Mejores φ-Aproximantes y Generalizaciones del Teorema de Radon-Nikodym

Erica L. Schwindt

10 de agosto de 2006

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dar gracias a Dios pues sin Él nada de esto hubiera sido posible. Deseo manifestar mi enorme agradecimiento al Dr. Fernando Mazzone por todo el apoyo brindado durante éstos años. Sin lugar a dudas, ésta monografía no es más que el producto de todo el esfuerzo que él realizó durante mi cursado en la carrera de Licenciatura en Matemática. Cabe destacar además, su intachable desempeño como docente, preocupándose siempre por mi buen aprendizaje. También quisiera agradecer a la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Río Cuarto por el otorgamiento de la beca de ayudantía de investigación, durante el período de dos años, la cual fue de gran importancia para mi carrera, no sólo por el apoyo económico recibido, sino también por iniciarme, de algún modo, en la investigación en Matemática. Agradezco al Mg. Marcelo Ruiz, por su colaboración en ésta monografía. Le doy gracias a mi familia por todo el apoyo brindado; a todos mis amigos y compañeros, que a lo largo de estos años de un modo u otro estuvieron presentes. Por último, deseo manifestar mi gratitud a todos los docentes del Departamento de Matemática de la UNRC, destacando la buena disposición que siempre tuvieron ante los alumnos.

INTRODUCCIÓN

En esta monografía se trabaja con la esperanza condicional, se da un concepto generalizado de la misma y se establece una relación con ciertos problemas de minimización. En el Capítulo 1 se proporcionan algunas nociones básicas y resultados importantes que se utilizarán a lo largo de esta monografía. Luego, se introducen los espacios de Hilbert, definiendo allí, la proyección de un vector sobre cierto conjunto y caracterizando a la misma. Posteriormente, exponemos el principal teorema de éste capítulo, el Teorema de Radon-Nikodym, dando una versión general del mismo. A continuación, se introduce la noción de esperanza condicional, vía el Teorema de Radon-Nikodym. Por último, se define la esperanza condicional como el mejor aproximante a una función f en L^2, en el sentido que la esperanza es la proyección de f sobre un subespacio de L^2 y luego, se extiende ésta noción a una función integrable cualquiera. También se demuestran aquí, algunas propiedades importantes de la esperanza condicional. En el Capítulo 2, básicamente se desarrolla la teoría necesaria para trabajar con los espacios de Musielak-Orlicz y la noción de mejor φ-aproximante para un σ-retículo $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$, que en el caso particular que se considere el σ-retículo estándar $\mathcal{L}^n$ (ver Ejemplo 2.2) el problema de hallar un mejor φ-aproximante, se convierte en un problema de aproximación por funciones monótonas. Además, se obtienen propiedades importantes para el conjunto de mejores φ-aproximantes. En el Capítulo 3 se generalizan, para un σ-retículo, algunos de los conceptos dados en el Capítulo 1 y se introducen las funciones de Lebesgue-Radon-Nikodym (LRN) para una familia de medidas ν_a definidas en Ω, y satisfaciendo ciertas propiedades. Posteriormente, se establece una conexión entre el concepto de función LRN y el Teorema de Radon-Nikodym asegurando de éste modo la existencia de las funciones LRN para una familia de medidas en particular. Finalmente, se generaliza éste resultado, para una familia de medidas arbitrarias (ver Teorema 3.11).

En el último Capítulo, se definen familias de medidas que nos permitirán luego, caracterizar a un mejor φ aproximante (Teorema 4.6), mostrándose, mediante un ejemplo, que no hay unicidad del mismo. Además, se demuestra que el mejor φ-aproximante a f de $L_\varphi(\mathcal{L})$, siendo $\mathcal{L}$ un σ-retículo, es un mejor φ-aproximante de $L_\varphi(\mathcal{A}_f)$, donde $\mathcal{A}_f$ es una σ-álgebra particular, que sólo depende de f (Teorema 4.13). Cuando el σ-retículo $\mathcal{L}$ es totalmente ordenado se prueba que la σ-álgebra $\mathcal{A}_f$ coincide con la σ-álgebra generada por $\mathcal{L}$ fuera de los átomos de $\mathcal{A}_f$. Esto nos permite demostrar un resultado muy importante (Teorema 4.18), que establece una caracterización de un mejor φ-aproximante y extiende resultados ya conocidos en la teoría de aproximación.

El siguiente cuadro sintetiza algunos de los conceptos más importantes que aquí aparecen, relacionándolos con las funciones LRN para la familia de medidas ν_a correspondiente.

Funciones LRN		
ν_a	$\mathcal{L}$	Concepto
$\nu - a\mu$	$\mathcal{L} = \mathcal{A}$	Teorema de Radon-Nikodym
$\int (f(x) - a) d\mu$	$\mathcal{L} = \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$	Esperanza Condicional
$\mu_a^{\pm}$	$\mathcal{L} = \sigma$-retículo	Mejores φ-aproximante
$\mu_a^{\pm}$	$\mathcal{L} = \mathcal{L}^n$	Mejores aproximantes monótonos

Para el desarrollo de la presente monografía se siguieron básicamente los siguientes trabajos:

- F. D. Mazzone, H. H. Cuenya (2004):*A Characterization of Best φ-Approximants with Applications to Multidimensional Isotonic Approximation*. Constructive Approximation. **21**:207-223.

- F. D. Mazzone: *Mejores Aproximantes por funciones con forma prescripta*. Notas del curso del mismo nombre.

- S. Johansen (1967): *The descriptive approach to the derivative of a set function with respect to a σ-lattice*. Pacific Journal of Mathematics. **21**: 49–58.

- H. D. Brunk, S. Johansen (1970): *A Generalized Radon-Nikodym Derivative*. Pacific Journal of Mathematics.**34**: 585–617.

La fuente original de la mayoría de los resultados expuestos en esta monografía, pertenece a los dos últimos trabajos mencionados.

Índice general

Capítulo 1

Teorema de Radon-Nikodym y Mejores Aproximantes en L^2

Introducción

En este capítulo se presenta el teorema de Radon-Nikodym y se trabaja con una de sus aplicaciones, la obtención de la esperanza condicional. A la vez se muestra un modo alternativo de definirla a través de la noción de mejor aproximante. En primer lugar, se dan algunas definiciones y propiedades básicas para un espacio de medida, luego realizamos un repaso general de los espacios de Hilbert y mencionamos propiedades importantes que luego nos servirán para abordar de lleno el teorema principal de este capítulo, que es el Teorema de Radon-Nikodym, y así luego trabajar con la esperanza condicional. El principal objetivo de esta monografía es relacionar la noción de mejor aproximante con ciertas esperanzas condicionales generalizadas. La fuente utilizada para el desarrollo de este capítulo básicamente fue [3] y [4].

1.1. Medidas Signadas y Descomposición de Hahn

Empezaremos dando la definición de algunos conceptos con los que trataremos a lo largo de esta monografía.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X. Diremos que la función $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida con signo o signada sobre X si verifica lo siguiente:*

a) El dominio de μ es la σ-álgebra $\mathcal{A}$, *b)* $\mu(\emptyset) = 0$,

c) μ *toma a lo más uno de los valores* $\pm\infty$,

d) μ *es* σ*-aditiva; es decir,*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j),$$

para cada sucesión de conjuntos $\{E_j\}_{j\geq 1}$*, con* $E_j \in \mathcal{A}$ *mutuamente disjuntos.*

La condición c) es requerida para que la igualdad establecida en d) tenga sentido. En el caso en que $A \in \mathcal{A}$, diremos que A es un conjunto $\mathcal{A}$-medible.

Observación 1.2 En el caso particular en que μ es una medida no negativa, nos referiremos a μ simplemente como una medida.

Ejemplo 1.3 Sea f una función con valores reales integrable sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para cada $E \in \mathcal{A}$ pongamos,

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu.$$

La función μ_f esta definida sobre $\mathcal{A}$ con valores en los números reales y es una función σ-aditiva, por lo tanto resulta ser una medida con signo.

Definición 1.4 *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida con* μ *una medida con signo. Un subconjunto* $E \in \mathcal{A}$ *es llamado positivo (negativo) si* $\mu(A) \geq 0 (\leq 0)$ *para todo subconjunto* $A \subseteq E$ *con* $A \in \mathcal{A}$*.*

Se pude demostrar que cualquier unión numerable de conjuntos positivos (negativos) es un conjunto positivo (negativo). Cabe destacar que un conjunto positivo (negativo) no es sólo un conjunto de medida positiva (negativa) sino que además todo subconjunto de él tiene medida positiva (negativa). Si retomamos el ejemplo 1.3 y consideramos $X = [-2, 2]$, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue, $f(x) = x^3$, y el conjunto $E = [-1, 2]$ resulta entonces que $\mu_f(E) = \frac{15}{4}$, sin embargo E no es un conjunto positivo ya que, por ejemplo, $\mu_f([-1, 0]) = -\frac{1}{4}$.

Proposición 1.5 *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida con* μ *una medida signada. Todo conjunto medible* E *de medida finita y positiva contiene un subconjunto positivo* A *de medida positiva.*

Para la demostración ver [3].

Teorema 1.6 (Descomposición de Hahn) *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con μ una medida con signo. Entonces X puede ser descompuesto en un conjunto positivo X^+ y en un conjunto negativo X^-. Es decir,*

$$X = X^+ \cup X^-.$$

Dem. Asumamos, por ejemplo, que μ no toma el valor $+\infty$, la idea de la demostración es hallar un conjunto positivo de medida máxima. Sea

$$M = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A} \text{ y } A \text{ es positivo}\},$$

M esta bien definido pues $\emptyset \in \mathcal{A}$ y es un conjunto positivo, además el conjunto al cual se le toma supremo esta acotado superiormente por $+\infty$. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos positivos tal que $\mu(A_n) \uparrow M$ y consideremos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. El conjunto $A \in \mathcal{A}$ y además es positivo, entonces $\mu(A) \leq M$. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$A = (A - A_n) \cup A_n.$$

Como esta es una unión disjunta y A es un conjunto positivo,

$$\mu(A) = \mu(A - A_n) + \mu(A_n) \geq \mu(A_n) \qquad \forall n.$$

Entonces $\mu(A) \geq M$. Por lo tanto $\mu(A) = M$ y por nuestra suposición, $M < +\infty$ pues $A \in \mathcal{A}$. Veamos que $X - A$ es un conjunto negativo. Supongamos por el absurdo que existe un subconjunto E de $X - A$ tal que $\mu(E) > 0$, como suponemos que μ no toma el valor $+\infty$ se sigue que $\mu(E)$ es finito, por Proposición 1.5 existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ positivo con $A_0 \subseteq E$ y $\mu(A_0) > 0$. Entonces A y A_0 son mutuamente disjuntos y $A \cup A_0$ es un conjunto positivo que además satisface

$$\mu(A \cup A_0) = \mu(A) + \mu(A_0) > M.$$

Lo cual contradice la definición de M. Por lo tanto $X - A$ es un conjunto negativo. Para finalizar la demostración del teorema basta tomar $X^+ = A$ y $X^- = X - A$. $\square$

Notar que la descomposición de Hahn para un conjunto X no es única. En efecto, si $X = X^+ \cup X^-$ es una descomposición que obtenemos de acuerdo al Teorema 1.6, y ahora tomamos $Z \subseteq X^+$ con $\mu(Z) = 0$, entonces

$$X = (X^+ - Z) \cup (X^- \cup Z),$$

es otra descomposición de X en un conjunto positivo y uno negativo; pues, $X^+ - Z$ es un conjunto positivo y $X^- \cup Z$ es un conjunto negativo. Así la descomposición de Hahn no es única. Sin embargo, sí lo es salvo conjuntos de medida nula.

Definición 1.7 *Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X y supongamos que tenemos definidas dos medidas μ y ν sobre $\mathcal{A}$. Diremos que las medidas μ y ν son mutuamente singulares, y denotamos esto por $\nu \perp \mu$, si y sólo si existen conjuntos medibles disjuntos A y B tales que $\nu(E) = \nu(E \cap A)$ y $\mu(E) = \mu(E \cap B)$ para cada $E \in \mathcal{A}$. Es decir, μ y ν están concentradas en conjuntos mutuamente disjuntos.*

Ejemplo 1.8 Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y x_0 un punto de X, para cada $A \in \mathcal{A}$ definamos:

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin A; \\ 1 & \text{si } x_0 \in A. \end{cases}$$

Esta función define una medida sobre $\mathcal{A}$ llamada *delta de Dirac* concentrada en x_0. Si consideramos $X = \mathbb{R}$ y $\mu = m$, siendo m la medida de Lebesgue, tenemos que $m \perp \delta_0$.

Ahora enunciaremos un teorema que nos permite, descomponer una medida con signo como diferencia de dos medidas no negativas, esto nos será de gran utilidad ya que en varias situaciones podremos trabajar suponiendo que la medida es positiva, lo que en varios casos facilita las cuentas, y luego obtener el resultado para una medida con signo vía la descomposición. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con μ una medida signada, sea $X = X^+ \cup X^-$ una descomposición de Hahn de X. Para todo $E \in \mathcal{A}$ sea

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap X^+) \qquad \text{y} \qquad \mu^-(E) = -\mu(E \cap X^-).$$

Las funciones $\mu^\pm$ son medidas no negativas sobre $\mathcal{A}$ que para todo $E \in \mathcal{A}$ verifican que:

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

El siguiente teorema resume lo mencionado arriba.

Teorema 1.9 (Jordan) *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con μ una medida con signo. Entonces existe un único par (μ^+, μ^-) de medidas mutuamente singulares, una de las cuales es finita, tal que $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$.*

Para la demostración ver [3]. Las dos medidas $\mu^\pm$ son llamadas la variación superior e inferior de μ y diremos que la medida

$$|\mu| = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

es la variación total de μ.

Definición 1.10 *Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X y supongamos que tenemos definidas dos medidas con signo μ y ν sobre $\mathcal{A}$. Diremos que ν es absolutamente continua con respecto a μ, y lo denotamos $\nu \ll \mu$ si y sólo si $|\mu|(E) = 0$ implica $|\nu|(E) = 0$. La noción de mutua singularidad para medidas signadas se traduce en transcribir la Definición 1.7 reemplazando cada medida por su variación total.*

De esta definición se desprende que si μ es una medida signada entonces ambas medidas $\mu^{\pm}$ son absolutamente continuas con respecto a $|\mu|$. Más aún, para todo $E \in \mathcal{A}$,

$$-\mu^{-}(E) \leq \mu(E) \leq \mu^{+}(E)$$

y

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E).$$

Además, si f es una función integrable respecto a μ, es válida la siguiente desigualdad:

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu|.$$

Ejemplo 1.11 Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa definida sobre X, para cada $E \in \mathcal{A}$ pongamos

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu.$$

Así hemos definido una medida sobre $\mathcal{A}$ absolutamente continua respecto a μ.

Veamos ahora algunas propiedades que tienen los espacios de medidas signadas. Para ello enunciemos el siguiente teorema.

Teorema 1.12 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con μ una medida signada y $\{E_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{A}$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

a) Si $\{E_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión monótona creciente y $\mu \geq 0$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

Si μ es una medida signada, lo anterior es válido siempre que $|\mu|(E_j) < +\infty$ para todo $j \geq 1$.

b) Si $\{E_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión monótona decreciente para la cual existe $j \geq 1$ tal que $\mu(E_j) < \infty$ y $\mu \geq 0$, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

En el caso de que μ es una medida signada, lo anterior es válido siempre que $|\mu|(E_j) < +\infty$ para todo $j \geq 1$.

c) Si μ es una medida no negativa finita, entonces se verifican las siguientes desigualdades:

$$\mu\left(\liminf_{j\to\infty} E_j\right) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu(E_j) \leq \limsup_{j\to\infty} \mu(E_j) \leq \mu\left(\limsup_{j\to\infty} E_j\right).$$

La condición c) no es más que el Teorema de Fatou-Lebesgue para funciones características. En el caso en que μ es una medida con signo las desigualdades de c) no se verifican en general, por ejemplo, si consideremos $\mu = -m$, donde m denota la medida de Lebesgue, y la siguiente sucesión de conjuntos:

$$E_j = \begin{cases} [0,1] & \text{si } j \text{ es par;} \\ [1{,}2] & \text{si } j \text{ es impar;} \end{cases}$$

se tiene que

$$\liminf_{j\to\infty} E_j = \{1\} \qquad \text{y} \qquad \limsup_{j\to\infty} E_j = [0,2].$$

Por lo tanto,

$$\liminf_{j\to\infty} \mu(E_j) = -1 = \limsup_{j\to\infty} \mu(E_j),$$

$$\mu\left(\liminf_{j\to\infty} E_j\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mu\left(\limsup_{j\to\infty} E_j\right) = -2.$$

Y por consiguiente c) no es cierto.

1.2. Espacios de Hilbert

Como mencionamos en la introducción de este capítulo lo que queremos es trabajar con la esperanza condicional, que luego definiremos mediante caminos alternativos, uno de ellos, mediante la proyección, por lo que necesitaremos introducir los espacios de Hilbert y conocer algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 1.13 *Sea X un conjunto no vacío diremos que X es un espacio con producto interno o producto escalar si X es un espacio vectorial para el cual existe una función $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineal, simétrica y definida positiva, es decir $\langle\ ,\ \rangle$ cumple lo siguiente:*

a) $\langle x + \alpha y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \alpha\langle y, z\rangle$ *para todo* $x, y, z \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *para todo* $x, y \in X$.

c) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Definimos la siguiente función sobre X, para cada $x \in X$ pongamos;

$$\|x\| = \big(\langle x, x\rangle\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Así definida $\|\cdot\|$ resulta ser una norma sobre X. En estos casos diremos que X resulta ser un espacio vectorial normado.

