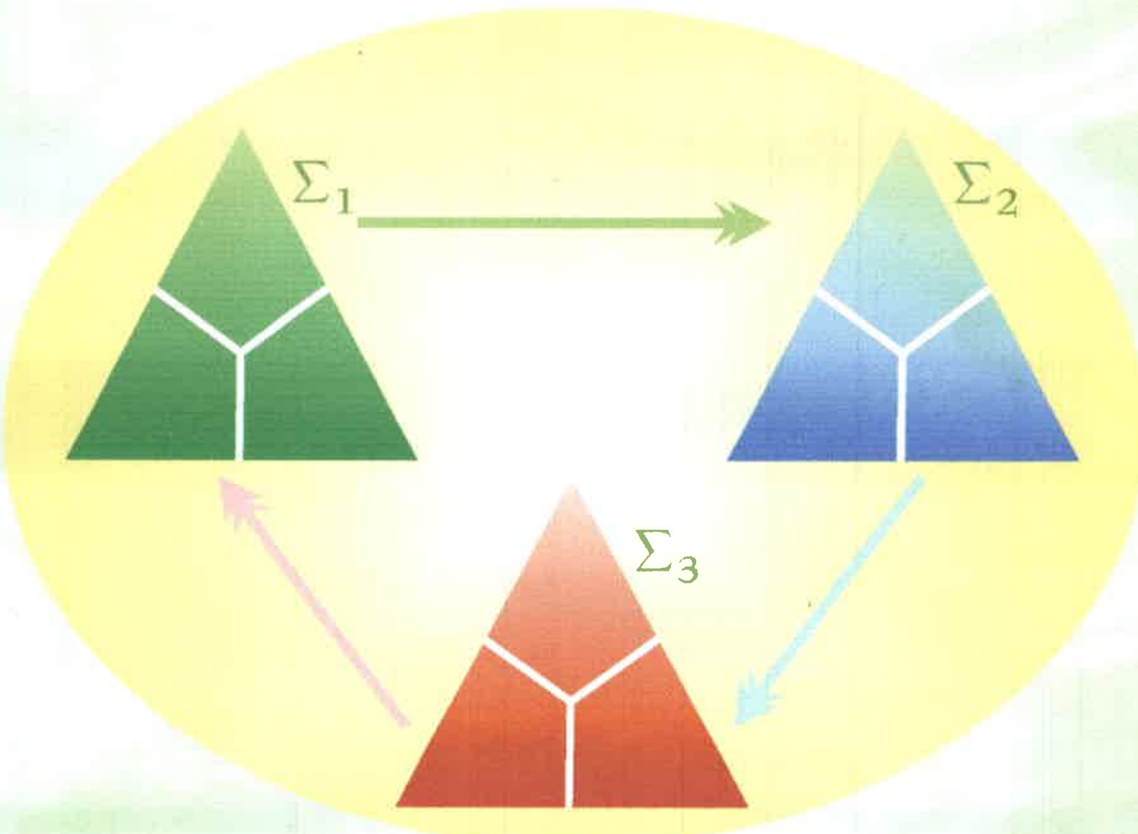
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

JUEGOS N-PERSONALES CON EQUILIBRIOS ÚNICOS



MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

Título de la Tesis:

JUEGOS N-PERSONALES CON EQUILIBRIOS ÚNICOS

Tesista: *Lic. Sara Aida ALANÍZ*

Director: *Dr. Luis Guillermo QUINTAS*

Jurado: *Dr. Jorge A. OVIEDO*
Dr. Juan Carlos CESCO
Mg. Santiago GASTALDI

2007

Indice

RESUMEN DEL TRABAJO

En la presente tesis se construye amplias familias de juegos q-cíclicos introducidos por Marchi y Quintas(1983), completamente mixtos y no completamente mixtos, con únicos puntos de Equilibrios de Nash prefijados, en extensión mixta de N-personas. Las mismas amplían las propuestas por Marchi y Quintas (1987), Quintas (1988 a) y Heuer(1979).

Se comienza con un ejemplo de un juego cíclico de 3-jugadores con dos estrategias cada uno y con único punto de equilibrio de Nash. Seguidamente, se construye familias de juegos q-cíclicos con únicos puntos de Equilibrios prefijados, en extensión mixta: primero de 3-jugadores con tres estrategias cada uno y con componentes todas positivas. Luego, de N- jugadores teniendo en cuenta la cantidad de componentes positivas de las estrategias, inicialmente con m estrategias cada uno de los jugadores y las componentes todas positivas, y después con distintas cantidad de estrategias cada jugador, pero la misma cantidad de componentes no nulas. En cada uno de las construcciones que se realizan, se demuestra la unicidad del punto de Equilibrio de Nash. Y por último, se presentan las conclusiones y posibles extensiones que pueden surgir de este trabajo.

ABSTRACT

In this work, completely and non completely mixed q-cycle games with prefixed Nash equilibrium points, in N-person mixed extension are constructed. The uniqueness conditions are studied, and a wide class of games with unique arbitrary prefixed equilibrium points are obtained. The results reported here extend the constructions presented by Marchi and Quintas (1987), Quintas (988) and Heuer (1979).

First, there is an example of a q-cycle game in which 3 players choose two strategies each with unique Nash equilibrium points. Next, families of q-cycle games with unique prefixed equilibrium points are constructed: the first one consists of 3 players with three strategies each one and for which all components are nonzero. The following family consists of N-players which vary according to the quantity of nonzero components of all mixed strategies. In this case, the initial conditions were: each of the players used m strategies, and all components were nonzero; later, each player chose different number of strategies but the same quantity of nonzero components. In each of q-cycle games constructs, the uniqueness of Nash equilibrium point is shown. Finally, the conclusions and possible extensions of this work are presented.

CAPITULO 1

Introducción

En la presente tesis se propone construir familias de juegos n-personales q-cíclicos, presentados por Marchi y Quintas(1983), con únicos puntos de equilibrios prefijados, con una estructura similar a la bimatricial, propuesta por Marchi y Quintas (1987), y siguiendo los lineamientos expuestos por Quintas (1988 a).

Un problema de decisión donde n agentes interactúan y poseen preferencias, además del control parcial sobre los resultados de dicha interacción se modela matemáticamente como un Juego, por medio de la Teoría de Juegos. Si dicha interacción, presupone un accionar individual donde cada agente solo piensa en maximizar su beneficio personal, se trata de un Juego No-Cooperativo.

En el marco de la Teoría de Juegos No Cooperativa, es de interés el describir recomendaciones para los jugadores tales que ninguno tenga incentivo para desviarse unilateralmente (es decir, sí los demás siguen las recomendaciones, resulta para cada uno conveniente seguir también la recomendación). Esto en terminología de Teoría de Juego corresponde al concepto de Equilibrio de Nash.

El concepto de punto de Equilibrio introducido por Nash (1951), es el concepto más importante en la Teoría de Juegos No Cooperativa, y su estudio formal marcó un hito en el tema. El conjunto de puntos de

Equilibrios de Nash, es no vacío para cualquier juego finito en estrategias mixtas(Nash 1951)[1] .

En general hay una multiplicidad de equilibrios, esto origina el problema de decidir cual equilibrio se toma como solución[2] . Si los jugadores no pueden comunicarse es claro que no pueden coordinar sus acciones para jugar en un equilibrio específico. Pero si aún ellos pudieran comunicarse, quedará el problema de cual equilibrio jugar, ya que las utilidades pueden ser totalmente diferentes de un equilibrio a otro, además en general no hay intercambiabilidad de equilibrios[3]

Muchos estudios se han realizado sobre la unicidad de puntos de Equilibrios de Nash, desde dos aspectos: Por un lado, estudios de las condiciones suficientes que garantizan la unicidad (Rosen(1965), Gale y Nikaido(1965))[4] Y el otro aspecto que se ha investigado es, bajo que condiciones es posible construir juegos con únicos puntos de equilibrios prefijados.

Las construcciones de juegos con único punto de equilibrio prefijado, han sido dadas para juegos bimatriciales finitos: Raghavan(1970) demuestra que, si los puntos de equilibrios de un juego son completamente mixtos entonces las matrices de cada jugador son cuadradas y el equilibrio es único; Millham(1972), demuestra que una condición necesaria y suficiente para la existencia de un juego, que tenga único punto de equilibrio prefijado, es que

---

[1] El Equilibrio de Cournot(1838) en la Teoría de Oligopolio y el Equilibrio punto de silla de von Neuman(1928) en juegos bipersonales a suma cero son precursores del concepto de equilibrio de Nash.

[2] El problema no aparece en los juegos bipersonales a suma cero porque, si bien el Equilibrio de Nash puede no ser único, las estrategias de equilibrio son intercambiables y la utilidad es constante sobre cualquier equilibrio.

[3] Para Juegos No a Suma Cero la propiedad es válida en Juegos Estrictamente Competitivos, Friedman (1983), y también en la familia de juegos estudiados por Oviedo y Quintas (1995).

[4] Hay también vasta bibliografía sobre refinamientos del concepto de punto de Equilibrio de Nash. Algunos de ellos reducen drásticamente la multiplicidad de los equilibrios. Para más detalles de las características de los refinamientos más importantes ver Van Dame(1987).

el punto sea completamente mixto; Kreps(1974) amplia este resultado, para el caso en que el punto de equilibrio es no completamente mixto; Heuer(1975), (1979), extiende y complementa los resultados obtenidos por los dos primeros autores mencionados, y obtiene la unicidad del punto de equilibrio dentro de la clase de estrategias mixtas cuyas componentes no nulas son las mismas, da condiciones necesarias y suficientes para la existencia y la unicidad de equilibrios. Y Quintas(1986),(1988 a)) construye una amplia familia de juegos con único punto de equilibrio.

Además, también hicieron aportes en la construcción mencionada en el párrafo anterior, Marchi y Quintas (1987) quienes presentaron juegos con valores prefijados y único punto de equilibrio; y Quintas, Marchi, Giunta y Alaniz(1991), dieron directamente los elementos de las matrices de una clase amplia de juegos, los cuales difieren de los métodos usados por Kreps y además estudian condiciones de unicidad.

El enfoque metodológico que se sigue es la habitual que se usa en Matemática, además se desarrollan ejemplos que algunos contribuyen a inducir los problemas que se plantean en éste trabajo y otros a clarificar resultados.

La organización de este trabajo es la siguiente:
En capitulo 2, se hace una introducción teórica, se da un ejemplo de un juego cíclico de 3-jugadores y se construyen familias de juegos q-cíclicos con 3-jugadores con únicos puntos de equilibrios en extensión mixta.

En Capitulo 3, se da una introducción teórica, se construye una familia de juegos q-cíclicos de n jugadores y que tienen únicos puntos de equilibrios completamente mixtos.

En Capitulo 4, se construye una familia de juegos q-cíclicos con n-jugadores, que tienen únicos puntos de equilibrios no completamente mixtos.

En Capitulo 5, se presentan las conclusiones y posibles extensiones que pueden surgir de esta trabajo.

Los juegos q-cíclicos que se construyen en los Capítulos 2 (3-jugadores), 3 y 4 (n-jugadores), con único punto de Equilibrio de Nash, prefijado en extensión mixta, generalizan los resultados de Quintas(1988 a)) para 2- jugadores.

Objetivos

En la presente tesis se propone:

- Construir familias de juegos q-cíclicos con N-personas, completamente mixtos, con único Equilibrio de Nash.
- Probar la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, de la familia de juego q-cíclicos, completamente mixtos, con N-personas.
- Construir familias de juegos q-cíclicos con N-personas, no completamente mixtos, con único Equilibrio de Nash.
- Probar la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, de la familia de juego q-cíclicos, no completamente mixtos, con N-personas.

CAPITULO 2

Construcción de Matrices de Juegos Cíclicos 3- Jugadores con Unicos Puntos de Equilibrio no Completamente Mixtos

2.1 Definiciones y Resultados Previos

Definición 1[5]:

Sea $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, A_1, A_2, A_3\}$ un juego en forma normal, finito, q-cíclico de 3-personas, donde Σ_i es el conjunto de estrategias puras del jugador i, y A_i la correspondiente función de pago, con i =1, 2, 3.

$$A_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = B_i(\sigma_i, \sigma_{q(i)}) + C_i(\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1},) \quad \text{con } \sigma_i \in \Sigma_i$$

y siendo q una función que satisface:

$q(i) \neq i$ y $|q^{-1}(i)| = 1$ donde $|.|$ indica la cardinalidad de conjunto respectivo

A los efectos de las construcciones que se realizarán en éste capítulo, se consideran juegos en donde:

1) $q(i) = i+1 \mod.3$
2) Cada jugador tiene a lo más tres estrategias, es decir, $|\Sigma_i| \leq 3$, i=1, 2, 3.
3) El pago de cada jugador i, tiene a C_i nulo, esto es: $C_i(\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1},) = 0$

[5] Marchi y Quintas(1983))."Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"

Notación: Usaremos la siguiente notación para las estrategias puras:

$$i \in \Sigma_1;\ j \in \Sigma_2;\ k \in \Sigma_3$$

Así, las funciones de pago para cada jugador son las siguientes:

$$A_1(i,j,k) = a_{ij}^{12}\ ; \qquad A_2(i,j,k) = a_{jk}^{23}\ ; \qquad A_3(i,j,k) = a_{ki}^{31}$$

Definición 2: La extensión mixta de éste juego finito está denotado por:

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\Sigma}_i,\ E_i\ \ i = 1, 2, 3\},$$

donde $\tilde{\Sigma}_i$ es el simplex de estrategias mixtas para el jugador i.

$$\tilde{\Sigma}_1 = \left\{ x : \Sigma_1 \to R : x(i) \geq 0 \quad y \quad \sum_{i \in \Sigma_1} x(i) = 1 \right\},$$

$$\tilde{\Sigma}_2 = \left\{ y : \Sigma_2 \to R : y(j) \geq 0 \quad y \quad \sum_{j \in \Sigma_2} y(j) = 1 \right\},$$

$$\tilde{\Sigma}_3 = \left\{ z : \Sigma_3 \to R : z(k) \geq 0 \quad y \quad \sum_{k \in \Sigma_3} z(k) = 1 \right\}$$

Siendo **R** el conjunto de números reales.

También se usará la notación:

$$x_i = x(i), \qquad y_j = y(j), \qquad z_k = z(k)$$

Sea $(x, y, z) \in \prod_{i=1}^{i=3} \tilde{\Sigma}_i$ una terna de estrategias mixtas de los 3 jugadores.

Definición 3[6]:

[6] Marchi y Quintas(1983))."Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"

La función esperanza matemática E_i para cada jugador, en el juego q-cíclico, es la siguiente:

$$E_1(x,y,z) = F_1(x,y) + G_1(y,z),$$

Donde F_1 y G_1 son las funciones esperanzas de B_1 y C_1 respectivamente.

$$E_2(x,y,z) = F_2(x,y) + G_2(y,z),$$

Donde F_2 y G_2 son las funciones esperanzas de B_2 y C_2 respectivamente.

$$E_3(x,y,z) = F_3(x,y) + G_3(y,z),$$

Donde F_3 y G_3 son las funciones esperanzas de B_3 y C_3 respectivamente.

En nuestro caso, como $C_i = 0$ con i= 1, 2, 3, las funciones esperanzas matemáticas, tienen la siguiente forma:

$$E_1(x,y,z) = F_1(x,y) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{12}\, y_s\, x_r$$

$$E_2(x,y,z) = F_2(y,z) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{23}\, z_s\, y_r$$

$$E_3(x,y,z) = F_3(z,x) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{31}\, x_s\, z_r$$

Notación: Denominaremos indistintamente:

$$F_1(i,\, y) = F_1(\, e_i\,,\, y)$$

Con e_i es una terna con 1 en el lugar i y cero en los otros lugares.

$$F_2(j,\, z) = F_2(e_j\,,\, z),$$

Con e_j es una terna con 1 en el lugar j y cero en los otros lugares.

$$F_3(x,\, k) = F_3(x,\, e_k\,)$$

Con e_k es una terna con 1 en el lugar k y cero en los otros lugares.

Definición 4[7]:

[7] Nash(1951)."Equilibrum points in n-person games"

Una terna $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ es un punto de Equilibrio de Nash si y sólo si, se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$E_1(x^*, y^*, z^*) \geq E_1(x, y^*, z^*) \text{ para cada } x \in \tilde{\Sigma}_1$$

$$E_2(x^*, y^*, z^*) \geq E_2(x^*, y, z^*) \text{ para cada } y \in \tilde{\Sigma}_2$$

$$E_3(x^*, y^*, z^*) \geq E_3(x^*, y^*, z) \text{ para cada } z \in \tilde{\Sigma}_3$$

Definición 5[8]:

Los conjuntos de todas las estrategias puras, que son mejores respuestas contra $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$, se denotarán con $J_1(y,)$, $J_2(z)$ y $J_3(x)$, y están definidos de la siguiente manera:

$$J_1(y) = \{i \in \Sigma_1 : F_1(i, y) \geq F_1(i', y) \text{ para cada } i' \in \Sigma_1\}$$

$$J_2(z) = \{j \in \Sigma_2 : F_2(j, z) \geq F_2(j', z) \text{ para cada } j' \in \Sigma_2\}$$

$$J_3(x) = \{k \in \Sigma_3 : F_3(x, k) \geq F_3(x, k') \text{ para cada } k' \in \Sigma_3\}$$

Se usará la siguiente caracterización de puntos de Equilibrio de Nash .

Teorema 1[9]:

Una terna $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ es un punto de Equilibrio de Nash $\tilde{\Gamma}$ si y sólo si:

$$S(x) \subseteq J_1(y) ; \quad S(y) \subseteq J_2(z) ; \quad S(z) \subseteq J_3(x)$$

Donde S(.) es el soporte del correspondiente vector:

$$S(x) = \{ i \in \Sigma_1 : x_i > 0 \}$$

$$S(y) = \{ j \in \Sigma_2 : y_j > 0 \}$$

[8] Marchi y Quintas(1983))."Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"
[9] Marchi y Quintas(1983))."Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"

$$S(z) = \{ k \in \Sigma_3 : z_k > 0 \}$$

Definición 6[10]**:**

Un punto de equilibrio de Nash $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ se define completamente mixto si:

$$S(x) = \Sigma_1, \qquad S(y) = \Sigma_2 \qquad y \qquad S(z) = \Sigma_3$$

En estos casos, se dice que cada jugador tiene todas sus estrategias activas.

Definición 7[11]**:**

Sea $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 \times \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_3$ un punto de equilibrio de Nash de un juego $\tilde{\Gamma}$, se le llama valores esperados del juego a v_1, v_2, y v_3, donde:

$$v_1 = E_1(x^*, y^*, z^*), \quad v_2 = E_2(x^*, y^*, z^*) \;;\; v_3 = E_3(x^*, y^*, z^*)$$

Definición 8[12]:

1) Sea $T_2 : P(\Sigma_3) \to P(\Sigma_2)$ una correspondencia definida de la siguiente manera:

Para cada $S_3 \subseteq \Sigma_3$

$$T_2(S_3) = \left\{ S_2 \subseteq \Sigma_2 : \exists\, z \in \tilde{\Sigma}_3 ,\ con\ J_2(z) \supseteq S_2 \quad y \quad S(z) = S_3 \right\}$$

2) Sea $T_3 : P(\Sigma_1) \to P(\Sigma_3)$ una correspondencia definida:

Para cada $S_1 \subseteq \Sigma_1$

$$T_3(S_1) = \left\{ S_3 \subseteq \Sigma_3 : \exists\, x \in \tilde{\Sigma}_1 ,\ con\ J_3(x) \supseteq S_3 \quad y \quad S(x) = S_1 \right\}$$

3) Sea $T_1 : P(\Sigma_2) \to P(\Sigma_1)$ una correspondencia, definida como sigue:

Para cada $S_2 \subseteq \Sigma_2$

$$T_1(S_2) = \left\{ S_1 \subseteq \Sigma_1 : \exists y \in \tilde{\Sigma}_2 ,\ con\ J_1(y) \supseteq S_1 \quad y \quad S(y) = S_2 \right\}$$

---

[10] Raghavan (1970) Completely Mixed Strategies in Games Bimatrix
[11] Raghavan (1970) Completely Mixed Strategies in Games Bimatrix
[12] Marchi y Quintas(1983))."Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"

Una consecuencia inmediata de las definiciones 6, 8 y la caracterización de punto de equilibrio de Nash dada en el Teorema 1, es la siguiente:

Teorema 2:

Un punto $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ con $S(x^*) = S_1$, $S(y^*) = S_2, S(z^*) = S_3$ es punto de equilibrio de Nash sí y solo : $\quad S_2 \in T_2 \circ T_3 \circ T_1(S_2)$

(o equivalentemente $S_1 \in T_1 \circ T_2 \circ T_3(S_1)$

o bien $\quad S_3 \in T_3 \circ T_1 \circ T_2(S_3)$)

con las composiciones, definidas de la siguiente manera.

$$T_1 \circ T_2 \circ T_3(S_1) = \left\{ \bar{S}_1 \subseteq \Sigma_1 : \exists \bar{S}_2 \in T_2 \circ T_3(S_1) \quad con \ \bar{S}_1 \in T_1\left(\bar{S}_2\right)\right\}$$

$$T_2 \circ T_3 \circ T_1(S_2) = \left\{ \bar{S}_2 \subseteq \Sigma_2 : \exists \bar{S}_3 \in T_3 \circ T_1(S_2) \quad con \ \bar{S}_2 \in T_2\left(\bar{S}_3\right)\right\}$$

$$T_3 \circ T_1 \circ T_2(S_3) = \left\{ \bar{S}_3 \subseteq \Sigma_3 : \exists \bar{S}_1 \in T_1 \circ T_2(S_3) \quad con \ \bar{S}_3 \in T_3\left(\bar{S}_1\right)\right\}$$

Teorema 3:

Un punto $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ con $S(x^*) = S_1$, $S(y^*) = S_2, S(z^*) = S_3$ es único punto de equilibrio de Nash completamente mixto sí y solo sí el único subconjunto:

$$S_3 \subseteq \Sigma_3 \quad tal\ que \quad S_3 \in T_3 \circ T_1 \circ T_2(S_3) \quad es \quad S_3 = \Sigma_3$$

(o equivalentemente

$$S_2 \subseteq \Sigma_2 \quad tal\ que \quad S_2 \in T_2 \circ T_3 \circ T_1(S_2) \quad es \quad S_2 = \Sigma_2$$

o bien $S_1 \subseteq \Sigma_1 \quad tal\ que \quad S_1 \in T_1 \circ T_2 \circ T_3(S_1) \quad es \quad S_3 = \Sigma_3$)

También utilizaremos funciones biyectivas[13] f_{21} , f_{32} y f_{13}

$$f_{21} : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \quad , \quad f_{32} : \Sigma_3 \to \Sigma_2 \quad \text{y} \quad f_{13} : \Sigma_1 \to \Sigma_3$$

Las funciones biyectivas f_{21}, f_{32} y f_{13} distribuyen hiperplanos maximales en el simplex de cada jugador (esto se detalla en secciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3)

2.2 Ejemplo de Juego de 3- personas con único Punto de Equilibrio

A continuación, se desarrolla un ejemplo que muestra las características de los problemas que se estudian en éste trabajo.

