{U} y \bar{U} . La figura 4.19 muestra las correspondientes trayectorias de estado. En la tabla 4.14 se consignan los valores constantes del estado adjunto λ en los intervalos anterior y posterior al intervalo frontera, los instantes de entrada y salida del mismo y el consumo mínimo resultante en kWh.

4.9. Conclusiones

En este capítulo hemos analizado la forma de obtener la evolución del estado adjunto cuando el estado tiene restricciones que devienen activas en el intervalo de interés. Debido

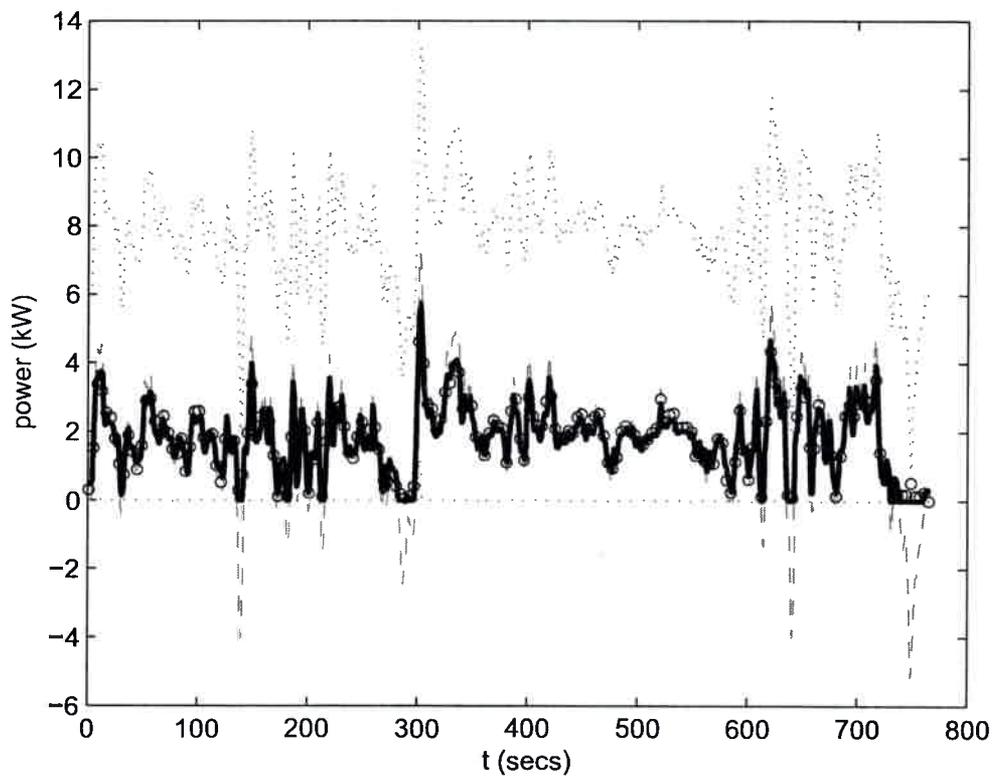


Figura 4.18: Control óptimo obtenido usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (puntos discretos) para el ciclo US-EPA-Highway Fuel Economy Test. Se indican también el ciclo de potencia requerida (línea de rayas) y las cotas del control (líneas punteadas).

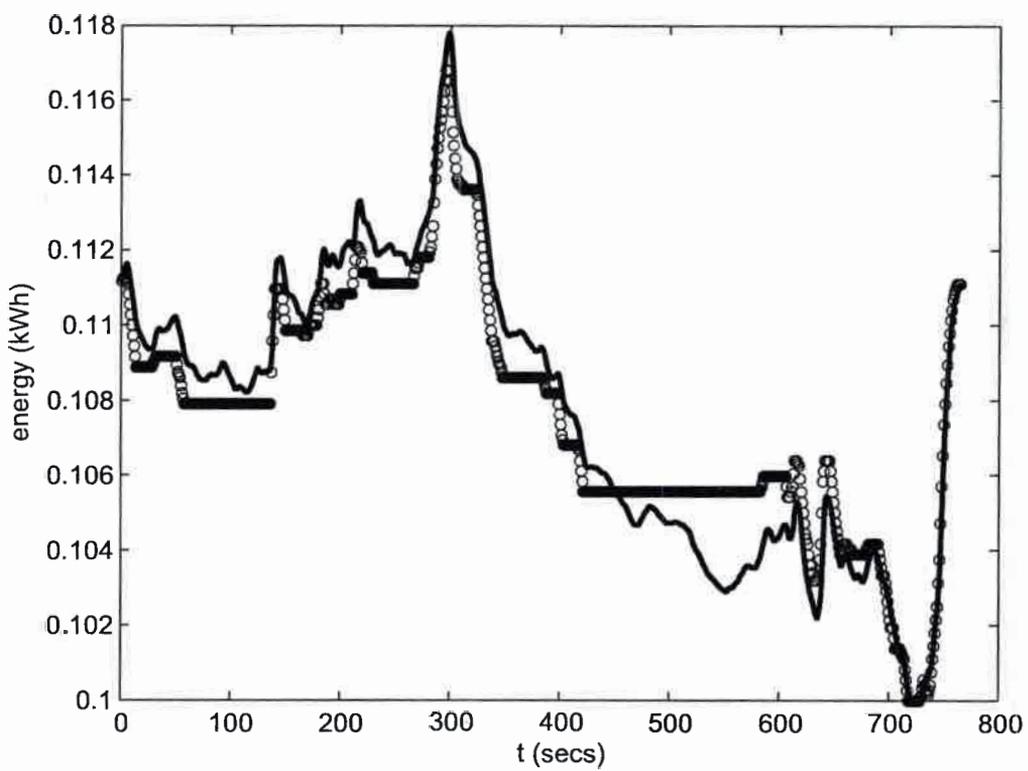


Figura 4.19: Trayectoria de estado óptima obtenida usando PASVA4 (línea llena) y usando programación dinámica (línea de puntos discretos) en el mismo caso de la figura 4.18.

a que a la entrada o salida del intervalo en que la restricción de estado es activa el estado adjunto puede presentar discontinuidades de salto, se consideraron las diferentes formas de adjuntar la restricción de estado al Hamiltoniano analizadas en el artículo de revisión [9]. Las formas de adjunción directa e indirecta con estado adjunto continuo permitieron determinar la evolución completa del estado adjunto y de los multiplicadores en el intervalo, dando resultados coincidentes entre sí y con las soluciones obtenidas mediante el enfoque de programación dinámica anteriormente utilizado. Si las aproximaciones de las funciones de eficiencia son suaves, el estado adjunto resulta continuo en los extremos del intervalo frontera. Más aún los valores del estado adjunto dependen de las propias funciones de eficiencia y del valor del requerimiento de potencia en el instante de entrada y salida del intervalo frontera. Asimismo en el intervalo frontera, el estado adjunto varía en función de la potencia requerida.

El análisis de las diferentes formas de adjuntar la restricción de estado al Hamiltoniano conduce a pensar que es el estado adjunto correspondiente a la forma de adjunción directa (que aquí denominamos λ) el representante más adecuado del factor de consumo equivalente buscado.

Consideramos que este análisis constituye un aporte al conocimiento de la evolución temporal de este factor que contribuirá a superar los cálculos por prueba y error del mismo que hemos encontrado en la bibliografía ([11], [13], [5]).

El software desarrollado implementa un algoritmo en el que se resuelve iterativamente el problema de minimización del Hamiltoniano mediante una herramienta de programación no lineal general y luego se resuelve un problema de valores de contorno mediante PASVA4. Si bien no podemos asegurar a priori la convergencia a la solución, la experiencia ganada permitirá la extensión de este enfoque a otros problemas de control óptimo que, a través de las condiciones de optimalidad dadas por el Principio del Máximo de Pontryagin, resultan en sistemas algebraico-diferenciales similares.