Definición 1.14 *Diremos que X es un espacio de Hilbert si X es un espacio vectorial normado cuya norma proviene de un producto escalar y además, resulta completo.*

Ejemplo 1.15 Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ medible Lebesgue. Consideremos $X = L^2(E)$ y para $f \in X$ pongamos $\|f\|_2 = \big(\langle f, f\rangle\big)^{\frac{1}{2}}$, con $\langle f, g\rangle = \int\limits_E fg\, dx$. Así, $\big(L^2(E), \|.\|_2\big)$ resulta ser un espacio vectorial normado cuya norma proviene de un producto escalar y como además L^2 es completo resulta $L^2(E)$ ser un espacio de Hilbert.

Ahora se enunciarán sin demostrar algunos teoremas de los cuales se derivan propiedades importantes de los espacios de Hilbert. La demostración de estos teoremas puede ser consultada en [4].

Teorema 1.16 *Sea X un espacio de Hilbert, $\mathcal{C} \subseteq X$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo y sea $x \in X$. Entonces existe un único elemento $p(x)$ en $\mathcal{C}$ que verifica:*

$$\|x - p(x)\| \leq \|x - c\| \quad \forall c \in \mathcal{C}.$$

Diremos que $p(x)$ es la proyección del vector x sobre el conjunto $\mathcal{C}$. A $p(x)$ también lo denotaremos por $p(x/\mathcal{C})$.

Teorema 1.17 (Caracterización de la Proyección) *Sea X un espacio de Hilbert, $\mathcal{C} \subseteq X$ un conjunto no vacío, convexo y cerrado. Sean $x \in X$ y $p \in \mathcal{C}$ dos vectores. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *El vector p es la proyección de x sobre $\mathcal{C}$,*

b) $\langle x-p, c-p\rangle \leq 0 \quad \forall c \in \mathcal{C}$,

c) $\|x-c\|^2 \geq \|x-p\|^2 + \|p-c\|^2 \quad \forall c \in \mathcal{C}$.

Observación 1.18 En el caso particular en el que el subconjunto $\mathcal{C}$ resulte ser un subespacio cerrado de X, la condición b) se traduce en:

$$p \in \mathcal{C} \quad \text{y} \quad \langle x-p, c\rangle = 0, \quad \text{para cada c} \in \mathcal{C}.$$

Esto suele expresarse diciendo que un vector p en $\mathcal{C}$ es la proyección de x si y sólo si $x-p$ es perpendicular a $\mathcal{C}$. Además la afirmación c) implica la unicidad de la proyección.

1.3. Teorema de Radon-Nikodym

En esta sección demostraremos el Teorema de Radon-Nikodym y aunque común mente nos referimos al teorema como de Radon-Nikodym, la primera versión de éste, en el contexto de una medida en $\mathbb{R}^n$ absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, fue hecha por H. Lebesgue (ver [2]), Radon extendió ésto a las medidas de Radon, que son aquellas medidas que resultan finitas sobre cada subconjunto compacto, y Nikodym a medidas generales.

Definición 1.19 *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ diremos que este es σ-finito si existe una sucesión creciente $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos en $\mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ y $\mu(X_n)$ es finito para cada n.*

El siguiente teorema establece que los únicos ejemplos de medidas absolutamente continuas vienen dadas según lo describimos en el Ejemplo 1.11.

Teorema 1.20 (Radon-Nikodym) *Sean μ y ν dos medidas no negativas, σ-finitas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, y sea ν absolutamente continua con respecto a μ. Entonces existe una función no negativa μ-medible $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\nu(E) = \int_E f(x)d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

La función f que aparece en el Teorema es única salvo un conjunto de medida μ cero.

Observación 1.21 En cierto sentido afirmamos que ν es una primitiva de μ pues, de manera algo imprecisa, podemos escribir $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, por ello se suele denotar a f como $\frac{d\nu}{d\mu}$ y la función f es llamada la derivada de Radon-Nikodym, la cual se tratara con más detalle en el Capítulo 3. Notar que el teorema no afirma que f es μ integrable, esto ocurre si y sólo si ν es finita. La hipótesis de que ambas medidas μ y ν sean σ-finitas no puede ser debilitada como lo veremos luego, en un ejemplo.

La demostración que expondremos a continuación se desarrolla en [3].

Dem. Asumamos en primer lugar que ambas medidas μ y ν son finitas. La demostración se realiza en varios pasos.

Paso 1 Sea Φ la familia de todas las funciones no negativas medibles $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\int_E \varphi(x) d\mu \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

La idea es hallar una función f en Φ que acote superiormente a ésta familia y por lo cual va a ser la candidata a alcanzar la igualdad en (1.1). La familia Φ es no vacía pues la función constantemente cero pertenece a Φ. Además si φ_1 y $\varphi_2 \in \Phi$ entonces $\max\{\varphi_1, \varphi_2\}$ pertenece a Φ, en efecto;

$$\begin{aligned}\int_E \max\{\varphi_1, \varphi_2\} d\mu &= \int_{E\cap\{\varphi_1 \geq \varphi_2\}} \varphi_1 d\mu + \int_{E\cap\{\varphi_2 > \varphi_1\}} \varphi_2 d\mu \\ &\leq \nu(E \cap \{\varphi_1 \geq \varphi_2\}) + \nu(E \cap \{\varphi_1 < \varphi_2\}) = \nu(E).\end{aligned}$$

Como, por nuestra suposición, ν es finita, podemos definir

$$M := \sup_{\varphi\in\Phi} \int_X \varphi d\mu \leq \nu(X) < \infty.$$

Paso 2 Ahora construiremos la función máxima en Φ. Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en Φ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = M,$$

y sea

$$f_n = \max\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}.$$

Así para cada n, f_n es una función que pertenece a Φ y la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es no decreciente. Tomando $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ se sigue que $f \in \Phi$; en efecto, por Beppo-Levi para todo subconjunto medible E tenemos

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \nu(E).$$

Además esta función f alcanza el supremo, es decir

$$M \geq \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = M.$$

Paso 3 Veamos que la función f es la de la tesis del Teorema. Para esto es suficiente ver que la siguiente medida definida en $\mathcal{A}$, es idénticamente cero

$$\eta(E) := \nu(E) - \int_E f d\mu.$$

Observemos que para cada subconjunto $E \in \mathcal{A}$ tenemos que $\eta(E) \geq 0$. Supongamos por el absurdo que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\eta(A) > 0$. Como por hipótesis ν es absolutamente continua con respecto a μ de la definición de η se sigue que η también lo es, luego $\mu(A) > 0$. Además como μ es finita existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\eta(A) - \epsilon\mu(A) > 0,$$

si consideramos la función que a cada $E \in \mathcal{A}$ le asigna el valor $\beta(E) = \eta(E) - \epsilon\mu(E)$ ésta resulta ser una medida signada sobre $\mathcal{A}$. De la Proposición 1.5 tenemos que el conjunto A contiene un subconjunto positivo A_0 con $\beta(A_0) > 0$. Así,

$$\beta(E \cap A_0) = \eta(E \cap A_0) - \epsilon\mu(E \cap A_0) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

De la definición de η se sigue que

$$\epsilon\mu(E \cap A_0) \leq \eta(E \cap A_0) = \nu(E \cap A_0) - \int_{E\cap A_0} f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Así la función $f + \epsilon\chi_{A_0} \in \Phi$. En efecto, dado $E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\int_E (f + \epsilon\chi_{A_0}) d\mu &= \int_{E-A_0} f d\mu + \int_{E\cap A_0} (f+\epsilon) d\mu \\ &\leq \nu(E - A_0) + \int_{E\cap A_0} f d\mu + \epsilon\mu(E \cap A_0) \\ &\leq \nu(E - A_0) + \nu(E \cap A_0) = \nu(E).\end{aligned}$$

Pero esto contradice la definición de M ya que

$$\int\limits_X (f + \epsilon\chi_{A_0})d\mu = M + \varepsilon\mu(A_0) > M.$$

Por lo tanto, $\eta(A)$ debe ser constantemente cero y por consiguiente obtenemos que:

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Paso 4 Veamos la unicidad de f. Supongamos que existe $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ otra función medible no negativa que verifica

$$\nu(E) = \int\limits_E g(x)d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$A_n = \{x \in X : f(x) - g(x) \geq \frac{1}{n}\},$$

y

$$B_n = \{x \in X : g(x) - f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int\limits_{A_n} (f - g)d\mu = \nu(A_n) - \nu(A_n) = 0.$$

Así, tenemos que $\mu(A_n) = 0$. De manera análoga se puede ver que $\mu(B_n) = 0$. Por lo tanto $f = g$ en casi todo punto respecto a μ en X.

Paso 5 Asumamos ahora que μ es una medida σ-finita y ν finita. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{A}$ tales que $\mu(E_n) < \infty$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$, entonces $\mu(E_n) \leq \mu(E_{n+1})$. Sea μ_n la restricción de μ a E_n y f_n la única función que existe por el teorema de Radon-Nikodym para el par de medidas finitas (μ_n, ν). Por construcción $f_{n+1} = f_n$ en E_n para todo $n \in \mathbb{N}$. La función $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ es la de la tesis del Teorema, ya que dado $E \in \mathcal{A}$ tenemos

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(E \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\cap E_n} f_n d\mu = \int\limits_E f d\mu.$$

La unicidad de f se prueba de forma análoga al caso en que μ es finita. Un argumento similar establece el teorema para cuando ν es una medida σ-finita. $\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que la hipótesis de este último teorema, de que ambas medidas deben ser σ-finitas, no puede ser debilitada.

Ejemplo 1.22 Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y consideremos el siguiente par de medidas $\mu(E) = \mathcal{K}(E)$, con $\mathcal{K}(E)$ denotamos el cardinal del conjunto E. Esta medida es la función que cuenta la cantidad de elementos que tiene cada conjunto, y ν la medida de Lebesgue. Entonces $\nu \ll \mu$, sin embargo no existe una función f μ-medible para la cual se verifique la siguiente igualdad:

$$\nu(E) = \int_E f(x)d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}, \tag{1.2}$$

pues si (1.2) fuera cierta para alguna f esta debería ser constantemente cero pero esto es un una contradicción ya que nos estaría diciendo que la medida de Lebesgue de cualquier conjunto en $\mathcal{A}$ seria cero.

Para finalizar con esta sección presentamos una generalización del Teorema 1.20.

Teorema 1.23 *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(X, \mathcal{A}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{A}$, con ν una medida signada. Si ν es absolutamente continua con respecto a μ entonces existe una única función μ-medible $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\nu(E) = \int_E f(x)d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

Tal f es única salvo un conjunto de medida μ nula.

Observación 1.24 La función f no necesariamente es integrable; sin embargo, al menos una de las siguientes funciones f^+, f^- debe ser integrable para que esté bien definida la integral en (1.3).

Dem. En primer lugar determinemos la descomposición de Hahn de X, sea X^+ y X^- una descomposición, la cual existe por Teorema 1.6 y pongamos $\nu = \nu^+ - \nu^-$ como lo establece el Teorema 1.9. La variación superior e inferior, ν^+, ν^- son absolutamente continuas con respecto a μ. Aplicando el Teorema 1.20 a los pares de medidas $(\nu^+, \mu), (\nu^-, \mu)$ tenemos que existen funciones no negativas $f^{\pm}$ μ-medibles tales que:

$$\nu^{\pm}(E) = \nu(E \cap X^{\pm}) = \int_E f^{\pm}(x) d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Tomando $f = f^+ - f^-$ obtenemos la tesis del teorema. □

1.4. Esperanza Condicional

El concepto de esperanza condicional es central en el desarrollo de la teoría de probabilidades y por ende de la teoría de estimación (inferencia estadística). Un ejemplo de ello es la teoría de regresión donde la esperanza condicional representa la media de una variable condicionada a información previa que tenemos de otra variable o conjunto de variables y de lo que se trata es de estimar esa media.

1.4.1. Definición a través del Teorema de Radon-Nikodym

El Teorema de Radon-Nikodym, es un teorema muy importante con varias aplicaciones interesantes, una de las cuales, es la obtención de la esperanza condicional. Esto es lo que se detalla a continuación. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito con $\mu \geq 0$ y sea $\mathcal{A}_0$ una σ-álgebra contenida en $\mathcal{A}$, tal que μ es σ-finita cuando la restringimos a $\mathcal{A}_0$. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, consideremos la siguiente medida definida en $\mathcal{A}_0$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A}_0).$$

Así resulta $\nu \ll \mu$ entonces por el Teorema 1.20 existe una única función $h \in L^1(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ tal que:

$$\int_A h d\mu = \nu(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}_0. \tag{1.4}$$

A esta función h se la conoce con el nombre de *esperanza condicional* de f dada la σ-álgebra $\mathcal{A}_0$ y la denotaremos $E[f/\mathcal{A}_0]$.

1.4.2. Definición como Mejor Aproximante en L^2

Ahora supongamos además que μ es una medida finita y que $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$; donde en L^2 consideramos $\langle , \rangle$ y $\|.\|_2$ como en el Ejemplo 1.15. Para cada función simple g, medible con respecto a $\mathcal{A}_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu &= \int \sum_{i=1}^{n} E[f/\mathcal{A}_0]\alpha_i \chi_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{E_i} E[f/\mathcal{A}_0] d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{E_i} f d\mu = \int f g d\mu = \langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2\end{aligned}$$

siendo $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$. Como las funciones simples pertenecen a L^2 y además son densas en este espacio, obtenemos que la esperanza condicional $E[f/\mathcal{A}_0]$ esta en $L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ siempre que f pertenezca a $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ (ver Teorema 7.10' en [4]). Más aún, para toda función $g \in L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ se verifica la siguiente igualdad:

$$\int E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu = \int f g d\mu,$$

esto es una consecuencia de la densidad de las funciones simples en $L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ y del hecho que la anterior igualdad es válida para las funciones simples. De esta última igualdad obtenemos

$$\int \big(f - E[f/\mathcal{A}_0]\big) g \, d\mu = \langle f - E[f/\mathcal{A}_0], g \rangle = 0 \qquad \forall g \in L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu). \tag{1.5}$$

De (1.5) y Teorema 1.17 deducimos que si $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, la esperanza condicional es el mejor aproximante a f en $L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu)$, en el sentido que $E[f/\mathcal{A}_0]$ es el único elemento de $L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ para el cual la siguiente desigualdad es cierta

$$\|f - E[f/\mathcal{A}_0]\|_2 \leq \|f - g\|_2 \quad \forall g \in L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu).$$

Pensar en la esperanza condicional como una proyección en un espacio de Hilbert, nos da un camino alternativo para definirla sin usar el Teorema de Radon-Nikodym. Para $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ definamos $E[f/\mathcal{A}_0]$ como la proyección de f al subespacio cerrado $L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ del espacio de Hilbert $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces, por lo expuesto anteriormente,

$$\int f g \, d\mu = \int E[f/\mathcal{A}_0] g \, d\mu \qquad \forall g \in L^2(X, \mathcal{A}_0, \mu).$$

En particular, si consideramos $g(x) = \chi_{A_0}(x)$ con $A_0 \in \mathcal{A}_0$, tenemos que:

$$\int_{A_0} f \, d\mu = \int_{A_0} E[f/\mathcal{A}_0] \, d\mu.$$

Veamos que la esperanza así definida es una función integrable. Sea $f \in L^2$,

$$\begin{aligned} \|E[f/\mathcal{A}_0]\|_{L^1} &= \sup \int E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu \\ &= \sup \int f g d\mu \leq \|f\|_{L^1}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g \in L^\infty(\mathcal{A}_0)$ que verifican $\|g\|_\infty \leq 1$. Recordar que estamos bajo la suposición de que μ es finita y por consiguiente, $L^p \subseteq L^q$ cada vez que $p \geq q$. Por lo tanto la norma L^1 de la esperanza condicional esta acotada por la norma L^1 de la función dada y así resulta que $E[f/\mathcal{A}_0] \in L^1$. Ahora extendamos esta noción a una función f integrable cualquiera.

Sea $f \in L^1$ como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^1 existe en $L^1 \cap L^2$ una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que f_n convergen a f en la norma 1. Veamos que existe el límite de las esperanzas condicionales de esta sucesión de funciones. Para ello demostremos que son una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$, usando la linealidad de la esperanza condicional, (1.6) y el hecho de que las f_n son de Cauchy obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|E[f_n/\mathcal{A}_0] - E[f_m/\mathcal{A}_0]\|_{L^1} &= \|E[(f_n - f_m)/\mathcal{A}_0]\|_{L^1} \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{L^1} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Luego, existe $\lim\limits_{n\to\infty} E[f_n/\mathcal{A}_0]$ en L^1. Ahora definimos la esperanza condicional de f dada la sub-σ-álgebra $\mathcal{A}_0$ por

$$E[f/\mathcal{A}_0] := \lim_{n\to\infty} E[f_n/\mathcal{A}_0].$$

En primer lugar debemos verificar la buena definición de la esperanza condicional; es decir, cerciorarnos que es independiente de la sucesión f_n. Tomemos para ello, g_n otra sucesión de funciones en $L^1 \cap L^2$ con la propiedad de que g_n convergen a f en la norma 1. Entonces para n lo suficientemente grande tenemos que:

$$\begin{aligned} \|E[f_n/\mathcal{A}_0] - E[g_n/\mathcal{A}_0]\|_{L^1} &= \|E[(f_n - g_n)/\mathcal{A}_0]\|_{L^1} \leq \|f_n - g_n\|_{L^1} \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^1} + \|f - g_n\|_{L^1} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Sea $f \in L^1$, entonces existe una sucesión de funciones f_n en $L^1 \cap L^2$, a la cual podemos suponer creciente, que converge a f en la norma 1. Como $\{f_n\} \in L^2$ por definición, para cada $A \in \mathcal{A}_0$ tenemos:

$$\int_A f_n \, d\mu = \int_A E[f_n/\mathcal{A}_0] \, d\mu.$$

De la definición dada en esta sección de esperanza condicional para una función integrable, de (1.6) y del hecho que $\{f_n\}$ convergen a f en la norma 1 obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_A E[f/\mathcal{A}_0] \, d\mu &= \int_A \lim_{n\to\infty} E[f_n/\mathcal{A}_0] = \lim_{n\to\infty} \int_A E[f_n/\mathcal{A}_0] \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu.\end{aligned}$$

Así esta nueva definición coincide con la noción de esperanza condicional dada al comienzo mediante el Teorema de Radon-Nikodym.