Se considera $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, A_1, A_2, A_3\}$ un juego en forma normal de 3-personas, donde los conjuntos de estrategias de los jugadores son:

$$\Sigma_i = \{a,\ b\} \quad \text{para } i = 1,\ 2,\ 3$$

Las matrices de pago están definidas teniendo en cuenta que:

El jugador 1 juega con el 2, el 2 juega con el 3 y el 3 juega con el jugador 1 de la siguiente manera:

- El jugador 1 juega con el 2

$$a^{12}(i,j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

- El jugador 2 juega con el 3

$$a^{23}(j,k) = \begin{cases} 1 & si \quad j = k \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases}$$

- El 3 juega con el jugador 1

[13] Quintas, L.G.(1988 a))."Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points"

$$a^{31}(i,k)=\begin{cases} 1 & si \quad i\neq k \\ 0 & si \quad i=k \end{cases}$$

En consecuencia, las matrices de pago para la forma normal de este juego están dadas por:

	a	b
a	(1, 1, 0)	(0, 0, 0)
b	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)

a

	a	b
a	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)
b	(0, 0, 0)	(1, 1, 0)

b

El jugador 1 elige la fila, el jugador 2 elige la columna y el jugador 3 la matriz.

A continuación daremos una interpretación geométrica de las condiciones de equilibrio, teniendo en cuenta las definiciones de $F_1(x,y)$, $F_2(y,z)$ y $F_3(z,x)$:

- De la definición, $F_1(x,y)=a^{12}_{11}y_1x_1+a^{12}_{12}y_2x_1+a^{12}_{21}y_1x_2+a^{12}_{22}y_2x_2$ y sí además:

1) $x = e_1 = (1, 0)$ e $y = (y_1, 1-y_1)$, entonces $F_1(e_1,y)=y_1$

2) $x = e_2 = (0, 1)$ e $y = (y_1, 1-y_1)$, entonces $F_1(e_2,y)=1-y_1$

$F_1(e_i,y)$ con i=1,2 resulta una función lineal en la variable y_1. Y $F_1(e_1,y)$ es hiperplano maximal en el punto e_1 por superar a $F_1(e_2,y)$ en dicho punto, mientras que $F_1(e_2,y)$ es un hiperplano maximal en e_2 por superar a $F_1(e_1,y)$, en el punto mencionado. Es decir, $F_1(e_i,y)$ con i=1,2 son los hiperplanos del jugador 1 definidos sobre el simplex del jugador 2 (Quintas (1988 a)), y están ilustrados geométricamente de la siguiente manera:

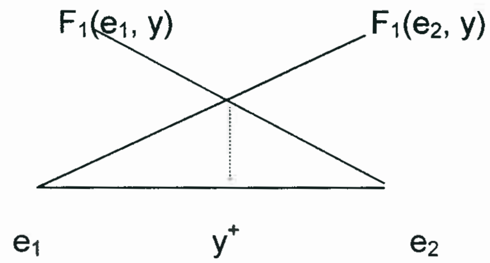


fig.1

Observación 1: En la fig.1, en el eje horizontal se grafican los elementos y $\in$ $\tilde{\Sigma}_2$, y^* es la proyección de la intersección de los hiperplanos $F_1(e_1, y)$ y $F_1(e_2, y)$ sobre el simplex $\tilde{\Sigma}_2$

- De la definición de, $F_2(y,z) = a_{11}^{23}\, z_1\, y_1 + a_{12}^{23}\, z_2\, y_1 + a_{21}^{23}\, z_1\, y_2 + a_{22}^{23}\, z_2\, y_2$ y además, sí:

1) Si $y=e_1 = (1, 0)$; $z = (z_1 , 1-z_1)$, entonces $F_2(e_1, z) = z_1$
2) Si y= $e_2 = (0, 1)$; z= (z_1 , 1-z_1) , entonces $F_2(e_2, z) = 1 - z_1$

$F_2(e_i, z)$ con i=1,2 resulta una función lineal en la variable z_1.

$F_2(e_1, z)$ es hiperplano maximal en el punto e_1 por superar a $F_2(e_2, z)$ en dicho punto, mientras que $F_2(e_2, z)$ es un hiperplano maximal en e_2 por superar a $F_2(e_1, z)$, en el punto mencionado.

Es decir, $F_2(e_i, z)$ con i=1,2 son los hiperplanos del jugador 2 definidos sobre el simplex del jugador 3[14], y están ilustrados geométricamente de la siguiente manera:

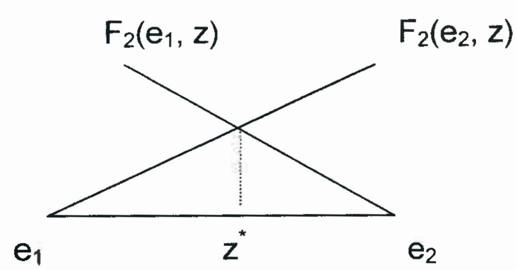


fig. 2

Observación 2: En la fig.2, en el eje horizontal se grafican los elementos z $\in$ $\tilde{\Sigma}_3$, z^* es la proyección de la intersección de los hiperplanos $F_2(e_1, z)$ y $F_2(e_2, z)$ sobre el simplex $\tilde{\Sigma}_3$

- De la definición de $F_3(z,x) = a_{11}^{31}\, x_1\, z_1 + a_{12}^{31}\, x_2\, z_1 + a_{21}^{31}\, x_1\, z_2 + a_{22}^{31}\, x_2\, z_2$ y además:

1) Si z=(1, 0) ; x= (x_1, 1-x_1) , entonces $F_3(e_1, x) = 1 - x_1$
2) Si z=(0, 1) ; x= (x_1, 1-x_1) , entonces $F_3(e_2, x) = x_1$

De modo que, $F_3(e_i, x)$ con i=1,2 resulta una función lineal en la variable x_1

Y $F_3(e_1, x)$ es hiperplano maximal en el punto e_1 por superar a $F_3(e_2, x)$ en dicho punto, mientras que $F_3(e_2, x)$ es un hiperplano maximal en e_2 por superar a $F_3(e_1, x)$, en el punto mencionado.

$F_3(e_i, x)$ con i=1,2 son los hiperplanos del jugador 1 definidos sobre el simplex del jugador 2[15] , y están ilustrados geométricamente de la siguiente manera:

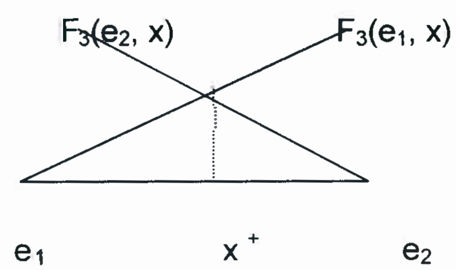


fig. 3

Observación 3: En la fig.3, en el eje horizontal se grafican los elementos x $\in$ $\tilde{\Sigma}_1$, x^* es la proyección de la intersección de los hiperplanos $F_3(e_1, x)$ y $F_3(e_2, x)$ sobre el simplex $\tilde{\Sigma}_1$

[14] Quintas, L.G.(1988 a)).''Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points

Para que exista equilibrio completamente mixto, en cada caso, los hiperplanos se deben intersecar en un único punto, cuya proyección en el simplex correspondiente, define las coordenadas del punto de equilibrio.

Así en nuestro caso, el punto $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ es un punto de equilibrio en la extensión mixta con:

$$x^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \;;\quad y^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \;;\quad z^+ = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Esto es una consecuencia inmediata de Teorema 1.

Evaluando, a la función esperanza matemática de cada jugador en (x^*, y^*, z^*) se obtiene:

$$E_1(x^*, y^*, z^*) = \tfrac{1}{2} \;;\; E_2(x^*, y^*, z^*) = \tfrac{1}{2} \quad;\; E_3(x^*, y^*, z^*)) = \tfrac{1}{2}$$

Los valores esperados para este juego, usando la definición 7 son:

$$v_1 = \tfrac{1}{2} \;;\; v_2 = \tfrac{1}{2} \;;\; v_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Para ver que $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ es el único punto de Equilibrio de Nash, con $x^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$; $y^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$; $z^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$, se utiliza el Teorema 2.

De la definición de las matrices del juego, tenemos que:

$T_2(\{j\}) = \{j\}$; $T_3(\{k\}) = \{k\}$; $T_1(\{i\}) = \{i + 1\}$ mod.2

S_1	$T_2(S_1)$	$T_3(T_2(S_1))$	$T_1(T_3(T_2(S_1)))$
{1}	{1}	{1}	{2}
{2}	{2}	{2}	{1}
{1,2}	{1},{2},{1,2}	{1},{2},{1,2}	{2},{1},{1,2}

Aquí, se observa que el único ciclo de la composición $T_1(T_3(T_2(S_1)))$, se tiene cuando S_1={1,2} y así resulta que el punto $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ es el único punto de equilibrio de Nash de este juego en extensión mixta es:

$$x^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \;,\; y^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \quad y \quad z^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

[15] Quintas, L.G.(1988 a)).''Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points

En general este tipo de resultado se logrará definiendo las funciones biyectivas[16], f_{21}, f_{32} y f_{13}.

$$f_{21} : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \quad , \quad f_{32} : \Sigma_3 \to \Sigma_2 \quad y \quad f_{13} : \Sigma_1 \to \Sigma_3$$

Que distribuyen los hiperplanos maximales en los vértices de los simplex.(Se detalla en secciones 2.3.1, 2.3.2. y 2.3.3.)

2.3 Construcción de las Matrices de Pago de los Jugadores

Se exhibirá una forma general de juegos q-cíclicos de 3-jugadores, con único punto de Equilibrio de Nash prefijado sobre la extensión mixta.

Se construirán las matrices de pago A_i de cada jugador i, con i=1, 2, 3, teniendo en cuenta las características del juego. Además se establecerán condiciones sobre las funciones esperanzas matemáticas de cada jugador E_1, E_2 y E_3 para que haya único punto de Equilibrio de Nash.

Se considera una terna (x, y, z), con $x \in \tilde{\Sigma}_1$, $y \in \tilde{\Sigma}_2$; $z \in \tilde{\Sigma}_3$

$$(x, y, z) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)) \quad con \quad x_s > 0, y_s > 0, \ z_s > 0 \qquad para \ s = 1, 2, 3$$

Se eligen valores arbitrarios no nulo (por conveniencia se solicita esta condición), que luego resultarán los únicos pagos esperados de equilibrio: v_1, v_2 y v_3.

La construcción geométrica extiende la realizada por Quintas (1988 a)), la misma consiste que en determinada región del simplex limitada por: un vértice predeterminado, el punto prefijado en equilibrio y ciertos puntos sobre las caras del simplex, tengan un único hiperplano maximizante.

---

[16] Quintas, L.G.(1988 a)).''Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points''

2.3.1 Construcción de la Matriz del jugador 1

Se establecerán condiciones sobre E_1, la función esperanza matemática del jugador 1 de manera que, $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ sea punto de Equilibrio de Nash.

Sea $y = (y_1, y_2, y_3) \in \tilde{\Sigma}_2$ un punto completamente mixto, prefijado, si se consideran también los siguientes puntos, que son vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_2$:

$$e_1=(1, 0, 0), \quad e_2=(0, 1, 0), \quad e_3=(0, 0, 1)$$

Y se eligen tres puntos, que tienen la siguiente forma:

$$\bar{y}_1 = \left(0,\ \overset{-1}{y_2},\ \overset{-1}{y_3}\right)$$

$$\bar{y}_2 = \left(\overset{-2}{y_1}\ 0,\ \overset{-2}{y_3}\right)$$

$$\bar{y}_3 = \left(\overset{-3}{y_1},\ \overset{-3}{y_2},\ 0\right)$$

Cada uno de estos puntos $\bar{y}_1$; $\bar{y}_2$; $\bar{y}_3$ está sobre una cara del simplex $\tilde{\Sigma}_2$, y se obtienen extendiendo cada segmento entre e_j e $y = (y_1, y_2, y_3)$ con j=1,2,3, hasta intersecar la cara opuesta al correspondiente vértice . (Ver fig.4).

Esto se hace, para obtener una partición poliedral del simplex $\tilde{\Sigma}_2$, que tenga como puntos extremos[17]: el punto prefijado $y = (y_1, y_2, y_3)$, los tres vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_2$ y los tres puntos $\bar{y}_j$ con j=1,2,3.

El proceso que guía la construcción de las matrices de pago se basa en analizar qué hiperplanos maximizan las regiones de la

[17] Marchi y Quintas(1987) estudian caracterizaciones de esos puntos sobre algunos juegos n-personas

partición del simplex. Lo que se espera es lograr que en cada una de las regiones sombreadas haya un único hiperplano maximizante.(Ver fig. 4)

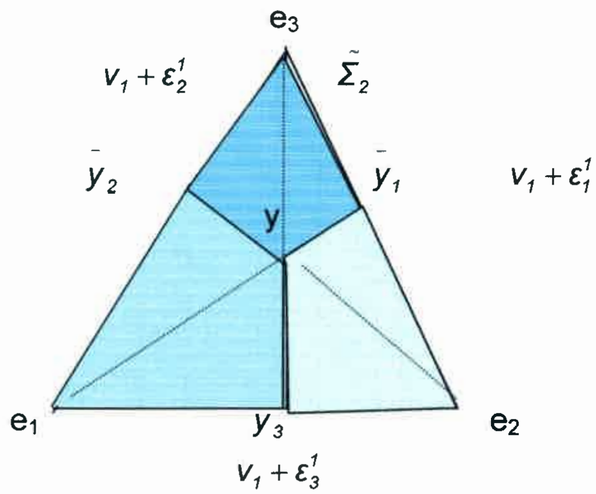


fig. 4

Para obtener $\bar{y}_j$ emplearemos la siguiente ecuación vectorial:

$$e_j + \lambda_j(y - e_j) = \bar{y}_j$$

La primera componente, cuando j=1 es: $1+\lambda_1(y_1-1)=0$

Entonces $\lambda_1 = \frac{1}{1-y_1} > 0$

La segunda componente, cuando j=2 es: $1+\lambda_2(y_2-1)=0$

Entonces $\lambda_2 = \frac{1}{1-y_2} > 0$

La tercera componente, cuando j=3 es: $1+\lambda_3(y_3-1)=0$

Entonces $\lambda_3 = \frac{1}{1-y_3} > 0$

Así: $\bar{y}_1 = \left(0, \frac{y_2}{1-y_1}, \frac{y_3}{1-y_1}\right)$; $\bar{y}_2 = \left(\frac{y_1}{1-y_2}, 0, \frac{y_3}{1-y_2}\right)$; $\bar{y}_3 = \left(\frac{y_1}{1-y_3}, \frac{y_2}{1-y_3}, 0\right)$

Debido a que $y \in \tilde{\Sigma}_2$ se tiene que:

$$1-y_1=\sum_{t\neq 1} y_t \;;\qquad 1-y_2=\sum_{t\neq 2} y_t \;;\qquad 1-y_3=\sum_{t\neq 3} y_t$$

Ahora se puede escribir a $\bar{y}_1$; $\bar{y}_2$; $\bar{y}_3$ como:

$$\bar{y}_1=\frac{1}{\sum_{t\neq 1} y_t}(0,\ y_2,\ y_3)\;;\qquad \bar{y}_2=\frac{1}{\sum_{t\neq 2} y_t}(y_1,\ 0,\ y_3)\;;\qquad \bar{y}_3=\frac{1}{\sum_{t\neq 3} y_t}(y_1,\ y_2,0).$$

Para cada vértice $e_i \in \tilde{\Sigma}_1$, para cada $y \in \tilde{\Sigma}_2$ teniendo en cuenta que, $F_1(x,y)=\sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{12}\, y_s\, x_r$ se obtiene:

$$F_1(e_i,y)=\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\, y_s = A_1^i\, y^T,$$

donde A_1^i es la i-ésima fila de la matriz de pago A_1 del jugador 1 e y^T es el transpuesto de y.

Vamos a definir a $F_1(i, y)$ tal que:

- En el punto $y=(y_1,y_2,y_3)$ tome el valor v_1, es decir:

$$F_1(i,y)=\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\, y_s = A_1^i\, y^T = v_1$$

Ver figura 4

- En el punto $\bar{y}_1$ alcance el valor $v_1+\varepsilon_1^1$, con $\varepsilon_1^1 > 0$, esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_1\left(i,\bar{y}_1\right)=\sum_{\substack{s=1\\ s\neq 1}}^{s=3} a_{is}^{12}\, \bar{y}_s^{1} = v_1+\varepsilon_1^1$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{y}_1$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{1-y_1}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq 1}}^{s=3} a_{is}^{12}\, y_s = v_1+\varepsilon_1^1$$

Ver figura 4

- En el punto $\bar{y}_2$ alcance el valor $v_1 + \varepsilon_2^1$ con $\varepsilon_2^1 > 0$; esto es:

$$F_1\left(i, \bar{y}_2\right) = \sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} \bar{y}_s^{2} = v_1 + \varepsilon_2^1$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{y}_2$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{1 - y_2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq 2}}^{s=3} a_{is}^{12} y_s = v_1 + \varepsilon_2^1$$

Ver figura 4

- Y en el punto $\bar{y}_3$ tome el valor $v_1 + \varepsilon_3^1$, con $\varepsilon_3^1 > 0$, es decir:

$$F_1\left(i, \bar{y}_3\right) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq 3}}^{s=3} a_{is}^{12} \bar{y}_s^{3} = v_1 + \varepsilon_3^1$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{y}_3$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{1 - y_3} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq 3}}^{s=3} a_{is}^{12} y_s = v_1 + \varepsilon_3^1$$

Ver figura 4.

Ahora introducimos la función f_{21} para encontrar la matriz de pago del jugador 1:

Sea la correspondencia biyectiva f_{21}, tal que:

$$f_{21} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \ , \ f_{21}(j) = i - hiperplano \quad F_1(i, y) = v_1$$

(donde i es el índice correspondiente al hiperplano maximizante)

Esto implica que:

$$F_1(i, j) = a_{ij}^{12} \ > \ a_{rj}^{12} = F_1(r, j) \text{ para cada } r \in \Sigma_1.$$

Para cada $e_i \in \tilde{\Sigma}_1$, para cada $e_j \in \tilde{\Sigma}_2$, por definición 3 $F_1(x,y) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{12}\, y_s\, x_r$, y como i es hiperplano maximizante:

$$F_1(i,j) = a_{ij}^{12}$$

Así la definición 5 de $J_1(y) = \{i \in \Sigma_1 : F_1(i,\ y) \geq F_1(i',y) \quad para \quad cada \quad i' \in \Sigma_1\}$ Implica que $J_1(e_j) = \{f_{21}(j)\}$.

Así, sobre cada vértice de $\tilde{\Sigma}_2$ habrá solamente un hiperplano máximo y f_{21} distribuirá diferentes hiperplanos máximos sobre cada vértice.