Capítulo 5

Algoritmos implementables en tiempo real

5.1. Algoritmo con horizonte deslizante

En esta sección proponemos un algoritmo basado en la idea conocida como “horizonte deslizante” ([38]). En líneas generales, éste consiste en obtener la acción de control resolviendo en cada instante un problema de control óptimo a lazo abierto, con horizonte futuro finito, usando el estado actual como estado inicial. Basándose en las mediciones obtenidas en un instante t , el controlador predice el comportamiento dinámico futuro del sistema en un horizonte de predicción T_p y determina, sobre un intervalo a controlar T_c , $t \leq T_c \leq T_p$, la función de control que minimiza el funcional objetivo a lazo abierto. Si no hubiese perturbaciones y se conociera exactamente el modelo de la planta (que en este caso implica fundamentalmente conocer la potencia requerida), podría usarse la función de control hallada para cualquier tiempo posterior. Sin embargo, como eso no ocurre, se necesita incorporar algún mecanismo de realimentación. Para ello, el control a lazo abierto obtenido se aplica solamente hasta que se disponga de una nueva medición del estado. En ese instante, se reinicia todo el procedimiento (predicción y optimización) para encontrar una nueva función de control minimizante, con ésta y el horizonte moviéndose hacia adelante.

En este problema particular, hemos utilizado una modificación de esta idea, en un esquema inspirado en el presentado en [19]. Como se dijo, la resolución del problema de control óptimo presentado en los capítulos anteriores, se basa en el conocimiento de la potencia requerida $r(t)$ en todo el intervalo $[0, T]$. En este esquema este conocimiento será reemplazado en los instantes futuros por una predicción. Ésta se basará en la hipótesis de que las condiciones de conducción no variarán sustancialmente en un intervalo futuro pequeño, por lo que los requerimientos de potencia anteriores inmediatos se usarán para la predicción. El problema de control a lazo abierto se resolverá para cada instante t en un intervalo deslizante $[t - \Delta c, t] \cup [t, t + \Delta p]$, compuesto por la unión de dos partes: una en el

pasado donde la potencia requerida es conocida y una parte en el futuro, donde los valores de potencia son predichos. El control obtenido para todo el intervalo $[t - \Delta c, t + \Delta p]$ se aplica solamente en el instante presente t y luego se reinicia el procedimiento, corriendo este intervalo hacia adelante.

El enfoque de horizonte deslizante permite la consideración de restricciones en la función de control y en los estados. Sin embargo, dado que en general la evolución predicha posiblemente difiera del comportamiento a lazo cerrado, hay que analizar la estabilidad del sistema a lazo cerrado. En este sentido, la imposición de una condición terminal fija al problema contribuye a la búsqueda de estabilidad ([39]). En este problema, esta restricción corresponde a imponer un valor final al estado de carga de las baterías. Como en el caso del algoritmo basado en el factor de consumo equivalente descrito en el capítulo 3, la elección de la condición final es arbitraria y depende del modo de operación elegido para el vehículo. Por ello elegimos en principio, una operación del vehículo con “mantenimiento de carga”.

Es claro que este enfoque requiere que el cómputo del control pueda realizarse en un tiempo razonable comparado con la dinámica de la planta, ya que se necesita resolver un problema de control óptimo en cada instante. Este aspecto es, en principio, resuelto eficientemente por el software desarrollado en base a PASVA4.

Se requiere también una estimación de la evolución del sistema en el intervalo a futuro en que se resuelve el problema de control óptimo, lo que en este caso implica una estimación del ciclo de potencia requerido en ese intervalo. Para ello se necesita contar con un modelo de este ciclo, ya sea determinístico o estocástico. En este capítulo presentaremos en primer lugar, una predicción sin incertidumbre, consistente simplemente en la repetición de los requerimientos de potencia inmediatamente anteriores y luego introduciremos incertidumbre, mediante la utilización de un modelo estocástico muy simple.

5.2. Criterios y parámetros usados para la implementación del algoritmo

5.2.1. Predicción

Por lo dicho en la sección anterior a los efectos de facilitar la verificación de la corrección del algoritmo que implementa el “deslizamiento” del problema de control, hemos

ignorado en un primer paso la incertidumbre en la predicción y hemos supuesto que las condiciones de conducción no cambian considerablemente en el intervalo de interés. Por ello, hemos considerado que la potencia requerida a futuro, es una función periódica que repite sucesivamente una onda forma de onda inicial. En el caso del ciclo normalizado europeo, la forma de esta onda es una sección de 200 seg de duración, similar a la utilizada en el capítulo 3. Asimismo tomamos la longitud del intervalo de predicción igual a la longitud de esta onda y el corrimiento igual a 1 segundo. Los resultados se muestran en la figura 5.1.

5.2.2. Punto de arranque

Como el problema de control óptimo debe resolverse iterativamente, es preciso favorecer su rápida convergencia. Conviene entonces darle un punto de arranque adecuado. Consideraremos que la solución del problema en el instante anterior, antes del deslizamiento, es una buena elección con tal fin. El problema que surge es que como PASVA4 adecua el paso para controlar el error global del problema de valores de contorno, la solución obtenida estará posiblemente expresada en una grilla más fina. Para resolver este problema, implementamos una interpolación lineal que proyecta los resultados nuevamente sobre una grilla uniforme del tamaño del intervalo inicial.

5.2.3. Condiciones de borde y longitud del intervalo de predicción

De la misma forma que para el algoritmo basado en consumo equivalente, se impuso para este algoritmo el modo de mantenimiento de la energía en las baterías, esto es, que el valor final de la variable de estado fuese igual al inicial. Este punto es delicado y está relacionado con la longitud del intervalo de predicción. Si este fuese demasiado corto podría darse el caso en que el mantenimiento de la energía en las baterías en ese intervalo no fuese posible. Por ejemplo esto ocurriría si el intervalo fuese tan corto que sólo incluyera etapas de frenado regenerativo. En este caso el estado final debe ser necesariamente mayor al inicial, por lo que imponer la igualdad llevaría a un problema de control sin solución, que detendría el avance del algoritmo. De manera que la longitud del intervalo de predicción debe elegirse de manera de evitar estas situaciones. Para el ciclo normalizado europeo un intervalo de 200 seg es adecuado. Puede verse que, en cambio, un intervalo de longitud

menor hace fracasar al algoritmo. Por ejemplo, para un intervalo de longitud 50 seg. es necesario imponer una condición final ligeramente superior a la inicial para que el algoritmo funcione, ya que hay subintervalos donde la potencia reingresada al sistema por frenado regenerativo supera la consumida. Claramente una condición final mayor a la inicial mantenida en todos los problemas resueltos sucesivamente en el intervalo redundaría en un aumento del consumo. De manera que otros mecanismos más sofisticados deben diseñarse de manera de superar este problema. Por ejemplo para el caso de una operación del vehículo con “agotamiento de carga”, en [22] se muestra que si se imponen condiciones de borde tales que resulte un perfil de descarga “nominal”, por ejemplo, que evolucione linealmente con la distancia, los resultados son muy cercanos a los de la solución óptima.

5.2.4. Problema de control

En capítulos anteriores hemos desarrollado la solución de dos problemas de control diferentes: sin restricciones de estado y con restricciones de estado. La idea es que el algoritmo vaya eligiendo según el estado de energía de las baterías cual de los dos problemas plantear. En otras palabras, cuando la energía en las baterías se aproxima a los límites superior e inferior x_{min} y x_{max} , se resuelve un problema de control con restricciones de estado. Fuera de esa región, se resuelve el problema sin restricciones. Sin embargo, por el momento sólo hemos implementado el algoritmo usando el problema sin restricciones, debido a las muchas dificultades de implementación del caso con restricciones. En primer lugar, éste requiere de la sintonía de más parámetros, como el número de discontinuidades que se esperan en el intervalo de resolución del problema de control (que a su vez depende de la longitud del mismo) y valores de arranque para los extremos de los intervalos de discontinuidad y para los estados adjuntos en cada intervalo. En segundo lugar, el problema sin restricciones presenta menos problemas para converger a la solución en la mayoría de los casos, lo que facilita la no interrupción de las iteraciones.