1.4.3. Propiedades

El siguiente teorema establece varias propiedades de la esperanza condicional, por simplicidad supondremos que el espacio de medida con el que estamos trabajando es finito. Con lo cual tenemos en particular, que $L^p \subseteq L^1$ para $p \geq 1$ y así tenemos definida la esperanza condicional para toda $f \in L^p$.

Teorema 1.25 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito, $\mathcal{A}_0$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Entonces son válidos los siguientes enunciados:*

a) Sea $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Si $f \geq 0$ entonces $E[f/\mathcal{A}_0] \geq 0$;

b) Si $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tenemos que $\left|E[f/\mathcal{A}_0]\right| \leq E[|f|/\mathcal{A}_0]$;

c) Si $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y sea $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para cada función $g \in L^q(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ tenemos que:

$$\int fg \, d\mu = \int E[f/\mathcal{A}_0] g \, d\mu;$$

d) Si $f \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, $\left\|E[f/\mathcal{A}_0]\right\|_p \leq \|f\|_p$.

Dem. De la primera definición de esperanza condicional tenemos que para todo $A \in \mathcal{A}_0$

$$\int\limits_A E[f/\mathcal{A}_0]d\mu = \int\limits_A f d\mu.$$

Sea $B_0 = \{x : E[f/\mathcal{A}_0](x) < 0\}$. Si $\mu(B_0) > 0$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\{x : E[f/\mathcal{A}_0](x) \leq -\frac{1}{k}\}) > 0$. De esta manera obtenemos que

$$\int\limits_{\{E[f/\mathcal{A}_0](x) \leq -\frac{1}{k}\}} E[f/\mathcal{A}_0]d\mu \leq -\frac{1}{k}\, \mu(\{x : E[f/\mathcal{A}_0](x) \leq -\frac{1}{k}\}) < 0,$$

pero por otro lado, como la función f es no negativa tenemos

$$\int\limits_{\{E[f/\mathcal{A}_0](x) \leq -\frac{1}{k}\}} E[f/\mathcal{A}_0]d\mu = \int\limits_{\{E[f/\mathcal{A}_0](x) \leq -\frac{1}{k}\}} f d\mu \geq 0.$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto $\mu(B_0) = 0$ y entonces vale $a)$. Veamos $b)$, de la linealidad de la esperanza condicional, del hecho que $-f \leq |f| \leq f$ y por $a)$ tenemos que:

$$0 \leq E[f + |f|/\mathcal{A}_0] = E[f/\mathcal{A}_0] + E[|f|/\mathcal{A}_0] \tag{1.7}$$

y

$$0 \leq E[|f| - f/\mathcal{A}_0] = E[|f|/\mathcal{A}_0] - E[f/\mathcal{A}_0]. \tag{1.8}$$

Por (1.7) y (1.8) obtenemos que

$$E[f/\mathcal{A}_0] \leq E[|f|/\mathcal{A}_0] \quad \text{y} \quad E[f/\mathcal{A}_0] \geq -E[|f|/\mathcal{A}_0].$$

Luego,

$$\left|E[f/\mathcal{A}_0]\right| \leq E[|f|/\mathcal{A}_0].$$

Para ver $c)$ tomemos $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y consideremos $g \in L^q(X, \mathcal{A}_0, \mu)$. En el caso en el que g es una función característica, digamos $g(x) = \chi_A(x)$, con $A \in \mathcal{A}_0$, tenemos

$$\int\limits_X f g d\mu = \int\limits_A f d\mu = \int\limits_A E[f/\mathcal{A}_0]d\mu = \int\limits_X E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu.$$

Si g es una función simple, supongamos $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ con $A_i \in \mathcal{A}_0$ vale lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_X fg d\mu &= \int_X f\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\big) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} f d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} E[f/\mathcal{A}_0] d\mu = \int_X E[f/\mathcal{A}_0]\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\big) d\mu \\ &= \int_X E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu.\end{aligned}$$

Por último si $g \in L^q(X, \mathcal{A}_0, \mu)$, como las funciones simples resultan ser densas en L^q con $1 \leq q \leq \infty$ existe una sucesión $\{g_n\}_{n \geq 1}$ de funciones simples que converge a g en la norma q, así aplicando la Desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_X fg d\mu &= \int_X f \lim_{n \to \infty} g_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f g_n d\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_X E[f/\mathcal{A}_0] g_n d\mu = \int_X E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu.\end{aligned}$$

Veamos ahora la última parte de este teorema

$$\begin{aligned}\big\|E[f/\mathcal{A}_0]\big\|_p &= \sup_{\|g\|_{q,\mathcal{A}_0} \leq 1} \int E[f/\mathcal{A}_0] g d\mu = \sup_{\|g\|_{q,\mathcal{A}_0} \leq 1} \int fg d\mu \\ &\leq \sup_{\|g\|_{q,\mathcal{A}} \leq 1} \int fg d\mu = \|f\|_p.\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Mejores Aproximantes en Espacios de Musielak-Orlicz

Introducción

En este capítulo se introducen los Espacios de Musielak-Orlicz y algunos conceptos nuevos que nos permitirán trabajar con el mejor φ-aproximante. Con el objetivo de poder caracterizar a los mejores φ-aproximantes, se obtienen aquí algunas propiedades importantes que satisface el conjunto de mejores φ-aproximantes.

2.1. Nociones y Resultados Preliminares

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito y completo; es decir $\mu(\Omega) < \infty$ y si $\mu(Z) = 0$ entonces para todo subconjunto A de Z se tiene que A es μ-medible, un ejemplo de una medida completa es la medida de Lebesgue. En este capítulo μ siempre denotará una medida no negativa y reservaremos ν para cuando hablemos de una medida signada. Denotamos por $M = M(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ el conjunto de todas las funciones a valores reales $\mathcal{A}$-medibles, así $f \in M$ si y sólo si $\forall a \in \mathbb{R}$ tenemos que $\{f > a\} \in \mathcal{A}$.

Definición 2.1 *Un conjunto $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ es llamado un σ-retículo si se cumple lo siguiente:*

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{L}$.

b) $\mathcal{L}$ *es cerrado bajo uniones e intersecciones numerables.*

De la definición 2.1 tenemos que toda σ-álgebra es un σ-retículo. El recíproco de esta afirmación, no es cierta. En el caso particular en que $\mathcal{L}$ sea cerrado sólo bajo uniones e intersecciones finitas, nos referiremos a $\mathcal{L}$ simplemente como un retículo. Diremos que el conjunto $\mathcal{L}$ es un σ-retículo completo si y sólo si $\mathcal{L}$ es un σ-retículo y además para cada $C \in \mathcal{L}$ con $\mu(C \bigtriangleup C^{'}) = 0$, se tiene que $C^{'} \in \mathcal{L}$. Para un σ-retículo $\mathcal{L}$ denotamos por $\overline{\mathcal{L}}$ el siguiente σ-retículo

$$\overline{\mathcal{L}} = \{D : \Omega - D \in \mathcal{L}\}.$$

Una función f es llamada $\mathcal{L}$-medible si para todo número $a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\} \in \mathcal{L}$. De aquí en más, en este capítulo, asumiremos que $\mathcal{L}$ denota un σ-retículo completo. Veamos ahora un ejemplo de σ-retículo, el cual nos será de gran utilidad en lo que sigue de esta monografía.

Ejemplo 2.2 Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y μ la medida de Lebesgue. Para cada $x, y \in \Omega$ diremos que $x \leq y$ si y sólo si $x_i \leq y_i$, para $i = 1, 2, 3, ..., n$; donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, de esta manera hemos definido una relación de orden parcial en Ω. Un conjunto $C \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado *conjunto final* si y sólo si cada vez que $x \in C$ y $x \leq y$ tenemos que $y \in C$. De la definición 2.1 se sigue fácilmente que la familia de conjuntos finales es un σ-retículo. Definimos ahora, un σ-retículo al que denotaremos por $\mathcal{L}^n$ como sigue; diremos que $C \in \mathcal{L}^n$ si y sólo si existe un conjunto final $C^{'}$ tal que $\mu(C \bigtriangleup C^{'}) = 0$. Así este σ-retículo es aquel que esta formado por todos aquellos conjuntos que coinciden con un final salvo un conjunto de medida μ cero. $\mathcal{L}^n(\Omega) = \mathcal{L}^n$ es llamado σ-retículo completo estándar.

Proposición 2.3 *$\mathcal{L}^n(\Omega)$ es un σ-retículo completo.*

Dem. Veamos en primer lugar que $\mathcal{L}^n$ es un σ-retículo. Puesto que $\emptyset, \Omega$ son conjuntos finales se tiene que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{L}^n$ Consideremos ahora una sucesión C_n de conjuntos en $\mathcal{L}^n$, veamos que la unión de ellos pertenece a $\mathcal{L}^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $C_n^{'}$ conjunto final tal que:

$$\mu(C_n \bigtriangleup C_n^{'}) = 0$$

como $\bigcup\limits_{n\geq 1} C_n^{'}$ es un conjunto final y

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} C_n \bigtriangleup \bigcup_{n\geq 1} C_n^{'}\right) = 0,$$

obtenemos que la unión pertenece a $\mathcal{L}^n$.
Análogamente se obtiene que $\bigcap_{n\geq 1} C_n \in \mathcal{L}^n$. Así, $\mathcal{L}^n$ resulta ser un σ-retículo.

Ahora, verifiquemos que es completo. Sea $C \in \mathcal{L}^n$ y D tal que $\mu(C \bigtriangleup D) = 0$, como C pertenece al σ-retículo, existe C' conjunto final con $\mu(C \bigtriangleup C') = 0$, puesto que $C' \subseteq C \cup (C' - C)$ y $D \subseteq C \cup (D - C)$ tenemos que

$$D \bigtriangleup C' \subseteq [(C - D) \cup (C' - C)] \cup [(C - C') \cup (D - C)].$$

Entonces $\mu(D \bigtriangleup C') = 0$ y así tenemos que $D \in \mathcal{L}^n$ y por lo tanto $\mathcal{L}^n(\Omega)$ es un σ-retículo completo. $\square$

Diremos que una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es no decreciente si y sólo si $g(x) \leq g(y)$ siempre que $x \leq y$.

Proposición 2.4 *Una función f es $\mathcal{L}^n$-medible si y sólo si existe una función g no decreciente tal que $f = g$ en casi todo punto respecto a μ.*

Dem. Sea f una función $\mathcal{L}^n$-medible, entonces $\forall a \in \mathbb{Q}$ el conjunto $\{f > a\} \in \mathcal{L}^n$ luego para todo a, existe C_a conjunto final tal que $\mu(\{f > a\} \bigtriangleup C_a) = 0$. Sea,

$$Z = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \left\{ \omega \in \Omega : \omega \in \{f > a\} \bigtriangleup C_a \right\}.$$

Entonces, $\mu(Z) = 0$. Definamos ahora, la siguiente función para cada punto de $\Omega - Z$

$$g(x) = \sup_{x \in C_a} a.$$

Así definida g resulta ser una función no decreciente, en efecto sean $x, y \in \Omega$ tal que $x \leq y$, como C_a es un conjunto final si $x \in C_a$ tenemos que $y \in C_a$ y así $g(x) \leq g(y)$. Además, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \Omega - Z$ pues, sea $x \in \Omega - Z$ y pongamos $a = f(x)$ entonces para todo número racional $b < a$ se tiene que $x \in \{f > b\}$, entonces $x \in C_b$ para todo $b < a$, luego, $g(x) \geq a = f(x)$. Ahora supongamos por el absurdo, que $\mu(\{f < g\}) > 0$ y consideremos $a \in \mathbb{Q}$ tal que $\mu(\{f \leq a < g\}) > 0$. Sea $x \in \Omega - Z$ tal que $f(x) \leq a < g(x)$. De la definición de g se tiene que existe $b > a$ tal que $x \in C_b$, pero entonces $f(x) > b$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Veamos la otra implicación. Sea $a \in \mathbb{R}$, como g es una función no decreciente tenemos que $\{g > a\}$ es un conjunto final y además, cumple que $\mu(\{f > a\} \bigtriangleup \{g > a\}) = 0$. De la definición de $\mathcal{L}^n$ dada en el Ejemplo 2.2 se sigue que $\{f > a\}$ pertenece a $\mathcal{L}^n$ para todo $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 2.5 Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ el σ-retículo que contiene todos los subconjuntos de la forma $A_n = \{m \in \Omega : m > n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Se puede ver fácilmente que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{L}^*$-medible si y sólo si f es no decreciente. Observar que este ejemplo, no es más que la discretización de la proposición anterior.

2.2. Espacio de Musielak-Orlicz

Consideremos la función $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con las propiedades siguientes:

a) $\varphi(\cdot, a)$ es una función medible para todo $a \in \mathbb{R}$,

b) $\varphi(\omega, a) = 0$ si y sólo si $a = 0$,

c) $\varphi(\omega, \cdot)$ es una función par, no idénticamente nula y convexa.

Para una función φ que cumpla a)- c) denotamos con $\varphi_+ (\varphi_-)$ la derivada a derecha (a izquierda) de φ con respecto a la segunda variable.

Definición 2.6 *Sea φ una función que satisface a)- c) de arriba. Definimos el Espacio de Musielak-Orlicz (o Espacio Generalizado de Orlicz) al que denotaremos L_φ por*

$$L_\varphi := \{f \in M : \exists \lambda > 0 : \int_\Omega \varphi(\omega, \lambda f(\omega)) d\mu < \infty\}.$$

Si la función φ no depende de la primera variable, entonces L_φ es llamado simplemente Espacio de Orlicz.

Lema 2.7 *La función $\varphi(\omega, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es monótona creciente en el intervalo $[0, +\infty)$ y monótona decreciente en $(-\infty, 0]$.*

Dem. Por las condiciones b) y c) pedidas para φ tenemos que $\varphi(\omega, 0) = 0$ y que $\varphi(\omega, \cdot)$ es convexa y par. Sea $0 \leq s < t$ entonces,

$$\varphi(\omega, s) = \varphi\left(\omega, \left(1 - \frac{s}{t}\right)0 + \left(\frac{s}{t}\right)t\right) \leq \varphi(\omega, t).$$

Así, φ es monótona creciente para todo $a \geq 0$. Para ver que φ es no decreciente, tomemos $s < t \leq 0$ entonces, $0 \leq -t < -s$, aplicando lo obtenido anteriormente tenemos que

$$\varphi(\omega, -t) \leq \varphi(\omega, -s),$$

del hecho que $\varphi(\omega,\cdot)$ es par se sigue que φ es no creciente en el intervalo $(-\infty,0]$ como queríamos ver. $\square$

Observación 2.8 En el caso particular en que $\varphi(\omega,a)=|a|^p$ con $1\leq p<\infty$ el espacio L_φ coincide con el espacio de funciones L^p ya conocido por nosotros.

Proposición 2.9 *El Espacio de Musielak-Orlicz* $\big(L_\varphi,+,\mathbb{R},\cdot\big)$ *es un espacio vectorial. Con* $+$ *denotamos la operación de suma de funciones y con* $\cdot$ *el producto de una función por un número real.*

Dem. Sean f y g en L_φ, veamos que $f+g\in L_\varphi$. Como f y g pertenecen a L_φ existen constantes positivas λ_1,λ_2 tales que

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega,\lambda_1 f(\omega))d\mu,\ \int\limits_\Omega \varphi(\omega,\lambda_2 g(\omega))d\mu<\infty.$$

Observemos que si

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega,\lambda_1 f(\omega))d\mu<\infty,$$

entonces para todo λ con $0<\lambda\leq\lambda_1$

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega,\lambda f(\omega))d\mu<\infty.$$

Esto se sigue del hecho de que la función $\varphi(\omega,\cdot)$ es par y del Lema 2.7. Sea $\lambda=\text{mín}\{\frac{\lambda_1}{2},\frac{\lambda_2}{2}\}$ entonces,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \varphi(\omega,\lambda(f+g)(\omega))d\mu &= \int\limits_\Omega \varphi\left(\omega,\left(\frac{2\lambda f(\omega)}{2}+\frac{2\lambda g(\omega)}{2}\right)\right)d\mu\\ &\leq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varphi(\omega,2\lambda f(\omega))d\mu+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varphi(\omega,2\lambda g(\omega))d\mu<\infty.\end{aligned}$$

Así $f+g$ pertenece a L_φ. Ahora veamos que $\alpha\cdot f\in L_\varphi$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ y $f\in L_\varphi$ entonces existe $\lambda>0$ tal que:

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega,\lambda f(\omega))d\mu<\infty.$$

Si $\alpha > 0$ tomemos $\lambda^{'} = \frac{\lambda}{\alpha}$, entonces

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(\omega, \lambda^{'}(\alpha \cdot f)(\omega))d\mu = \int\limits_{\Omega} \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu < \infty,$$

en el caso que $\alpha < 0$, tomando $\lambda^{'} = -\frac{\lambda}{\alpha}$, y usando el hecho que $\varphi(\omega, \cdot)$ es par, obtenenos que $\alpha \cdot f \in L_{\varphi}$. Por último, si $\alpha = 0$ tenemos:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(\omega, 0 \cdot f(\omega))d\mu = 0 < \infty.$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot f \in L_{\varphi}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. El resto de los axiomas que faltan de verificar para completar la demostración se siguen inmediatamente del hecho de que el conjunto de todas las funciones a valores reales forman un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales con las operaciones de suma y producto por escalar y notando que la función constantemente cero pertenece a L_{φ}. $\square$

Para $f \in L_{\varphi}$ definimos la siguiente norma

$$\|f\|_{\varphi} := \inf\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \varphi\left(\omega, \frac{f(\omega)}{\lambda}\right)d\mu \leq 1\}. \tag{2.1}$$

Proposición 2.10 *El Espacio de Musielak-Orlicz L_{φ} es un Espacio de Banach con la norma* (2.1) *definida arriba.*

Dem. El hecho de que $\|\cdot\|_{\varphi}$ resulta ser una norma sobre el espacio vectorial L_{φ} lo dejamos a cargo del lector, una demostración de ello en un caso particular, puede ser consultada en [4]. Lo que aquí será expuesto es la demostración de que el espacio resulta ser completo. Recordemos que una caracterización de los espacios vectoriales normados completos es que toda serie absolutamente convergente converge. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en L_{φ} tal que $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\varphi} < \infty$. Veamos que $\sum_{n\geq 1} f_n \in L_{\varphi}$. Llamemos $\lambda_n = \|f_n\|_{\varphi}$ y $\lambda_0 = \sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\varphi}$ Entonces

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \varphi\left(\omega, \frac{\sum_{n\geq 1} f_n(\omega)}{\lambda_0}\right)d\mu &= \int\limits_{\Omega} \varphi\left(\omega, \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n \frac{f_n(\omega)}{\lambda_n}}{\lambda_0}\right)d\mu \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{\lambda_0} \int\limits_{\Omega} \varphi\left(\omega, \frac{f_n(\omega)}{\lambda_n}\right)d\mu \leq 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, L_φ es un Espacio de Banach. $\square$

En lo que sigue, asumiremos que la función φ satisface las siguientes dos condiciones adicionales:

d) $\varphi(\omega,\cdot)$ cumple una condición Δ_2 uniformemente. Es decir, existen constantes positivas C y A_0, independientes de ω, tales que para todo $\omega \in \Omega$ y $|a| \geq A_0$ se tiene que:

$$\varphi(\omega, 2a) \leq C\varphi(\omega, a).$$

e) $\int\limits_\Omega \varphi_+(\omega, k) < \infty$, para toda constante $k \in \mathbb{R}$.