Se prescribe que, para cada t, tal que $f_{21}(t) \neq i$, en cada punto $\bar{y}_t$ el $f_{21}(t)$-hiperplano, pase por debajo del $f_{21}(j)$-hiperplano. Este último hiperplano toma el valor $v_1 + \varepsilon_j^1$.(figura 4)

Esto dice que, para $i \neq f_{21}(t)$):

$$F_1\left(i,\bar{y}_j\right) = \sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\, \bar{y}_s^{\,t} = \frac{1}{1-y_j}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{s=3} a_{is}^{12} y_s = v_1 + \varepsilon_t^1$$

$$>$$

$$\sum_{s=1}^{s=3} a_{f_{21}(t)s}^{12}\, \bar{y}_s^{\,t} = \frac{1}{1-y_t}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{s=3} a_{f_{21}(t)s}^{12} y_s = F_1\left(f_{21}(t),\bar{y}_j\right)$$

Ahora en el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ se requiere que, todos los hiperplanos tomen el mismo valor v_1. Es decir, para cada i (con i=1,2,3) tendremos en el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ que se satisface la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12}\, y_s = v_1$$

Y para cada t tal que $f_{21}(t) \neq i$, en el punto $\bar{y}_t$ se satisfacen las ecuaciones, siguientes:

$$\frac{1}{1-y_t}\left[\left(\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} y_s\right) - a_{it}^{12} y_t\right] = v_1 + \varepsilon_t^1$$

Para obtener la matriz de pago A_1 del primer jugador, para cada i fijo, los coeficientes de a_{ij}^{12} deben satisfacer las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} y_s = v_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, t:\ f_{21}(t) \neq i \\ \displaystyle\frac{1}{1-y_t}\left[\left(\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} y_s\right) - a_{it}^{12} y_t\right] = v_1 + \varepsilon_t^1 \end{cases}$$

- Consideremos a $f_{21}(j) = j$, para resolver el sistema:

Recordemos que se espera encontrar un hiperplano que maximiza cada una de las regiones de la partición del simplex, determinada por:

- Cuando i =1 , por los puntos y, $\bar{y}_2$; $\bar{y}_3$, para ello se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}^{12} y_1 + a_{12}^{12} y_2 + a_{13}^{12} y_3 = v_1 \\ a_{11}^{12} \dfrac{y_1}{1-y_2} + a_{13}^{12} \dfrac{y_3}{1-y_2} = v_1 + \varepsilon_2^1 \\ a_{11}^{12} \dfrac{y_1}{1-y_3} + a_{12}^{12} \dfrac{y_2}{1-y_3} = v_1 + \varepsilon_3^1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, por el Método de Eliminación Gaussiana, se obtienen los elementos la matriz A_1 :

$$a_{11}^{12} = v_1 + \frac{1}{y_1}\left(\varepsilon_2^1(1-y_2) + \varepsilon_3^1(1-y_3)\right);\ a_{12}^{12} = v_1 - \frac{\varepsilon_2^1(1-y_2)}{y_2};\ a_{13}^{12} = v_1 - \frac{\varepsilon_3^1(1-y_3)}{y_3}$$

- Para i =2, por los puntos $\bar{y}_1$; y; $\bar{y}_3$, para ello se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{22}^{12}\dfrac{y_2}{1-y_1}+a_{23}^{12}\dfrac{y_3}{1-y_1}=v_1+\varepsilon_1^1 \\ a_{21}^{12}y_1+a_{22}^{12}y_2+a_{23}^{12}y_3=v_1 \\ a_{21}^{12}\dfrac{y_1}{1-y_3}+a_{22}^{12}\dfrac{y_2}{1-y_3}=v_1+\varepsilon_3^1 \end{cases}$$

Nuevamente, resolviendo el sistema de manera análoga al anterior, se obtiene:

$$a_{21}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_1^1(1-y_1)}{y_1}\quad;\quad a_{22}^{12}=v_1+\frac{1}{y_2}\left(\varepsilon_1^1(1-y_1)+\varepsilon_3^1(1-y_3)\right);\qquad a_{23}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_3^1(1-y_3)}{y_3}$$

- Y para i =3, determinada por los puntos $\bar{y}_1$; $\bar{y}_2$; y, se tiene que resolver el sistema:

$$\begin{cases} a_{32}^{12}\dfrac{y_2}{1-y_1}+a_{33}^{12}\dfrac{y_3}{1-y_1}=v_1+\varepsilon_1^1 \\ a_{31}^{12}\dfrac{y_1}{1-y_2}+a_{33}^{12}\dfrac{y_3}{1-y_2}=v_1+\varepsilon_2^1 \\ a_{31}^{12}y_1+a_{32}^{12}y_2+a_{33}^{12}y_3=v_1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a_{31}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_1^1(1-y_1)}{y_1}\quad;\ a_{32}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_2^1(1-y_2)}{y_2}\quad;\quad a_{33}^{12}=v_1+\frac{1}{y_3}\left(\varepsilon_1^1(1-y_1)+\varepsilon_2^1(1-y_2)\right)$$

A continuación, se da un ejemplo, en donde se construye la matriz A_1 del jugador 1, cuando la función f_{21} no es la identidad, cuando $f_{21}(j) = j + 1$, mod. 3

Teniendo en cuenta, lo expresado anteriormente, y la definición de la función biyectiva f_{21}; los máximos están ubicados de la siguiente manera: Cuando j = 1, i = 2, para j = 2, i = 3, y para j = 3, i =1.

Es decir, $a_{21}^{12}=v_1+\dfrac{1}{y_1}\left(\varepsilon_2^1(1-y_2)+\varepsilon_3^1(1-y_3)\right)$; $a_{32}^{12}=v_1+\dfrac{1}{y_2}\left(\varepsilon_1^1(1-y_1)+\varepsilon_3^1(1-y_3)\right)$ y

$$a_{13}^{12}=v_1+\frac{1}{y_3}\left(\varepsilon_1^1(1-y_1)+\varepsilon_1^2(1-y_2)\right)$$

Para $f_{21}(j)\neq i$, cuando i=1 tenemos:

$$a_{11}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_1^1(1-y_1)}{y_1},\quad a_{i2}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_2^1(1-y_2)}{y_2}$$

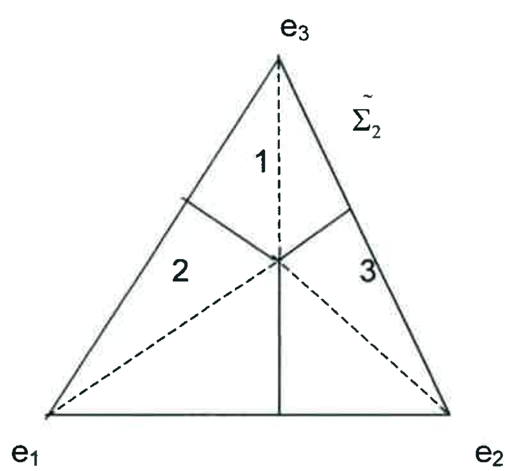
Para $f_{21}(j)\neq i$, cuando i=2 nos queda:

$$a_{22}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_2^1(1-y_2)}{y_2};\qquad a_{23}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_3^1(1-y_3)}{y_3}$$

Para $f_{21}(j)\neq i$, cuando i=3 nos queda:

$$a_{31}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_1^1(1-y_1)}{y_1};\qquad a_{33}^{12}=v_1-\frac{\varepsilon_3^1(1-y_3)}{y_3}$$

Ilustrando geométricamente los hiperplanos que, mayoran a los demás en cada vértice del simplex $\tilde{\Sigma}_2$ del jugador es 2, teniendo en cuenta la definición de la función f_{21}, se obtiene:



- Cuando se usa una función arbitraria f_{21} (j)

Se trabaja de manera similar a los ejemplos anteriores, es decir cuando $f_{21}(j) = j$ o cuando $f_{21}(j) = j+1$.

Cambiando la variable t por la j, y se obtienen, los elementos de la matriz de pago del jugador 1 son:

$$a_{ij}^{12} = \begin{cases} v_1 + \dfrac{1}{y_j} \displaystyle\sum_{f_{21}(s) \neq j} \varepsilon_s^1 (1 - y_s) & para \quad f_{21}(j) = i \\ v_1 - \dfrac{(1 - y_j)\varepsilon_j^1}{y_j} & para \quad f_{21}(j) \neq i \end{cases}$$

Observación 4: Se observa que:

- Los valores de los coeficientes de la matriz A_1 son $a_{ij}^{12} > v_1$ cuando $f_{21}(j) = i$. Esto coincide con el hecho geométrico que $f_{21}(j) = i$ (el iésimo -hiperplano) es máximo en el vértice e_j.
- Los valores de los coeficientes de la matriz A_1; cuando $f_{21}(j) \neq i$ son $a_{ij}^{12} < v_1$. Esto coincide con hecho geométrico que, en el vértice j-esimo del simplex $\tilde{\Sigma}_2$ el hiperplano i-ésimo no es máximo.
- Como $0 < y_j < 1$, los elementos de la matriz del primer jugador están bien definidos.
- La matriz A_1 de pago del jugador 1, es no singular, debido a que el determinante de A_1 es:

$$det(A_1) = \left(\sum_{s=1}^{s=3} (1 - y_s)\ \varepsilon_s^1 \right)^2 \frac{v_1}{y_1 . y_2 . y_3}$$

Como ε_j^1 son números arbitrarios positivos, en consecuencia: $\sum_{s=1}^{s=3} (1 - y_s)\ \varepsilon_s^1 > 0$, y además, v_1 es no nulo, por lo tanto el $det(A_1) \neq 0$.

2.3.2 Construcción de la Matriz del jugador 2

Para construir la matriz de pago del jugador 2, se realizará de manera similar, como se construyó A_1 la matriz de pago del jugador 1.

Se establecerán condiciones sobre la función esperanza matemática E_2 del jugador 2 de manera que: $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 x \tilde{\Sigma}_2 x \tilde{\Sigma}_3$ sea punto de Equilibrio de Nash.

Se considera $z = (z_1, z_2, z_3) \in \tilde{\Sigma}_3$, sean los vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_3$ las siguientes ternas:

$e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$

Y se eligen tres puntos, que tienen la siguiente forma:

$$\bar{z}_1 = \left(0,\ \bar{z}_2^1,\ \bar{z}_3^1\right)$$

$$\bar{z}_2 = \left(\bar{z}_1^2,\ 0,\ \bar{z}_3^2\right)$$

$$\bar{z}_3 = \left(\bar{z}_1^3,\ \bar{z}_2^3,\ 0\right)$$

Cada uno de estos puntos $\bar{z}_1$; $\bar{z}_1$; $\bar{z}_1$ está sobre una cara del simplex $\tilde{\Sigma}_3$ y los obtenemos extendiendo el segmento entre e_k y z con k=1,2,3, hasta la cara opuesta al correspondiente vértice. (Ver fig. 5)

Esto se hace, para obtener una partición poliedral del simplex $\tilde{\Sigma}_3$ que tiene como puntos extremos[18]: Los tres vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_3$, el punto prefijado z y los tres puntos $\bar{z}_k$, con k=1,2,3.

El proceso que guía la construcción de las matrices de pago se basa en analizar qué hiperplanos maximizan las regiones de las

[18] Marchi y Quintas(1987) estudian caracterizaciones de esos puntos sobre algunos juegos n-personas

particiones simplex. Lo que se espera es lograr que en cada una de las regiones sombreadas haya un único hiperplano maximizante.(Ver figura 5)

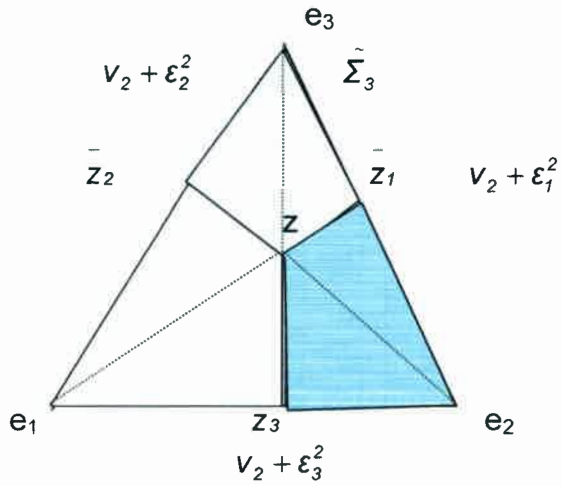


figura 5

Para obtener $\bar{z}_k$ emplearemos la siguiente ecuación vectorial:

$$e_k + \lambda_k(z - e_k) = \bar{z}_k$$

La primera componente, cuando k=1 es: $1+\lambda_1(z_1 - 1) = 0$

Entonces $\lambda_1 = \frac{1}{1-z_1} > 0$

La segunda componente, cuando, k=2 es: $1+\lambda_2(z_2 - 1) = 0$

Entonces $\lambda_2 = \frac{1}{1-z_2} > 0$

La tercera componente, cuando k=3 es: $1+\lambda_3(z_3 - 1) = 0$

Entonces $\lambda_3 = \frac{1}{1-z_3} > 0$

Así : $\bar{z}_1 = \left(0, \frac{z_2}{1-z_1}, \frac{z_3}{1-z_1}\right)$; $\bar{z}_2 = \left(\frac{z_1}{1-z_2}, 0, \frac{z_3}{1-z_2}\right)$; $\bar{z}_3 = \left(\frac{z_1}{1-z_3}, \frac{z_2}{1-z_3}, 0\right)$

Teniendo en cuenta que $z \in \tilde{\Sigma}_3$, se tiene que:

$$1 - z_1 = \sum_{t \neq k} z_t, \quad \text{con k=1,2,3.}$$

Se expresa a $\bar{z}_k$, de la siguiente manera:

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{\sum_{t \neq 1} z_t}(0, z_2, z_3) = \; ; \; \bar{z}_2 = \frac{1}{\sum_{t \neq 2} z_t}(z_1, 0, z_3) \quad ; \; \bar{z}_3 = \frac{1}{\sum_{t \neq 3} z_t}(z_2, z_2, 0).$$

Para cada vértice $e_j \in \tilde{\Sigma}_2$, para cada $z \in \tilde{\Sigma}_3$ teniendo en cuenta que: $F_2(y,z) = \sum_{r=1}^{r=3}\sum_{s=1}^{s=3} a_{rs}^{23} z_s y_r$ por definición 3

En consecuencia: $F_2(j,z) = a_{j1}^{23} z_1 + a_{j2}^{23} z_2 + a_{j3}^{23} z_3 = A_2^j \, z^T$

Considerando a A_2^j es la j-ésima fila de la matriz del jugador 2 e z^T es el transpuesto de z.

Se requiere que $F_2(j, z)$ alcance:

- En el punto z el valor v_2, esto es:

$$a_{j1}^{23} \, z_1 + a_{j2}^{23} \, z_2 + a_{j3}^{23} \, z_3 = v_2$$

Lo que significa que $F_2(j, z)$ es el j-esimo hiperplano del jugador 2, sobre el simplex del jugador 3.

Ver figura 5

- En el punto $\bar{z}_k$ alcance el valor $v_2 + \varepsilon_k^2$, con $\varepsilon_k^2 > 0$, (con k=1, 2, 3) esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_2\left(j, \bar{z}_k\right) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{s=3} a_{js}^{23} \, \bar{z}_s^{\,k} = v_2 + \varepsilon_k^2$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{z}^{\,k}$, la ecuación anterior se traduce en:

$$\frac{1}{1-z_j}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{s=3} a_{js}^{23} z_s = v_2 + \varepsilon_j^2$$

Ver figura 5.

Ahora introducimos la función f_{32} para definir la matriz A_2 de pago del jugador 2.

Se elige la función biyectiva f_{32} de modo que satisfaga:
$f_{32} : \Sigma_3 \to \Sigma_2$, $f_{32}(k) = j-hiperplano\ F_2(j, z) = v_2$

(donde j es el índice correspondiente al hiperplano maximizante)

Esto implica que :

$$F_2(j,\ k) = a_{jk}^{23} \ > \ a_{rk}^{23} = F_2(r,\ k) \ \text{ para cada } r \in \Sigma_2$$

Para cada $e_j \in \tilde{\Sigma}_2$, para cada $e_k \in \tilde{\Sigma}_3$, por definición 3
$F_2(y,z) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{23}\ z_s\ y_r$, y como j es hiperplano maximizante:

$$F_2(j,\ k) = a_{jk}^{23}$$

Así de la definición 5 de $J_2(z) = \{ j \in \Sigma_2 : F_2(j,z) \geq F_2(j',z) \ para \ \ cada \ \ j' \in \Sigma_2 \}$
Implica que $J_2(e_j) = \{f_{32}(k)\}$.

Así sobre cada vértice de $\tilde{\Sigma}_3$ habrá solamente un hiperplano máximo y f_{32} distribuirá diferentes hiperplanos máximos sobre cada vértice.

Se prescribe que, para cada t tal que $f_{32}(t) \neq j$, en cada punto $\bar{z}_t$ el $f_{32}(t)$-hiperplano, pase por debajo del $f_{32}(k)$-hiperplano. Este último toma el valor $v_2 + \varepsilon_k^2$.

Esto dice que, para $j \neq f_{21}(t)$):

$$F_2\left(j,\bar{z}_k\right)=\sum_{s=1}^{s=3}a_{js}^{23}\,\bar{z}^{s}=\frac{1}{1-z_k}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{s=3}a_{js}^{23}z_s=v_2+\varepsilon_t^{\,2}$$

$$>$$

$$\sum_{s=1}^{s=3}a_{f_{32}(t)s}^{23}\,\bar{z}^{s}=\frac{1}{1-z_k}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{s=3}a_{f_{32}(t)s}^{23}z_s=F_2\left(f_{32}(k),\bar{z}_k\right)$$

En el punto $z=(\,z_1,\ z_2,\ z_3)$ se requiere, que todos los hiperplanos tomen el mismo valor v_2. Es decir, para cada j (con j=1,2,3) en el punto $z=(\,z_1,\ z_2,\ z_3)$ que se satisface la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{s=3}a_{js}^{23}z_s=v_2$$

Y para cada t tal que $f_{32}(t)\neq j$, en el punto $\bar{z}_t$ se satisfacen las ecuaciones, siguientes:

$$\frac{1}{1-z_t}\left[\left(\sum_{s=1}^{s=3}a_{js}^{23}z_t\right)-a_{jt}^{23}z_t\right]=v_2+\varepsilon_t^2$$

Para obtener la matriz A_2 del segundo jugador, para caga j fijo los coeficientes a_{jk}^{23} deben satisfacer las siguientes tres ecuaciones.

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=1}^{s=3}a_{js}^{23}z_s=v_2\\ y\quad \forall t: f_{32}(t)\neq j\\ \displaystyle\frac{1}{1-z_t}\left[\left(\sum_{s=1}^{s=3}a_{js}^{23}z_t\right)-a_{jt}^{23}z_t\right]=v_2+\varepsilon_t^2\end{cases}$$

Recordemos que se espera encontrar un hiperplano que maximiza cada una de las regiones de la partición del simplex, determinado por:

- Consideremos $f_{32}(\,k)=k$

- Los puntos z, $\bar{z}_2$; $\bar{z}_3$, cuando j= 1, se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}^{23} z_1 + a_{12}^{23} z_2 + a_{13}^{23} z_3 = v_2 \\ a_{11}^{23} \dfrac{z_1}{1-z_2} + a_{13}^{23} \dfrac{z_3}{1-z_2} = v_2 + \varepsilon_2^2 \\ a_{11}^{12} \dfrac{z_1}{1-z_3} + a_{12}^{12} \dfrac{z_2}{1-z_3} = v_2 + \varepsilon_3^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a_{11}^{23} = v_2 + \frac{1}{z_1}\left(\varepsilon_2^2(1-z_2) + \varepsilon_3^2(1-z_3)\right); \quad a_{12}^{23} = v_2 - \frac{\varepsilon_2^2(1-z_2)}{z_2}; \quad a_{13}^{23} = v_2 - \frac{\varepsilon_3^2(1-z_3)}{z_3}$$

- Por los puntos $\bar{z}_1$; z ; $\bar{z}_3$, cuando j= 2, se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{22}^{23} \dfrac{z_2}{1-z_1} + a_{23}^{23} \dfrac{z_3}{1-z_1} = v_2 + \varepsilon_1^2 \\ a_{21}^{23} z_1 + a_{22}^{23} z_2 + a_{23}^{23} z_3 = v_2 \\ a_{21}^{23} \dfrac{z_1}{1-z_3} + a_{22}^{23} \dfrac{z_2}{1-z_3} = v_2 + \varepsilon_3^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de manera análoga a los anteriores, se obtiene que:

$$a_{21}^{23} = v_2 - \frac{\varepsilon_1^2(1-z_1)}{z_1} \quad ; \quad a_{22}^{23} = v_2 + \frac{1}{z_2}\left(\varepsilon_1^2(1-z_1) + \varepsilon_3^2(1-z_3)\right);$$

$$a_{23}^{23} = v_2 - \frac{\varepsilon_3^2(1-z_3)}{z_3}$$

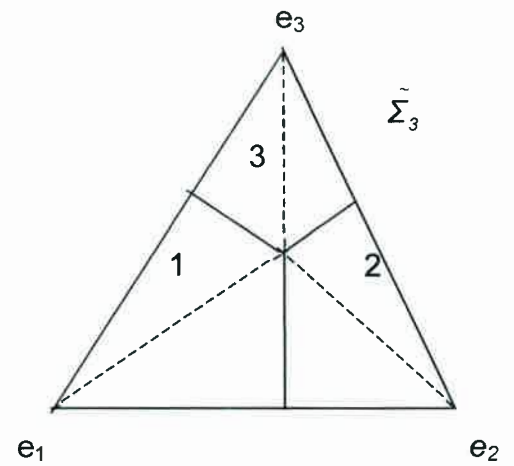
- Los puntos $\bar{z}_1$; $\bar{z}_2$; z , cuando j= 3, se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{32}^{23} \dfrac{z_2}{1-z_1} + a_{33}^{23} \dfrac{z_3}{1-z_1} = v_2 + \varepsilon_1^2 \\ a_{31}^{23} \dfrac{z_1}{1-z_2} + a_{33}^{23} \dfrac{z_3}{1-z_2} = v_2 + \varepsilon_2^2 \\ a_{31}^{23} z_1 + a_{32}^{23} z_2 + a_{33}^{23} z_3 = v_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a^{23}_{31} = v_2 - \frac{\varepsilon_1^2(1-z_1)}{z_1} \quad ; \quad a^{23}_{32} = v_2 - \frac{\varepsilon_2^2(1-z_2)}{z_2} \quad ; \quad a^{23}_{33} = v_2 + \frac{1}{z_3}\left(\varepsilon_1^2(1-z_1) + \varepsilon_2^2(1-z_2)\right)$$

Teniendo en cuenta la función biyectiva f_{32}, que, distribuye los hiperplanos máximos del jugador 2, en los vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_3$ del jugador 3 e ilustrando geométricamente, se obtiene:



Considerando una función arbitraria f_{32}, los elementos de la matriz A_2 de pago del jugador 2 son:

$$a^{23}_{jk} = \begin{cases} v_2 + \dfrac{1}{z_k} \displaystyle\sum_{f_{32}(s) \neq k} \varepsilon_s^2(1-z_s) & para \quad f_{32}(k) = j \\ v_2 - \dfrac{(1-z_k)\varepsilon_k^2}{z_k} & para\, f_{32}(k) \neq j \end{cases}$$

Observación 5: Se realizan las siguientes observaciones, respecto a los elementos de la matriz construida:

- Como $0 < z_k < 1$ están bien definidos.