5.3. Resultados

La figura 5.1 muestra los resultados de la aplicación del algoritmo propuesto para los 200 primeros segundos de ciclo normalizado europeo. La línea llena muestra la función de control proporcionada por el algoritmo, mientras que la línea de puntos muestra la solución óptima del problema de control sin restricciones ya presentada en la figura 3.2. Se

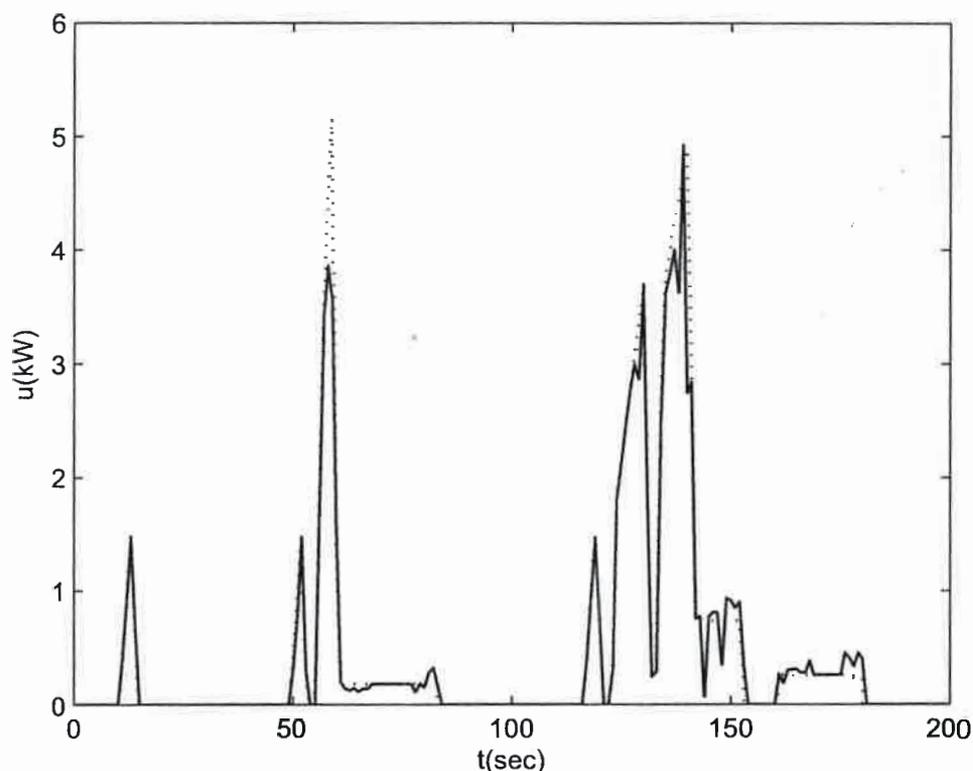


Figura 5.1: Resultados del algoritmo de control por horizonte deslizante prediciendo la potencia requerida por una función periódica.

indican también las cotas superior e inferior exigidas al control (línea de puntos y guiones). Puede apreciarse que el algoritmo proporciona una solución bastante aproximada a la solución óptima. Los consumos también resultaron con una diferencia menor del 0.08% ($830.1423kW_s$ para el caso del control dado por el algoritmo contra $830.77kW_s$ para el control óptimo obtenido en el capítulo 3).

En una segunda etapa, consideramos un intervalo de predicción ficticio, hacia adelante, también de 200 segundos pero no necesariamente periódico. Decimos "ficticio", pues en realidad usamos como predicción los mismos datos del ciclo normalizado europeo. En otras palabras, nuevamente una predicción sin incertidumbre. La idea era analizar el comportamiento del algoritmo, al producirse un cambio en las características del ciclo de velocidad, lo que en el ciclo europeo ocurre a partir del instante $t = 800seg$. Los resultados se muestran en la figura 5.2. Allí se presenta en línea punteada el control óptimo y en línea llena el control dado por el algoritmo de horizonte deslizante. Si bien

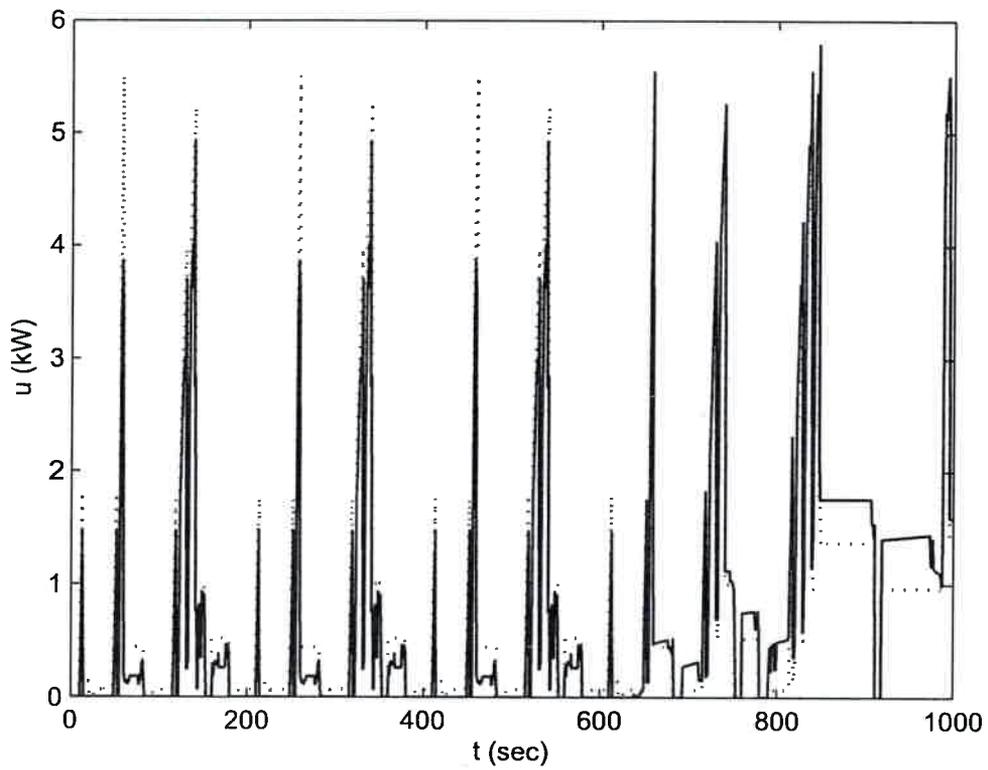


Figura 5.2: Resultados del algoritmo de control por horizonte deslizante cuando cambian las características del ciclo.

el control proporcionado por el algoritmo de horizonte deslizante presenta diferencias con el control óptimo, los consumos sin embargo fueron muy semejantes ($4734.7kWs$ y $4692.4kWs$ respectivamente, lo representa una diferencia del 0.9 %).

5.4. Predicción con incertidumbre

A los efectos de generar una predicción probabilística de los valores de potencia requerida, siguiendo el enfoque presentado en [31], se consideraron un conjunto de ciclos de potencia requerida obtenidos a partir de invertir el modelo de la dinámica longitudinal del vehículo considerado, en este caso el vehículo eléctrico urbano en desarrollo en el GEA ([40],[41],[42]). En base a este conjunto de datos, se estableció la distribución condicional de probabilidades discreta experimental de la potencia requerida en el instante t_{k+1} dada la potencia requerida en el instante anterior t_k , i. e.,

$$p_k(q, s) = P \left(r(t_k) = q / r(t_{k+1}) = s \right) \quad (5.1)$$

Con esta distribución, para cada instante t se generó un ciclo aleatorio sintetizado de longitud Δp de potencias requeridas a futuro, dado por una cadena de Markov de la forma

$$r(t_k) = w_k$$

donde la probabilidad de transición de w_k está dada por 5.1 y la condición inicial es la potencia requerida (conocida) en el instante presente $r(t)$. Se consideró un intervalo $[t - \Delta c, t + \Delta p]$ con un intervalo de predicción pequeño ($\Delta p \ll \Delta c$). Allí se resuelve el problema de control óptimo a lazo abierto, considerándose solamente el valor del control obtenido en t y se reinicia el procedimiento corriendo el intervalo hacia delante $1seg$. La figura 5.3 muestra los resultados obtenidos en este caso, en que $\Delta c = 190seg$ y $\Delta p = 10seg$. Nuevamente se muestra en línea punteada el control óptimo y en línea llena el control dado por el algoritmo y puede verse que este último se aproxima bastante al óptimo. Los consumos registrados también fueron similares: $3918.5kWs$ contra $3776.6kWs$ del óptimo (excluyendo los 190 primeros puntos hasta que el algoritmo de control deslizante comienza a calcular el control) lo que da un diferencia relativa de 0.0376 %.