Observación 2.11 La última condición pedida implica que $\varphi(\omega, k) \in L^1(\Omega)$. Esto se debe a que toda función convexa satisface el Teorema Fundamental del Cálculo y del hecho de que las derivadas laterales existen y son funciones crecientes, esto puede verse con más detalle en [4]. Luego,

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega, k)d\mu = \int\limits_\Omega \int\limits_0^k \varphi_+(\omega, t)dtd\mu \leq k \int\limits_\Omega \varphi_+(\omega, k)d\mu < \infty.$$

Proposición 2.12 *Si φ es una función que cumple con todas las condiciones pedidas a)-e) se tiene que $f \in L_\varphi$ si y sólo si $\int_\Omega \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu < \infty$ para todo $\lambda > 0$.*

Dem. Supongamos$f \in L_\varphi$ entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega, \lambda_0 f(\omega))d\mu < \infty.$$

Sean C, A_0 las constantes que cumplen con la condición d), entonces para todo número real a con $|a| \geq A_0 > 0$ se tiene:

Si $l < 2$,

$$\varphi(\omega, la) \leq \varphi(\omega, 2a) \leq C\varphi(\omega, a),$$

esto es consecuencia del Lema 2.7.

Si $l > 2$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n > l$. Luego,

$$\varphi(\omega, la) \leq \varphi(\omega, 2^n a) = \varphi(\omega, 2(2^{n-1}a)) \leq C\varphi(\omega, 2^{n-1}a) \leq ... \leq C^n\varphi(\omega, a).$$

Llamemos $B_0 = \frac{A_0}{\lambda_0}$ y tomemos $\lambda > 0$. Para $|a| \geq B_0$ consideremos los siguientes casos

- Si $\lambda < 2\lambda_0$ entonces,

$$\varphi(\omega, \lambda a) \leq \varphi(\omega, 2\lambda_0 a) \leq C\varphi(\omega, \lambda_0 a).$$

- Si $\lambda > 2\lambda_0$ entonces,

$$\varphi(\omega, \lambda a) = \varphi\left(\omega, \frac{\lambda}{\lambda_0}\lambda_0 a\right) \leq C^n \varphi(\omega, \lambda_0 a).$$

Así tenemos que para todo a con $|a| \geq B_0$, existe una constante k positiva tal que

$$\varphi(\omega, \lambda a) \leq k\varphi(\omega, \lambda_0 a).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu &= \int_{\{\omega:|f(\omega)|\geq B_0\}} \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu + \int_{\{\omega:|f(\omega)|<B_0\}} \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu \\
&\leq k \int_{\{\omega:|f(\omega)|\geq B_0\}} \varphi(\omega, \lambda_0 f(\omega))d\mu + \int_{\{\omega:|f(\omega)|<B_0\}} \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu \\
&\leq k \int_\Omega \varphi(\omega, \lambda_0 f(\omega))d\mu + \int_{\{\omega:|f(\omega)|<B_0\}} \varphi(\omega, \lambda f(\omega))d\mu \\
&\leq k \int_\Omega \varphi(\omega, \lambda_0 f(\omega))d\mu + \int_\Omega \varphi(\omega, \lambda B_0)d\mu < \infty,
\end{aligned}$$

el último sumando resulta finito pues, $f \in L_\varphi$ y $\varphi(\omega, \cdot)$ satisface la condición e). La otra implicación se sigue de forma inmediata de la Definición 2.6. $\square$

Por simplicidad, con frecuencia escribiremos $\int_\Omega \varphi(\omega, f)d\mu$ en lugar de $\int_\Omega \varphi(\omega, f(\omega))d\mu$.

Lema 2.13 *Si $f, g \in L_\varphi$, entonces $\varphi_+(\omega, f(\omega))g(\omega)$ es una función integrable.*

Dem. Sabemos que existen constantes positivas A_0, C tales que si $|a| \geq A_0$ y $\omega \in \Omega$

$$\varphi(\omega, 2a) \leq C\varphi(\omega, a).$$

Si $a \geq A_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} C\varphi(\omega, a) \geq \varphi(\omega, 2a) &= \int_0^{2a} \varphi_+(\omega, t)dt \\ &\geq \int_a^{2a} \varphi_+(\omega, t)dt \geq a\varphi_+(\omega, a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por otro lado, de las propiedades de $\varphi_\pm$ se tiene que si $f(\omega) < 0$

$$\begin{aligned} |\varphi_+(\omega, f(\omega))| &= -\varphi_+(\omega, f(\omega)) = \varphi_-(\omega, -f(\omega)) \\ &= \varphi_-(\omega, |-f(\omega)|) \leq \varphi_+(\omega, |f(\omega)|). \end{aligned}$$

En el caso en que $f(\omega) \geq 0$, claramente $|\varphi_+(\omega, f(\omega))| \leq \varphi_+(\omega, |f(\omega)|)$. Por lo tanto, se tiene que

$$|\varphi_+(\omega, f(\omega))(g(\omega))| \leq \varphi_+(\omega, |f(\omega)| + |g(\omega)|)(|f(\omega)| + |g(\omega)|).$$

Por consiguiente, si $\big(|f(\omega)| + |g(\omega)|\big) \geq A_0$, de (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\{|f|+|g|\geq A_0\}} |\varphi_+(\omega, f(\omega))g(\omega)|d\mu &\leq C \int_{\{|f|+|g|\geq A_0\}} \varphi(\omega, |f(\omega)| + |g(\omega)|)d\mu \\ &\leq C \int_\Omega \varphi(\omega, |f(\omega)| + |g(\omega)|)d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Esta última integral es finita debido a que como la función $\varphi(\omega, \cdot)$ es par entonces $|f|, |g| \in L_\varphi$ y por consiguiente $|f| + |g| \in L_\varphi$.
En el caso en que $\big(|f(\omega)| + |g(\omega)|\big) < A_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\{|f|+|g|<A_0\}} |\varphi_+(\omega, f(\omega))g(\omega)|d\mu \\ &\leq \int_{\{|f|+|g|<A_0\}} \varphi_+(\omega, |f(\omega)| + |g(\omega)|)(|f(\omega)| + |g(\omega)|)d\mu \\ &\leq \int_{\{|f|+|g|<A_0\}} \varphi_+(\omega, A_0)A_0 d\mu \\ &\leq \int_\Omega \varphi_+(\omega, A_0)A_0 d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente $\varphi_+(\omega, f(\omega))g(\omega) \in L^1(\Omega)$. $\square$

2.3. Mejores φ-aproximantes

Para un σ-retículo $\mathcal{L}$ denotamos por $L_\varphi(\mathcal{L})$ al cono convexo y cerrado de todas las funciones en L_φ que son $\mathcal{L}$-medibles. Como es usual, diremos que $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$ es un mejor φ-aproximante a $f \in L_\varphi$ de $L_\varphi(\mathcal{L})$ si y sólo si

$$\int_\Omega \varphi(\omega, f-g)d\mu = \inf_{h \in L_\varphi(\mathcal{L})} \int_\Omega \varphi(\omega, f-h)d\mu. \tag{2.3}$$

Es decir,

$$\int_\Omega \varphi(\omega, f-g)d\mu \leq \int_\Omega \varphi(\omega, f-h)d\mu \qquad \forall h \in L_\varphi(\mathcal{L}).$$

Pongamos $f \wedge g = \inf\{f, g\}$ y $f \vee g = \sup\{f, g\}$. Por $\mu(f, \mathcal{L})$ denotaremos al conjunto de todos los mejores φ-aproximantes a f de $L_\varphi(\mathcal{L})$.

Definición 2.14 *Diremos que un conjunto* $\mathrm{B} \subseteq M = M(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *es un retículo si y sólo si* $f \wedge g \in \mathrm{B}$ *y* $f \vee g \in \mathrm{B}$ *para* $f, g \in \mathrm{B}$. *Es decir, es cerrado para las operaciones de supremo e ínfimo de elementos de* B.

El teorema que sigue nos asegura la existencia de un mejor φ-aproximante de $L_\varphi(\mathcal{L})$ para una función en L_φ dada. La demostración se basa en una técnica utilizada por D. Landers y L. Rogge en [5], la cual a su vez, es una modificación de una ya utilizada por H. D. Brunk y S. Johansen en [9]. La técnica se basa en la siguiente igualdad elemental

$$\varphi(\omega, f - g_1 \vee g_2) + \varphi(\omega, f - g_1 \wedge g_2) = \varphi(\omega, f - g_1) + \varphi(\omega, f - g_2).$$

Teorema 2.15 ***(D. Landers y L. Rogge)*** *Para toda función* $f \in L_\varphi$ *el conjunto* $\mu(f, \mathcal{L})$ *resulta no vacío.*

Dem. En primer lugar observemos que $L_\varphi(\mathcal{L})$ es un retículo. Sean $g, h \in L_\varphi(\mathcal{L})$ como $g, h \in L_\varphi$ existen constantes positivas α, β tales que:

$$\int_\Omega \varphi(\omega, \alpha g)d\mu, \int_\Omega \varphi(\omega, \beta h)d\mu < \infty.$$

Sea $\lambda = \min\{\alpha, \beta\}$ entonces,

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega, \lambda(g \vee h))d\mu = \int_{\{\omega: g \geq h\}} \varphi(\omega, \lambda g)d\mu + \int_{\{\omega: g<h\}} \varphi(\omega, \lambda h)d\mu < \infty.$$

Luego $g \vee h \in L_{\varphi}$, el hecho de que $g \vee h$ es $\mathcal{L}$-medible se sigue de la siguiente igualdad:

$$\{(g \vee h) > a\} = \{g > a\} \cup \{h > a\}.$$

Análogamente se puede probar que $g \wedge h \in L_{\varphi}(\mathcal{L})$. Por lo tanto $L_{\varphi}(\mathcal{L})$ es un retículo. Consideremos $f \in L_{\varphi}$ y veamos que existe un mejor φ-aproximante a f de $L_{\varphi}(\mathcal{L})$. Por definición de ínfimo, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in L_{\varphi}(\mathcal{L})$ tal que:

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_n)d\mu < \inf_{h \in L_{\varphi}(\mathcal{L})} \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-h)d\mu + \frac{1}{2^n} =: a + \frac{1}{2^n}.$$

Observemos en primer lugar, que como $f, h \in L_{\varphi}$ entonces $a < \infty$. Vamos a probar que $g = \liminf_{n \in \mathbb{N}} g_n \in \mu(f, \mathcal{L})$. Para $j \geq k$, consideremos la función $g_{k,j} = g_k \wedge ... \wedge g_j$ y pongamos $g_k^* = \lim_{j \to \infty} g_{k,j} = \inf_{j \geq k} g_j$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_{k,j})d\mu + a &\leq \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_{k,j})d\mu + \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - (g_{k,j-1} \vee g_j))d\mu \\
&= \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_{k,j-1})d\mu + \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_j)d\mu \\
&< \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_{k,j-1})d\mu + a + \frac{1}{2^j}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_{k,j})d\mu < \int_{\Omega} \varphi(\omega, f - g_{k,j-1})d\mu + \frac{1}{2^j}.$$

Procediendo en forma inductiva tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_{k,j})d\mu &< \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_{k,j-1})d\mu + \frac{1}{2^j} \\ &< \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_{k,j-2})d\mu + \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} < \dots \\ \dots &< \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_{k,j-(j-k)})d\mu + \sum_{i=k+1}^{j} \frac{1}{2^i} < a + \sum_{i=k}^{j} \frac{1}{2^i}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $g_{k,j} \downarrow g_k^*$ y φ es continua obtenemos de (2.4) por aplicación del Lema de Fatou que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_k^*)d\mu &= \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-\lim_{j\to\infty} g_{k,j})d\mu = \int_{\Omega} \lim_{j\to\infty} \varphi(\omega, f-g_{k,j})d\mu \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_{k,j})d\mu < \liminf_{j\to\infty} a + \sum_{i=k}^{j} \frac{1}{2^i} \\ &= a + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Así $g_k^* \in L_\varphi$, el hecho que g_k^* es $\mathcal{L}$-medible se sigue de lo siguiente igualdad de conjuntos

$$\{g_k^* > \alpha\} = \bigcap_{j=k}^{\infty} \{g_j > \alpha\},$$

para todo número real α. Por consiguiente $g_k^* \in L_\varphi(\mathcal{L})$. Veamos que $g = \lim_{k\to\infty} g_k^*$ pertenece a $\mu(f,\mathcal{L})$ es decir, es el que realiza el mínimo en (2.3). Que g es $\mathcal{L}$-medible se sigue del hecho de que las funciones g_k^* son no decrecientes y por lo tanto para todo número real α se tiene que

$$\{g > \alpha\} = \bigcup_{k} \{g_k^* > \alpha\},$$

de la continuidad de φ, por Fatou y de (4.15) obtenemos que $g \in L_\varphi$. En efecto,

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g)d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega} \varphi(\omega, f-g_k^*)d\mu \leq a < \infty.$$

Como $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$ se tiene que:

$$a = \inf_{h \in L_\varphi(\mathcal{L})} \int_\Omega \varphi(\omega, f-h) d\mu \leq \int_\Omega \varphi(\omega, f-g) d\mu.$$

Luego,

$$\int_\Omega \varphi(\omega, f-g) d\mu = a.$$

Por lo tanto $\mu(f, \mathcal{L}) \neq \emptyset$. □

A fin de obtener algunas propiedades adicionales del conjunto $\mu(f, \mathcal{L})$ exponemos el siguiente lema.