- Cuando $f_{32}(k)= j$ dichos elementos son $a_{jk}^{23} > v_2$; esto coincide con el hecho geométrico que en el vértice k-ésimo del simplex $\tilde{\Sigma}_3$ el hiperplano j-ésimo es máximo.
- Cuando $f_{32}(k) \neq j$, los elementos $a_{jk}^{23} < v_2$; esto nuevamente coincide con el hecho geométrico que en el vértice k-esimo del simplex $\tilde{\Sigma}_3$ el hiperplano j-ésimo no es máximo allí.
- La matriz de pago A_2 del jugador 2 es no singular, debido a que:

$$det(A_2) = \left(\sum_{s=1}^{s=3}(1-z_s)\ \varepsilon_s^2\right)^2 \frac{v_2}{z_1.z_2.z_3}$$

Y como, ε_k^2 son números arbitrarios positivos, en consecuencia: $\sum_{s=1}^{s=3}(1-z_s)\ \varepsilon_s^2 > 0$, además, v_2 es no nulo, por lo tanto el $det(A_2) \neq 0$.

2.3.3 Construcción de la Matriz del jugador 3

Para encontrar la matriz de pago del jugador 3, se construirá de manera análoga, como se construyeron las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Se establecerán nuevamente condiciones sobre la E_3, función esperanza matemática del jugador 3, de manera que $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \, x \, \tilde{\Sigma}_2 \, x \, \tilde{\Sigma}_3$ sea punto de Equilibrio de Nash.

Sea $x \in \tilde{\Sigma}_1$ con $x = (x_1, x_2, x_3)$, se consideran las siguientes ternas que son vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_1$:

$$e_1=(1, 0, 0), \quad e_2=(0, 1, 0), \quad e_3=(0, 0, 1)$$

Y se eligen tres puntos, que tienen la siguiente forma:

$$\bar{x}_1 = \left(0,\ \overset{-1}{x_2},\ \overset{-1}{x_3}\right)$$

$$\bar{x}_2 = \left(\overset{-2}{x_1},\ 0,\ \overset{-2}{x_3}\right)$$

$$\bar{x}_3 = \left(\overset{-3}{x_1},\ \overset{-3}{x_2},\ 0\right)$$

Cada uno de estos puntos $\bar{x}_1$; $\bar{x}_2$; $\bar{x}_3$ está sobre una cara del simplex $\tilde{\Sigma}_1$ del jugador 1 y se los obtiene extendiendo el segmento entre cada vértice y el punto fijo x, es decir, entre e_i y x con i=1,2,3, hasta intersecar la cara opuesta al correspondiente vértice.

Esto se hace, para realizar una partición poliedral del simplex $\tilde{\Sigma}_1$ que tiene como puntos extremos[19]: los tres vértices del simplex $\tilde{\Sigma}_1$, el punto x prefijado y los tres puntos $\bar{x}_i$ con i=1,2,3,. (Ver figura 6)

El proceso que guía la construcción de las matrices de pago se basa en analizar qué hiperplanos maximizan las regiones de las particiones simplex. Lo que se espera es lograr que en cada una de las regiones sombreadas haya un único hiperplano maximizante. (Ver figura 6)

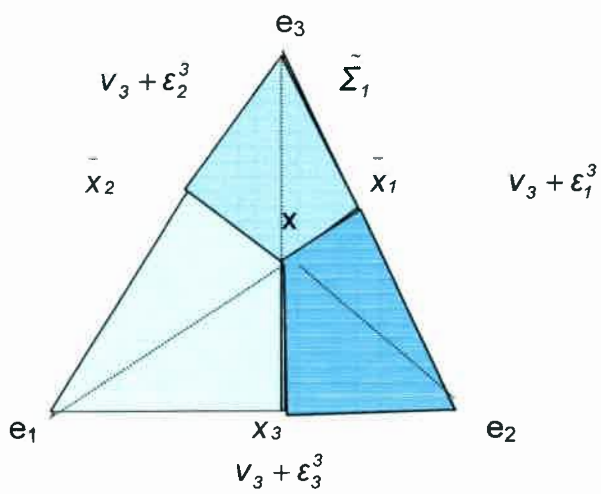


figura 6

Para obtener $\bar{x}_i$ emplearemos la siguiente ecuación vectorial:

$$e_i + \lambda_i(x - e_i) = \bar{x}_i$$

La primera componente, cuando i = 1 es: $1+\lambda_1(x_1 - 1) = 0$

Entonces $\lambda_1 = \dfrac{1}{1-x_1} > 0$

La segunda componente, cuando i = 2 es: $1+\lambda_2(x_2 - 1) = 0$

Entonces $\lambda_2 = \dfrac{1}{1-x_2} > 0$

La tercera componente, cuando i = 3 es: $1+\lambda_3(x_3 - 1) = 0$

Entonces $\lambda_3 = \dfrac{1}{1-x_3} > 0$

Así : $\bar{x}_1 = \left(0, \dfrac{x_2}{1-x_1}, \dfrac{x_3}{1-x_1}\right)$; $\bar{x}_2 = \left(\dfrac{x_1}{1-x_2}, 0, \dfrac{x_3}{1-x_2}\right)$; $\bar{x}_3 = \left(\dfrac{x_1}{1-x_3}, \dfrac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$

Se puede escribir a $\bar{x}_i$, teniendo en cuenta que el vector x es un vector de probabilidad :

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{\sum_{t\neq 1} x_t}(0, x_2, x_3) = \; ; \; \bar{x}_2 = \frac{1}{\sum_{t\neq 2} x_t}(x_1, 0, x_3) \; ; \; \bar{x}_3 = \frac{1}{\sum_{t\neq 3} x_t}(x_1, x_2, 0).$$

Para cada vértice $e_k \in \tilde{\Sigma}_3$, para cada $x \in \tilde{\Sigma}_1$, teniendo en cuenta que, $F_3(z,x) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{31}\, x_s\, z_r$ se obtiene:

$$F_3(k, x) = a_{k1}^{31}x_1 + a_{k2}^{31}x_2 + a_{k3}^{31}x_3 = A_3^k\, x^t \;;$$

donde A_3^k es la k-ésima fila de la matriz de pago A_3 del jugador 3 y x^T es el transpuesto de x.

[19] Marchi y Quintas(1987) estudian caracterizaciones de esos puntos sobre algunos juegos n-personas

Se requiere que $F_3(k, x)$ alcance:

- En el punto x el valor v_3 , esto es:

$$a_{k1}^{31}x_1 + a_{k2}^{31}x_2 + a_{k3}^{31}x_3 = v_3$$

Lo que significa que $F_3(k, x)$ es el k-esimo hiperplano del jugador 3, sobre el simplex del jugador 1. (Ver figura 6)

- En el punto $\bar{x}_i$ alcance el valor $v_3 + \varepsilon_i^3$, con $\varepsilon_i^3 > 0$, (con i=1, 2, 3) esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_3\left(k, \bar{x}_i\right) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{s=3} a_{ks}^{31} \bar{x}_s^{-i} = v_3 + \varepsilon_i^3$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\bar{x}_i$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{1 - x_t} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{s=3} a_{ks}^{31} x_s = v_3 + \varepsilon_t^3$$

(Ver figura 6)

Ahora introducimos la función f_{13} para definir la matriz de pago del jugador 3.

Sea la correspondencia biyectiva f_{13} de modo que satisfaga.: $f_{13} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$, $f_{13}(i) = k-hiperplano\ F_3(k, x) = v_3$

(donde k es el índice correspondiente al hiperplano maximizante)

Esto implica que:

$$F_3(k, i) = a_{ki}^{31} \quad > \quad a_{ri}^{31} = F_3(r, i) \text{ para cada } r \in \Sigma_3.$$

Para cada $e_k \in \tilde{\Sigma}_3$, para cada $e_i \in \tilde{\Sigma}_1$, teniendo en cuenta la definición 3 de $F_3(z,x) = \sum_{s=1}^{s=3}\sum_{r=1}^{r=3} a_{rs}^{31}\, x_s\, z_r$ y como k es el hiperplano maximizante:

$$F_3(k,i) = a_{ki}^{31}$$

Así la definición 5 de

$J_3(x) = \{k \in \Sigma_3 : F_3(x,\ k) \geq F_3(x,\ k')\ \text{para cada}\ k' \in \Sigma_3\}$

Implica que $J_3(e_i)=\{f_{13}(i)\}$.

Así, en cada vértice de $\tilde{\Sigma}_1$ habrá solamente un hiperplano máximo y f_{13} distribuirá diferentes hiperplanos máximos sobre cada vértice.

Se requiere que, para cada t, tal que $f_{13}(t) \neq k$, en cada punto $\bar{x}_i$ con i=1,2,3, el $f_{13}(t)$-hiperplano, pase por debajo del hiperplano f_{13}(i)-hiperplano. Este último hiperplano tome el valor $v_3 + \varepsilon_i^3$.

Es decir, para $k \neq f_{13}(i))$:

$$F_3\left(k, \bar{x}_i\right) = \sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} \bar{x}^{s} = \frac{1}{1-x_i} \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{s=3} a_{ks}^{31} x_s = v_3 + \varepsilon_t^3$$

$$>$$

$$\sum_{l=1}^{l=3} a_{f_{13}(i)l}^{31} \bar{x}^{i} = \frac{1}{1-x_i} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{l=3} a_{f_{13}(i)l}^{13} x_l = F_3\left(f_{13}(i), \bar{x}_i\right).$$

En el punto $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ se requiere que todos los hiperplanos alcancen el mismo valor v_3.: Es decir, para cada k (con k=1,2,3) en el punto $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ se satisface la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} x_s = v_3 \qquad \text{para k=1,2,3}$$

Y para cada t tal que $f_{13}(t) \neq k$, en el punto $\bar{x}_t$ se satisfacen las ecuaciones, siguientes:

$$\frac{1}{1-x_t}\left[\left(\sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} x_t\right) - a_{kt}^{31} x_t\right] = v_3 + \varepsilon_t^3$$

Para obtener la matriz de pago A_3 del tercer jugador, para caga k fijo, los coeficientes a_{ki}^{31} deben satisfacer las siguientes tres ecuaciones.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} x_s = v_3 \\ y \quad \forall t : f_{13}(t) \neq k \\ \displaystyle\frac{1}{1-x_i}\left[\left(\sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} x_t\right) - a_{kt}^{31} x_t\right] = v_3 + \varepsilon_t^3 \end{cases}$$

- Consideremos a $f_{13}(i) = i$

Se espera encontrar un hiperplano que maximiza cada una de las regiones de la partición del simplex, determinada por:

- Cuando k =1, por los puntos x ; $\bar{x}_2$; $\bar{x}_3$, y para hallar la ecuación del hiperplano maximizante, se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}^{31} x_1 + a_{12}^{31} x_2 + a_{13}^{31} x_3 = v_3 \\ a_{11}^{31} \dfrac{x_1}{1-x_2} + a_{13}^{31} \dfrac{x_3}{1-x_2} = v_3 + \varepsilon_2^3 \\ a_{11}^{31} \dfrac{x_1}{1-x_3} + a_{12}^{31} \dfrac{x_2}{1-x_3} = v_3 + \varepsilon_3^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a_{11}^{31} = v_3 + \frac{1}{x_1}\left(\varepsilon_1^3(1-x_2) + \varepsilon_3^3(1-x_3)\right); \; a_{12}^{31} = v_3 - \frac{\varepsilon_2^3(1-x_2)}{x_2}; \; a_{13}^{31} = v_3 - \frac{\varepsilon_3^3(1-x_3)}{x_3}$$

- Para k=2 por los puntos $\bar{x}_1$; x; $\bar{x}_3$, para encontrar el hiperplano maximizante se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{22}^{31}\dfrac{x_2}{1-x_1}+a_{23}^{31}\dfrac{x_3}{1-x_1}=v_3+\varepsilon_1^3 \\ a_{21}^{31}x_1+a_{22}^{13}z_2+a_{23}^{31}x_3=v_3 \\ a_{21}^{31}\dfrac{x_1}{1-x_3}+a_{22}^{31}\dfrac{x_2}{1-x_3}=v_3+\varepsilon_3^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de manera análoga al anterior, obtenemos:

$$a_{21}^{31}=v_3-\frac{\varepsilon_1^3(1-x_1)}{x_1}\quad ;\quad a_{22}^{31}=v_3+\frac{1}{x_2}\left(\varepsilon_1^3(1-x_1)+\varepsilon_3^3(1-x_3)\right);\quad a_{23}^{31}=v_3-\frac{\varepsilon_3^3(1-x_3)}{x_3}$$

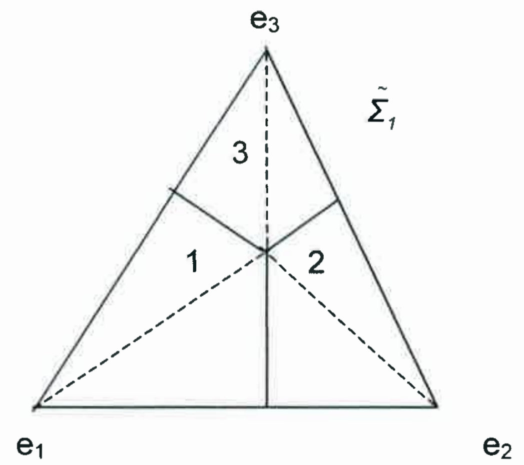
- Y para k =3, por los puntos $\bar{x}_1$; $\bar{x}_2$; x , para encontrar el hiperplano maximizante, se debe resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_{32}^{31}\dfrac{x_2}{1-x_1}+a_{33}^{31}\dfrac{x_3}{1-x_1}=v_3+\varepsilon_1^3 \\ a_{31}^{31}\dfrac{x_1}{1-x_2}+a_{33}^{31}\dfrac{x_3}{1-x_2}=v_3+\varepsilon_2^3 \\ a_{31}^{31}z_1+a_{32}^{31}z_2+a_{33}^{31}z_3=v_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a_{31}^{31}=v_3-\frac{\varepsilon_1^3(1-x_1)}{x_1}\quad ;\quad a_{32}^{31}=v_3-\frac{\varepsilon_2^3(1-x_2)}{x_2}\quad ;\quad a_{33}^{31}=v_3+\frac{1}{x_3}\left(\varepsilon_1^3(1-x_1)+\varepsilon_2^3(1-x_2)\right)$$

Teniendo en cuenta la función biyectiva f_{13}, que, distribuye los hiperplanos máximos del jugador 3, en los vértices del simplex $\bar{\Sigma}_1$ del jugador 1, e ilustrando geométricamente, se obtiene:



Considerando a una f_{13} arbitraria, los elementos de la matriz A_3 de pago del jugador 3 son:

$$a_{ki}^{31} = \begin{cases} v_3 + \dfrac{1}{x_i} \displaystyle\sum_{f_{13}(t) \neq i} \varepsilon_t^3 (1 - x_t) & para \quad f_{13}(i) = k \\ v_3 - \dfrac{(1 - x_i)\varepsilon_i^3}{x_i} & para\, f_{13}(i) \neq k \end{cases}$$

Observación 6: Se observa, respecto a la matriz del jugador 3 que:

- Como $0 < x_i < 1$ los elementos de la matriz están bien definidos.
- Los valores de los coeficientes de la matriz, son $a_{ki}^{31} > v_3$ cuando $f_{13}(i) = k$, esto coincide con el hecho geométrico, que en el vértice i-esimo del simplex $\tilde{\Sigma}_1$ el hiperplano k-ésimo es máximo ahí.
- Los valores de los coeficientes, cuando $f_{13}(i) \neq k$ son $a_{ki}^{31} < v_3$ esto coincide con el hecho geométrico, que en el vértice i-esimo del simplex $\tilde{\Sigma}_1$ el hiperplano k-ésimo no es máximo.
- La matriz de pago A_3 del jugador 3 es no singular, debido a que, el determinante de la matriz A_3 es igual a:

$$det(A_3) = \left(\sum_{s=1}^{s=3} (1 - x_s)\ \varepsilon_s^3 \right)^2 \frac{v_3}{x_1.x_2.x_3}$$

Y como, ε_i^3 son números arbitrarios positivos, en consecuencia: $\sum_{s=1}^{s=3} (1 - x_s)\ \varepsilon_s^3 > 0$, además, v_3 es no nulo, por lo tanto el $det(A_3) \neq 0$.

2.4 Verificación que (x, y, z) es Punto de Equilibrio de Nash

El punto $(x, y, z) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3))$ con $x \in \tilde{\Sigma}_1$, $y \in \tilde{\Sigma}_2$; $z \in \tilde{\Sigma}_3$ y con $x_s > 0, y_s > 0,\ z_s > 0$ *para* $s = 1, 2, 3$ es un Punto de Equilibrio Nash, ya que se satisfacen las inclusiones:

$S(x) \subseteq J_1(y)$; $S(y) \subseteq J_2(z)$; $S(z) \subseteq J_3(x)$ Teorema 1

Debido a:

1) Que todos los hiperplanos del primer jugador toman el mismo valor v_1 sobre el punto $y = (y_1, y_2, y_3)$, ya que $\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}^{12} y_s = v_1$. Entonces $J_1(y)$={1,2, 3}= $S(x)$.

2) Que todos los hiperplanos del segundo jugador toman el mismo valor v_2 sobre el punto $z = (z_1, z_2, z_3)$, ya que $\sum_{s=1}^{s=3} a_{js}^{23} z_s = v_2$ sobre el punto z. Entonces $J_2(z)$={1,2, 3}= $S(y)$.

3) Que todos los hiperplanos del tercer jugador toman el mismo valor v_3 sobre el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$, ya que $\sum_{s=1}^{s=3} a_{ks}^{31} x_s = v_3$. Entonces $J_3(x)$={1,2, 3}= $S(z)$.

Debido a la construcción realizada en los parágrafos anteriores, existe un juego q- cíclico Γ completamente mixto, con matrices de pago de los jugadores A_1, A_2 y A_3 y que tiene a *(x, y, z)* como punto de Equilibrio de Nash para $\tilde{\Gamma}$. Es decir el siguiente resultado

Teorema 4: Teorema de existencia de juegos q- cíclicos con tres jugadores con (x,y,z) punto de Equilibrio de Nash prefijado

Dado $(x,y,z)=((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3))$ con $x_s>0$; $y_s>0$; $z_s>0$ para s=1,2,3, que satisfacen: $\sum_{s=1}^{s=3}x_s=1$; $\sum_{s=1}^{s=3}y_s=1$; $\sum_{s=1}^{s=3}z_s=1$; y valores no nulos v_1, v_2 y v_3. Y dadas , funciones $f_{21}:\Sigma_2\to\Sigma_1$, $f_{32}:\Sigma_3\to\Sigma_2$ y $f_{13}:\Sigma_1\to\Sigma_3$, y números positivos ε_s^i con i=1, 2, 3. Entonces, existe un juego Γ q-cíclico que tiene a (x, y, z) como punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto, y v_1, v_2 y v_3 son los valores esperados del juego Γ.

2.5 Unicidad del Punto de Equilibrio de Nash

En ésta sección se demuestra, que la familia de juegos construida anteriormente tiene al punto $(x,y,z)\in\tilde{\Sigma}_1 x\tilde{\Sigma}_2 x\tilde{\Sigma}_3$ como único punto de Equilibrio de Nash.

Dadas las matrices de pago de los jugadores 1, 2 y 3 construidas anteriormente, en forma similar a la realizada para juegos bimatriciales[20], se eligen funciones f_{21}, f_{32} y f_{13} que satisfacen:

Para cada $(k',k'')\in\tilde{\Sigma}_3 x\tilde{\Sigma}_3$

si $\quad f_{13}\circ f_{21}\circ f_{32}(k')=k''$ entonces $f_{13}\circ f_{21}\circ f_{32}(k'')\neq k'$ (1)

o equivalentemente:

Para cada $(j',j'')\in\tilde{\Sigma}_2 x\tilde{\Sigma}_2$

si $\quad f_{32}\circ f_{13}\circ f_{21}(j')=j''$ entonces $f_{32}\circ f_{13}\circ f_{21}(j'')\neq j'$

o equivalentemente:

$$\text{Para cada } (i', i'') \in \tilde{\Sigma}_1 \, x \, \tilde{\Sigma}_1$$

$$\text{si} \qquad f_{21} \circ f_{32} \circ f_{13}(i') = i'' \text{ entonces } f_{21} \circ f_{32} \circ f_{13}(i'') \neq i'$$

Observación 7: Las funciones $f_{21}(j) = j+1$, mod. 3; $f_{32}(k) = k$ y $f_{13}(i) = i$, satisfacen las condición (1).