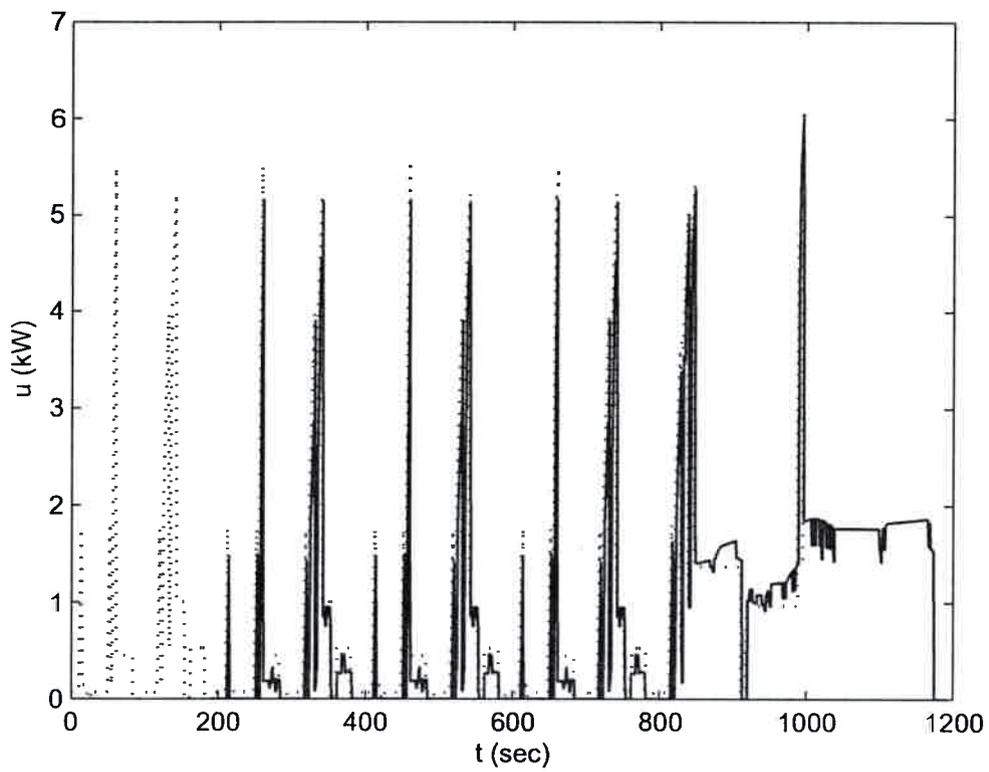


Figura 5.3: Resultados del algoritmo de control por horizonte deslizante con predicción aleatoria del ciclo futuro.

5.5. Conclusiones

Hemos presentado un esquema de horizonte deslizante para el gerenciamiento de energía en vehículos eléctricos híbridos, basado en las soluciones de los problemas de control referidos en los capítulos anteriores. Como la evolución de la ecuación de estado depende de la potencia requerida por el conductor, la predicción del intervalo a futuro que se utiliza en el esquema se realiza en base a las potencias requeridas en instantes previos. Si bien un estudio estadístico de la eficiencia de los algoritmos propuestos sobre un conjunto más numeroso de ciclos de potencia requerida, permitiría una evaluación más ajustada del desempeño del algoritmo propuesto, estos resultados preliminares parecen indicar que el control obtenido se mantiene cercano al control que minimiza el consumo de combustible obtenido en tiempo diferido. Quedan abiertos varios aspectos del diseño del algoritmo, tales como determinar una forma eficaz de elegir el intervalo en que se resuelve el problema de control y las condiciones de borde, de manera de evitar situaciones en los que o bien no haya solución o bien el problema de valores de contorno no converja a una solución. La ductilidad del software utilizado para la resolución del problema de control, permitirá la variación del problema de control óptimo para incluir otros aspectos, como el caso en que la función de rendimiento del segmento eléctrico presente discontinuidades o dependa de la energía en las baterías, que se consideren restricciones a la trayectoria de esta última, se agreguen variables de estado, etc. El otro aspecto que debe continuarse se refiere a la predicción de la potencia requerida a futuro. El ajuste de modelos de procesos auto-regresivos o de media móvil a los datos de potencia requerida correspondientes a los ciclos de velocidad normalizados, sería posiblemente adecuado para que los ciclos sintetizados puedan reproducir las regularidades que aparecen especialmente en los ciclos urbanos.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado una aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin a la optimización del gerenciamiento de energía en vehículos eléctricos híbridos. En este caso, entendemos por optimización del gerenciamiento de energía a la determinación del aporte de potencia que deben realizar cada una de las fuentes de energía a bordo del vehículo, para minimizar el consumo de combustible, sin dejar de satisfacer los requerimientos de potencia de parte del conductor.

Se ha visto que este problema puede ser planteado como un problema de control óptimo no lineal, con restricciones en el control y en las variables de estado. En este sentido, esta tesis constituye una forma más de abordar este problema de control óptimo que ya fue tratado previamente en mi tesis de maestría [35] y en un artículo publicado en el año 2009 ([34]). En el primer caso, el enfoque fue el de Programación Dinámica, mientras que en el segundo caso fue el llamado de “transcripción directa”, o, en otras palabras, la conversión del problema, a través de su discretización en el tiempo, en un problema de Programación No Lineal.

El enfoque de Programación Dinámica, se aplica sobre una discretización completa del problema y resulta finalmente en una búsqueda “inteligente” de la solución óptima en un conjunto finito. Por ello siempre que la solución exista, el algoritmo es capaz de encontrarla. Por ese motivo fue tomada como referencia. Tanto en el caso de “transcripción directa” como en esta tesis, los resultados dados por el algoritmo de programación dinámica fueron reproducidos dentro de la aproximaciones correspondientes.

El principio del máximo establece las condiciones de optimalidad, esto es, las condiciones que deben satisfacer la función de control minimizante y su trayectoria correspondiente. Estas condiciones constituyen esencialmente un problema de valores de contorno, con conmutaciones en el lado derecho de las ecuaciones diferenciales y posibles discontinuidades en la solución que se producen en lugares desconocidos de antemano, ya que dependen del valor de la misma trayectoria de estado. Por este motivo se usó para la resolución numérica del problema, una herramienta de software denominada PASVA4

preparada para resolver problemas de valores de contorno con esas características, escrita en lenguaje FORTRAN 77. Se desarrolló el software necesario en ese mismo lenguaje, para resolver el problema haciendo uso de esta herramienta.

La aplicación del Principio del Máximo al problema particular del control supervisor de estos vehículos, presenta varios aspectos que mencionar. Por un lado hay que separar el problema en tiempo diferido del problema en tiempo real. En el primero, se dispone del conocimiento de los requerimientos de potencia en todo el trayecto. En el segundo, los requerimientos futuros no se conocen, más allá de que pueda contarse con alguna información a través de GPS, telemetría etc.

La filosofía es entonces resolver en primer lugar el problema en tiempo diferido y en base a él ganar experiencia para resolver el problema en tiempo real. Por otra parte, la resolución del problema en tiempo diferido, es necesaria, porque proporciona un valor de referencia contra el cual comparar otras estrategias de control que puedan diseñarse.

A su vez, para la resolución del problema en tiempo diferido, y como es tradicional en control óptimo, se procedió a resolver en primer término el problema sin considerar las restricciones de estado. A posteriori, aquéllas fueron incorporadas.