Lema 2.16 *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones medibles. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ en $\mathcal{F}$ tal que para toda función $f \in \mathcal{F}$ la siguiente desigualdad es cierta en casi todo punto*

$$\inf_n f_n \leq f \leq \sup_n f_n.$$

Dem. Comencemos por demostrar el siguiente caso particular del lema, sea $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω. Veamos que existe una sucesión $\{A_j\}_{j \geq 1}$ en $\mathcal{A}'$ para la cual se verifica que

$$\mu\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 0 \qquad \text{para todo} A \in \mathcal{A}.$$

Esto demostraría el Lema para el caso en que $\mathcal{F}$ sea un conjunto de funciones características. Pongamos

$$\alpha_1 = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}'\}$$

y sea A_1 tal que $\mu(A_1) \geq \frac{\alpha_1}{2}$. Para $j > 1$ definimos

$$\alpha_j := \sup\left\{\mu\left(A - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) : A \in \mathcal{A}'\right\}.$$

Si para algún j tenemos que $\alpha_j = 0$ quedaría demostrado el Lema si por el contrario, para todo índice j, $\alpha_j > 0$ tomemos A_j tal que

$$\mu\left(A_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \geq \frac{\alpha_j}{2}.$$

Como los conjuntos $A_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ son mutuamente disjuntos se sigue que α_j tiende a cero. Si $A \in \mathcal{A}'$ entonces,

$$\mu\biggl(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\biggr) \leq \mu\biggl(A - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\biggr) \leq \alpha_j,$$

y por lo tanto $\mu\biggl(A - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\biggr) = 0$ que es lo que queríamos probar. Pasemos ahora al caso general. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones medibles, puesto que el conjunto de los números racionales es numerable, pongamos $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...\}$ y para cada $j \geq 1$ y $f \in \mathcal{F}$ definamos

$$A_j^f = \bigl\{\omega : f(\omega) > r_j\bigr\}.$$

Por lo demostrado en la primera parte, para cada $j = j_0$ fijo, existe una subsucesión $\{f_n^{j_0}\}$ en $\mathcal{F}$ tal que cumple lo siguiente

$$\mu\biggl(\{f > r_{j_0}\} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n^{j_0} > r_{j_0}\}\biggr) = 0. \tag{2.6}$$

Sea $\{f_n\}$ la sucesión que resulta de tomar la unión para cada j de todas las sucesiones anteriores. Tomemos $f \in \mathcal{F}$ y supongamos por el absurdo que $f > \sup_n f_n$ en un conjunto de medida positiva. Entonces, existe $r_k \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup_n f_n \leq r_k < f$. En particular, la desigualdad sería cierta para la sucesión que existe fijado k es decir, $\sup_n f_n^k \leq r_k < f$. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\epsilon < \mu\biggl(\bigl\{f > r_k\bigr\} \bigcap \biggl\{\sup_n f_n^k \leq r_k\biggr\}\biggr) &= \mu\biggl(\{f > r_k\} - \biggl\{\sup_n f_n^k > r_k\biggr\}\biggr)\\ &= \mu\biggl(\{f > r_k\} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \biggl\{f_n^k > r_k\biggr\}\biggr).\end{aligned}$$

Lo cual contradice (2.6). Así, se demuestra que toda función de la familia $\mathcal{F}$ esta acotada superiormente por el supremo de la sucesión hallada. Para ver la otra desigualdad consideremos el siguiente conjunto

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{-f : f \in \mathcal{F}\}.$$

Por lo anterior, sabemos que existe una sucesión $\{g_n\}$ en $\widetilde{\mathcal{F}}$ tal que

$$g \leq \sup_n g_n \quad \text{para toda función} \quad g \in \widetilde{\mathcal{F}}.$$

Así para toda función $g \in \widetilde{\mathcal{F}}$ tenemos que $-g \geq -\sup_n g_n = \inf_n -g_n$. De la definión de $\widetilde{\mathcal{F}}$ se sigue toda función de la familia $\mathcal{F}$ esta acotada inferiormente por el ínfimo de la sucesión $\{-g_n\}$. Si tomamos ahora la unión de la sucesión $\{f_n\}$ encontrada para $\mathcal{F}$ y la sucesión $\{-g_n\}$ obtenemos una nueva sucesión digamos $\{h_n\}$, la cual va a ser la de la tesis del lema. En efecto,

$$\inf_n h_n \leq \inf_n -g_n \leq f \leq \sup_n f_n \leq \sup_n h_n,$$

para toda función $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Teorema 2.17 *Para toda función $f \in L_\varphi$ el conjunto $\mu(f, \mathcal{L})$ es un retículo que tiene un elemento máximo y mínimo, $U_\varphi(f, \mathcal{L})$ y $L_\varphi(f, \mathcal{L})$ respectivamente.*

Dem. Pongamos

$$a = \inf_{h \in L_\varphi(\mathcal{L})} \int_\Omega \varphi(\omega, f - h) d\mu.$$

Sean $g_1, g_2 \in \mu(f, \mathcal{L})$, debido a que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi(\omega, f - (g_1 \vee g_2)) d\mu + \int_\Omega \varphi(\omega, f - (g_1 \wedge g_2)) d\mu \\ = \int_\Omega \varphi(\omega, f - g_1) d\mu + \int_\Omega \varphi(\omega, f - g_2) d\mu = 2a, \end{aligned}$$

se sigue que $g_1 \vee g_2$ y $g_1 \wedge g_2 \in \mu(f, \mathcal{L})$. Procediendo en forma inductiva se puede ver que dada una cantidad finita de funciones, digamos $\{g_1, ..., g_n\}$, se tiene que $g_1 \vee ... \vee g_n$ y $g_1 \wedge ... \wedge g_n \in \mu(f, \mathcal{L})$. Sea $\{g_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mu(f, \mathcal{L})$, por Lema 2.16 para toda función $g \in \mu(f, \mathcal{L})$ se tiene que

$$\inf_n g_n \leq g \leq \sup_n g_n. \tag{2.7}$$

Llamemos $g_* = \inf_n g_n$ y $g^* = \sup_n g_n$. Como g_n son $\mathcal{L}$-medibles se sigue que g_* también lo es y además, por aplicación del Lema de Fatou, obtenemos que
$g_* \in L_\varphi(\mathcal{L})$ pues,

$$\int_\Omega \varphi(\omega, f - g_*) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \varphi(\omega, f - (g_1 \wedge ... \wedge g_n)) d\mu = a < \infty,$$

más aún $g_* \in \mu(f, \mathcal{L})$ y de (2.7) se obtiene que $g_* = L_\varphi(f, \mathcal{L})$. Análogamente puede demostrarse que $g^* = U_\varphi(f, \mathcal{L})$. $\square$

Capítulo 3

Funciones de Lebesgue-Radon-Nikodym

Introducción

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un σ-retículo vamos a definir una familia de funciones que nos permitirán caracterizar a los mejores φ-aproximantes como lo establecimos en el capítulo anterior. Las funciones que pertenecen a esta familia reciben el nombre de funciones de Lebesgue-Radon-Nikodym, que abreviadamente expresaremos como función LRN. Estas funciones tienen una estrecha relación con la derivada de Radon-Nikodym definida en el Capítulo 1 como lo observaremos posteriormente. Al igual que en el capítulo anterior μ denotará una medida no negativa y ν será utilizada para representar a las medidas con signo.

3.1. Generalización de la Descomposición de Hahn

Con el objeto de definir las funciones LRN introducimos algunos nuevos conceptos.

Definición 3.1 *Sea ν una medida con signo definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{L}$ un σ-retículo con $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$. Diremos que $C \in \mathcal{L}$ es un conjunto ν-positivo si para todo $D \in \overline{\mathcal{L}}$ tenemos que $\nu(C \cap D) \geq 0$. Un conjunto $D \in \overline{\mathcal{L}}$ es llamado ν-negativo, si para todo $C \in \mathcal{L}$ tenemos que $\nu(D \cap C) \leq 0$.*

Observación 3.2 En el caso particular en que $\mathcal{L} = \mathcal{A}$, la Definición 3.1 coincide con la Definición 1.4 dada en el Capítulo 1.

Lema 3.3 *La clase de todos los conjuntos ν-positivos (ν-negativos) es cerrado bajo uniones numerables.*

*Dem.*Sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de conjuntos ν-positivos y sea $D \in \overline{\mathcal{L}}$. Pongamos

$$C_k = \left[A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right] \bigcap D.$$

Entonces $\{C_k\}$ es una sucesión de conjuntos mutuamente disjuntos, tales que $\nu(C_k) \geq 0$. Además,

$$\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \bigcap D = \bigcup_{k\geq 1} C_k.$$

Luego,

$$\nu\left(\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \bigcap D\right) = \nu\left(\bigcup_{k\geq 1} C_k\right) = \sum_{k\geq 1} \nu(C_k) \geq 0.$$

Por lo tanto, la clase de todos los subconjuntos ν-positivos es cerrada bajo uniones numerables. De forma análoga se prueba que la unión numerable de conjuntos ν-negativos es un conjunto ν-negativo. □

Lema 3.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida para una medida signada ν. Sea $A \subseteq \Omega$ medible tal que $|\nu(A)| < \infty$. Entonces todo conjunto medible B con $B \subseteq A$ satisface $|\nu(B)| < \infty$.*

Al igual que lo establecido por el Teorema 1.6 del Capítulo 1 veremos ahora que es posible descomponer a Ω en dos conjuntos maximales, uno ν-positivo y otro ν-negativo. La demostración siguiente se debe a S. Johansen (ver [8])

Proposición 3.5 ***(S. Johansen)*** *Sea ν una medida con signo sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $\mathcal{L}$ un σ-retículo. Entonces existe un conjunto $C^* \in \mathcal{L}$ que es ν-positivo y maximal, es decir*

$$\nu(C^*) = \sup\{\nu(C) : C \in \mathcal{L} \text{ y } C \text{ es positivo }\}.$$

Además si C^* es ν-positivo y maximal, entonces $D^* = \Omega - C^*$ es minimal y ν-negativo.

Dem. Asumamos por ejemplo, que ν no toma el valor $+\infty$ y denotemos por $\mathcal{P}$ y $\mathcal{N}$ la familia de todos los conjuntos ν-positivos y ν-negativos respectivamente. Notemos en primer lugar que $\emptyset \in \mathcal{P} \cap \mathcal{N}$. Sea,

$$\alpha = \sup\{\nu(C) : C \in \mathcal{P}\}.$$

De la definición de supremo sabemos que existe una sucesión de conjuntos $\{C_n\}_{n\geq 1}$ tales que

$$\alpha - \frac{1}{n} < \nu(C_n) \leq \alpha.$$

Sea,

$$C^* = \bigcup_{n\geq 1} C_n.$$

Así, $C^* \in \mathcal{L}$ y del Lema 3.3 se tiene que $C^* \in \mathcal{P}$. Además para $j \in \mathbb{N}$

$$C^* = C_j \cup (C^* - C_j),$$

y por consiguiente para todo j,

$$\nu(C^*) = \nu(C_j) + \nu(C^* - C_j) \geq \nu(C_j).$$

Por lo tanto C^* es un conjunto maximal tal que $\nu(C^*) = \alpha$. Veamos ahora que $D^* = \Omega - C^*$ es un conjunto ν-negativo minimal. Supongamos por el absurdo que D^* no es ν-negativo, entonces existe $C_0 \in \mathcal{L}$ tal que $\nu(D^* \cap C_0) > 0$, pero este conjunto de medida ν positiva no es un conjunto ν-positivo pues de lo contrario por Lema 3.3 el conjunto $(D^* \cap C_0) \cup C^* \in \mathcal{P}$, pero

$$\nu\big((D^* \cap C_0) \cup C^*\big) = \nu\big(D^* \cap C_0\big) + \nu(C^*) > \nu(C^*),$$

lo cual contradice que C^* sea maximal. Por lo tanto existe $D \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que

$$\nu\big((D^* \cap C_0) \cap D\big) < 0.$$

Sea k_1 el menor entero positivo para el que existe $B_1 \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que

$$\nu\big((D^* \cap C_0) \cap B_1\big) \leq -\frac{1}{k_1},$$

y pongamos $A_1 = \Omega - B_1$, entonces $A_1 \in \mathcal{L}$ y además,

$$\begin{aligned} 0 < \nu(D^* \cap C_0) &= \nu(D^* \cap C_0 \cap A_1) + \nu(D^* \cap C_0 \cap B_1) \\ &\leq \nu(D^* \cap C_0 \cap A_1) - \frac{1}{k_1} \end{aligned}$$

entonces,

$$\nu(D^* \cap C_0 \cap A_1) > \nu(D^* \cap C_0) + \frac{1}{k_1} > 0.$$

Razonando de forma similar a lo hecho para $D^* \cap C_0$ se tiene que $D^* \cap C_0 \cap A_1$ no es un conjunto ν-positivo y análogamente a lo hecho para ese caso, tomemos ahora k_2 el menor entero positivo para el cual existe $B_2 \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que

$$\nu\big((D^* \cap C_0 \cap A_1) \cap B_2\big) \leq -\frac{1}{k_2}$$

y llamemos $A_2 = \Omega - B_2$. Continuando con este proceso, vamos a tener una sucesión de conjuntos A_i y de números naturales k_i, siendo k_i el menor entero positivo para el que se cumple

$$\nu\big((D^* \cap C_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_{i-1}) \cap B_i\big) \leq -\frac{1}{k_i}$$

y por consiguiente,

$$\nu(D^* \cap C_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_i) > \nu(D^* \cap C_0) + \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{k_j}. \tag{3.1}$$

Sea $A = C_0 \cap \big(\bigcap_{i\geq 1} A_i\big)$. Veamos que el conjunto $C^* \cup A \in \mathcal{P}$. Para ello tomemos $D \in \overline{\mathcal{L}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\nu\big((C^* \cup A) \cap D\big) &= \nu(C^* \cap D) + \nu(D^* \cap A \cap D) \\
&\geq \nu\left(D^* \cap C_0 \cap \left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right) \cap D\right) \\
&= \lim_{i\to\infty} \nu(D^* \cap C_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_i \cap D) \geq \lim_{i\to\infty} -\frac{1}{k_{i+1}}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Para cada i sea,

$$F_i = D^* \cap C_0 \cap A_1 \cap ... \cap A_{i-1} \cap B_i$$

$$H_i = (D^* \cap C_0) - \bigcup_{j=1}^{i} F_j,$$

y pongamos,

$$H = \bigcap_{i\geq 1} H_i = (D^* \cap C_0) - \bigcup_{j\geq 1} F_j.$$

Por construcción, los conjuntos F_i y H son mutuamente disjuntos y además por el lema anterior H tiene medida finita. Luego de la σ-aditividad de ν se tiene

$$0 < \nu(D^* \cap C_0) = \nu(H) + \sum_{i\geq 1} \nu(F_i) \leq \nu(H) - \sum_{i\geq 1} \frac{1}{k_i}.$$

Esto implica que la serie $\sum_{i\geq 1}\frac{1}{k_i}$ es convergente, y por lo tanto k_i tiende a infinito cuando $i \to \infty$. Luego, de (3.2) tenemos que

$$\nu\big((C^* \cup A) \cap D\big) \geq 0,$$

y por consiguiente el conjunto $C^* \cup A$ es ν-positivo. Pero, de (3.1) se sigue que

$$\nu(D^* \cap A) > 0,$$

con lo cual se obtiene que $C^* \cup A$ es ν-positivo y de medida estrictamente más grande que C^*, lo que contradice el hecho de que C^* es maximal. Por lo tanto, D^* es un conjunto ν-negativo. Para ver que D^* es minimal, tomemos $F \in \mathcal{N}$. Entonces $\Omega - F \in \mathcal{P}$ por lo que $\nu(\Omega - F) \leq \nu(C^*) < \infty$. Luego,

$$\nu(\Omega) = \nu(\Omega - F) + \nu(F) \leq \nu(C^*) + \nu(F),$$

y así tenemos

$$\nu(F) \geq \nu(\Omega) - \nu(C^*) = \nu(\Omega - C^*) = \nu(D^*).$$

$\square$

3.2. Funciones de Lebesgue-Radon-Nikodym

En lo que sigue consideraremos familias de medidas $\{\nu_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades

- $|\nu_a|$ son finitas,
- ν_a es decreciente en a es decir, si $a < b$ entonces $\nu_a(A) \geq \nu_b(A)$.

Para una familia de medidas con estas propiedades hacemos la siguiente definición.

Definición 3.6 *Sea $\{\nu_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ una familia de medidas en Ω. Una función $\mathcal{L}$-medible g es llamada una función de Lebesgue-Radon-Nikodym (función LRN) de $\{\nu_a\}$ si y sólo si*

a) $\{g > a\}$ *es ν_a-positiva para todo $a \in \mathbb{R}$*

b) $\{g < a\}$ *es ν_a-negativa para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Observación 3.7 a) En la Definición 3.6 el subconjunto $\mathbb{R}$ puede ser reemplazado por un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ denso en la recta. En efecto, sea $a \in \mathbb{R}$ entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ en D tal que a_n converge a a, además podemos suponerla decreciente. Tomemos $A \in \overline{\mathcal{L}}$, entonces

$$\nu_a\big(\{g > a_n\} \cap A\big) \geq \nu_{a_n}\big(\{g > a_n\} \cap A\big) \geq 0$$

Luego,

$$\begin{aligned}\nu_a\big(\{g > a\} \cap A\big) &= \nu_a\Bigg(\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{g > a_n\}\Bigg) \cap A\Bigg)\\ &= \lim_{n\to\infty} \nu_a\big(\{g > a_n\} \cap A\big) \geq 0.\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $\{g > a\}$ es ν_a-positiva para todo $a \in \mathbb{R}$ el hecho que $\{g < a\}$ es ν_a-negativa se obtiene de forma similar.

b) En el caso particular, que para alguna medida μ, $\nu_a \ll \mu$ para toda $a \in \mathbb{R}$, la Definición 3.6 equivale a ver que existe un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ numerable tal que $\{g \geq a\}$ es ν_a-positivo y el conjunto $\{g \leq a\}$ es ν_a-negativo para todo $a \notin D$. Sea

$$D = \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{g = a\}) > 0\}$$

entonces D es un conjunto a lo sumo numerable, luego $\mathbb{R} - D$ es denso en la recta real. Si $b \notin D$, $\mu(\{g = b\}) = 0$ y entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ $\nu_a(\{g = b\}) = 0$. Luego para cada conjunto $B \in \mathcal{L}$ y $C \in \overline{\mathcal{L}}$ se tiene

$$\begin{aligned}\nu_b(B \cap \{g \leq b\}) &= \nu_b(B \cap \{g < b\}) \leq 0,\\ \nu_b(C \cap \{g \geq b\}) &= \nu_b(C \cap \{g > b\}) \geq 0.\end{aligned}$$

Lo cual demuestra una implicación. Supongamos ahora que existe D_1 conjunto numerable con la propiedad que $\{g \geq a\}$ es ν_a-positivo y el conjunto $\{g \leq a\}$ es ν_a-negativo si $a \notin D_1$. Sea $\widetilde{D} = D \cup D_1$, con D como lo definimos en la implicación anterior, entonces $\widetilde{D}$ es numerable y por consiguiente, $\mathbb{R} - \widetilde{D}$ es denso en la recta. Además, si $a \notin \widetilde{D}$ y tomamos $B \in \overline{\mathcal{L}}$ y $C \in \mathcal{L}$ se sigue que

$$\begin{aligned}0 \leq& \nu_a(\{g \geq a\} \cap B) = \nu_a(\{g > a\} \cap B)\\ 0 \geq& \nu_a(\{g \leq a\} \cap C) = \nu_a(\{g < a\} \cap C).\end{aligned}$$

De la observación a) obtenemos que g es una función LRN de $\{\nu_a\}$.

La siguiente Proposición pone de manifiesto la relación existente entre el concepto de función LRN y el Teorema de Radon-Nikodym expuesto en el Capítulo 1.