$T_1(\{j\}) = \{j+1\}$ mod.3 ; $T_2(\{k\}) = \{k\}$; $T_3(\{i\}) = \{i\}$

S_3	$T_2(S_3)$	$T_1(T_2(S_3))$	$T_3(T_1(T_2(S_3)))$
{1)	{1}	{2}	{2}
{2}	{2}	{3}	{3}
{3)	{3)	{1)	{1)
{1,2}	{1},{2},{1,2}	{2},{3},{2,3}	{2},{3},{2,3}
{1,3)	{1,3) {1), {3}	{1,2), {1), {2)	{1,2), {1), {2)
{2,3)	{2,3), {2), {3)	{1,3), {1), {3)	{1,3), {1), {3)
{1,2,3)	{1), {2), {3),{1,2},{2,3},{1,3}, {1,2,3}	{1), {2), {3),{1,2},{2,3},{1,3}, {1,2,3}	{1), {2), {3),{1,2},{2,3},{1,3}, {1,2,3}

Aquí, se observa que el único ciclo de la composición $T_3(T_1(T_2(S_3)$ se tiene cuando S_3={1,2,3} y así resulta que el punto $(x^*, y^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}_1 \, x \, \tilde{\Sigma}_2 \, x \, \tilde{\Sigma}_3$ es el único de Equilibrio de Nash..(Ver Teorema 3)

Además, elegimos números arbitrarios: ε_j^1 , ε_k^2 y ε_i^3 con lo que se tiene que:

$$\sum_{s=1}^{s=3}(1-y_s)\ \varepsilon_s^1 > 0 \quad , \sum_{s=1}^{s=3}(1-z_s)\ \varepsilon_s^2 > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{s=1}^{s=3}(1-x_s)\ \varepsilon_s^3 > 0 \quad (2)$$

[20] Quintas(1988 b) "Uniqueness of Nash Equilibrium Points in Bimatrix Games",

Esto es para asegurar que las matrices A_1, A_2 y A_3 de pago de los jugadores 1,2 y 3 sean no singulares.

Notación: Se denotará con:

- x^t; y^t; z^t a los vectores transpuestos de x; y; z.
- $(x')^t$; $(y')^t$; $(z')^t$ a los vectores transpuestos de x'; y'; z'
- $V_i = (v_i \ \ v_i \ \ v_i)^t$ a la matriz de orden 3x1 con elementos iguales a v_i con i=1, 2, 3.
- $U_i = (u_i \ \ u_i \ \ u_i)^t$ a la matriz de orden 3x1 con elementos iguales a u_i con i=1, 2, 3
- A_i^j al renglón j de la matriz del jugador i.

Teorema 5: **Teorema de Unicidad**

Dado el juego Γ q-cíclico construido en Teorema 4 que tiene a (x, y, z) como punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto. Y dadas , funciones f_{21}, f_{32}, f_{13} que satisfacen la condición (1), y números positivos ε_s^i con i=1, 2, 3 que satisfacen (2). Entonces, el (x, y, z) es único punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto del juego Γ.

Demostración:

Para demostrar la unicidad del Punto de Equilibrio de Nash, se analizan los siguientes casos:

Asumir que existe otro punto (x´, y´, z´) de Equilibrio de Nash con E_i(x´, y´, z´) = u_i con i=1,2,3 y que satisface:

I. Que los soportes cumplan que:

$$S(x') = S(x), \qquad S(y') = S(y), \qquad S(z') = S(z)$$

II. Que los soportes cumplan que:

a.- $S(x') = S(x), \quad S(y') = S(y), \quad S(z') \subseteq S(z)$ o

b.- $S(x') = S(x), \quad S(y') \subseteq S(y), \quad S(z') = S(z)$ o

c.- $S(x') \subseteq S(x), \quad S(y') = S(y), \quad S(z') = S(z)$

Si se prueba la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, para una de las condiciones de los soportes a, b, o c, es similar para las otras.

III. Que los soportes cumplan que:

a.- $S(x') \subseteq S(x), \quad S(y') = S(y), \quad S(z') \subseteq S(z)$o

b.- $S(x') \subseteq S(x), \quad S(y') \subseteq S(y), \quad S(z') = S(z)$ o

c.- $S(x') \subseteq S(x), \quad S(y') = S(y), \quad S(z') \subseteq S(z)$

Si se prueba la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, para una de las condiciones sobre los soportes a, b, o c, las pruebas de cualquiera de los casos son similares, por ello , es que solo se prueba una de ellas.

IV. Que los soportes cumplan que:

$$S(x') \subseteq S(x), \qquad S(y') \subseteq S(y), \qquad S(z') \subseteq S(z)$$

Demostremos los casos mencionados:

I. Que el punto (x', y', z') es completamente mixto, es decir, que los soportes cumplan que:

$$S(x') = S(x), \qquad S(y') = S(y), \qquad S(z') = S(z)$$

Debido a que, (x', y', z') es punto de Equilibrio de Nash, se verifican los sistemas:

$$A_1(y')^t = U_1 \quad ; \quad A_2(z')^t = U_2 \quad ; \quad A_3(x')^t = U_3$$

Esto significa que se satisfacen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

I) a) $A_1(y)^t = V_1$ b) $A_1(y')^t = U_1$

II) c) $A_2(z)^t = V_2$ d) $A_2(z')^t = U_2$

III) e) $A_3(x)^t = V_3$ f) $A_3(x')^t = U_3$

Si en I), se escribe la forma general de los sistemas a) y b), se obtiene:

$$a)\ \begin{cases} a_{11}^{12}y_1 + a_{12}^{12}y_2 + a_{13}^{12}y_3 = v_1 \\ a_{21}^{12}y_1 + a_{22}^{12}y_2 + a_{23}^{12}y_3 = v_1 \\ a_{31}^{12}y_1 + a_{32}^{12}y_2 + a_{33}^{12}y_3 = v_1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a_{11}^{12}y_1' + a_{12}^{12}y_2'' + a_{13}^{12}y_3' = u_1 \\ a_{21}^{12}y_1' + a_{22}^{12}y_2' + a_{23}^{12}y_3' = u_1 \\ a_{31}^{12}y_1' + a_{32}^{12}y_2' + a_{33}^{12}y_3' = u_1 \end{cases}$$

Multiplicando por u_1 a cada ecuación del sistema a) y por v_1 y a cada ecuación del sistema b) por u_1 y luego restando se obtiene:

$$\begin{cases} a_{11}^{12}(u_1y_1 - v_1y_1') + a_{12}^{12}(u_1y_2 - v_1y_2'') + a_{13}^{12}(u_1y_3 - v_1y_3') = 0 \\ a_{21}^{12}(u_1y_1 - v_1y_1') + a_{22}^{12}(u_1y_2 - v_1y_2'') + a_{23}^{12}(u_1y_3 - v_1y_3') = 0 \\ a_{31}^{12}(u_1y_1 - v_1y_1') + a_{32}^{12}(u_1y_2 - v_1y_2'') + a_{33}^{12}(u_1y_3 - v_1y_3') = 0 \end{cases}$$

Como la matriz A_1 es no singular, debido a que $v_1 \neq 0$ y que $\sum_{s=1}^{s=3}(1-y_s)\ \varepsilon_s^1 > 0$,

(Ver Observación 4), el sistema $A_1(u_1y - v_1y')^t = 0$ tiene única solución, en consecuencia:

$u_1y_1 - v_1y_1' = 0$, entonces $u_1y_1 = v_1y_1'$

$u_1y_2 - v_1y_2' = 0$, entonces $u_1y_2 = v_1y_2'$

$u_1y_3 - v_1y_3' = 0$, entonces $u_1y_3 = v_1y_3'$

Sumando miembro a miembro estas tres igualdades, se obtiene: $\sum_{s=1}^{s=3}u_1y_s = \sum_{s=1}^{s=3}v_1y_s'$, como los vectores $y = (y_1, y_2, y_3)$ e $y' = (y_1', y_2', y_3')$ son vectores que cumplen que: $\sum_{s=1}^{s=3}y_s = 1$; $\sum_{s=1}^{s=3}y_s' = 1$, se deduce que $u_1 = v_1$.

Por lo tanto, los sistemas a) y b) de I), se pueden escribir:

a') $A_1(y)^t = V_1$ b') $A_1(y')^t = V_1$

lo que conduce a $A_1(y - y')^t = 0$, y como A_1 es una matriz no singular y el sistema es homogéneo, tiene única solución, la trivial, en consecuencia $y = y'$.

De igual manera, trabajando con los sistemas de II) y III) se prueba que: $x = x'$; $z = z'$, teniendo en cuenta que las matrices A_2 y A_3 no singulares (Ver Observaciones 5 y 6).

Por lo tanto, se ha concluido que $x = x'$; $y = y'$; $z = z'$

II. El punto de equilibrio (x', y', z') satisface que:

$$S(x') = S(x), \quad S(y') = S(y), \quad S(z') \subseteq S(z)$$

Asumimos que $z' = (z_1', z_2', 0)$ y que $f_{32}(k) = k$, en consecuencia, la matriz de pago del jugador 2(construida en 2.3.2), tiene los máximos en la diagonal principal, es decir, la matriz tiene la siguiente forma: $\begin{pmatrix} \Delta & * & * \\ * & \Delta & * \\ * & * & \Delta \end{pmatrix}$, donde se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

- Sea $k \in S(z) - S(z')$, en este caso, k=3.

Denotamos con $A_2^{f_{32}(k)}$ al renglón $f_{32}(k)$ de la matriz del jugador 2.(Ver notación página 49)

$$A_2^{f_{32}(k)}(z')^t = \begin{pmatrix} a_{31}^{23} & a_{32}^{23} & a_{33}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \sum_{s \in S(z')} z_s' - \sum_{s \in S(z')} \frac{\varepsilon_s^2 (1 - z_s)}{z_s} z_s'$$

- Sea $r \in S(z')$, en este caso, r=1 o r= 2.

$$A_2^{f_{32}(r)}(z')^t = \begin{pmatrix} a_{r1}^{23} & a_{r2}^{23} & a_{r3}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \sum_{s \in S(z')} z_s' - \sum_{\substack{s \in S(z') \\ s \neq r}} \frac{\varepsilon_s^2 (1 - z_s)}{z_s} z_s' + \frac{z_r'}{z_r} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=3} \varepsilon_s^2 (1 - z_s)$$

Denotamos con $A_2^{f_{32}(r)}$ al renglón $f_{32}(r)$ de la matriz del jugador 2.(Ver notación página 49)

Restando $A_2^{f_{32}(r)}(z')^t$ y $A_2^{f_{32}(k)}(z')^t$ se obtiene:

$$A_2^{f_{32}(r)}(z')^t - A_2^{f_{32}(k)}(z')^t = v_2 \sum_{s\in S(z')} z_s' - \sum_{\substack{s\in S(z')\\ s\neq r}} \frac{\varepsilon_s^2(1-z_s)}{z_s} z_s' + \frac{z_r'}{z_r}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{s=3} \varepsilon_s^2(1-z_s) - \left(v_2 \sum_{s\in S(z')} z_s' - \sum_{s\in S(z')} \frac{\varepsilon_s^2(1-z_s)}{z_s} z_s' \right)$$

$$A_2^{f_{32}(r)}(z')^t - A_2^{f_{32}(k)}(z')^t = \frac{z_r'}{z_r}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{s=3} \varepsilon_s^2(1-z_s) + \frac{\varepsilon_r^2(1-z_r)}{z_r} z_r' = \frac{z_r'}{z_r}\sum_{s=1}^{s=3} \varepsilon_s^2(1-z_s)$$

Como $\sum_{s=1}^{s=3} \varepsilon_s^2(1-z_s) > 0$ y $r \in S(z')$

$A_2^{f_{32}(r)}(z')^t - A_2^{f_{32}(k)}(z')^t > 0$, lo que implica que $f_{32}(k) \notin J_2(z')$.

Debido a que (x', y', z') es punto de equilibrio, se cumple que: $S(y') \subseteq J_2(z')$ (Teorema 1) , por esta razón es que: $f_{32}(k) \notin S(y')$, en consecuencia: $y'_{f_{32}(k)} = 0$., lo que es imposible por que:

Como $S(y') = S(y)$, y (x, y, z) es un punto de equilibrio completamente mixto, lo que implica que. $|S(y)| = |S(y')| = 3$

En consecuencia, $S(z') = S(z)$, y estamos en caso I el punto de equilibrio de Nash es único.

III. Probaremos el caso b), es decir, que el (x', y', z') punto de Equilibrio de Nash satisface:

$$S(x') = S(x), \qquad S(y') \subseteq S(y), \qquad S(z') \subseteq S(z)$$

- Sea $k \in S(z) - S(z')$, en este caso, se supone k=3, f_{32}(k) = k, en consecuencia la matriz del jugador 2 (construida en 2.3.2) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} \Delta & * & * \\ * & \Delta & * \\ * & * & \Delta \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

En el caso II, se encontró $y'_{f_{32}(k)} = 0$, es decir, que $y'_3 = 0$.

- Sea $j \in S(y) - S(y')$, por hipótesis $S(y') \subseteq S(y)$, en este caso un j = 3 cumple esta condición .

Sea $f_{21}(j)$ =j+1 , en consecuencia la matriz del jugador 1(construida en 2.3.1) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} * & * & \Delta \\ \Delta & * & * \\ * & \Delta & * \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

Denotamos con $A_1^{f_{21}(j)}$ al renglón $f_{21}(j)$ de la matriz del jugador 1.

$$A_1^{f_{21}(j)}(y')^t = \begin{pmatrix} a_{11}^{12} & a_{12}^{12} & a_{13}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \sum_{s \in S(y')} y'_s - \sum_{s \in S(y')} \frac{\varepsilon_s^1 (1 - y_s)}{y_s} y'_s$$

Sea $r \in S(y')$, en este caso, r= 1 o r=2.

Denotamos con $A_1^{f_{21}(r)}$ al renglón $f_{21}(r)$ de la matriz del jugador 1.

$$A_1^{f_{21}(r)}(y')^t = \begin{pmatrix} a_{11}^{12} & a_{12}^{12} & a_{13}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \sum_{s \in S(y')} y'_s - \sum_{s \in S(y')} \frac{\varepsilon_s^1 (1 - y_s)}{y_s} y'_s + \frac{y'_r}{y_r} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=3} \varepsilon_s^1 (1 - y_s)$$

Restando $A_1^{f_{21(r)}}(y')^t$ y $A_1^{f_{21}(j)}(y')^t$ se obtiene, de manera análoga al caso anterior que: $A_1^{f_{21}(r)}(y')^t > A_1^{f_{21}(j)}(y')^t$, lo que significa que $f_{21}(j) \notin J_1(y')$.

$$A_1^{f_{21}(r)}(y')^t = \begin{pmatrix} a_{11}^{12} & a_{12}^{12} & a_{13}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \sum_{s \in S(y')} y'_s - \sum_{s \in S(y')} \frac{\varepsilon_s^1 (1 - y_s)}{y_s} y'_s + \frac{y'_r}{y_r} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=3} \varepsilon_s^1 (1 - y_s)$$

Restando $A_1^{f_{21}(r)}(y')^t$ y $A_1^{f_{21}(j)}(y')^t$ se obtiene, de manera análoga al caso anterior que: $A_1^{f_{21}(r)}(y')^t > A_1^{f_{21}(j)}(y')^t$, lo que significa que $f_{21}(j) \notin J_1(y')$.

Debido a que (x', y', z') es punto de Equilibrio de Nash $S(x') \subseteq J_2(y')$(Ver Teorema 1) , por esta razón es que: $f_{21}(j) \notin S_1(x')$, en consecuencia: $x'_{f_{21}(j)} = 0$, es decir $x'_1 = 0$.

Lo que es imposible por que $S(x') = S(x)$, y (x, y, z) es un punto de equilibrio completamente mixto, lo que implica que. $|S(x)| = |S(x')| = 3$

En consecuencia, $S(y') = S(y)$, $S(z') = S(z)$ y nuevamente por el caso I, el punto (x, y, z) es único.

IV. Que el (x', y', z') punto de Equilibrio de Nash es tal que los soportes satisfacen:

$$S(x') \subseteq S(x), \qquad S(y') \subseteq S(y), \qquad S(z') \subseteq S(z)$$

- Sea $k \in S(z) - S(z')$, en este caso, se supone k=3, $f_{32}(k)$ = k, en consecuencia la matriz del jugador 2 (construida en 2.3.2) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} \Delta & * & * \\ * & \Delta & * \\ * & * & \Delta \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

En el caso II, se encontró $y'_{f_{32}(k)} = 0$, es decir, que $y'_3 = 0$.

- Sea $j \in S(y) - S(y')$, por hipótesis $S(y') \subseteq S(y)$, en este caso un j = 3 cumple esta condición .

Sea $f_{21}(j)=j+1$, en consecuencia la matriz del jugador 1(construida en 2.3.1) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} * & * & \Delta \\ \Delta & * & * \\ * & \Delta & * \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos, ya se trabajó en el caso III y se arribó a que $x'_{f_{21}(j)}=0$, es decir $x'_1=0$.

- Sea $i\in S(x)-S(x')$, y consideremos $f_{13}(i)=i$, en consecuencia la matriz del jugador 3(construida en 2.3.3) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} \Delta & * & * \\ * & \Delta & * \\ * & * & \Delta \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

Trabajando de manera similar, a cuando $S(y')\subseteq S(y)$, $S(z')\subseteq S(z)$, se arriba a que $f_{13}(i)\notin J_3(x')$.

Debido a que (x',y',z') es punto de Equilibrio de Nash $S(z')\subseteq J_3(x')$(Ver Teorema 1) , por esta razón es que: $f_{13}(i)\notin S(z')$, en consecuencia: $z'_{f_{13}(i)}=0$, es decir $z'_1=0$.

- Ahora elegimos $k\in S(z)-S(z')$, tal que $\Phi(k)=f_{13}(f_{21}(f_{32}(k)))\in S(z')$, (La existencia de tal k, está garantizado (1))

Denotamos con $A_3^{\Phi(k)}$ al renglón $\Phi(k)$ de la matriz del jugador 3.

Para k= 3, $\Phi(3)=1$

$$A_3^{\Phi(k)}(x')=\begin{pmatrix} a_{11}^{31} & a_{12}^{31} & a_{13}^{31}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix}=v_3\sum_{s\in S(x')} z'_s-\sum_{s\in S(x')}\frac{\varepsilon_s^3(1-x_s)}{x_s}x'_s$$

y para cada r tal que $h(r)=f_{21}(f_{32}(r))\in S(x')$, r= 1 0 r= 2, en consecuencia, $\Phi(1)=2$ y $\Phi(2)=3$, si r= 2

Denotamos con $A_3^{\Phi(r)}$ al renglón $\Phi(r)$ de la matriz del jugador 3.

$$A_3^{\Phi(r)}(x')^t = (* \quad \Delta \quad *)\begin{pmatrix} 0 \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = v_3 \sum_{s \in S(x')} x_s' - \sum_{\substack{s \in S(x') \\ s \neq h(r)}} \frac{\varepsilon_s^3(1-x_s)}{x_s} x_s' + \frac{x_{h(r)}'}{x_{h(r)}} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq h(r)}}^{s=3} \varepsilon_s^3(1-x_s)$$

Si se resta $A_3^{\Phi(r)}(x')^t$ y $A_3^{\Phi(k)}(x')^t$, se obtiene:

$$A_3^{\Phi(r)}(x')^t - A_3^{\Phi(k)}(x')^t = \frac{x_{h(r)}'}{x_{h(r)}} \sum_{s=1}^{s=3} \varepsilon_s^3 (1 - x_s)$$

Esta resta es positiva debido a que $h(r) \in S(x')$ y que $\sum_{s=1}^{s=3} \varepsilon_s^3(1-x_s) > 0$

Es decir, $A_3^{\Phi(r)}(x')^t > A_3^{\Phi(k)}(x')^t$ (3)

Por otro lado, k es tal que $\Phi(k) \in S(z')$, y como *(x´, y´, z´)* es punto de Equilibrio de Nash, se cumple que: $S(z') \subseteq J_3(x')$(Ver Teorema 1), por lo tanto, también se satisface la siguiente desigualdad: $A_3^{\Phi(r)}(x')^t \leq A_3^{\Phi(k)}(x')^t$.

Las desigualdades (3) y (4) son incompatibles, a menos que $x_{h(r)}' = 0$.

Pero, si esto ocurriera el vector x' es el nulo, y esto es un absurdo, ya que es un vector probabilidad.

En consecuencia, es imposible que existe un punto de Equilibrio de Nash (x', y', z') que cumpla las condiciones establecidas en este caso.

2.6 Conclusión del Capítulo

Se introduce el problema de la unicidad de un punto de Equilibrio de Nash, con un ejemplo de un juego q-cíclico, de 3-personas, y se justifica la unicidad del punto de Equilibrio, utilizando una caracterización de unicidad de punto de Equilibrio de Nash, establecida en Teorema 2 del presente capitulo.

Se ha construido una familia de juegos de 3-personas, q-cíclicos y con único punto de Equilibrio de Nash, prefijado y completamente mixto, la que extiende la construcción presentada por Quintas(1988 a). Además se ha demostrado la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, siguiendo los lineamientos presentados por Quintas (1988 b).

CAPITULO 3

Construcción de Matrices de Juegos Cíclicos n- Jugadores con Único Punto de Equilibrio Completamente Mixto

3.1 Definición y Resultados Previos

Definición 1[21]:

Sea $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots\ldots, \Sigma_n, A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n\}$, un juego q-cíclico, finito, en forma normal de n personas, donde Σ_i es el conjunto de estrategias puras del jugador i, sea A_i la correspondiente función de pago, con i=1,...n.