El problema en tiempo diferido fue usado para resolver el problema en tiempo real de dos maneras diferentes. Por un lado, se mostró cómo el estado adjunto que se define en la teoría de control óptimo representa un "factor de consumo equivalente". Esto es, un factor que traduce en cada instante el consumo de energía desde las baterías en un consumo de combustible, permitiendo de esta forma convertir el problema de minimizar el consumo en todo un ciclo, en una minimización instantánea. Esto permite determinar el control minimizante instante a instante, en base a la potencia requerida en ese instante, sin necesidad de conocer los valores de potencia requerida en lo que sigue del ciclo.

En conclusión, hemos definido una metodología para calcular el factor de consumo equivalente en forma numérica, al menos para el caso del modelo que consideramos. Se requirieron solamente ciertas leves hipótesis de suavidad de las funciones que modelan las pérdidas en los sistemas del vehículo. En la bibliografía estudiada la estimación de este parámetro siempre resulta de alguna heurística.

La evolución del factor de consumo equivalente se obtuvo especialmente en el caso en que las restricciones de estado devienen activas en un intervalo. Se halló que, para el modelo utilizado, este factor es continuo. Es constante fuera de ese intervalo frontera y, por

la continuidad, los valores que toma fuera de él dependen de los valores que toma en sus extremos. En el intervalo frontera, evoluciona como función de la potencia requerida. Este resultado será de utilidad en los casos de vehículos equipados con ultracapacitores. En esos casos aparece una nueva variable de estado, que corresponde a la energía contenida en aquéllos. A diferencia de lo que sucede con las baterías, los ultracapacitores están pensados para ser totalmente descargados o cargados rápidamente, con lo cual esta variable de estado alcanzará sus cotas superior e inferior reiteradamente. No hemos encontrado el desarrollo completo de las soluciones para los problemas con restricciones de estado en la bibliografía (ver [22]). El análisis de las diferentes formulaciones de las condiciones de optimalidad sistematizadas en [9] fueron las que permitieron en este caso llegar a la solución buscada. Pensamos que en esta tesis se hace un aporte novedoso en este sentido.

Más aún, las expresiones analíticas obtenidas para el estado adjunto (4.12) pueden ser explotadas para estimaciones del mismo basadas solamente en el conocimiento de las funciones de rendimiento y de los instantes en que la energía en las baterías llega a su mínimo o empieza a recargarse o equivalentemente a su máximo.

Usando el factor de consumo equivalente, diferentes estrategias de control en tiempo real pueden ser diseñadas. Se presenta un algoritmo de este tipo, y se muestra que los resultados del mismo son bastante satisfactorios. Claramente, el algoritmo propuesto proporciona una solución subóptima. Sin embargo, la diferencia en consumo de combustible respecto de la solución óptima en las pruebas realizadas, no sobrepasa el 5%.

Como el enfoque también proporciona la función de control en todo el intervalo, la otra forma de usar la solución del problema de control óptimo a los efectos de obtener un algoritmo implementable en tiempo real, fue la de plantear un algoritmo del tipo de horizonte deslizante. En este sentido, hemos mostrado algunas pruebas preliminares. Si bien también en este caso, la función de control obtenida resultó similar a la de la solución óptima en cuanto al valor de objetivo, quedan abiertos el problema de predecir los requerimientos de potencia en un intervalo a futuro y una forma eficaz de elegir el intervalo en que se resuelve el problema de control, de manera de evitar situaciones en los que o bien no haya solución o bien el problema de valores de contorno no converja.

Aparte de los objetivos específicos descriptos, el enfoque utilizado constituye un marco general en el que pueden plantearse otros problemas de control supervisor para vehículos híbridos, con diferentes objetivos, modelos, restricciones y para diferentes modos de

operación del vehículo. Más aún, la experiencia ganada en el uso del software permitirá la resolución de otros problemas de control óptimo con no linealidades, restricciones, discontinuidades y conmutaciones en las ecuaciones diferenciales que suelen aparecer en electrónica de potencia.

La concatenación de PASVA con herramientas de software de programación no lineal que también se realizó, abre además el camino a problemas en los que las condiciones de optimalidad conducen a ecuaciones algebraico-diferenciales donde el control no puede despejarse de la condición algebraica ($H_u = 0$). Estos problemas podrían ser resueltos de manera similar, esto es, iterativamente obteniendo primero el control minimizante con una herramienta de programación no lineal y resolviendo luego el problema de valores de contorno usando PASVA.

6.1. Trabajos futuros

De la realización de este trabajo, varios temas quedan abiertos para futuras investigaciones. En primer lugar, un estudio estadístico de la eficiencia de los algoritmos propuestos sobre múltiples ciclos de potencia requerida, permitiría una evaluación más ajustada de su desempeño. De la experiencia recogida en la solución de este problema de control óptimo siguiendo diferentes enfoques (programación dinámica, transcripción directa y control óptimo) se observa que las funciones de rendimiento influyen mayormente en los resultados. En esta tesis sólo consideramos aproximaciones suaves de las funciones de rendimiento. Es probable, sin embargo, que la función de rendimiento del segmento eléctrico tenga una discontinuidad en la derivada en el origen, dado que los procesos de carga y descarga presentan características diferentes. Se impone entonces analizar esa situación.

Tampoco se ha considerado en esta tesis, el caso en que la función de rendimiento del segmento eléctrico depende de la variable del estado, o sea del contenido de energía en las baterías. Dado que este enfoque permite tratar ese caso de forma totalmente similar a la desarrollada, el trabajo futuro se orientará también en ese sentido. Los resultados ya obtenidos para ese mismo problema usando el enfoque de “transcripción directa” ([34]) permiten predecir buenos resultados.

El otro aspecto que debe continuarse se refiere a la predicción de la potencia requerida a futuro. Se explorará en ese sentido la eficacia de ajustar a los valores de potencia requerida de los ciclos normalizados un proceso autoregresivo o utilizar para ello un enfoque basado

en redes neuronales.

Otra línea a explorar tiene que ver con el agregado al problema de otros objetivos de control. Por ejemplo, a la minimización del consumo de combustible sería importante agregar simultáneamente una maximización de la vida útil de las baterías. Esta última está posiblemente relacionada con el número de ciclos de carga y descarga a la que las baterías son sometidas, lo que constituye a primera vista un objetivo competitivo con el ahorro de combustible. Habría entonces en este caso que utilizar técnicas de optimización multiobjetivo.

Referencias

- [1] A. Sciarretta and L. Guzzella, "Control of hybrid electric vehicles," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, no. 2, pp. 60 – 70, 2007.
- [2] A. Sciarretta, M. Back, and L. Guzzella, "Optimal control of parallel hybrid electric vehicles," *IEEE Transactions on Control System Technology*, vol. 12, no. 3, pp. 352 – 363, 2004.
- [3] C. Musardo, G. Rizzoni, and B. Staccia, "A-ECMS: An adaptive algorithm for hybrid electric vehicle energy management," in *IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference, CDC-ECC '05*. IEEE, 2005.
- [4] G. Paganelli, G. Ercole, A. Brahma, Y. Guezennec, and G. Rizzoni, "General supervisory control policy for the energy optimization of charge-sustaining hybrid electric vehicles," *J.SAE Rev.*, vol. 22, pp. 511 – 518, 2001.
- [5] L. Serrao, S. Onori, and G. Rizzoni, "ECMS as a realization of pontryagin's minimum principle for HEV control," in *American Control Conference*, June 2009, pp. 3964 – 3969.
- [6] L. Pérez and G. García, "State constrained optimal control applied to supervisory control in hybrid electric vehicles," *Oil & Gas Science and Technology, Revue de l'Institut Francais du Pétrole*, vol. 65, no. 1, pp. 191 – 201, 2010.
- [7] H. Geering, *Optimal control with engineering applications*. Springer-Verlag, 2007.
- [8] A. Chiang, *Elements of dynamic optimization*. McGraw-Hill, 1992.
- [9] R. Hartl, S. Sheti, and G. Vickson, "A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints," *SIAM Review*, vol. 37, pp. 181 – 218, 1995.