Proposición 3.8 *Sea μ una medida no negativa y ν una medida con signo, ambas finitas sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\nu \ll \mu$. Entonces una función f $\mathcal{A}$-medible satisface que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

si y sólo si f es una función LRN de la familia $\{\nu_a\}$, siendo $\nu_a = \nu - a\mu$.

Dem. Sea f que cumple (3.3) y sea $A \in \mathcal{A}$ entonces,

$$\nu_a(\{f > a\} \cap A) = \int_{\{f>a\}\cap A} f d\mu - a\mu(\{f > a\} \cap A) \geq 0.$$

Y de forma análoga se obtiene que $\nu_a(\{f > a\} \cap A) \leq 0$. Luego f es una función LRN de $\{\nu_a\}$. Recíprocamente tomemos f una función LRN de $\{\nu_a\}$. Observemos que $\nu_a \ll \mu$ para todo a y que además como $\{f > a\}$ es un conjunto positivo para la medida ν_a tenemos que en particular vale lo siguiente

$$\nu(\{f > a\}) - a\mu(\{f > a\}) \geq 0$$

entonces,

$$a\mu(\{f > a\}) \leq \nu(\{f > a\}).$$

Lo que, por la suposición de que ν es finita, implica que cuando $|a|$ tiende a infinito $\mu(\{f > a\})$ tiende a cero; es decir, f es finita en casi todo punto respecto de μ y por consiguiente respecto de ν. Sea $m \in \mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{Z}$ y $A \in \mathcal{A}$ definamos:

$$A_{k,m} := \left\{ x \in A : \frac{k}{m} < f(x) \leq \frac{k+1}{m} \right\}.$$

Así,

$$\int_{A_{k,m}} f - \frac{1}{m} d\mu \leq \frac{k}{m}\mu(A_{k,m}) \leq \nu(A_{k,m}).$$

Fijado $m \in \mathbb{N}$, los conjuntos $A_{k,m}$, cuya unión sobre k es A, son mutuamente disjuntos. Entonces,

$$\int_A f - \frac{1}{m} d\mu \leq \nu(A)$$

tomando límite para m tendiendo a infinito obtenemos:

$$\int_A f d\mu \leq \nu(A),$$

la otra desigualdad sale mediante un camino similar. Así hemos demostrado que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

para todo conjunto $\mathcal{A}$-medible. $\square$

Esta proposición afirma que f será una derivada de Radon-Nikodym si y sólo si f es una función LRN para la familia de medidas $\nu_a = \nu - a\mu$. El siguiente ejemplo nos muestra que las derivadas de Radon-Nikodym para ν_a, pueden existir aunque no tengamos la hipótesis de que $\nu \ll \mu$.

Ejemplo 3.9 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\Omega = [-1, 1]$ y μ la medida de Lebesgue. Sea δ_0 la ***delta de Dirac*** concentrada en 0 (ver Ejemplo 1.8), y las medidas $\nu_a := \delta_0 - a\mu$. Veamos que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

es una función LRN de $\{\nu_a\}$ y es única ν_a en casi todo punto, para todo a. Aquí consideraremos $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, siendo $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de los conjunto medibles Lebesgue del intervalo $[-1, 1]$. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\nu_a(A \cap \{f > a\}) = \delta_0(A \cap \{f > a\}) - a\mu(A \cap \{f > a\}) \geq 0.$$

Análogamente se puede ver que para todo a el conjunto $\{f < a\}$ es ν_a-negativo, y por lo tanto f es una función LRN de $\{\nu_a\}$. Veamos la unicidad de f. Supongamos por el absurdo que existe g función LRN de $\{\nu_a\}$ entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} \nu_a(A \cap \{g > a\}) &= \delta_0(A \cap \{g > a\}) - a\mu(A \cap \{g > a\}) \geq 0 \\ \nu_a(A \cap \{g < a\}) &= \delta_0(A \cap \{g < a\}) - a\mu(A \cap \{g < a\}) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En el caso particular en que $a > 0$ y tomamos un conjunto A que no contenga el cero, de la primer igualdad de (3.4) se sigue que $g \leq 0$ en casi todo punto respecto a μ y de la segunda igualdad razonando en forma similar con $a < 0$ se tiene que

$g \geq 0$ en casi todo punto. Por consiguiente $g = 0$ en casi todo punto respecto a μ. Luego $f = g$ en casi todo punto respecto a μ. Además $g(0) = +\infty$ en efecto, si $g(0) = s$ con $s < \infty$ y tomamos a positivo mayor que s y un conjunto medible A al que pertenezca el cero se tiene

$$\nu_a(A \cap \{g < a\}) = \delta_0(A \cap \{g < a\}) - a\mu(A \cap \{g < a\}) = 1.$$

pero por la segunda igualdad de (3.4) obtenemos una contradicción. Con lo que hemos demostrado que $f = g$ en casi todo punto respecto a ν_a.

Lema 3.10 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un σ-retículo y ν una medida signada con $\nu \ll \mu$. Entonces existe un conjunto ν-positivo maximal respecto a μ y de allí respecto a ν.*

Dem. Pongamos $\mathcal{P} = \{C : C \text{ es } \nu\text{-positivo}\}$ y llamemos

$$\alpha = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{P}\}.$$

Sea C_n tal que

$$\alpha - \frac{1}{n} < \mu(C_n) \leq \alpha$$

y consideremos $C^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Del Lema 3.3 se sigue que C^* es un conjunto ν-positivo y es maximal respecto a μ (ver demostración Proposición 3.5), veamos ahora que es maximal respecto a ν. Supongamos que existe $C \in \mathcal{P}$ tal que $\nu(C) > \nu(C^*)$. Entonces,

$$\mu(C^*) \geq \mu(C \cup C^*) = \mu(C^*) + \mu(C - C^*) \geq \mu(C^*)$$

por lo tanto $\mu(C - C^*) = 0$, entonces $\nu(C - C^*) = 0$. Así, por un lado tenemos que

$$\nu(C \cup C^*) = \nu(C^*) + \nu(C - C^*) = \nu(C^*),$$

y por otro,

$$\nu(C \cup C^*) = \nu(C) + \nu(C^* - C) \geq \nu(C) > \nu(C^*).$$

Luego C^* es un conjunto maximal respecto a ν. □

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para asegurar la existencia de las funciones LRN de una familia de medidas dada.

Teorema 3.11 ***(H. D. Brunk, S. Johansen)*** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un σ-retículo. Sea ν_a una familia de medidas signadas finitas, decrecientes y $|\nu_a| \ll \mu$. Entonces existe una función de LRN de ν_a.*

Dem. Para $q \in \mathbb{Q}$, sea C_q un conjunto ν_q-positivo μ-maximal, cuya existencia esta asegurada por lema anterior y pongamos $C_{+\infty} = \emptyset$ y $C_{-\infty} = \Omega$. Definimos

$$g(x) := \sup_{x \in C_q} q.$$

Veamos que g es la función que queríamos hallar. Observemos en primer lugar que g es $\mathcal{L}$-medible, pues

$$\{g > a\} = \bigcup_{q > a} C_q,$$

además como esta familia de medidas es decreciente, para todo $q \geq a$ el conjunto C_q es ν_a-positivo, y por consiguiente el conjunto $\{g > a\}$ es ν_a-positivo. Veamos ahora que $\{g < a\}$ en un conjunto ν_a-negativo. Para ello consideremos el siguiente conjunto

$$\Omega' = \Omega - \bigcup_{r < q} (C_q - C_r).$$

Si $r < q$ entonces para todo conjunto $D \in \overline{\mathcal{L}}$ se tiene que

$$0 \leq \nu_q(C_q \cap D) \leq \nu_r(C_q \cap D)$$

luego, C_q es ν_r-positivo y además $\mu(C_q - C_r) = 0$ pues,

$$\mu(C_r) \geq \mu(C_q \cup C_r) = \mu(C_r) + \mu(C_q - C_r) \geq \mu(C_r).$$

Por lo tanto, $\mu(\Omega - \Omega') = 0$. Veamos que

$$\{g < a\} \cap \Omega' = \left(\bigcup_{q < a} C_q^c \right) \cap \Omega'. \tag{3.5}$$

Sea $x \in \Omega'$ tal que $g(x) < a$ y supongamos que $x \notin \left(\bigcup_{q<a} C_q^c \right)$, entonces $x \in C_q$ para todo $q < a$, luego $g(x) \geq a$ lo cual contradice la hipótesis de la que partimos. Por lo tanto, $x \in \left(\bigcup_{q<a} C_q^c \right)$. Supongamos ahora que $x \in \left(\bigcup_{q<a} C_q^c \right) \cap \Omega'$, entonces existe $r < a$ con la propiedad que $x \notin C_r$ y como $x \in \Omega'$, si $q > r$ entonces $x \notin C_q - C_r$. Así, para todo $q \geq r$ se tiene que $x \notin C_q$. Por consiguiente, $g(x) \leq r < a$. Luego, la igualdad (3.5) establece que el conjunto $\{g < a\}$ coincide en casi todo punto con un conjunto ν_a-negativo, pues C_q es ν_q-negativo y la unión la tomo sobre los $q < a$. $\square$

Capítulo 4

Aplicación de Funciones LRN al Problema de Mejor Aproximación

Introducción

Al igual que en los capítulos anteriores consideremos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito y completo con $\mu \geq 0$, y $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un σ-retículo. En el Capítulo 2 se introdujo la definición de mejor φ-aproximante para una función $f \in L_\varphi$ y se demostró además, que el conjunto de mejores φ-aproximantes era un retículo no vacío que tenía elemento máximo y mínimo. Lo que haremos ahora es hallar propiedades adicionales de este conjunto con el fin de obtener condiciones de equivalencia para un mejor φ-aproximante y de esta manera caracterizar al mismo.

4.1. Caracterización de los Mejores φ-Aproximantes

En esta sección se presentan varios teoremas que establecen condiciones necesarias y suficientes para que una función resulte ser un mejor φ-aproximante, en el sentido que se definió en el Capítulo 2. Comencemos por definir familias de medidas que nos serán de gran utilidad al momento de caracterizar a los mejores φ-aproximantes.

Definición 4.1 *Sea $f \in L_\varphi$. Para cada $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$ y $a \in \mathbb{R}$ definimos las siguientes medidas*

$$\mu_g^+(A) := \int_A \varphi_+(\omega, f-g)d\mu, \qquad \mu_g^-(A) := \int_A \varphi_-(\omega, f-g)d\mu, \tag{4.1}$$

y

$$\mu_a^+(A) := \int_A \varphi_+(\omega, f-a)d\mu, \qquad \mu_a^-(A) := \int_A \varphi_-(\omega, f-a)d\mu. \qquad (4.2)$$

Lema 4.2 *Sea $f \in L_\varphi$. Entonces $\mu_a^+ = \mu_a^-$ para casi todo número real a.*

Dem. Consideremos la medida producto $\mu \otimes dx$ en $\Omega \times \mathbb{R}$, donde con dx denotamos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Para cada $A \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$ ponemos,

$$A_\omega := \{b \in \mathbb{R} : (\omega, b) \in A\} \quad \text{y} \quad A_a := \{\upsilon \in \Omega : (\upsilon, a) \in A\}.$$

Definimos la siguiente función $T : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega \times \mathbb{R}$ por $T(\omega, a) = (\omega, f(\omega) - a)$. Se puede demostrar que A es medible si y sólo si $T(A)$ lo es y como además, $T(A)_\omega = f(\omega) - A_\omega$ es una traslación, aplicando el Teorema de Fubini, para todo conjunto $\mu \otimes dx$-medible, A, tenemos:

$$\mu \otimes dx(A) = \int_\Omega |A_\omega| d\mu = \int_\Omega |T(A)_\omega| d\mu = \mu \otimes dx(T(A)). \qquad (4.3)$$

Consideremos el siguiente conjunto $A = \{(\omega, a) : \varphi_+(\omega, a) > \varphi_-(\omega, a)\}$. Entonces A es $\mu \otimes dx$-medible y para cada ω la sección A_ω es lo sumo numerable, pues el conjunto de discontinuidades de una función monótona es a lo sumo numerable. Por consiguiente, $dx(A_\omega) = 0$. Por lo tanto, de (4.3) se sigue que $\mu \otimes dx(A) = 0 = \mu \otimes dx(T(A))$. De la definición de medida producto obtenemos

$$0 = \mu \otimes dx(T(A)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(T(A)_a) da.$$

Así para casi todo $a \in \mathbb{R}$, $\mu(T(A)_a) = 0$. Puesto que $I = T \circ T$, $\omega \in T(A)_a$ si y sólo si $T(\omega, a) \in A$, entonces para casi todo ω, $T(\omega, a) \notin A$. Luego, para casi todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\varphi_+(\omega, a) = \varphi_-(\omega, a)$ salvo un conjunto de medida μ cero. □

Definición 4.3 *Para $f \in L_\varphi$ definimos el siguiente conjunto*

$$C(f) := \{a : \mu_a^+ = \mu_a^+\}.$$

Corolario 4.4 *El conjunto $C(f)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Dem. Del Lema 4.2 se sigue que para casi todo $a \in \mathbb{R}$, (respecto a m la medida de Lebesgue)

$$\mu_a^+ = \mu_a^-.$$

Supongamos por el absurdo, que $C(f)$ no fuera denso en la recta, entonces existiría $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap C(f) = \emptyset$, pero por la Definición 4.3 y del hecho que $m(x - \epsilon, x + \epsilon) = 2\epsilon > 0$ llegamos a una contradicción. Luego, $C(f)$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Lema 4.5 *Sea $f \in L_\varphi$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un σ-retículo y sea $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

a) $g \in \mu(f, \mathcal{L})$,

b) para toda $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$ tenemos

$$\int\limits_{\{g>h\}} \varphi_+(\omega, f - g)(g - h)d\mu \geq 0$$

y

$$\int\limits_{\{g<h\}} \varphi_-(\omega, f - g)(g - h)d\mu \geq 0.$$

Dem. Observemos en primer lugar que por Lema 2.13 las integrales que aparecen en la condición b) son finitas. Demostremos primero otra condición equivalente a la afirmación a). Para $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$ y $t \in [0, 1]$ consideremos la siguiente función

$$M(t) = \int\limits_\Omega \varphi(\omega, f - g - t(h - g))d\mu$$

De la convexidad de $\varphi(\omega, \cdot)$ se sigue que M es una función convexa. Veamos que g es un mejor φ-aproximante a f si y sólo si $M'_+(0) \geq 0$. En efecto, si g es un mejor φ-aproximante a f entonces se tiene que $M(0) \leq M(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces M alcanza un mínimo en $t = 0$. Luego, $M'_+(0) \geq 0$. Recíprocamente, si $M'_+(0) \geq 0$ por ser M convexa, será $M \geq 0$. Entonces M tiene un mínimo en $t = 0$. Así, en particular para $t = 1$ tenemos:

$$\int\limits_\Omega \varphi(\omega, f - g)d\mu = M(0) \leq M(1) = \int\limits_\Omega \varphi(\omega, f - h)d\mu$$

pata toda $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$. Por lo tanto, $g \in \mu(f, \mathcal{L})$. Sea $g \in \mu(f, \mathcal{L})$, entonces por lo demostrado arriba

$$\begin{aligned} 0 \leq M_+^{'}(0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{M(t) - M(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int\limits_\Omega (\varphi(\omega, f - g - t(h-g)) - \varphi(\omega, f - g))d\mu. \end{aligned} \tag{4.4}$$

En general, para una función convexa F se tiene que

- Si $a < b$ entonces, $F(b) - F(a) \leq F_+(b)(b-a)$
- Si $a > b$ entonces, $F(b) - F(a) \leq F_-(b)(b-a)$.

La demostración de lo anterior, como también algunas propiedades adicionales de las funciones convexas pueden ser consultadas en [4]. Aplicando esto para φ con $g > h$, obtenemos:

$$\varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g) \leq \varphi_+(\omega, f-g-t(h-g))t(g-h), \tag{4.5}$$

y si $g < h$,

$$\varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g) \leq \varphi_-(\omega, f-g-t(h-g))t(g-h). \tag{4.6}$$

Retomando (4.4), las desigualdades (4.5) y (4.6), aplicando el Teorema de la Convergencia Mayorada de Lebesgue, la continuidad a derecha de φ_+ y a izquierda de

φ_- obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_\Omega \varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g)d\mu \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Bigg[\int_{\{g>h\}} \varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g)d\mu \\
&+ \int_{\{g<h\}} \varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g)d\mu\Bigg] \\
&\leq \lim_{t\to 0^+} \Bigg[\int_{\{g>h\}} \varphi_+(\omega, f-g-t(h-g))(g-h)d\mu \\
&+ \int_{\{g<h\}} \varphi_-(\omega, f-g-t(h-g))(g-h)d\mu\Bigg] \\
&= \int_{\{g>h\}} \lim_{t\to 0^+} \varphi_+(\omega, f-g-t(h-g))(g-h)d\mu \\
&+ \int_{\{g<h\}} \lim_{t\to 0^+} \varphi_-(\omega, f-g-t(h-g))(g-h)d\mu \\
&= \int_{\{g>h\}} \varphi_+(\omega, f-g)(g-h)d\mu + \int_{\{g<h\}} \varphi_-(\omega, f-g)(g-h)d\mu,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

para toda función $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$. En particular (4.7) vale si reemplazamos h por $h \wedge g$ o $h \vee g$ pues $L_\varphi(\mathcal{L})$ es un retículo según se demostró en el Teorema 2.15. De esta manera tenemos que

$$\int_{\{g>h\}} \varphi_+(\omega, f-g)(g-h)d\mu \geq 0$$

y,

$$\int_{\{g<h\}} \varphi_-(\omega, f-g)(g-h)d\mu \geq 0,$$

respectivamente. Supongamos ahora que para toda función $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$ vale b). Usando ahora, el hecho que para una función convexa F se tiene que

- Si $a < b$ entonces, $F(b) - F(a) \geq F_+(a)(b-a)$

- Si $a > b$ entonces, $F(b) - F(a) \geq F_-(a)(b-a)$,

$$\begin{aligned}
M'_+(0) &= \lim_{t\to 0^+} \int\limits_{\{g>h\}} \frac{\varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g)}{t} d\mu \\
&+ \lim_{t\to 0^+} \int\limits_{\{g<h\}} \frac{\varphi(\omega, f-g-t(h-g)) - \varphi(\omega, f-g)}{t} d\mu \\
&\geq \lim_{t\to 0^+} \int\limits_{\{g>h\}} \varphi_+(\omega, f-g)(g-h) d\mu \\
&+ \lim_{t\to 0^+} \int\limits_{\{g<h\}} \varphi_-(\omega, f-g)(g-h) d\mu \\
&= \int\limits_{\{g>h\}} \varphi_+(\omega, f-g)(g-h) d\mu + \int\limits_{\{g<h\}} \varphi_-(\omega, f-g)(g-h) d\mu \geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo que demostramos en la primera parte, lo obtenido es equivalente a que g es un mejor φ-aproximante a f. □

Teorema 4.6 *Sea $f \in L_\varphi$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ un σ-retículo y $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$. Entonces los siguientes hechos son equivalentes:*

a) $g \in \mu(f, \mathcal{L})$

b) Para todo número real a el conjunto $\{g > a\}$ es μ_g^+-positivo y el conjunto $\{g < a\}$ es μ_g^--negativo

c) g es una función LRN de la familia $\{\mu_a^\pm\}$.