La definición de la función A_i es la siguiente:

$$A_i(\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_i, \ldots\ldots\ldots, \sigma_n) = B_i(\sigma_i, \sigma_{q(i)}) + C_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots\ldots, \sigma_n)$$

con $\sigma_i \in \Sigma_i$ y q una función que satisface:

$q(i) \neq i$ y $|q^{-1}(i)| = 1$ donde $|.|$ indica la cardinalidad de conjunto respectivo.

A los efectos de las construcciones que se realizarán en éste capítulo, se consideran juegos en donde:

4) q(i) = i+1 mod.n y denominemos j = q(i).

5) Cada jugador tiene a lo más m estrategias, es decir, $|\Sigma_i| \leq m$, i=1,2,.....,n

---

[21] Marchi y Quintas (1983) Marchi, "Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"

6) El pago de cada jugador i, tiene a $C_i(\sigma_1,..,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},....,\sigma_n)=0$

Definición 2: Una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras $\Sigma_i=\{\sigma_1^i,\sigma_2^i,........,\sigma_m^i\}$, es decir, un vector definido por:

$$x_i=(x_i(\sigma_1^i),x_i(\sigma_2^i),.......,x_i(\sigma_m^i))=(x_1^i,x_2^i,......x_m^i)$$

donde x_t^i es la probabilidad de que el jugador i juegue sobre su estrategia $\sigma_t^i\in\Sigma_i$ con t = 1,2,.....,m.

Definición 3: Sea $\tilde{\Sigma}_i$ el conjunto de las estrategias mixtas para el jugador i:

$$\tilde{\Sigma}_i=\left\{x_i:\sum_{t=1}^{t=m}x_t^i=1\quad con\quad x_t^i\geq 0, t=1,2,.....,m\right\}$$

Notación: Llamaremos a:

- $x=(x_1,x_2,......x_n)\in\prod_{i=1}^{i=n}\tilde{\Sigma}_i$ una n-upla de estrategias mixtas de los n jugadores.
- $x_{N-\{i\}}=(x_1,......., x_{i-1},x_{i+1},...., x_n)$
- $(x_{N-\{i\}},x_i)=(x_1,......., x_{i-1},x_i,x_{i+1},....,x_n)$
- $(x^*_{N-\{i\}},x_i)=(x^*_1,......., x^*_{i-1},x_i,x^*_{i+1},....,x^+_n)$

Definición 4[22]**:**

La función esperanza matemática E_i para cada jugador i, en el juego q-cíclico, es de la siguiente manera:

$$E_i(x)=F_i(x_i,x_{q(i)})+G_i(x_{N-\{i\}})$$

Donde F_i y G_i son las funciones esperanzas de B_i y C_i respectivamente.

- En nuestro caso, como C_i = 0 con i= 1, 2, ...,n.

Las funciones esperanzas matemáticas, tienen la siguiente forma:

$$E_i(x) = F_i(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{l=m}\sum_{t=1}^{t=m} a_{tl}^{ij} x_l^j x_t^i \qquad \text{con i=1, 2,......,n}$$

Notación: Denominaremos indistintamente:

$$F_i(r, x_j) = F_i(e_r, x_j),$$

donde e_r es una m-upla con uno en el lugar r y cero en el resto de los lugares.

Definición 5[23]**:**

Una n-upla $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots x_n^*) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\Sigma}_t$ es un punto de Equilibrio de Nash

si y sólo si $E_i(\overset{*}{x}) \geq E_i(\overset{*}{x}_{N-\{i\}}, x_i)$ para cada $x_i \in \tilde{\Sigma}_i$; y para cada i=1, 2,..... n.

Definición 6: (Marchi y Quintas(1983))

Los conjuntos de todas las estrategias puras, que son mejores respuestas contra $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\Sigma}_t$, se denotarán con $J_i(x_{q(i)})$, y están definidos de la siguiente manera:

$$J_i(x_{q(i)}) = \left\{ \sigma_r^i \in \Sigma_i : F_i(\sigma_r^i, x_j) \geq F_i(\sigma_t^i, x_{q(i)}) \text{ para cada } \sigma_t^i \in \Sigma_i \text{ con } t = 1,2,\ldots,m \right\}$$

Se usará la siguiente caracterización de puntos de Equilibrio de Nash

---

[22] Marchi y Quintas (1983) Marchi, "Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"
[23] Nash, J.(1950)."Equilibrum points in n-person games"

Teorema 1[24]**:**

$x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\Sigma}_i$ es un punto de Equilibrio de Nash, si y sólo si,

$$S(x_i) \subseteq J_i(x_{q(i)}), \text{ para cada i = 1,2,....., n.}$$

Donde $S(x_i)$ es el soporte de la estrategia mixta x_i, que es:

$$S(x_i) = \left\{ \sigma_s^i \in \Sigma_j : x_s^i > 0 \text{ con } s = 1,2,\ldots,m \right\}$$

Definición 7[25]**:**

Un punto $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\Sigma}_i$ que es Equilibrio de Nash se define completamente mixto si

$$S(x_j) = \Sigma_j$$

En estos casos, se dice que cada jugador tiene todas sus estrategias activas.

Definición 8[26]**:**

Sea $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots x_n^*) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\Sigma}_t$ un punto de Equilibrio de Nash de un juego $\tilde{\Gamma}$, se le llaman valores esperados del juego a $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$, donde: $v_i = E_i(x^*)$, i=1,2,....,n.

También utilizaremos funciones biyectivas[27] f_{ji}

$$f_{ji} : \Sigma_j \to \Sigma_i$$

Las funciones f_{ji} distribuyen hiperplanos maximales en el simplex de jugador j, esto es (esto se detalla en la sección 3.2).

[24] Marchi y Quintas (1983) Marchi, "Computing Equilibrium Points for q-cicle Games"
[25] Raghavan(1970)) "Completely Mixed Strategies in Games Bimatrix"-
[26] Raghavan(1970)) "Completely Mixed Strategies in Games Bimatrix"-
[27] Quintas(1988 a) "Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points"

3.2 Construcción de las Matrices de Pago de los Jugadores

Se exhibirá una forma general de juegos q-cíclicos de n-jugadores, con único punto de Equilibrio de Nash prefijado sobre la extensión mixta.

Se construirá la matriz de pago A_i con i=1,2,...,n del jugador i, y para ello se establecerán condiciones sobre la función de Esperanza Matemática E_i para que haya único punto de Equilibrio de Nash.

Se considera un punto arbitrario, $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \prod_{i=1}^{i=n} \tilde{\Sigma}_i$,

es decir que:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = ((x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1), (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2) .... (x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n))$$

con:

$$\sum_{t=1}^{t=m} x_t^i = 1 \text{ para cada } i=1,2,....,n.$$

$$x_t^i > 0 \text{ para cada } t=1,2,....,m \text{ y cada } i=1,2,.....,n$$

Es decir, que $|S(x_i)| = m$ para i=1,2,....n.

.

Se eligen valores arbitrarios, no nulos v_i con i=1,.......,n, que luego resultarán los únicos pagos esperados del juego.

La construcción geométrica extiende las realizadas por Quintas (1988 a)) y la del Capítulo anterior. La misma consiste que en determinada región del simplex $\tilde{\Sigma}_j$ limitada por: un vértice predeterminado, el punto prefijado en equilibrio y ciertos puntos sobre las caras del simplex, tengan un único hiperplano maximizante.

Se considera a $x_j = \left(x_1^j, x_2^j, ...x_m^j\right) \in \Sigma_j$ y las m-uplas e_s que son vértices del simplex $\tilde{\sum}_j$, donde e_s es uno el lugar s y cero en el resto de los lugares.

Y se eligen s puntos que tienen la siguiente forma:

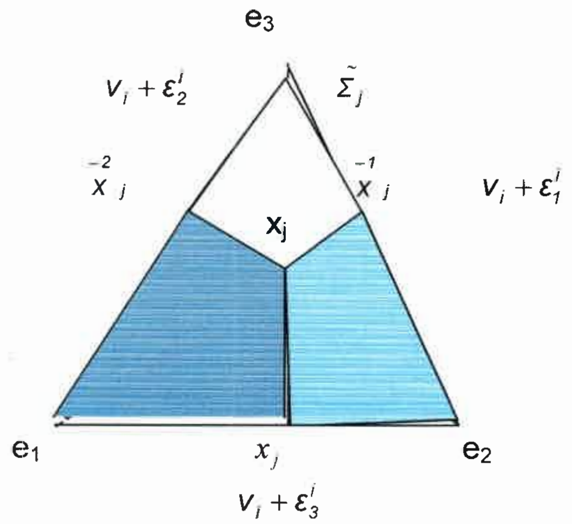
$$\overset{-s}{x}_j = (\overset{-j}{x}_1, \overset{-j}{x}_2, ..., \overset{-j}{x}_{s-1}, 0, \overset{-j}{x}_{s+1}, ..., \overset{-j}{x}_m) \quad \text{con } s=1,2,......m$$

El punto $\overset{-s}{x}_j$ está sobre una cara del simplex $\tilde{\sum}_j$, y que se obtiene extendiendo el segmento entre e_s y $x_{j.}$, hasta intersecar la cara opuesta al correspondiente vértice.

Esto se hace para obtener una partición poliedral del simplex $\tilde{\sum}_j$, que tiene como puntos extremos: los m vértices del simplex $\tilde{\sum}_j$, los m puntos $\overset{-s}{x}_j$ y el punto prefijado x_j . (Marchi y Quintas (1987) estudian caracterizaciones de esos puntos sobre algunos juegos n-personales).

El proceso que guía la construcción de las matrices de pago se basa en analizar qué hiperplanos maximizan las regiones de las particiones del simplex. Lo que se espera es lograr que en cada una de las regiones sombreadas haya un único hiperplano maximizante.(figura)

Se ilustra para $\left|\tilde{\Sigma}_j\right| = 3$



Para obtener $\overset{-s}{x}_j$ se usará la siguiente ecuación vectorial:

$$e_s + \lambda^s(x_j - e_s) = \overset{-s}{x}_j$$

Debido a que la componente s de $\overset{-s}{x}_j$ es nula, la componente s, satisface que

$$: 1 + \lambda_s(x_s^j - 1) = 0$$

Entonces $\lambda^s = \dfrac{1}{1 - x_s^j} > 0$ .Y en consecuencia: $\overset{-s}{x}_t = \begin{cases} \dfrac{x_t^j}{1 - x_t^j} > 0 & \text{para cada } t \neq s \\ 0 & \text{para cada } t = s \end{cases}$

Así : $\overset{-s}{x}_j = \left(\dfrac{x_1^j}{1 - x_s^j}, \dfrac{x_2^j}{1 - x_s^j}, \ldots\ldots, \dfrac{x_{s-1}^j}{1 - x_s^j}, 0, \dfrac{x_{s+1}^j}{1 - x_s^j}, \ldots\ldots, \dfrac{x_m^j}{1 - x_s^j} \right)$

Debido a que $1 - x_s^j = \sum_{t \neq s} x_t^j$ podemos escribir a $\overset{-s}{x}_j$ como:

$$\overset{-s}{x}_j = \frac{1}{\sum_{t \neq s} x_t^j} \left(x_1^j, x_2^j, \ldots\ldots, x_{s-1}^j, 0, x_{s+1}^j, \ldots\ldots, x_m^j \right)$$

Para cada vértice $e_r \in \tilde{\Sigma}_i$, para cada $x_j \in \tilde{\Sigma}_j$, y teniendo en cuenta la Definición 4 $F_i(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{l=m} \sum_{t=1}^{t=m} a_{tl}^{ij} x_l^j x_t^i$, se obtiene:

$$F_i(r, x_j) = \sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j = A_i^r x_j^t,$$

donde A_i^r es la r-ésima fila de la matriz A_i del jugador i y x_j^t es el transpuesto del vector x_j.

$$F_i(r, x_j) = a_{r1}^{ij} x_1^j + a_{r2}^{ij} x_2^j + \ldots\ldots + a_{rm}^{ij} x_m^j$$

Vamos a definir a $F_i(r, x_j)$ tal que:

- En el punto $x_j = (x_1^j, x_2^j, \ldots\ldots x_m^j) \in \Sigma_j$, y tome el valor v_i, es decir:

$$F_i(r, x_j) = \sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j = A_i^r x_j^t = v_i$$

Lo que significa que $F_i(r, x_j)$ es el r-esimo hiperplano del jugador i, sobre el simplex $\tilde{\Sigma}_j$ del jugador j.(Ver figura)

Además se requiere que:

- En cada punto $\overline{x}_j^{s}$ con s= 1, 2,.....,n, alcance el valor $v_i + \varepsilon_s^i$, con $\varepsilon_s^i > 0$, esta condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$F_1\left(r, \overline{x}_j^{s}\right) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j = v_i + \varepsilon_r^i$$

Teniendo en cuenta las componentes de $\overline{x}_j^{s}$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{1 - x_s^j} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{l=m} a_{rl}^{ij} = v_i + \varepsilon_s^i$$

(Ver Figura).

Ahora introducimos la función f_{ji} para definir la matriz de pago del jugador i.

Sea la correspondencia biyectiva f_{ji} tal que:

$$f_{ji} : \Sigma_j \to \Sigma_i , \quad f_{ji}(s) = r - \text{hiperplano} \quad F_i(r, x_j) = v_i$$

(donde r es el índice correspondiente al hiperplano maximizante)

Esto implica que:

$$F_i(r, s) = a_{rs}^{ij} > a_{ts}^{ij} = F_i(t, s) \quad \text{para cada} \quad t \in \tilde{\Sigma}_i$$

Para cada $e_r \in \tilde{\Sigma}_i$, para cada $e_s \in \tilde{\Sigma}_j$, por la Definición 4 de $F_i(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{l=m} \sum_{t=1}^{t=m} a_{tl}^{ij} x_l^j x_t^i$, y como r es hiperplano maximizante:

$$F_i(r, s) = a_{rs}^{ij}$$

Así, teniendo en cuenta la Definición 6 de $J_i(x_{q(i)})$:

$$J_i(x_{q(i)}) = \left\{ \sigma_r^i \in \Sigma_i : F_i(\sigma_r^i, x_j) \geq F_i(\sigma_t^i, x_{q(i)}) \text{ para cada } \sigma_t^i \in \Sigma_i \right\}$$

Implica que, $J_i(e_s) = \{f_{ji}(s)\}$.

Así, sobre cada vértice de $\tilde{\Sigma}_j$ habrá solamente un hiperplano y f_{ji} distribuirá diferentes hiperplanos máximos sobre cada vértice.

Se prescribe que, para cada t, tal que $f_{ji}(t) \neq r$, en cada punto $\overset{-s}{x}_j$, el $f_{ji}(t)$-hiperplano, pase por debajo del $f_{ji}(s)$-hiperplano, este último hiperplano toma el valor $v_i + \varepsilon_s^i$.(Ver figura)

Esto dice que, es para cada r $\neq f_{ji}(t)$.

$$\sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij} \overset{-s}{x_l} = \frac{1}{1-x_s^j} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j = v_i + \varepsilon_s^i$$

$$>$$

$$\sum_{l=1}^{l=m} a_{f_{ji}(s)l}^{ij} \overset{-s}{x_l} = \frac{1}{1-x_s^j} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{l=m} a_{f_{ji}(s)l}^{ij} x_l^j$$

Así para r=1,2,...,m en el punto $x_j = (x_1^j, x_2^j, \ldots\ldots\ldots, x_m^j)$ se requiere que, todos los hiperplanos tomen el mismo valor v_i. Es decir, para cada r con r =1,2,...,n, tendremos en el punto $x_j = (x_1^j, x_2^j, \ldots\ldots\ldots, x_m^j)$ que se satisface la ecuación:

$$\sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j = v_i$$

Y para cada t tal que $f_{ji}(t) \neq r$, en el punto $\overset{-s}{x_j}$ se satisfacen las ecuaciones, siguientes:

$$\frac{1}{1-x_t^j}\left[\left(\sum_{l=1}^{l=3} a_{rs}^{ij}\, x_l^j\right) - a_{rt}^{ij} x_t^j\right] = v_i + \varepsilon_t^i$$

Para obtener la matriz de pago A_i del jugador i, para cada r fijo el coeficiente a_{rs}^{ij} debe satisfacer las siguientes m ecuaciones.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j = v_i \\ y \quad \forall t : f_{ji}(t) \neq q \\ \displaystyle\frac{1}{1-x_t^j}\left[\left(\sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij} x_l^j\right) - a_{rt}^{ij} x_t^j\right] = v_i + \varepsilon_t^i \end{cases}$$

Para resolver el sistema, consideremos a $f_{ji}(s) = s$.

Recordemos que se espera encontrar un hiperplano que maximiza cada una de las regiones de la partición, determinada por los puntos: $\overset{-1}{x_j}, \overset{-2}{x_j}, \ldots\ldots, \overset{-(s-1)}{x_j}, x_j, \ldots\ldots \overset{-m}{x_j}$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \frac{x_2^j}{1-x_1^j} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{x_s^j}{1-x_1^j} & & \cdots\cdots & & \frac{x_m^j}{1-x_1^j} & & \vdots & v_i+\varepsilon_1^i \\
\frac{x_1^j}{1-x_2^j} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{x_1^j}{1-x_{s-1}^j} & \cdots & \frac{x_{s-2}^j}{1-x_{s-1}^j} & 0 & \frac{x_s^j}{1-x_{s-1}^2} & & \cdots\cdots & & \frac{x_m^j}{1-x_{s-1}^j} & & \vdots & v_i+\varepsilon_{s-1}^i \\
x_1^j & \cdots & \cdots & \cdots & x_s^j & & \cdots & & x_m^j & & \vdots & v_i \\
\frac{x_1^j}{1-x_{s+1}^j} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{x_s^j}{1-x_{s+1}^j} & 0 & \frac{x_{s+2}^j}{1-x_{s-1}^j} & \cdots & \frac{x_m^j}{1-x_{s+1}^j} & & \vdots & v_i+\varepsilon_{s+1}^i \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
\frac{x_1^j}{1-x_m^j} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \frac{x_s^j}{1-x_m^j} & & \cdots\cdots & & \frac{x_{m-1}^j}{1-x_m^j} & 0 & \vdots & v_i+\varepsilon_m^{ii}
\end{array}\right)$$

Resolviendo el sistema por Eliminación Gaussiana, cuando $f_{ji}(s) = s+1 \, mod.m$

La matriz del jugador i, A_i es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccccc}
v_i-\frac{(1-x_1^j)\varepsilon_1^j}{x_1^j} & v_i-\frac{(1-x_2^j)\varepsilon_2^j}{x_2^j} & \cdots\cdots & v_i-\frac{(1-x_{n-1}^j)\varepsilon_{n-1}^j}{x_{n-1}^j} & v_i+\frac{1}{x_n^j}\sum\limits_{f_{ji}(t)\neq n}\varepsilon_t^j(1-x_t^j) \\
v_i+\frac{1}{x_1^j}\sum\limits_{f_{ji}(t)\neq 2}\varepsilon_t^j(1-x_t^j) & v_i-\frac{(1-x_2^j)\varepsilon_2^j}{x_2^j} & \cdots\cdots & v_i-\frac{(1-x_{n-1}^j)\varepsilon_{n-1}^j}{x_{n-1s}^j} & v_i-\frac{(1-x_n^j)\varepsilon_n^j}{x_n^j} \\
v_i-\frac{(1-x_1^j)\varepsilon_1^j}{x_1^j} & v_i+\frac{1}{x_2^j}\sum\limits_{f_{ji}(t)\neq 2}\varepsilon_t^j(1-x_t^j) & \cdots\cdots & v_i-\frac{(1-x_{n-1}^j)\varepsilon_{n-1}^j}{x_{n-1}^j} & v_i-\frac{(1-x_n^j)\varepsilon_n^j}{x_n^j} \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
v_i-\frac{(1-x_1^j)\varepsilon_1^j}{x_1^j} & v_i-\frac{(1-x_2^j)\varepsilon_2^j}{x_2^j} & \cdots & v_i+\frac{1}{x_{n-1}^j}\sum\limits_{f_{ji}(t)\neq(n-1)}\varepsilon_t^j(1-x_t^j) & v_i-\frac{(1-x_n^j)\varepsilon_n^j}{x_n^j}
\end{array}\right)$$

Cuando se usa una f_{ji} arbitraria, los elementos de la matriz A_i son:

$$a_{rs}^{ij} = \begin{cases} v_i + \dfrac{1}{x_s^j} \displaystyle\sum_{f_{ji}(t) \neq s} \varepsilon_t^i \left(1 - x_t^j\right) & para \quad f_{ji}(s) = r \\ v_i - \dfrac{\left(1 - x_s^j\right)\varepsilon_s^i}{x_s^j} & para \; f_{ji}(s) \neq r \end{cases}$$

Observación 1: Se realizan las siguientes observaciones, respeto a los elementos de la matriz A_i de pago del jugador i, construida anteriormente:

- Como $0 < x_s^j < 1$ están bien definidos.
- Cuando $f_{ji}(s) = r$, dichos elementos son $a_{rs}^{ij} > v_i$. Esto coincide con el hecho geométrico que en el vértice p-esimo del simplex $\tilde{\Sigma}_j$ el hiperplano r-ésimo es máximo.
- Cuando $f_{ji}(s) \neq r$, $a_{rs}^{ij} < v_i$; esto nuevamente coincide con el hecho geométrico que en el vértice p del simplex $\tilde{\Sigma}_j$ el hiperplano r-ésimo no es máximo allí.
- La matriz de pago A_i es no singular, el determinante de la Matriz A_i es:

$$det(A_i) = \left(\sum_{s=1}^{s=3} \left(1 - x_s^i\right) \varepsilon_s^i \right)^{n-1} \frac{v_i}{x_1.x_2.x_3......x_n}$$

Y Como ε_s^i son números arbitrarios positivos, en consecuencia: $\sum_{s=1}^{s=3} \left(1 - x_s^i\right) \varepsilon_s^i > 0$, además, v_i es no nulo, por lo tanto el $det(A_i) \neq 0$.