- [10] H. Maurer, "On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 15, no. 3, pp. 345 – 362, 1977.
- [11] S. Delprat, T. M. Guerra, and G. Paganelli, "Control strategy optimization for an hybrid parallel powertrain," in *Proc. of the American Control Conference 2001*, 2001, pp. 1315 – 1320.
- [12] S. Delprat, T. M. Guerra, and J. Rimaux, "Control strategies for hybrid vehicles: optimal control," in *Proc. of the IEEE 56th Vehicular Technology Conference*, 2002, pp. 1681 – 1685.
- [13] S. Delprat, J. Lauber, T. M. Guerra, and J. Rimaux, "Control of a parallel hybrid powertrain: Optimal control," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 3, pp. 872 – 881, 2004.
- [14] U. M. Ascher and L. Petzold., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, 1992.
- [15] J. Betts, *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. SIAM, 2001.
- [16] M. Lentini and V. Pereyra, "PASVA4: An O.D.E boundary solver for problems with discontinuous interfaces and algebraic parameters," *Mat. Aplic. Comp.*, vol. 2, pp. 103 – 118, 1983.
- [17] V. Pereyra, "Solución numérica de ecuaciones diferenciales con valores de frontera," *Acta Científica Venezolana*, vol. 30, pp. 7 – 22, 1979.
- [18] S. Delprat, T. M. Guerra, and J. Rimaux, "Control strategies for hybrid vehicles: synthesis and evaluation," in *Proc. of the IEEE 58th Vehicular Technology Conference*, 2003, pp. 3246 – 3250.
- [19] S. Kermani, S. Delprat, R. Trigui, and T. Guerra, "Predictive management of hybrid vehicle," in *Proc. of the IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, Harbin, China*, 2008, pp. 1 – 6.

- [20] —, “Predictive control for HEV: experimental results,” in *Proc. of the IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, Dearborn, MI*, 2009, pp. 364 – 369.
- [21] H. Ali Borhan, C. Zhang, A. Vahidi, A. M. Phillips, M. Kuang, and S. Di Cairano, “Nonlinear model predictive control for power-split hybrid electric vehicles,” in *Proc. of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA*, 2010, pp. 4890 – 4895.
- [22] L. Serrao, A. Sciarretta, O. Grondin, A. Chasse, Y. Creff, D. di Domenico, P. Pognant-Gros, C. Querel, and L. Thibault, “Open issues in supervisory control of hybrid electric vehicles: a unified approach using optimal control methods,” in *Proceedings of Les rencontres scientifiques d’IFP Energies nouvelles International Scientific Conference on hybrid and electric vehicles RHEVE 2011*, December 2011, pp. 1 – 13.
- [23] L. Pérez, C. de Angelo, and V. Pereyra, “Determination of the adjoint state evolution for the efficient operation of a hybrid electric vehicle,” *Mathematical and Computer Modeling*, vol. 57, pp. 2257 – 2266, 2013.
- [24] L. Pérez, C. H. de Angelo, and V. Pereyra, “Un aporte a la determinación del factor de consumo equivalente para el control supervisor de vehículos eléctricos híbridos,” in *IV Congreso de Matemática Aplicada a la Computación y a la Industria*. Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial - Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Sección Argentina, 2013.
- [25] —, “Algoritmo de control supervisor en tiempo real para vehículos eléctricos híbridos basado en horizonte deslizante,” in *XV Reunión en Procesamiento de la Información y Control*. Universidad Nacional de Río Negro, San Carlos de Bariloche, Argentina, 2013.
- [26] G. Rizzoni, L. Guzzella, and B. Baumann, “Unified modeling of hybrid electric vehicles,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 4, pp. 246 – 257, 2004.
- [27] A. Brahma, Y. Guezennec, and G. Rizzoni, “Optimal energy management in series hybrid vehicle,” in *Proc. of the Amer. Control Conf.*, 2000, pp. 60 – 64.

- [28] —, “Dynamic optimization of mechanical/electric power flow in parallel hybrid electric vehicles,” in *Proc. of AVEC 2000, 5th. Intern. Symp. on Advanced Vehicle Control*, Ann Arbor, Michigan, 2000.
- [29] V. Johnson, K. B. Wipke, and D. J. Rausen, “HEV control strategy for real-time optimization of fuel economy and emissions,” in *Proceedings of the Future Car Congress, April 2000, SAE Paper No. 2000-01-1543*, 2000.
- [30] J. V. Mierlo and G. Maggetto, “Views on hybrid drivetrain power management strategies,” in *Proc. of the 17th International Electric Vehicle Symposium, Oct 2000, Montreal, Canada*, 2000.
- [31] C. Lin, H. Peng, and J. Grizzle, “A stochastic control strategy for hybrid electric vehicles,” in *Proceedings of the American Control Conference 2004*, 2004, pp. 4710 – 4715.
- [32] G. Steinmauer and L. del Re, “Optimal control of dual power sources,” in *Proceedings IEEE International Conference on Control Applications*, 2001, pp. 422–427.
- [33] G. A. Magallán, C. H. de Angelo, and G. O. García, “A neighborhood electric vehicle development with individual traction on rear wheels,” *International Journal of Hybrid and Electric Vehicles*, vol. 4, no. 2, pp. 115 – 136, 2009.
- [34] L. Pérez and E. A. Pilotta, “Optimal power split in a hybrid electric vehicle using direct transcription of an optimal control problem,” *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, no. 6, pp. 1959 – 1970, 2009.
- [35] L. V. Pérez, “Optimización del flujo de energía en sistemas generador-almacnador-consumidor,” Master’s thesis, Universidad Nacional de Río Cuarto, Córdoba, Argentina, 2007.
- [36] R. Murtagh and M. Saunders, “Minos user’s guide, report sol 77-9,,” Department of Operations Research, Stanford University, Calif., Tech. Rep., 1977.
- [37] —, “Large scale linearly constrained optimization,” *Mathematical Programming*, vol. 14, pp. 41 – 72, 1978.

- [38] R. Findeisen and F. Allgöwer, "An introduction to nonlinear model predictive," in *Control, 21st Benelux Meeting on Systems and Control, Veidhoven, 2002*, pp. 1–23.
- [39] D. Mayne, J. Rawlings, C. Rao, and P. Scokaert, "Constrained model predictive control: stability and optimality," *Automatica*, vol. 36, pp. 789 – 814, 2000.
- [40] L. Silva, F. Aguilera, P. de la Barrera, and C. D. Angelo, "Multi-domain model of electric traction drives using bond graphs," *Journal of Power Electronics*, vol. 11, pp. 439–448, 2011.
- [41] L. Silva, P. de la Barrera, and C. D. Angelo, "Multi-domain modeling of electric vehicles including lead-acid battery dynamics," in *8th PP and PSC (Power Plant and Power Systems Control) Symposium, Toulouse, France, p. ID 169*, 2012.
- [42] L. Pérez, E. Oliva, C. Careglio, C. Falco, and G. García, "Simulación de un vehículo eléctrico experimental," in *XVIII Congreso Argentino de Control Automático, AA-DECA 2002*, 2002.

Apéndice A

Aproximación intuitiva a las condiciones de optimalidad

En este apéndice tratamos de dar una idea intuitiva de la derivación de las condiciones de optimalidad del PMP. Para ello consideramos solamente un problema de control sin restricciones. Discretizando el problema según el esquema de Euler y usando conceptos elementales de extremos ligados, puede verse cómo las condiciones de optimalidad dadas por el principio del máximo de Pontryagin aparecen naturalmente en su forma discreta.