Dem. Comencemos por demostrar que a) implica b). Sea $D \in \overline{\mathcal{L}}$, para $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ pongamos $A = \{g > a\}$ y $A_n = \{g > a + \frac{1}{n}\}$. Ahora definimos la siguiente función:

$$g_n(\omega) := \begin{cases} g(\omega), & \text{si } \omega \notin A \cap D; \\ a, & \text{si } \omega \in (A - A_n) \cap D; \\ g(\omega) - \frac{1}{n}, & \text{si } \omega \in A_n \cap D. \end{cases}$$

Es posible demostrar que $g_n \in L_\varphi(\mathcal{L})$. Aplicando el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int\limits_{\{g>g_n\}} \varphi_+(\omega, f-g)(g-g_n)d\mu \\
&= \int\limits_{(A-A_n)\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)(g-a)d\mu + \int\limits_{A_n\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)\frac{1}{n}d\mu \\
&\leq \int\limits_{(A-A_n)\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)\frac{1}{n}d\mu + \int\limits_{A_n\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)\frac{1}{n}d\mu \\
&= \int\limits_{A\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)\frac{1}{n}d\mu.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mu_g^+(A\cap D) = \int\limits_{A\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)d\mu \geq 0.$$

De forma similar se prueba que $\{g < a\}$ es μ_g^--negativo. Veamos que c) se sigue de b) para ello tomemos $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$, $a \in \mathbb{R}$ y $D \in \overline{\mathcal{L}}$ por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq \mu_g^+(\{g > a\}\cap D) &= \int\limits_{\{g>a\}\cap D} \varphi_+(\omega, f-g)d\mu \\
&\leq \int\limits_{\{g>a\}\cap D} \varphi_+(\omega, f-a)d\mu = \mu_a^+(\{g > a\}\cap D).
\end{aligned}$$

Si tomamos $C \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}
0 \geq \mu_g^-(\{g < a\}\cap C) &= \int\limits_{\{g<a\}\cap C} \varphi_-(\omega, f-g)d\mu \\
&\geq \int\limits_{\{g<a\}\cap C} \varphi_-(\omega, f-a)d\mu = \mu_a^-(\{g < a\}\cap C).
\end{aligned}$$

Así hemos demostrado que $\{g > a\}$ es un conjunto μ_a^+-positivo y que $\{g < a\}$ es μ_a^--negativo. Pero si tomamos $a \in C(f)$, entonces el conjunto $\{g > a\}$ es también μ_a^--positivo y $\{g < a\}$ resulta ser μ_a^+-negativo. Puesto que según se demostró en el Corolario 4.4 el conjunto $C(f)$ es denso en $\mathbb{R}$, de la Observación 3.7 a) se sigue que g es una función LRN de $\{\mu_a^\pm\}$. Demostremos ahora recíprocamente que c) implica b). Sea $a \in \mathbb{R}$ y $D \in \overline{\mathcal{L}}$ y pongamos $A = \{g > a\} \cap D$. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y n natural definamos los siguientes conjuntos

$$A_{k,n} := \left\{a + \frac{k}{n} < g \leq a + \frac{k+1}{n}\right\} \cap D.$$

Entonces por hipótesis,

$$\mu^+_{a+\frac{k}{n}}(A_{k,n}) = \int_{A_{k,n}} \varphi_+\left(\omega, f - \left(a + \frac{k}{n}\right)\right) d\mu \geq 0.$$

Por ser φ_+ monótona creciente tenemos

$$0 \leq \int_{A_{k,n}} \varphi_+\left(\omega, f - a - \frac{k}{n}\right) d\mu \leq \int_{A_{k,n}} \varphi_+\left(\omega, f - g + \frac{1}{n}\right) d\mu.$$

Uniendo sobre $k = 0, 1, 2, \dots$ y teniendo en cuenta que los conjuntos $A_{k,n}$ son mutuamente disjuntos para cada n fijo, obtenemos:

$$\int_A \varphi_+\left(\omega, f - g + \frac{1}{n}\right) d\mu \geq 0.$$

Tomando límite para n tendiendo a infinito y aplicando el hecho de que φ_+ es continua por derecha se tiene que

$$\mu^+_g(A) = \int_A \varphi_+(\omega, f - g) d\mu = \mu^+_g(\{g > a\} \cap D) \geq 0.$$

Así $\{g > a\}$ es un conjunto μ^+_g-positivo. Un argumento similar muestra que $\{g < a\}$ es μ^-_g-negativo. Por último veamos que b) implica a). Sea $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$ entonces $\{h < a\} \in \overline{\mathcal{L}}$ pues,

$$\{h < a\} = \bigcup \left\{h \leq a - \frac{1}{n}\right\}$$

Luego, por hipótesis

$$0 \leq \mu^+_g\big(\{g > a\} \cap \{h < a\}\big) = \int\limits_{\{g>a\}\cap\{h<a\}} \varphi_+(\omega, f - g) d\mu.$$

Integrando la desigualdad de arriba y aplicando el Teorema de Fubini obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\{g>a\}\cap\{h<a\}} \varphi_+(\omega, f-g)d\mu\, da = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \chi_{\{g>a\}\cap\{h<a\}} \varphi_+(\omega, f-g)d\mu\, da$$

$$= \int_{\Omega} \varphi_+(\omega, f-g) \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{g>a\}\cap\{h<a\}} da\, d\mu = \int_{\{h<g\}} \varphi_+(\omega, f-g) \int_{h(\omega)}^{g(\omega)} 1da\, d\mu$$

$$= \int_{\{h<g\}} \varphi_+(\omega, f-g)(g-h)d\mu \geq 0.$$

De manera análoga se tiene que

$$\int_{\{h>g\}} \varphi_-(\omega, f-g)(g-h)d\mu \geq 0.$$

Así por Lema 4.5 g es un mejor φ-aproximante a f de $L_\varphi(\mathcal{L})$. $\square$

En el siguiente ejemplo se halla para una función dada un mejor φ-aproximante mostrándose además que éste no tiene porque ser único.

Ejemplo 4.7 Sea $\Omega = [0,1]$, μ la medida de Lebesgue, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de todos los conjuntos medibles Lebesgue del $[0,1]$, $\mathcal{L}$ el σ-retículo formado por los subconjuntos finales de Ω y $\varphi(\omega, a) = |a|$. Con los datos que tenemos ahora, el problema de hallar un mejor φ-aproximante a una función dada en L_φ se traduce en encontrar un mejor aproximante por funciones monótonas crecientes en $L^1(\Omega)$. Consideremos $f = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$. Las funciones φ_+ y φ_- vienen dadas por

$$\varphi_+(\omega, a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \geq 0; \\ -1, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

y,

$$\varphi_-(\omega, a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a > 0; \\ -1, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

Si g es un mejor φ-aproximante a f por Teorema 4.6 el conjunto $\{g > a\}$ debe ser μ_a^+-positivo y $\{g < a\}$ debe ser μ_a^--negativo. Es decir, para todo $D \in \overline{\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu_a^+(\{g > a\} \cap D) &= \int_{\{g>a\}\cap D} \varphi_+(\omega, f-a)d\mu \\ &= \mu(\{g > a\} \cap D \cap \{f \geq a\}) - \mu(\{g > a\} \cap D \cap \{f < a\}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

y para todo $C \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}
0 \geq \mu_a^-(\{g < a\} \cap C) &= \int\limits_{\{g<a\}\cap C} \varphi_-(\omega, f-a)d\mu \\
&= \mu(\{g < a\} \cap C \cap \{f > a\}) - \mu(\{g < a\} \cap C \cap \{f \leq a\}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Si $a < 0$ tomando $C = \Omega$ en (4.9) tenemos que $\mu(\{g < a\}) = 0$ entonces $g \geq 0$ en casi todo punto. Tomando $a > 1$ y $D = \Omega$ en (4.8) se tiene que $g \leq 1$ en casi todo punto. Por último si tomamos $0 < a < 1$, de (4.8), (4.9) y mediante un argumento estándar, se sigue que g debe ser una función constante. Recíprocamente, si $g \equiv \alpha$, con $\alpha \in [0, 1]$, se puede demostrar que g es un mejor φ-aproximante.

Para $a \in \mathbb{R}$ pongamos $\mathcal{L}_a$ la clase de todos los conjuntos $C \in \mathcal{L}$ tal que C es μ_a^+-positivo y $\Omega - C$ es μ_a^+-negativo. Ahora definamos el siguiente conjunto

$$\widetilde{\mathcal{L}}_f := \bigcup_{a \in C(f)} \mathcal{L}_a.$$

De aquí en más, cuando $a \in C(f)$ denotaremos por μ_a la medida $\mu_a^+ = \mu_a^-$. Como consecuencia del Teorema 4.6 y de la notación hecha arriba tenemos:

Corolario 4.8 *$g \in \mu(f, \mathcal{L})$ si y sólo si para todo $a \in C(f)$ se tiene que $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a$.*

Dem. Sea $g \in \mu(f, \mathcal{L})$, $a \in C(f)$ y $b > a$. Por Teorema 4.6 sabemos que $\{g > a\}$ es μ_a-positivo y que $\{g < b\}$ es μ_b^--negativo. Veamos que $\{g \leq a\}$ es μ_a-negativo. Sea $C \in \mathcal{L}$ entonces,

$$0 \geq \mu_b^-(\{g < b\} \cap C) = \int\limits_{\{g<b\}\cap C} \varphi_-(\omega, f-b)d\mu.$$

Tomando límite para cuando $b \downarrow a$ en la desigualdad de arriba, obtenemos que $\mu_a^-(\{g \leq a\} \cap C) \leq 0$, puesto que $a \in C(f)$ se tiene que $\mu_a^+(\{g \leq a\} \cap C) \leq 0$. Por lo tanto, $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a$. Supongamos ahora que $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a$ para toda $a \in C(f)$. Por consiguiente, el conjunto $\{g > a\}$ es μ_a-positivo. Por otro lado, si tomamos $b \in C(f)$ con $b < a$, para todo $C \in \mathcal{L}$

$$\mu_b^+(\{g \leq b\} \cap C) = \int\limits_{\{g \leq b\}\cap C} \varphi_+(\omega, f-b)d\mu \leq 0.$$

Tomando límite para $b \uparrow a$ y aplicando el Teorema de la Convergencia Mayorada de Lebesgue obtenemos

$$\int_{\{g<a\}\cap C} \varphi_+(\omega, f-a)d\mu = \mu_a^+(\{g<a\}\cap C) \leq 0.$$

Como $C(f)$ es denso en $\mathbb{R}$, resulta que g es un función LRN de la familia $\{\mu_a^\pm\}$. $\square$

Observación 4.9 En el Corolario 4.8, podemos reemplazar la hipótesis $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a$ por $\{g \geq a\} \in \mathcal{L}_a$. En efecto, sea $a \in C(f)$ y supongamos que $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a$ para todo $a \in C(f)$. Tomemos $\{a_n\}$ una sucesión en $C(f)$ tal que $a_n \uparrow a$ y $D \in \overline{\mathcal{L}}$ entonces,

$$\mu_{a_n}(\{g > a_n\}\cap D) = \int_{\{g>a_n\}\cap D} \varphi_+(\omega, f-a_n)d\mu \geq 0.$$

Tomando límite para $a_n \uparrow a$ se tiene:

$$0 \leq \int_{\{g\geq a\}\cap D} \varphi_+(\omega, f-a)d\mu = \mu_a(\{g\geq a\}\cap D).$$

Del hecho que

$$\{g<a\} = \bigcup_n \{g \leq a_n\}$$

y que las medidas son no decrecientes se sigue que $\{g < a\}$ es μ_a-negativo. Por lo tanto, el conjunto $\{g \geq a\} \in \mathcal{L}_a$. La otra implicación se sigue por un camino similar.

Lema 4.10 *Sean $a, b \in C(f)$ con $a \leq b$ y tomemos $C_1 \in \mathcal{L}_a$ y $C_2 \in \mathcal{L}_b$. Entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{L}_b$ y $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{L}_a$. En particular $\widetilde{\mathcal{L}}_f$ es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas; es decir, $\widetilde{\mathcal{L}}_f$ es un retículo.*

Dem. Veamos en primer lugar que $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{L}_b$. Por hipótesis $\Omega - C_1$ es μ_a-negativo. Por lo tanto, es μ_b-negativo. Luego, del Lema 3.3 tenemos que el conjunto $(\Omega - C_1) \cup (\Omega - C_2)$ es μ_b-negativo. Por otro lado, supongamos por el absurdo que $C_1 \cap C_2$ no es μ_b-positivo, entonces existe $D \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que

$$\mu_b(C_1 \cap C_2 \cap D) < 0. \tag{4.10}$$

Consideremos ahora, el siguiente conjunto de $\overline{\mathcal{L}}$

$$D^{'} = (\Omega - C_1) \cup (C_1 \cap D) = (\Omega - C_1) \cup D.$$

Entonces,

$$0 \leq \mu_b(C_2 \cap D^{'}) = \mu_b(C_2 - C_1) + \mu_b(C_1 \cap C_2 \cap D) < \mu_b(C_2 - C_1)$$
$$\leq \mu_a(C_2 - C_1) \leq 0,$$

donde la última desigualdad se sigue de la suposición de que $C_1 \in \mathcal{L}_a$. Esta contradicción provino de asumir que (4.10) era válido, luego $C_1 \cap C_2$ es un conjunto μ_b-positivo. Por lo tanto, $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{L}_b$. El hecho de que $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{L}_a$ se obtiene de forma análoga. Finalmente, la segunda parte del lema se sigue como consecuencia directa de la primer parte. □

Definición 4.11 *Denotaremos por $\mathcal{L}_f(\mathcal{A}_f)$ el (la) menor σ-retículo completo (σ-álgebra) que contiene a $\widetilde{\mathcal{L}}_f$.*

Proposición 4.12 *$C \in \mathcal{L}_f$ si y sólo si $\forall\epsilon > 0$ existe $C^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ tal que:*

$$\mu(C \triangle C^*) < \epsilon. \tag{4.11}$$

Dem. Pongamos $\widehat{\mathcal{L}} = \{C \in \mathcal{L} : \forall\epsilon > 0\ \exists C^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f : \mu(C \triangle C^*) < \epsilon\}$. Demostremos que $\widehat{\mathcal{L}}$ es un σ-retículo.

- Comencemos por ver que $\Omega \in \widehat{\mathcal{L}}$. Sea C_n un conjunto μ^+_{-n}-positivo maximal, cuya existencia esta asegurada por la Proposición 3.5. Luego $D_n = C_n^c$ es μ^+_{-n}-negativo y por consiguiente $C_n \in \mathcal{L}_{-n}$.
  Notar que como $\mu^+_{-n} \leq \mu^+_{-(n+1)}$ entonces C_n es $\mu^+_{-(n+1)}$-positivo, por lo cual tenemos que $C_n \cup C_{n+1}$ es $\mu^+_{-(n+1)}$-positivo. Así, podemos suponer $C_n \subseteq C_{n+1}$. Veamos que $\mu(\Omega \triangle C_n) \to 0$. Supongamos por el absurdo, que existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu(\Omega - C_n) \geq \epsilon$, para infinitos n. Sea $D = \bigcap_{n\geq 1} D_n$, entonces $\mu(D) \geq \epsilon$. Como D_n es μ^+_{-n}-negativo, tenemos

  $$\int_{D_n} \varphi_+(\omega, f+n)d\mu \leq 0,$$

  tomando límite y aplicando el Teorema de Fatou y el hecho de que φ_+ es monótona creciente obtenemos

  $$0 \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} \chi_{D_n}\varphi_+(\omega, f+n)d\mu \geq \int_{\Omega} \chi_D \varphi_+(\omega, 1)d\mu > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega - C_n) = 0$. Así, tenemos que $\Omega \in \widehat{\mathcal{L}}$.

- La demostración de que $\emptyset \in \widehat{\mathcal{L}}$ se sigue por un razonamiento análogo al empleado para ver que $\Omega \in \widehat{\mathcal{L}}$, para este caso los conjuntos C_n deben tomarse μ_n^--positivos.