3.3 Verificación de la Existencia $x=(x_1,x_2,......x_n)\in\prod_{i=1}^{i=n}\tilde{\Sigma}_i$ como Punto de Equilibrio de Nash

El punto $x=(x_1,x_2,......x_n)\in\prod_{i=1}^{i=n}\tilde{\Sigma}_i$ con $x_s^j>0$ para s= 1,..., m es un punto de Equilibrio Nash, ya que se satisfacen las inclusiones dadas, en Teorema 1:

$$S(x_i)\subseteq J_i(x_{q(i)}),\ \text{para cada i = 1,2,....., n}$$

Como todos los hiperplanos del jugador i toman el mismo valor v_i sobre el punto x_j debido a que $\sum_{l=1}^{l=m} a_{rl}^{ij}x_l^j=v_i$; entonces $J_i(x_j)=\{1,2,.......,n\}=S(x_i)$.

Debido a la construcción realizada en los parágrafos anteriores, existe un juego q- cíclico Γ completamente mixto, con matriz de pago A_i del jugador i, que tiene a $(x_1, x_2,......., x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash para $\tilde{\Gamma}$.

Teorema 2: Teorema de existencia de juego q- cíclicos de n jugadores con $(x_1,x_2,........,x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash prefijado

Dada una n-upla $(x_1,x_2,........,x_n)=((x_1^1,x_2^1,........,x_m^1),(x_1^2,x_2^2,........,x_m^2)..............(x_1^n,x_2^n,........,x_m^n))$ con $\sum_{t=1}^{t=m}x_t^i=1$ para cada i=1,2,....,n con $x_t^i>0$ para cada t=1,2,....,m y cada i=1,2,.....,n; y valores no nulos $v_1, v_2,...,v_n$. Y dadas , las funciones $f_{ji}:\Sigma_j\rightarrow\Sigma_i$, con j= i+1 mod.n y números positivos ε_s^i con i=1, 2, ,....,n.

Entonces existe un juego Γ q-cíclico completamente mixto, que tiene a

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash, , y los $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los valores de pagos esperados para el juego Γ.

3.4 Unicidad del Punto de Equilibrio

Demostraremos que la familia de juegos construida, en este capítulo tiene al punto $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in \prod_{t=1}^{t=n} \tilde{\Sigma}_t$ como único punto de Equilibrio de Nash.

Dadas las matrices de pago A_1, $A_2, \ldots\ldots$y A_n de los jugadores, en forma similar a la realizada para juegos bimatriciales(Quintas 1988 b)), y como la realizada en el capitulo 3 sección 2.4 se eligen funciones f_{ji} y Φ que satisfacen:

Para cada $(r', \; r'') \in \Sigma_j x \Sigma_j$:

$$\Phi \circ f_{ji}(r') = r'' \quad entonces \quad \Phi \circ f_{ji}(r'') \neq r' \quad (1)$$

con $\Phi : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_j$, resulta de hacer composiciones de funciones del tipo f_{ji}.

Observación 2:

- Si el juego es de 3- personas y juega el jugador 1 con el 2, la condición (1) se traduce en:

  Para cada $(j', \; j'') \in \Sigma_2 x \Sigma_2$:

  $$\Phi \circ f_{21}(j') = j'' \quad entonces \quad \Phi \circ f_{21}(j'') \neq j'$$

  Y en éste caso, la $\Phi = f_{32} \circ f_{13}$.

- Las funciones $f_{ji}(r) = r$ y $\Phi(r) = r - 1$ mod. m satisfacen la condición (1)

Además, elegimos números positivos ε_s^i con lo que se tiene que:

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left(1-x_s^j\right)\varepsilon_s^i > 0 \qquad (2)$$

Esto es, para asegurar la no singularidad de las matrices de cada jugador i.

Notación:

- $(x_j)^t$ al vector transpuesto de x_j.
- $V_i = (v_i \ v_i \ldots\ldots\ldots v_i)^t$ a la matriz de tamaño mx1, con todos sus elementos iguales a v.
- A_i^j al renglón j de la matriz del jugador i.

Teorema 3: Teorema de Unicidad

Dado el juego Γ q-cíclico construido en Teorema 2 que tiene a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto, y valores no nulos $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Y dadas, funciones f_{ji} que satisfacen la condición (1) y números positivos ε_s^i con i=1, 2, ...,n que satisfacen (2). Entonces, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el único punto de Equilibrio de Nash, para el juego Γ.

Demostración:

A continuación demostraremos la unicidad del punto de Equilibrio de Nash.

Se asume que existe otro punto de Equilibrio de Nash $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ con valor esperado del juego u_i ,esto es $E_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = u_i$ para i=1,2,...n.

Consideremos los siguientes casos:

- Caso 1: $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es completamente mixto

Debido a que $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash se satisfacen los sistemas:

$$a) \quad A_i(x_j)^t = V_i \qquad\qquad b) \quad A_i(y_j)^t = U_i$$

Multiplicando por u_i a cada ecuación del sistema a) y por v_i a cada ecuación del sistema b) y luego restando se obtiene:

$$A_i(u_i\, x_j - v_i y_j)^t = 0$$,siendo 0 la matriz nula de orden mx1.

Las matrices A_i son matrices no singulares, debido a que cada $v_i \neq 0$ ya que los ε_p^i satisfacen la condición (2), (Ver observación 1), en consecuencia el sistema lineal homogéneo $A_i(u_i\, x_j - v_i y_j)^t = 0$ tiene única solución, la trivial.

$u_i\, x_j - v_i y_j = 0$, esto significa que, $u_i\, x_s^j = v_i y_s^j$ con s=1,2,.......m.

Luego sumando sobre s, miembro a miembro ambos lados de las igualdades se obtiene:

$$\sum_{s=1}^{s=m} u_1 x_s^j = \sum_{s=1}^{s=m} v_1 y_s^j$$

Y como x_j e y_j son vectores de probabilidad, en consecuencia, $u_i = v_i$ por lo tanto:

$$A_i(x_j)^t = A_i(y_j)^t$$

Operando : $A_i(x_j - y_j)^t = 0$ y como la matriz A_i es una matriz no singular (Ver Observación 1), el sistema tiene única solución $x_j - y_j = 0$, en consecuencia $x_j = y_j$.

- Caso 2: El punto $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ satisface que:

  $S(y_i) = S(x_i)$ con i ∈ {1,2,.......,n}, excepto algún j ∈ {1,2,.......,n}, tal que

$$S(y_j) \subseteq S(x_j) \text{ con } j \neq i$$

Asumimos que $y_j = (y_1^j, y_2^j, \ldots\ldots, y_k^j, \ldots\ldots\ldots, y_{m-1}^i, 0)$ y que $f_{ji}(k) = k$, en consecuencia, la matriz de pago del jugador i(construida en 3.2, Cap 3) , tiene los máximos en la diagonal principal, es decir, la matriz tiene la siguiente

forma: $\left(\begin{array}{cccc} \wedge & * & --- & * \\ + & \wedge & --- & * \\ \hline --- & --- & --- & --- \\ * & * & --- & \wedge \end{array}\right)$, donde se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

- Sea $k \in S(x_j) - S(y_j)$,

Denotamos con $A_i^{f_{ji}(k)}$ al renglón $f_{ji}(k)$ de la matriz del jugador i.(Ver notación página 73)

$$A_i^{f_{32}(k)}(y_j)^t = (* \quad * \quad * \quad -- \quad \wedge)\begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \\ | \\ y_{m-1}^j \\ 0 \end{pmatrix} = v_i \sum_{s \in S(y_j)} y_s^j - \sum_{s \in S(y_j)} \frac{\varepsilon_s^i (1 - x_s^i)}{x_s^i} y_s^j$$

Sea $r \in S(y_i)$

$$A_i^{f_{ji}(r)}(y_j)^t = (* \quad * \quad -- \quad \wedge \quad *)\begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \\ | \\ y_{m-1}^j \\ 0 \end{pmatrix} = v_i \sum_{s \in S(y_j)} y_s^j - \sum_{\substack{s \in S(y_j) \\ s \neq r}} \frac{\varepsilon_s^i (1 - x_s^i)}{x_s^i} y_s^j + \frac{y_r^j}{x_r^j} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=m} \varepsilon_s^i (1 - x_s^j)$$

Denotamos con $A_i^{f_{ji}(r)}$ al renglón $f_{ji}(r)$ de la matriz del jugador i.(Ver notación página 73)

Restando $A_i^{f_{ji}(r)}(y_j)^t$ y $A_i^{f_{ji}(k)}(y_j)^t$ se obtiene:

$$v_i \sum_{s \in S(y_j)} y_s^j - \sum_{\substack{s \in S(y_j) \\ s \neq r}} \frac{\varepsilon_s^i (1 - x_s^i)}{x_s^i} y_s^j + \frac{y_r^j}{x_r^j} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=m} \varepsilon_s^i (1 - x_s^j) - \left(v_i \sum_{s \in S(y_j)} y_s^j - \sum_{s \in S(y_j)} \frac{\varepsilon_s^i (1 - x_s^i)}{x_s^i} y_s^j \right),$$

es decir,

$$A_i^{f_{ji}(r)}(y_j)^t - A_i^{f_{ji}(k)}(y_j)^t = \frac{y_r^j}{x_r^j} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=m} \varepsilon_s^i (1 - x_s^j) + \frac{\varepsilon_r^i (1 - x_r^j)}{x_r^j} y_r^j = \frac{y_r^j}{x_r^j} \sum_{s=1}^{s=m} \varepsilon_s^i (1 - x_s^j)$$

Como $\sum_{s=1}^{s=m} \varepsilon_s^i (1 - x_s^j) > 0$ y $r \in S(y_j)$

$A_i^{f_{ji}(r)}(y_j)^t - A_i^{f_{ji}(k)}(y_j)^t > 0$, lo que implica que $f_{ji}(k) \notin J_i(y_j)$.

Debido a que $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash, se cumple que: $S(y_i) \subseteq J_i(y_j)$ (Teorema 1, Cap.3) , por esta razón es que: $f_{ji}(k) \notin S(y_i)$, en consecuencia: $y^i_{f_{ji}(k)} = 0$., lo que es imposible por que:

Como por hipótesis sabemos que $S(y_i) = S(x_i)$, y que $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ es un punto de Equilibrio de Nash completamente mixto, lo que implica que $|S(y_i)| = |S(x_i)| = m$.

En consecuencia, $S(y_j) = S(x_j)$ para todo j=1,2,...., n y por lo probado en el caso 1, $x_j = y_j$ por lo que $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ es único.

Caso 3: El punto $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ que satisface que:

$$S(x_i) \subseteq S(y_i) \qquad para \quad todo \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Sea $k \in S(x_n) - S(y_n)$, en este caso, se supone k=m $f_{n(n-1)}(k) = k$, en consecuencia la matriz del jugador n-1 (construida en 3.2 del Cap. 3) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} \wedge & * & * & -- & * \\ * & \wedge & * & -- & * \\ * & * & \wedge & -- & * \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ * & * & * & -- & \wedge \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

En el caso 2, se arribó a $y^{n-1}_{f_{n(n-1)}(k)} = 0$, es decir, que $y_m^{n-1} = 0$.

- Sea $j \in S(x_{n-1}) - S(y_{n-1})$, por hipótesis sabemos que $S(y_{n-1}) \subseteq S(x_{n-1})$, en este caso, un j que cumple esta condición es j = m.

Sea $f_{(n-1)(n-2)}(j) = j+1$ mod.m, en consecuencia la matriz del jugador n-2 (construida en 3.2) es de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} * & * & * & -- & \wedge \\ \wedge & * & * & -- & * \\ * & \wedge & * & -- & * \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ * & * & -- & \wedge & * \end{pmatrix}$, se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

Denotamos con $A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(j)}$ al renglón $f_{(n-1)(n-2)}(j)$ de la matriz del jugador n-2.

$$A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(j)}(y_{n-1})^t = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)(n-2)} & a_{12}^{(n-1)(n-2)} & a_{13}^{(n-1)(n-2)} & -- & a_{1m}^{(n-1)(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{n-1} \\ y_2^{n-1} \\ | \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$v_{n-2} \sum_{s \in S(y_{n-1}')} y_s^{n-1} - \sum_{s \in S(y_{n-1})} \frac{\varepsilon_s^{n-2}\left(1 - x^{n-1}\right)}{y_s} y_s^{n-1}$$

Sea $r \in S(y')$, denotamos con $A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(r)}$ al renglón $f_{(n-1)(n-2)}(r)$ de la matriz del jugador n-2.

$$A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(r)}(y_{n-1})^t = v_{n-2} \sum_{s \in S(y_{n-1})} y_s^{n-1} - \sum_{s \in S(y_{n-1})} \frac{\varepsilon_s^{n-2}\left(1 - x_s^{n-1}\right)}{x_s^{n-1}} y_s^{n-1} + \frac{y_r^{n-1}}{x_r^{n-1}} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{s=m} \varepsilon_s^{n-2}\left(1 - x_s^{n-1}\right)$$

Restando $A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(r)}(y_{n-1})^t$ y $A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(j)}(y_{n-1})^t$ se obtiene, de manera análoga al caso anterior que : $A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(r)}(y_{n-1})^t > A_{n-2}^{f_{(n-1)(n-2)}(j)}(y_{n-1})^t$, lo que significa que $f_{(n-1)(n-2)}(j) \notin J_{n-2}(y_{n-1})$.

Debido a que $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash $S(y_{n-2}) \subseteq J_{n-2}(y_{n-1})$ (Ver Teorema 1, Cap. 3), por esta razón es que, $f_{(n-1)(n-2)}(j) \notin S(y_{n-2})$, por lo tanto, $y_{f_{(n-1)(n-2)}(j)}^{n-2} = 0$, es decir $y_1^{n-2} = 0$.

- Sea $i \in S(x_1) - S(y_1)$, y consideremos $f_{1n}(i) = i$, en consecuencia la matriz del jugador n (construida en 3.2 del Cap. 3) es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \wedge & * & * & -- & * \\ * & \wedge & * & -- & * \\ * & * & \wedge & -- & * \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ * & * & * & -- & \wedge \end{pmatrix},$$ se indica con Δ donde están ubicados los máximos.

Trabajando de manera similar, a cuando $S(y_{n-1}) \subseteq S(x_{n-1})$, $S(y_n) \subseteq S(x_n)$, se arriba a que $f_{1n}(i) \notin J_n(y_1)$.

Debido a que $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash $S(y_n) \subseteq J_n(y_1)$ (Ver Teorema 1, Cap.3) , por esta razón es que: $f_{1n}(i) \notin S(y_n)$, en consecuencia: $y^n_{f_{1n}(i)} = 0$, es decir $y^n_1 = 0$.

- Ahora elegimos $k \in S(x_n) - S(y_n)$, tal que:

$L(k) = f_{1n}(f_{21}(\varphi(f_{n(n-1)}(k)))) \in S(y_n)$, La existencia de tal k, está garantizado por (1).

Denotamos con $A_n^{L(k)}$ al renglón $L(k)$ de la matriz del jugador n.

Para k= m, $L(m) = 1$

$$A_n^{L(k)}(y_1')^t = (\wedge \quad * \quad * \quad -- \quad *)\begin{pmatrix} 0 \\ y_2^1 \\ y_3^1 \\ | \\ y_{m-1}^1 \\ y_m^1 \end{pmatrix} = v_n \sum_{s \in S(y_1)} y_s^1 - \sum_{s \in S(y_1)} \frac{\varepsilon_s^n (1 - x_s^1)}{x_s^1} y_s^1$$

y para cada r tal que $h(r) = f_{21}(\varphi(f_{n(n-1)}(r))) \in S(y_1)$, en consecuencia, $\Phi(r) \neq 1$

Denotamos con $A_n^{L(r)}$ al renglón $L(r)$ de la matriz del jugador n.

$$A_n^{L(r)}(y_1)^t = (* \quad * \quad \wedge \quad -- \quad *)\begin{pmatrix} 0 \\ y_2^1 \\ y_3^1 \\ | \\ y_{m-1}^1 \\ y_m^1 \end{pmatrix}$$

$$A_n^{L(r)}(y_1)^t = v_n \sum_{s\in S(y_1)} y_s^1 - \sum_{\substack{s\in S(y_1)\\ s\neq h(r)}} \frac{\varepsilon_s^n\left(1-x_s^1\right)}{x_s^1} y_s^1 + \frac{y_{h(r)}^1}{x_{h(r)}^1} \sum_{\substack{s=1\\ s\neq h(r)}}^{s=m} \varepsilon_s^n\left(1-x_s^1\right)$$

Si se resta $A_n^{L(r)}(y_1)^t$ y $A_n^{L(k)}(y_1)^t$, se obtiene:

$$A_n^{L(r)}(y_1)^t - A_n^{L(k)}(y_1)^t = \frac{y_{h(r)}^1}{x_{h(r)}^1} \sum_{s=1}^{s=m} \varepsilon_s^n\left(1-x_s^1\right)$$

Esta resta es positiva debido a que $h(r)\in S(y_1)$ y que $\sum_{s=1}^{s=m}\varepsilon_s^n\left(1-x_s^1\right) > 0$

Es decir, $A_n^{L(r)}(y_1)^t > A_n^{L(k)}(y_1)^t$ (3)

Por otro lado, k es tal que $L(k)\in S(y_1)$, y como $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es punto de Equilibrio de Nash, se cumple que: $S(y_n)\subseteq J_n(y_1)$ (Ver Teorema 1, Cap.3), por lo tanto, también se satisface la siguiente desigualdad:

$$A_n^{L(r)}(y_1)^t \leq A_n^{L(k)}(y_1)^t. \quad (4)$$

Las desigualdades (3) y (4) son incompatibles, a menos que $y_{h(r)}^1 = 0$.

Pero, si esto ocurriera el vector y_1 es el nulo, y esto es un absurdo, ya que es un vector probabilidad.

En consecuencia, es imposible que existe otro punto de equilibrio de Nash del juego Γ, $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ que cumpla las condiciones dadas en este caso.

3.5 Conclusión del Capítulo

En este capítulo, se ha construido una familia de juego q-cíclicos n-personales, con único punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto. La construcción que se realizó, extiende la de Quintas (1988 a)) y la realizada en el Capítulo 2 de éste trabajo.

Y se ha demostrado la unicidad del punto de Equilibrio de Nash de la familia construida, para juegos q-cíclicos, con n-jugadores, la que amplia las pruebas presentadas por Quintas (1988 b)) y la realizada en el Capítulo 2.

CAPITULO 4

Construcción de Matrices de Juegos Cíclicos n- Jugadores con Unicos Puntos de Equilibrio no Completamente Mixtos

4.1 Introducción

Sea Γ un juego finito n -personas, q-cíclico[28]. A los efectos de las construcciones que se realizarán en éste capítulo, se considerarán juegos en donde:

1) Cada jugador tiene m_i estrategias, es decir $|\Sigma_i| \leq m_i$ con i=1, 2,........, n
2) Cada jugador tiene m estrategias activas[29]
3) Que las primeras m coordenadas de cada vector x_i con i=1,2, ..., n; son positivas para cada jugador.

Sean n valores esperados[30] no nulos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ del juego Γ.

Sea una n- upla de vectores probabilidades $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde cada vector x_i es igual a:

$$x_i = \left(x_i(\sigma_1^i), x_i(\sigma_2^i), \ldots\ldots, x_i(\sigma_{m_i}^i)\right) = \left(x_1^i, x_2^i, \ldots\ldots x_{m_i}^i\right).$$

[28] Definición 1 del Capitulo 3
[29] Capitulo 3, definición 7
[30] Definición 8, Capitulo 3

4.2 Construcción de las Matrices de Pago de los Jugadores

Se construirán matrices A_1, A_2,........,A_n, de un juego q-cíclico Γ de la siguiente forma:

$$A_i = \begin{pmatrix} a^{ij}_{11} & --- & a^{ij}_{1k} & --- & a^{ij}_{1m_j} \\ | & | & | & | & | \\ a^{ij}_{k1} & --- & a^{ij}_{kk} & --- & a^{ij}_{km_j} \\ | & | & | & | & | \\ a^{ij}_{m_i 1} & --- & a^{ij}_{m_i k} & --- & a^{ij}_{m_i m_j} \end{pmatrix}$$

con i=1,2,...n ; j= i+1 mod. n

Se denotarán con A^m_i las siguientes submatrices de orden mxm:

$$A^m_i = \begin{pmatrix} a^{ij}_{11} & --- & a^{ij}_{1m} \\ | & | & | \\ a^{ij}_{m1} & --- & a^{ij}_{mm} \end{pmatrix}$$

Se definen los siguientes elementos de las submatrices A^m_i para i=1,2,...n:

$$a^{ij}_{rs} = \begin{cases} v_i + \dfrac{1}{x^j_s} \displaystyle\sum_{f_{ji}(t) \neq r} \varepsilon^i_t \left(1 - x^j_t\right) & para \quad f_{ji}(s) = r \\ v_i - \dfrac{\left(1 - x^j_s\right)\varepsilon^i_s}{x^j_s} & para\ f_{ji}(s) \neq r \end{cases}$$

aquí ε^i_p con p=1,...,m son números positivos y que satisfagan: $\sum_{s=1}^{s=m} \left(1 - x^j_s\right)\varepsilon^i_s > 0$, condición (2) sección 3.4, Capitulo 3.