A.1. Enunciado del problema de control óptimo

Hallar una función de control continua a trozos u que maximice

$$- \int_0^T f_C(u(s)) ds \quad (\text{A.1})$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f_B(x, r - u) \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) = x_f \\ 0 &\leq u \leq u_{\text{máx}} \\ r - K_{\text{máx}} &\leq u \leq r - K_{\text{mín}} \\ x_{\text{mín}} &\leq x \leq x_{\text{máx}} \end{aligned}$$

A.2. Formulación discreta

Subdividamos el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de longitud $t = T/N$. Definamos el control buscado como

$$u_1, u_2, \dots, u_N, \quad u_k = u\left(\frac{2k-1}{2} \Delta t\right)$$

Análogamente para $k = 1, 2, \dots, N$ representemos la potencia requerida (conocida) por

$$r_k = r\left(\frac{2k-1}{2} \Delta t\right).$$

Aproximemos la integral A.1 por la suma de Riemann

$$- \sum_{k=1}^N f_C(u_k) \Delta t$$

y discreticemos la ecuación de estado siguiendo el esquema de Euler:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} - f_B(x_k, r_k - u_k) \Delta t \quad k = 1, \dots, N \\ x_0, x_N &\text{ dados} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Como las variables de estado dependen de las incógnitas del problema, las incluimos como variables de diseño. Las restricciones en los u_k pueden ser expresadas en la forma

$$\underline{U}_k \leq u_k \leq \bar{U}_k.$$

De esta forma, el problema puede enunciarse de la siguiente forma:

Hallar u que maximice

$$- \sum_{k=1}^N f_C(u_k) \Delta t$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} - f_B(x_k, r_k - u_k) \Delta t \quad k = 1, \dots, N \\ x_0, x_N &\text{ dados} \\ \underline{U}_k &\leq u_k \leq \bar{U}_k \quad k = 1, \dots, N \\ x_{\min} &\leq x_k \leq x_{\max} \quad k = 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

El problema es ahora uno de optimización no lineal de dimensión $2N - 1$ con restricciones no lineales. Si la condición final es libre, x_N es también una incógnita del problema y entonces su dimensión es $2N$. Como, a los efectos de que la aproximación sea buena, N debe ser grande, el problema resulta de escala media o grande. Sin embargo el orden de complejidad computacional es lineal en el número de intervalos de tiempo y en el número de estados.

Si dejamos de lado por un momento las restricciones en los controles u_k y en los estados x_k , y solo consideramos las restricciones provenientes de la ecuación de estado, observamos que para obtener la solución de este problema de optimización deberíamos construir el lagrangiano (que en este caso coincidiría con el Hamiltoniano), esto es:

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2, \dots, u_N, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) &= \\ &= - \sum_{k=1}^N f_C(u_k) \Delta t + \sum_{k=1}^N \lambda_k (x_k - x_{k-1} + f_B(x_k, r_k - u_k) \Delta t) \end{aligned}$$

donde λ_k son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las N restricciones en A.2. Las condiciones necesarias de primer orden para los extremos están dadas por

$$\nabla L(u_1, u_2, \dots, u_N, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \mathbf{0}$$

esto es

$$\nabla_{u_k} L = -\frac{\partial f_C}{\partial u_k} \Delta t - \lambda_k \frac{\partial f_B}{\partial y_k} \Delta t = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla_{x_k} L = \lambda_k - \lambda_{k+1} + \lambda_k \frac{\partial f_B}{\partial x_k} \Delta t = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla_{\lambda_k} L = x_k - x_{k-1} + f_B(x_k, r_k - u_k) \Delta t = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{A.5})$$

donde $\partial f_B / \partial y_k$ indica la derivada de f_B respecto de su segunda variable evaluada en $r_k - u_k$.

Nótese que A.5 es la aproximación de Euler de la ecuación de estado ($\dot{x} = L_x$ o lo que es lo mismo $\dot{x} = H_x$) y que A.4 es la aproximación de Euler de la ecuación del estado adjunto ($\dot{\lambda} = -L_x$ o lo que es lo mismo $\dot{\lambda} = -H_x$), hacia atrás en el tiempo. De esta forma, resolver el problema discretizado usando el método de Lagrange equivale a resolver las condiciones de optimalidad, en forma discreta.

No es difícil intuir que "pasando al límite" para $\Delta t \rightarrow 0$, se obtienen las condiciones de optimalidad mencionadas en los capítulos 3 y 4. Faltan agregarse las restricciones de desigualdad, usando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Apéndice B

Adjunción indirecta con estado adjunto continuo (con pérdidas eléctricas)

B.1.

Se incluye aquí la derivación de la solución del problema en (4.80)-(4.84) en el caso en que la restricción de estado es adjuntada al Hamiltoniano en forma indirecta, es decir sumando un multiplicador por la primera derivada total respecto del tiempo en la que el control aparece en forma explícita, pero se incluye la hipótesis de que el estado adjunto es continuo ([9]). El Hamiltoniano en este caso viene dado por:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, u, \bar{\lambda}, \bar{\theta}, \underline{\theta}, \bar{\mu}) = & -a_C u^2 - b_C u - c_C - \bar{\lambda}(a_B(r - u)^2 + (r - u)) + \\ & + \underline{\theta}(u - \underline{U}) + \bar{\theta}(\bar{U} - u) - \bar{\mu}(a_B(r - u)^2 + (r - u)) \end{aligned}$$

siendo el conjunto de los controles admisibles el conjunto

$$\bar{\Omega}(x, t) = \{u/\underline{U} \leq u \leq \bar{U}\} \tag{B.1}$$

B.1.1. Condiciones de optimalidad

La solución buscada satisface([9])

$$u(t) = \arg \max_{u \in \bar{\Omega}} \bar{H}(x, u, \bar{\lambda}, u, \underline{\theta}, \bar{\theta}, \bar{\mu}, t) \tag{B.2}$$

$$\bar{H}_u = -2a_C u - b_C + 2\bar{\lambda}a_B(r - u) + \bar{\lambda} + \underline{\theta} - \bar{\theta} + 2\bar{\mu}a_B(r - u) + \bar{\mu} = 0 \tag{B.3}$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\bar{H}_x = 0 \tag{B.4}$$

$$\underline{U} \leq u \leq \bar{U}, \quad \underline{\theta} \geq 0, \quad \underline{\theta}(u - \underline{U}) = 0, \quad \bar{\theta} \geq 0, \quad \bar{\theta}(\bar{U} - u) = 0 \tag{B.5}$$

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{H}_t$$

$\underline{\theta}$, $\bar{\theta}$ y $\bar{\mu}$ son continuas en los intervalos de continuidad de u (B.6)

$$\dot{\bar{\mu}} \leq 0 \quad \text{en } [0, T] \quad (\text{B.7})$$

$\bar{\mu}$ es continua donde $h^1 = -a_B(r - u)^2 - (r - u)$ es discontinua (B.8)

(h^1 es como en 4.4)

$\bar{\mu}$ es constante si $x > x_{min}$ (B.9)

En el instante final T

$$\bar{\lambda}(T) = \beta \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{\mu}(T) = 0 \quad (\text{B.11})$$

B.2. Derivación de la solución

Suponemos nuevamente que la restricción de estado se hace activa en un intervalo interior $[t_1, t_2]$. Analicemos primero el intervalo $(t_2, T]$. Por (B.10) y (B.4)

$$\bar{\lambda} \equiv \beta.$$

Por (B.11) y (B.9), $\bar{\mu} \equiv 0$. De (B.2), (B.3) y (B.5), razonando como en los casos anteriores resulta

$$u(t, \bar{\lambda}) = \begin{cases} \underline{U} & \text{si } \frac{b_C - 2\bar{\lambda}a_B r(t) - \bar{\lambda}}{-2a_C - 2\bar{\lambda}a_B} < \underline{U} \\ \frac{b_C - 2\bar{\lambda}a_B r(t) - \bar{\lambda}}{-2a_C - 2\bar{\lambda}a_B} & \text{si } \underline{U} \leq \frac{b_C - 2\bar{\lambda}a_B r(t) - \bar{\lambda}}{-2a_C - 2\bar{\lambda}a_B} \leq \bar{U} \\ \bar{U} & \text{si } \bar{U} < \frac{b_C - 2\bar{\lambda}a_B r(t) - \bar{\lambda}}{-2a_C - 2\bar{\lambda}a_B}. \end{cases}$$

De allí, usando (B.4) y la ecuación de estado, resulta el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_B(r(t) - u(t, \bar{\lambda}))^2 - (r(t) - u(t, \bar{\lambda})) \\ \dot{\bar{\lambda}} &= 0\end{aligned}\tag{B.12}$$

con condiciones de borde

$$\begin{aligned}x(t_2^+) &= x_{\min} \\ x(T) &= x_T.\end{aligned}\tag{B.13}$$

De conocerse t_2 , la solución de este sistema permitiría obtener el valor constante de $\bar{\lambda}$ (o equivalentemente β).

En $(t_1, t_2]$, $x \equiv x_{\min}$, por lo que $\dot{x} = -a_B(r - u)^2 - (r - u) = 0$, de donde $u = r$ ó $u = \frac{1}{a_B} + r$. El coeficiente a_B es en general pequeño dado que la función f_B que representa las pérdidas en el segmento eléctrico, no se aleja demasiado de la función identidad. De ahí que $\frac{1}{a_B}$ resulte relativamente grande frente a r . Esto permite descartar la segunda solución y usar que $u = r$. Nuevamente esto significa que estando la energía de las baterías x en su mínimo valor x_{\min} , éstas no pueden aportar más potencia para la tracción por lo que la potencia proveniente de motor de combustión u debe ser igual a toda la potencia requerida r . Si $r > \bar{U}$ o $r < \underline{U}$, el problema no tiene solución, ya que u no puede sobrepasar sus límites superior ni inferior.

Como $\bar{\lambda}$ es continua, por (B.4), resulta que $\bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}(t_2^-) = \bar{\lambda}(t_2^+) = \beta$. Usando (B.3) resulta

$$-2a_C r(t) - b_C + \bar{\lambda} + \bar{\mu} = 0$$

y entonces

$$\bar{\mu}(t) = 2a_C r(t) + b_C - \bar{\lambda}.$$

En t_2 , debe ser $h^1(t_2^+) = \dot{x} > 0$ ya que debe producirse una entrada de potencia al sistema de almacenamiento eléctrico para que la energía en el mismo salga de su valor inferior admisible. Entonces por (B.8), $\bar{\mu}$ debe ser continua allí y en consecuencia $\bar{\mu}(t_2) = 0$. Resulta entonces que en (t_1, t_2)

$$\bar{\lambda} = \beta = 2a_C r(t_2) + b_C\tag{B.14}$$

y

$$\bar{\mu} = 2a_C(r(t) - r(t_2)).\tag{B.15}$$

Tabla B.1

	x	$\bar{\lambda}$	u	$\bar{\mu}$
$[0, t_1]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u)$, $x(0) = x_0, x(t_1) = x_{min}$	$2a_C r(t_2) + b_C$	(B.16)	$2a_C(r(t_1) - r(t_2))$
$(t_1, t_2]$	x_{min}	$2a_C r(t_2) + b_C$	$r(t)$	$2a_C(r(t) - r(t_2))$
$(t_2, T]$	soluc. de $\dot{x} = -(r - u)$, $x(T) = x_T, x(t_2) = x_{min}$	$2a_C r(t_2) + b_C$	(B.16)	0

La igualdad (B.14) constituye la condición algebraica adicional que permite resolver el sistema (B.12)-(B.13). En $[0, t_1]$, $\bar{\mu}$ es nuevamente constante por (B.9). Es además continuo en t_1 , por (B.8) (entrada no tangencial al intervalo en que la restricción de estado es activa). Por ello

$$\bar{\mu}(t) \equiv \bar{\mu}(t_1^-) = \bar{\mu}(t_1^+) = 2a_C(r(t_1) - r(t_2)).$$

Usando B.3 cuando el máximo es interior al intervalo $[U, \bar{U}]$ resulta

$$\begin{aligned} H_u &= -2a_C u - b_C + 2\bar{\lambda}a_B(r - u) + \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}a_B(r - u) + \bar{\mu} \\ &= -2a_C u - b_C + 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})a_B(r - u) + \bar{\lambda} + \bar{\mu} \end{aligned}$$

de donde

$$u = \frac{b_C - 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})a_B r(t) - (\bar{\lambda} + \bar{\mu})}{-2a_C - 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})a_B}. \quad (\text{B.16})$$

Como

$$\bar{\lambda} + \bar{\mu} = 2a_C r(t_2) + b_C + 2a_C(r(t_1) - r(t_2)) = 2a_C r(t_1) + b_C$$

resulta

$$\begin{aligned} u &= \frac{b_C - 2(2a_C r(t_1) + b_C)a_B r(t) - (2a_C r(t_1) + b_C)}{-2a_C - 2(2a_C r(t_1) + b_C)a_B} = \frac{-4a_C r(t_1)a_B r(t) - 2b_C a_B r(t) - 2a_C r(t_1)}{-2a_C - 4a_C r(t_1)a_B - 2b_C a_B} \\ &= \frac{2a_C r(t_1)a_B r(t) + b_C a_B r(t) + a_C r(t_1)}{a_C + 2a_C r(t_1)a_B + b_C a_B}. \end{aligned}$$

(Nótese que la expresión (B.16) indica el mismo control obtenido en el enfoque de adjunción directa teniendo en cuenta la relación (4.18)). Los resultados se resumen en la tabla B.1.

En este intervalo entonces las trayectorias de estado y coestado satisfacen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a_B(r(t) - u(t))^2 - (r(t) - u(t)) \\ \dot{\bar{\lambda}} &= 0 \end{aligned}$$

con condiciones de borde

$$x(0) = x_0$$

$$x(t_1) = x_{\text{mín.}}$$

El sistema debe ser resuelto conjuntamente con la condición algebraica adicional

$$\bar{\lambda}(t_1^-) = 2a_C r(t_2) + b_C,$$

que es lo que permite determinar el valor desconocido de t_1 .

En el caso en que no se consideraban las pérdidas en el segmento eléctrico, el control era constante en los intervalos $[0, t_1]$ y $[t_2, T]$ y variable solamente en el intervalo en que igualaba a toda la potencia requerida. En este caso, debido a que el Hamiltoniano es cuadrático en el control, éste, fuera del intervalo frontera, no resulta constante sino una función afín de la potencia requerida. La pendiente y la ordenada en el origen de estas funciones afines dependen, en el primer intervalo, del valor de la potencia requerida en el instante t_1 en que la restricción de estado deviene activa y en el intervalo final de t_2 . Obsérvese que $u(t_1) = r(t_1)$ y análogamente en t_2 .

Apéndice C

Apéndice de la sección 4.4.2: soluciones para β

I) Se muestra la salida de MATLAB del cálculo de las soluciones de la ecuación 4.90.
La variable $r2$ representa $r(t_2)$

```
syms r2 beta
```

```
>> syms a_C b_C c_C a_B
```

```
u=(b_C-2*beta*a_B*r2-beta)/(-2*a_C-2*beta*a_B)
```

```
u =
```

```
(beta - b_C + 2*a_B*beta*r2)/(2*a_C + 2*a_B*beta)
```

```
>> pretty(u)
```

```
beta - b_C + 2 a_B beta r2
```

```
-----
```

```
2 a_C + 2 a_B beta
```

```
ec=-a_C*u^2 -b_C*u -c_C -beta*(a_B*(r2-u)^2+(r2-u)) + a_C*r2^2 + b_C*r2 + c_C
```

```
ec =
```

```
b_C*r2 + a_C*r2^2 - beta*(r2 + a_B*(r2 - (beta - b_C + 2*a_B*beta*r2)/(2*a_C + 2*
```

```
>> solve(ec,beta)
```

```
ans =
```

$$b_C + 2*a_C*r2$$

II) Se muestra la salida de MATLAB del cálculo de una de las soluciones de la ecuación 4.94. La variable $r1$ representa $r(t_1)$

```
>> syms a_C b_C c_C a_B beta r1 u
```

```
>> u=(b_C-2*beta*a_B*r1-beta)/(-2*a_C-2*beta*a_B)
```

```
u =
```

$$(\text{beta} - b_C + 2*a_B*\text{beta}*r1)/(2*a_C + 2*a_B*\text{beta})$$

```
>> ec2=-a_C*(r1+u)-b_C+beta*a_B*(r1-u)+beta
```

```
ec2 =
```

$$\text{beta} - b_C - a_C*(r1 + (\text{beta} - b_C + 2*a_B*\text{beta}*r1)/(2*a_C + 2*a_B*\text{beta})) + a_B*\text{beta}$$

```
>> solve(ec2,beta)
```

```
ans =
```

$$b_C + 2*a_C*r1$$

75223

U N R C
Biblioteca Central



75223