De manera análoga a la realizada en el capitulo 3 sección 3.4, se eligen funciones f_{ji} y Φ biyectivas, tales que:

$$f_{ji}: S(x_j) \rightarrow S(x_i) \quad y \quad \Phi: S(x_i) \rightarrow S(x_j)$$

y que satisfacen la condición (1) ,sección 3.4 del Capitulo 3.

Se amplían las matrices $A_1^m, A_2^m, \ldots\ldots, A_n^m$ a las matrices A_1, $A_2, \ldots\ldots, A_n$ que tengan tamaño m_i x m_j adicionándole renglones y columnas, de la siguiente manera.

<table>
<tr><td>I</td><td>II</td></tr>
<tr><td colspan="2">III</td></tr>
</table>

- En I lugar de la submatriz A_i^m
- En II submatriz de orden m x (m_j -m) cuyos elementos son elegidos arbitrariamente
- En III la submatriz de orden (m_i – m) x m_j, Se eligen q renglones de A_i con $m < q \leq m_i$, que los denotaremos con A_i^q , que satisfagan que $A_i^q (x_j)^t = v_i^q$ para adecuados v_i^q con $v_i^q \leq v_i$ para i=1,.....n

Observación: Para construir a las matrices A_1, $A_2, \ldots\ldots, A_n$ se les adiciona filas que son estrictamente dominadas, lo que permite que no pueda aparecer otro punto de equilibrio, es decir, que $(x_1, x_{,2}, \ldots\ldots\ldots, x_n)$será único.

Notación: Se denotará con:

- $\tilde{x}_i$ al vector: $\tilde{x}_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots\ldots\ldots, x_m^i)$ cuyas componentes, son las m primeras componentes de x_i.
- $\Sigma_i^m = \{1, 2, \ldots\ldots\ldots, m\} = S(x_i)$ con i=1,2,....,n.
- $\overset{m}{\Gamma} = \{\Sigma_1^m, \Sigma_2^m, \ldots, \Sigma_n^m,\ A_1^m, A_2^m, \ldots\ldots, A_n^m\}$ el juego de n-personas, con m estrategias y las m activas[31].

---

[31] Definición 7, Cap. 3

4.3 Verificación de la Existencia de $(x_1, x_{,2}, \ldots\ldots, x_n)$ como Punto de Equilibrio de Nash

Teniendo en cuenta Teorema 4 del Capítulo 3, el punto $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\right)$ es el único punto de Equilibrio de Nash, de la extensión mixta del juego $\overset{m}{\Gamma}$, y v_1, $v_2, \ldots, v_n$ son los valores esperados del juego $\overset{m}{\Gamma}$ (Definición 8, Cap. 3).

De acuerdo a como se construyó la matriz A_i en sección 4.3, es decir, se eligieron q renglones A_i^q con $m < q \leq m_i$, que satisfagan que:

$A_i^q (x_j)^t = v_i^q$ para adecuados v_i^q, que satisfagan que $v_i^q \leq v_i$ con i=1,.....n .

Por lo tanto, se verifica que:

$$A_i (x_j)^t = V_i \text{ para } V_i = \left(v_i, v_i, \ldots\ldots, v_i, v_i^{m+1}, \ldots\ldots, v_i^{m_i}\right)^t \quad \text{con } i = 1, 2, \ldots, n.$$

En consecuencia, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es punto de Equilibrio de Nash, del juego $\tilde{\Gamma}$.

Debido a la construcción realizada en parágrafo 4.2, existe un juego q- cíclico Γ no completamente mixto, con matriz de pago A_i del jugador i, para i=1, 2, ...n con valores esperados de juego v_1, $v_2, \ldots, v_n$ y que tiene como punto de Equilibrio de Nash a $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ del juego $\tilde{\Gamma}$.
Por lo tanto hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema: Teorema de existencia de juego q- cíclicos de n jugadores con $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash prefijado

Dada una n-upla:

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \left(\left(x_1^1, x_2^1, \ldots\ldots x_m^1, 0, \ldots\ldots, 0\right), \left(x_1^2, x_2^2, \ldots\ldots x_m^2, 0 \ldots\ldots 0\right), \ldots\ldots\ldots\ldots, \left(x_1^n, x_2^n, \ldots\ldots x_m^n, 0, \ldots, 0\right)\right)$

con $\sum_{t=1}^{t=m} x_t^i = 1$ para cada i=1,2,....,n con $x_t^i > 0$ para cada t=1,2,....,m y cada i=1,2,.....,n; y cada vector x_i, es de m_i componentes con i=1, 2,...,n y de las cuales m son positivas y valores no nulos $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Sean funciones f_{ji} y Φ que satisfacen la condición (1) del Capitulo 3 sección 3.4; números positivos ε_s^i, con i= 1, 2,.., n que satisfacen la condición (2) del Capitulo 3, sección 3.4. Entonces existe un juego Γ q-cíclico no completamente mixto, que tiene a

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash, , y los $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los valores esperados del juego Γ.

4.4 Unicidad del Punto de Equilibrio de Nash

La construcción realizada en el parágrafo en 4.2, se adicionan filas a cada matriz A_i que son

Teorema 2: Teorema de Unicidad

Dado el juego Γ q-cíclico construido en Teorema 1 que tiene a $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ como punto de Equilibrio de Nash prefijado, no completamente mixto, y valores no nulos $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Y dadas , funciones f_{ji} que satisfacen la condición (1) y números positivos ε_s^i con i=1, 2, ,....,n que satisfacen (2).

Entonces, $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ es el único punto de Equilibrio de Nash, para el juego Γ.

Demostración:

Para demostrar la unicidad, se asume que $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es otro punto de Equilibrio de Nash del juego $\tilde{\Gamma}$.

Teniendo en cuenta las condiciones (2) y (3) de la Introducción del presente capitulo y lo probado en Teorema 2, Capitulo 3, basta probar el caso:

$$S(x) = S(y)$$

Como $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ es un punto de Equilibrio de Nash, se satisface que: $A_i(y_j)^t = U_i$ para $U_i = \left(u_i, u_i, \ldots\ldots, u_i, u_i^{m+1}, \ldots\ldots, u_i^{m_i}\right)^t$ con adecuados u_i^q que cumplen que: $u_i^q \leq u_i$ con $m < q \leq m_i$ e $i = 1,2,\ldots,n$,

De manera que:

$$A_i^m\left(\tilde{y}_j\right)^t = (u_i, u_i, \ldots\ldots, u_i)^t \text{ con } i=1,2,\ldots n$$

donde $\tilde{y}_j$ es el vector truncado de y respecto a sus m primeras componentes.

Debido a que $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ es punto de Equilibrio de Nash de $\tilde{\Gamma}$, se verifica: $A_i(x_j)^t = V_i$ para $V_i = \left(v_i, v_i, \ldots\ldots, v_i, v_q^{m+1}, \ldots\ldots, v_i^{m_i}\right)^t$ con adecuados v_i^q, que satisfacen : $V_i^q \leq v_i$ para $m < q \leq m_i$ con $i=1,2,\ldots,n$,

Así que:

$$A_i^m\left(\tilde{x}_j\right)^t = (v_i, v_i, \ldots\ldots, v_i) \text{ con } i= 1,\ldots, n.$$

donde $\tilde{x}_j$ es el vector truncado de x_j

Teniendo en cuenta que, las funciones f_{ji} y Φ satisfacen la condición (1) ,sección 3.4 del Capitulo 3; y los números ε_p^i con p=1,...,m satisfacen condición (2), sección 3.4 del Capitulo 3.

Entonces, se cumplen todas las hipótesis del Teorema 2, Capitulo 3, por lo tanto, el punto $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}_n\right) = \left(\left(x_1^1, x_2^1, \ldots\ldots x_m^1\right), \left(x_1^2, x_2^2, \ldots\ldots x_m^2\right), \ldots\ldots, \left(x_1^n, x_2^n, \ldots\ldots x_m^n\right)\right)$ de Equilibrio de Nash del juego $\tilde{\Gamma}^m$ es único.

En consecuencia los vectores $\tilde{x}_j$; $\tilde{y}_j$ son iguales, como x e y satisface la condición (2) y (3) de la Introducción del presente capitulo, por lo tanto $x_j = y_j$. Es decir que el punto $(x_1, x_{,2}, \ldots\ldots, x_n)$ es el único punto de Equilibrio de Nash para el juego $\tilde{\Gamma}$.

4.5 Conclusión del Capítulo

En éste capítulo se ha construido una familia de juegos q-cíclicos, con único punto de Equilibrio de Nash, prefijado, no completamente mixto; donde los jugadores, no necesariamente tienen la misma cantidad de estrategias, pero si tienen la misma cantidad de estrategias activas. Esta construcción extiende la presentada por Quintas(1988 a) y Heuer(1975); y la prueba de la unicidad de los puntos de Equilibrios de Nash se realizó teniendo en cuenta la construcción de la familia de juegos y el Teorema 2 Capitulo 3.

CAPITULO 5

Conclusiones

En éste trabajo, se estudia el problema de unicidad de puntos de Equilibrios de Nash, en el aspecto de establecer condiciones para construir juegos con únicos puntos de Equilibrios Nash prefijados. Se construyen familias de juegos q-cíclicos, n-personales, con n no menor a tres, con únicos puntos de Equilibrio de Nash, prefijados, completamente mixtos y no completamente mixtos, y se demuestra la unicidad de dichos puntos de Equilibrio de Nash.

Primero, se da un ejemplo de un juego de 3-personas q-cíclico, con dos estrategias cada jugador, con único punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto, de manera que permita una mayor comprensión del problema. Se justifica la unicidad del punto de Equilibrio Nash utilizando una caracterización de unicidad de los puntos mencionados.

Luego, se construyó una amplia familia de juegos q-cíclicos, con único puntos de Equilibrios de Nash, prefijados, completamente mixtos, utilizando los lineamientos de la construcción realizada por Quintas(1988 a) para juegos bimatriciales. Se trabajó con 3-jugadores con tres estrategias cada jugador y las tres activas. Además, se demostró la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, dentro de la clase de estrategias mixtas cuyas

componentes no nulas son las mismas, esta demostración extiende la realizada por Quintas (1988 b) para juegos bimatriciales. Esta demostración sirvió de base para la prueba de la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, para la familia de juegos q-cíclicos construida con n-jugadores.

Posteriormente, se consideró n jugadores que juegan q-cíclicamente, y que cada jugador tiene m estrategias y todas activas. Se obtuvo una familia de juegos q-cíclicos y n-personales, con únicos puntos de Equilibrios de Nash, prefijados y completamente mixtos. Se siguió la idea de la construcción realizada para 3-jugadores, mencionada en el párrafo anterior. Se demostró la unicidad del punto de Equilibrio de Nash, dentro de la clase de estrategias mixtas cuyas componentes no nulas son las mismas; esta demostración extiende la presentada para 3-jugadores.

Por último, se construyó otra familia de juegos q-cíclicos, con único punto de Equilibrio de Nash, prefijado, no completamente mixto, cuando juegan n- jugadores y cada jugador, no necesariamente tiene la misma cantidad de estrategias, pero sí, la misma cantidad de estrategias activas. La construcción se realiza a partir de la familia encontrada de juegos q-cíclicos para n-jugadores, donde cada jugador tiene m estrategias y todas activas. Esta construcción extiende las realizadas por Quintas(1988 a) y por Heuer(1975), para juegos bimatriciales y con punto de Equilibrio de Nash no completamente mixto; La demostración de unicidad del punto de Equilibrio de Nash, se hace teniendo en cuenta las características de la familia de juegos q-cíclicos construida y utilizando el resultado de unicidad del punto de Equilibrio de Nash, para luegos q-cíclicos, con n-jugadores y con único punto de Equilibrio de Nash, completamente mixto.

En la presente tesis se hace un avance para juegos n-personales, en cuanto a dos aspectos:

✓ Las construcciones aquí presentadas para juegos n- personales, q-cíclicos con únicos puntos de Equilibrio de Nash, prefijados, generalizan las realizadas por Quintas (1988 a)), para juegos bipersonales.

✓ Las demostraciones de unicidad de puntos de Equilibrios de Nash, para las familias de juegos q-cíclicos construidas, generalizan las presentadas por Quintas (1988 b) y Heuer(1975), para juegos bimatriciales.

Es posible que, estos estudios sirvan de base para analizar unicidad en otros juegos cíclicos generales, lo cual no parece obvio, ya que al superponer más de un ciclo, se puede perder la unicidad de los puntos de Equilibrios de Nash, sobre la extensión mixta[32].

[32] Anexo.

BIBLIOGRAFÍA

- Chin, H., Parthasarathy T. and Raghavan T.E.S." Structure of Equilibria in N-person No-Cooperative Games"(1974)Int. Journal of Game Theory, Vol. 3 Issue 1, page 1-19.

- Cournot , A.(1838)." Recherches sur les Principes Mathematiques de la theorie des richesses" Paris: Hachette. Enghish translated by N.T. Bacon 1927 ", Researches into the mathematical principles of the theory of wealth". New York: Kelley.(1960).

- Friedman J.(1983)."On characterizing equilibrium points in strictly competitive game", International Game Theory, 12, 245-247.

- Gale D. and Nikaido H.(1965)."The Jacobean matrix and the global univalence of mappings", Mathematische Annalen, 159,81-93.

- Heuer,G.A. (1979)."Uniqueness Equilibrium Points in Bimatrix Games", International Journal of Game Theory : Vol 8: 13-25.

- Kreps, V.L. (1974)." Bimatrix Games with Unique Equilibrium Points", International Journal of Game Theory :Vol.3. 115-118.

- Marchi, E. and Quintas, L. G.(1987)."About Unique Equilibrium Points in two Person Games", Revista de Matemáticas Aplicadas, 9, 63-74.

- Marchi, E. and Quintas, L. G.(1987)."About Extreme Equilibrium Points", Mathematical Social Sciences 13 273-276.

- Marchi, E and Quintas L.G. (1983)."Computing Equilibrium Points for q-cicle Games", .Proceding of the II Latin American Congress of Applied Mathematic, Río de Janeiro, Vol II, 576-598.

- Millham, C.B. (1972)."Constructing Bimatrix Games with Special Properties", International Journal of Game Theory ": 10 (4): 125 -129.

- Myerson, R.(1999)."Nash Equilibrium and the History of Economic Theory". Journal of Eonomic Literature- Vol. XXXVII-: 1067-1082.

- Nash, J.(1950)."Equilibrum points in n-person games", Proceedings of the National Academy of Science U.S.A., 36: 48-49.

- Oviedo J. and Quintas L(1995). "Cooperation in Linear Strictly Competitive Games", Anales de las 24as. JAIIO,. 67-77.

- Quintas, L. G., Marchi, E. , Giunta, A.and Alaniz, S (1991)."Bimatrix constructed from prefixed equilibrium points", AMSE Review, France, Vol 17, N°2- 33-44.

- Quintas, L.G. (1989)."A Note on Polymatrix Game", International Journal of Game Theory : 18: 261-272.

- Quintas, L.G.(1988 a)."Constructing Bimatrix Game with Unique Equilibrium Points", Mathematical Social Sciences 15: 61-72.

- Quintas, L.G (1988 b)). "Uniqueness of Nash Equilibrium Points in Bimatrix Games", Economic Letters.764: 1-8.

- Raghavan, T.E.S. (1970)."Completely Mixed Strategies in Games Bimatrix"- J.London Math Soc.2 (2) 709-712.

- Van Damme E. (1987)." Stability and Perfection of Nash Equilibria", Springer- Varlag.

- von Neuman J. and O.Morgenstern (1944),(1947)."Theory of Games and Economic Behavior", Princeton, Pricenton University Press.

- Yanovskaya E. B (1968)."Equilibrium Points in Polymatrix Games",(in Russian) Lithuanian Mathematical Journal.

ANEXO

Posibles Extensiones

Se analiza el siguiente ejemplo, que consiste de un juego de 3-personas, con dos estrategias cada jugador, donde hay una superposición de ciclos, y que tiene más de un punto de Equilibrio de Nash.

Sea $\Gamma = \{\, \Sigma_r, A_r : r = 1, 2, 3\}$ un juego de 3-jugadores, donde los conjuntos de estrategias de los jugadores son:

Σ_r ={a, b} para r =1, 2, 3

Definición: (Yanovkaya(1968)) La función Esperanza Matemática en éste caso, es la siguiente:

$$E_1(x,y,z) = \sum_{r=1}^{r=2}\sum_{s=1}^{r=2}\left(a_{rs}^{12} y_s x_r + a_{rs}^{13} z_s x_r\right)$$

$$E_2(x,y,z) = \sum_{r=1}^{r=2}\sum_{s=1}^{r=2}\left(a_{rs}^{21} x_s y_r + a_{rs}^{23} z_s y_r\right)$$

$$E_3(x,y,z) = \sum_{r=1}^{r=2}\sum_{s=1}^{r=2}\left(a_{rs}^{31} x_s z_r + a_{rs}^{32} y_s z_r\right)$$

Se juegan en dos ciclos, es decir:

<u>En el ciclo 1</u>: el jugador 1 juega con el 2, el jugador 2 juega con el 3 y el jugador 3 juega con el 1.

<u>En el ciclo 2:</u> el jugador 3 juega con el 2, el jugador 2 juega con el 1 y el jugador 1 juega con el 3.

Las matrices de pago de los jugadores están definidas de la siguiente manera:

- La matriz de pago para el jugador 1 cuando juega con el jugador 2 :

$$a^{12}(i,\ j)=\begin{cases} 1 & si \quad i=j \\ 0 & si \quad i\neq j \end{cases}$$

- La matriz de pago para el jugador 2 cuando juega con el jugador 3:

$$a^{23}(j,\ k)=\begin{cases} 1 & si \quad j=k \\ 0 & si \quad j\neq k \end{cases}$$

- La matriz de pago para el jugador 3 cuando juega con el jugador 1:

$$a^{31}(k,\ i)=\begin{cases} 0 & si \quad k=i \\ 1 & si \quad k\neq i \end{cases}$$

- La matriz de pago para el jugador 2 cuando juega con el jugador 1:

$$a^{21}(j,\ i)=\begin{cases} 1 & si \quad j=i \\ 0 & si \quad j\neq i \end{cases}$$

- La matriz de pago para el jugador 1 cuando juega con el jugador 3:

$$a^{13}(i,\ k)=\begin{cases} 1 & si \quad i=k \\ 0 & si \quad i\neq k \end{cases}$$

- La matriz de pago para el jugador 3 cuando juega con el jugador 2:

$$a^{32}(k,j)=\begin{cases} 0 & si \quad k=j \\ 1 & si \quad k\neq j \end{cases}$$

Por lo tanto:

- Los pagos del jugador 1, son la suma de los pagos cuando juega con el jugador 2 y con el jugador 3, es decir:

$$a^{12}(i,j)=\begin{cases}1 & si \quad i=j\\ 0 & si \quad i\neq j\end{cases} \quad ; \quad a^{13}(i,\ k)=\begin{cases}1 & si \quad i=k\\ 0 & si \quad i\neq k\end{cases}$$

- Los pagos del jugador 2, se obtienen sumando los pagos cuando juega con el jugador 1 y con el jugador 3, es decir:

$$a^{21}(j,\ i)=\begin{cases}1 & si \quad j=i\\ 0 & si \quad i\neq j\end{cases} \quad ; \quad a^{23}(j,\ k)=\begin{cases}1 & si \quad j=k\\ 0 & si \quad j\neq k\end{cases}$$

- Los pagos del jugador 3, resultan de sumar los pagos cuando juega con el jugador 1 y con el jugador 2, es decir:

$$a^{31}(k,\ i)=\begin{cases}0 & si \quad k=i\\ 1 & si \quad k\neq i\end{cases} \quad ; \quad a^{32}(k,j)=\begin{cases}0 & si \quad k=j\\ 1 & si \quad k\neq j\end{cases}$$

En consecuencia, las matrices de pago para la forma normal de este juego están dadas por:

Jugador 3: a

		Jugador 2: a	Jugador 2: b
Jug 1	a	(2, 2, 0)	(1, 0, 1)
	b	(0, 1, 1)	(1, 1, 2)

Jugador 3: b

		Jugador 2: a	Jugador 2: b
Jug. 1	a	(1, 1, 2)	(0, 1, 1)
	b	(1, 0, 1)	(2, 2, 0)

Hay dos puntos de Equilibrio de Nash en estrategias puras, cuando los jugadores 1 y 2 eligen b y el jugador 3 elige a y cuando los jugadores 1 y 2 eligen a y el jugador 3 elige b.

Hay más de un punto $(x, y, z) \in \tilde{\Sigma}_1 \, x \, \tilde{\Sigma}_2 \, x \, \tilde{\Sigma}_3$ de Equilibrio de Nash en extensión mixta, para este juego, ejemplos:

1) x = (½, ½) , y= (½ , ½) y z= (½, ½) con pagos esperados v_1=1, v_2 =1 y v_3 =1
2) x = (1, 0) , y= (1, 0) y z= (0, 1) con pagos esperados v_1=1, v_2 =1 y v_3 =2
3) x = (0, 1) , y= (0, 1) y z= (1, 0) con pagos esperados v_1=1, v_2 =1 y v_3 =2

Por lo tanto, se pierde la unicidad del punto de Equilibrio de Nash en estrategias mixtas.