- Veamos que $\widehat{\mathcal{L}}$ es cerrado bajo uniones numerables. Empecemos por demostrar que lo es para uniones finitas. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \widehat{\mathcal{L}}$ entonces existen
$C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ tal que
$$\mu(C_n \triangle C_n^*) < \frac{\epsilon}{2^n}$$
pero,
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k \triangle \bigcup_{k=1}^{n} C_k^*\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (C_k \triangle C_k^*)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k \triangle C_k^*) \leq \epsilon$$
Ya que por el Lema 4.10 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$, tenemos que $\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k \in \widehat{\mathcal{L}}$. Tomemos ahora $\{C_n\}$ una sucesión en $\widehat{\mathcal{L}}$ y $\epsilon > 0$, para cada m sea $C_m^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ tal que
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} C_n \triangle C_m^*\right) < \epsilon,$$
la existencia de C_m^* esta asegurada por lo que demostramos anteriormente para uniones finitas y sea M tal que
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n - \bigcup_{n=1}^{M} C_n\right) < \epsilon.$$
Así,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \triangle C_M^*\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n - C_M^*\right) + \mu\left(C_M^* - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)$$
$$\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n - \bigcup_{n=1}^{M} C_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{M} C_n - C_M^*\right) + \mu\left(C_M^* - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)$$
$$< \epsilon + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{M} C_n - C_M^*\right) + \mu\left(C_M^* - \bigcup_{n=1}^{M} C_n\right)$$
$$= \epsilon + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{M} C_n \triangle C_M^*\right) < 2\epsilon.$$

Por consiguiente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \widehat{\mathcal{L}}$.

- Por último veamos que $\widehat{\mathcal{L}}$ es cerrado bajo intersecciones numerables. De forma análoga a lo hecho en el ítem anterior para uniones finitas se puede demostrar que $\widehat{\mathcal{L}}$ es cerrado para intersecciones finitas. Consideremos ahora $\{C_n\}$ una sucesión en $\widehat{\mathcal{L}}$ y sea $\epsilon > 0$, para cada m existe $C_m^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ tal que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{m} C_n \triangle C_m^*\right) < \epsilon,$$

Tomemos M tal que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{M} C_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) < \epsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \triangle C_M^*\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n - C_M^*\right) + \mu\left(C_M^* - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)\\
&\leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{M} C_n - C_M^*\right) + \mu\left(C_M^* - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)\\
&\leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{M} C_n - C_M^*\right) + \mu\left(C_M^* - \bigcap_{n=1}^{M} C_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{M} C_n - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right)\\
&< \mu\left(\bigcap_{n=1}^{M} C_n \triangle C_M^*\right) + \epsilon < 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Luego $\widehat{\mathcal{L}}$ es un σ-retículo, además $\widetilde{\mathcal{L}}_f \subseteq \widehat{\mathcal{L}}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_f \subseteq \widehat{\mathcal{L}}$. Recíprocamente sea $C \in \widehat{\mathcal{L}}$ y $C_n^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ tal que

$$\mu(C \triangle C_n^*) < \frac{1}{2^n}.$$

Veamos que $C = \liminf_{n\to\infty} C_n^*$ en casi todo punto. Sea $A_k = C \triangle C_k^*$ y $B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Luego,

$$\mu(B_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Sea $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ entonces $\mu(B) = 0$. Veamos ahora que

$$\liminf_{n\to\infty} C_n^* - B = C - B.$$

Sea $\omega \in C - B$ entonces existe k tal que si $j \geq k$, $\omega \notin A_j = (C - C_j^*) \cup (C_j^* - C)$ entonces $\omega \in C \cap C_j^*$ para toda $j \geq k$. Luego $\omega \in \liminf_{n\to\infty} C_n^*$ y $\omega \notin B$. Para ver la otra inclusión tomemos $\omega \in \liminf_{n\to\infty} C_n^* - B$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in C_n^*$ para todo $n \geq N$. Como $\omega \notin B$ existe k tal que para toda $j \geq k$, $\omega \notin A_j = (C - C_j^*) \cup (C_j^* - C)$ entonces $\omega \in C$. Así $\omega \in C - B$. Por lo tanto hemos demostrado que

$$C = \liminf_{n\to\infty} C_n^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} C_k^*,$$

puesto que para todo k tenemos $C_k^* \in \widetilde{\mathcal{L}}_f \subseteq \mathcal{L}_f$ entonces $C \in \mathcal{L}_f$. $\square$

También se puede demostrar que $A \in \mathcal{A}_f$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen conjuntos $C_i \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$, $D_i \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}_f$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que

$$\mu\left(A \triangle \bigcup_{i=1}^{n} (C_i \cap D_i)\right) < \epsilon. \tag{4.12}$$

Más aún, se puede suponer que los conjuntos $C_i \cap D_i$ son mutuamente disjuntos. Ahora presentamos el principal teorema de esta sección, el cual convierte el problema de hallar un mejor aproximante a una función por elementos de un conjunto convexo en un problema de mejor aproximación por elementos del subespacio $L_\varphi(\mathcal{A}_f)$.

Teorema 4.13 ***(F. Mazzone, H. Cuenya)*** *Sea $f \in L_\varphi$ y $\mathcal{L}$ un σ-retículo. Entonces son equivalentes:*

a) $g \in \mu(f, \mathcal{L})$

b) $g \in \mu(f, \mathcal{A}_f) \cap L_\varphi(\mathcal{L})$.

Dem. Supongamos $g \in \mu(f, \mathcal{L})$ y sea $a \in C(f)$.
Por Corolario 4.8, $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{L}_f$. Por la densidad de $C(f)$ obtenemos que g es una función $\mathcal{A}_f$-medible. Veamos ahora que g es una función LRN (con respecto a $\mathcal{A}_f$) de la familia $\{\mu_a^{\pm}\}$. Es decir, que para todo $A \in \mathcal{A}_f$ y $a \in \mathbb{R}$ vale que

$$\mu_a^+(\{g > a\} \cap A) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \mu_a^+(\{g < a\} \cap A) \leq 0. \tag{4.13}$$

Por la Observación 3.7 a) y de (4.12) es suficiente probar la desigualdad (4.13) para $a \in C(f)$ y $A = C \cap D$ con $C \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ y $\Omega - D \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$. Como $C \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ existe $b \in C(f)$ tal que $C \in \mathcal{L}_b$. Si $b < a$, entonces por Lema 4.10 tenemos que $\{g > a\} \cap C \in \mathcal{L}_a$. Por lo tanto,

$$\mu_a^+(\{g > a\} \cap C \cap D) \geq 0.$$

En el caso que $a \leq b$, aplicando nuevamente el Lema 4.10, tenemos que $\{g > a\} \cap C \in \mathcal{L}_b$. Luego, por ser μ_a una familia de medidas decrecientes

$$\mu_a^+(\{g > a\} \cap C \cap D) \geq \mu_b^+(\{g > a\} \cap C \cap D) \geq 0.$$

Así, el conjunto $\{g > a\}$ es μ_a-positivo (respecto a $\mathcal{A}_f$). Por otro lado, de la Observación 4.9 tenemos que el conjunto $\{g \geq a\} \in \mathcal{L}_a$ entonces, $\{g < a\}$ es μ_a-negativo. Como $\Omega - D \in \widetilde{\mathcal{L}}_f$ existe $r \in C(f)$ tal que $\Omega - D \in \mathcal{L}_r$. Si $a \leq r$, por Lema 4.10 tenemos que $\{g \geq a\} \cup (\Omega - D) \in \mathcal{L}_a$ entonces,

$$\mu_a^+((\{g < a\} \cap D) \cap C) \leq 0.$$

Si $r < a$, se tiene que $\{g \geq a\} \cup (\Omega - D) \in \mathcal{L}_r$. Luego,

$$0 \geq \mu_r^+((\{g < a\} \cap D) \cap C) \geq \mu_a^+((\{g < a\} \cap D) \cap C).$$

Por consiguiente vale (4.13).
Veamos la otra implicación. Asumamos $g \in \mu(f, \mathcal{A}_f) \cap L_\varphi(\mathcal{L})$ y sea $\widetilde{g} \in \mu(f, \mathcal{L})$. Usando la implicación demostrada arriba y del hecho que $\widetilde{g} \in \mu(f, \mathcal{L})$ se sigue que

$$\int_\Omega \varphi(\omega, f - g) d\mu = \int_\Omega \varphi(\omega, f - \widetilde{g}) d\mu \leq \int_\Omega \varphi(\omega, f - h) d\mu,$$

para toda función $h \in L_\varphi(\mathcal{L})$. Luego $g \in \mu(f, \mathcal{L})$. $\square$

4.2. σ-retículos Totalmente Ordenados

Aquí se tratará de caracterizar a un mejor φ-aproximante, en el caso particular en que el σ-retículo resulta ser totalmente ordenado. Esta hipotésis nos permitirá obtener resultados muy importantes que generalizarán varios hechos ya bien conocidos en aproximación.

Definición 4.14 *Un σ-retículo $\mathcal{L}$ se dirá totalmente ordenado si cada vez que $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$ se tiene que $C_1 \subseteq C_2$ ó $C_2 \subseteq C_1$, en casi todo punto respecto a μ.*

Definición 4.15 *Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una σ-álgebra. Un conjunto $B \in \mathcal{B}$, con medida μ positiva, se llama átomo de $\mathcal{B}$ si para todo $C \in \mathcal{B}$ se tiene que $\mu(C \cap B) = 0$ ó $\mu(C \cap B) = \mu(B)$.*

Definimos en $\mathcal{B}$ la siguiente relación de equivalencia: dos conjuntos en $\mathcal{B}$ serán equivalentes si difieren sólo en un conjunto de medida μ nula. Consideremos ahora, el conjunto de todas las clases de equivalencia de átomos de $\mathcal{B}$ y tomemos un representante de cada clase y llamemos a éste conjunto Atom$(\mathcal{B})$, ya que estamos bajo la suposición de que μ es una medida finita tenemos que el conjunto Atom$(\mathcal{B})$ es a lo sumo numerable. Por otro lado, si $\Omega' \subseteq \Omega$ denotaremos por $\mathcal{B}_{\Omega'}$ a la σ-álgebra inducida por $\mathcal{B}$ en Ω' es decir,

$$\mathcal{B}_{\Omega'} = \{B \cap \Omega' : B \in \mathcal{B}\}.$$

Por $\mathcal{L}'$ denotamos un sub-σ-retículo de $\mathcal{L}$ y por $\mathcal{A}(\mathcal{L}')$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{L}'$. El siguiente lema nos muestra que cuando $\mathcal{L}$ es un σ-retículo totalmente ordenado la σ-álgebra $\mathcal{A}_f$ coincide, fuera de los átomos de $\mathcal{A}_f$, con la σ-álgebra completa generada por $\mathcal{L}$.

Lema 4.16 *Supongamos $\mathcal{L}$ un σ-retículo totalmente ordenado. Para $\mathcal{L}'$ un sub-σ-retículo de $\mathcal{L}$ definimos el siguiente conjunto*

$$\Omega' = \Omega - \bigcup \big\{A : A \in Atom(\mathcal{A}(\mathcal{L}'))\big\}. \tag{4.14}$$

Entonces $\mathcal{A}(\mathcal{L})_{\Omega'} = \mathcal{A}(\mathcal{L}')_{\Omega'}$.

Dem. La demostración de éste lema esta dividida en dos pasos.

Paso 1 Veamos que para verificar la condición de atomicidad nos basta hacerlo sólo con los elementos de $\mathcal{L}'$. Demostremos que $A \in Atom(\mathcal{A}(\mathcal{L}'))$ si y sólo si para todo $C \in \mathcal{L}'$ se tiene que $\mu(C \cap A) = 0$ ó $\mu(C \cap A) = \mu(A)$. Que la condición es necesaria es inmediata. Recíprocamente, debemos probar ahora que para todo conjunto $B \in \mathcal{A}(\mathcal{L}')$ se tiene que $\mu(B \cap A) = 0$ o bien $\mu(B \cap A) = \mu(A)$, pero por una modificación elemental de (4.12) es suficiente probarlo para el caso particular en que $B = \bigcup_{i=1}^n (C_i \cap D_i)$, con C_i y $\Omega - D_i \in \mathcal{L}'$. Entonces,

$$\mu(B \cap A) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cap D_i\right) \cap A\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \cap D_i \cap A). \tag{4.15}$$

Observar además, que si para todo $C \in \mathcal{L}^{'}$ se tiene $\mu(C \cap A) = 0$ o $\mu(C \cap A) = \mu(A)$, entonces también vale si reemplazamos $C \in \mathcal{L}^{'}$ por $D \in \overline{\mathcal{L}^{'}}$. Consideremos los siguientes casos:

- Si $\mu(C_i \cap A) = \mu(A)$ y $\mu(D_i \cap A) = \mu(A)$, para algún i, entonces C_i y D_i contienen en casi todo punto a A. Luego, $\mu(C_i \cap D_i \cap A) = \mu(A)$.
- Si $\mu(C_i \cap A) = 0$ y $\mu(D_i \cap A) = \mu(A)$ ó, $\mu(C_i \cap A) = \mu(A)$ y $\mu(D_i \cap A) = 0$. Entonces $\mu(C_i \cap D_i \cap A) = 0$, para cualquiera de los dos casos.

De esta manera, hemos probado que $A \in Atom(\mathcal{A}(\mathcal{L}^{'}))$ si y sólo si para todo $C \in \mathcal{L}^{'}$ se tiene que $\mu(C \cap A) = 0$ ó $\mu(C \cap A) = \mu(A)$.

Paso 2 Sea $C \in \mathcal{L}$. Definamos

$$\alpha := \inf\{\mu(C^{'}) : C^{'} \in \mathcal{L}^{'} \text{y } C \subseteq C^{'}\}$$

y,

$$\beta := \sup\{\mu(C^{'}) : C^{'} \in \mathcal{L}^{'} \text{y } C^{'} \subseteq C\}.$$

Por definición de ínfimo y supremo existen dos sucesiones monótonas $\{C^n\}$ y $\{C_n\}$ en $\mathcal{L}^{'}$ tales que $C_n \subseteq C$, $C \subseteq C^n$ y $\mu(C_n) \uparrow \beta$, $\mu(C^n) \downarrow \alpha$. Como $\mathcal{L}^{'}$ es totalmente ordenado, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{C^n\}$ es una sucesión decreciente y que $\{C_n\}$ es creciente. Pongamos,

$$C^* = \bigcap_{n \geq 1} C^n \qquad \text{y} \qquad C_* = \bigcup_{n \geq 1} C_n.$$

Entonces C^* y $C_* \in \mathcal{L}^{'}$. Además,

$$\mu(C^*) = \lim_{n \to \infty} \mu(C^n) = \alpha,$$
$$\mu(C_*) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = \beta$$

y $C_* \subseteq C \subseteq C^*$. Suponagmos $\alpha \neq \beta$. Veamos que $C^* - C_* \in Atom(\mathcal{A}(\mathcal{L}^{'}))$. Si $C^* - C_* \notin Atom(\mathcal{A}(\mathcal{L}^{'}))$ entonces existiría $C^{'} \in \mathcal{L}^{'}$ tal que

$$0 < \mu(C^{'} \cap (C^* - C_*)) < \mu(C^* - C_*).$$

Como $\mathcal{L}$ es totalmente ordenado se sigue que $C_* \subseteq C^{'} \subseteq C^*$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \subseteq C^{'}$. Entonces,

$$\mu(C^{'}) = \mu(C^{'} \cap (C^* - C_*)) + \mu(C_*) < \mu(C^*) = \alpha.$$

Lo cual es una contradicción, pues $\mu(C^{'}) \geq \alpha$.
Por lo tanto, $C^* - C_* \in Atom(\mathcal{A}(\mathcal{L}^{'}))$. Así, tenemos que $C \cap \Omega^{'} = C^* \cap \Omega^{'}$ y $C \cap \Omega^{'} = C_* \cap \Omega^{'}$ en casi todo punto, pues

$$\mu(C^* \cap \Omega^{'} - C \cap \Omega^{'}) \leq \mu(\Omega^{'} \cap (C^* - C)) \leq \mu(\Omega^{'} \cap (C^* - C_*)) = 0$$

y,

$$\mu(C \cap \Omega^{'} - C_* \cap \Omega^{'}) \leq \mu(\Omega^{'} \cap (C - C_*)) \leq \mu(\Omega^{'} \cap (C^* - C_*)) = 0.$$

Lo cual prueba el lema. En el caso en que $\alpha = \beta$, por ser $\mathcal{L}^{'}$ totalmente ordenado tenemos que $C_* = C = C^*$ y por lo tanto, se sigue de forma inmediata que $C \cap \Omega^{'} = C^* \cap \Omega^{'}$ y $C \cap \Omega^{'} = C_* \cap \Omega^{'}$ en casi todo punto. $\square$

Dada una función f y A un subconjunto de Ω denotamos por $f_{|A}$ la restricción de f a A es decir, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ entonces $f_{|A} : A \to \mathbb{R}$.

Lema 4.17 *Sea $f \in L_\varphi$ y $\mathcal{B}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Supongamos que para $i = 1, 2, \ldots$ tenemos $\Omega_i \subseteq \Omega$ una partición numerable de Ω por conjuntos $\mathcal{B}$-medibles. Entonces $g \in \mu(f, \mathcal{B})$ si y sólo si $g_{|\Omega_i} \in \mu(f_{|\Omega_i}, \mathcal{B}_{\Omega_i})$ para todo índice $i = 1, 2, \ldots$.*

Dem. Supongamos $g \in \mu(f, \mathcal{B})$ entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{B}$

$$\mu_a^{\pm}(\{g > a\} \cap B) \geq 0$$

y,

$$\mu_a^{\pm}(\{g < a\} \cap B) \leq 0.$$

Sea $i \in \{1, 2, \ldots\}$ entonces,

$$\mu_a^{\pm}(\{g_{|\Omega_i} > a\} \cap (B \cap \Omega_i)) = \mu_a^{\pm}(\{g > a\} \cap B \cap \Omega_i) \geq 0.$$

y,

$$\mu_a^{\pm}(\{g_{|\Omega_i} < a\} \cap (B \cap \Omega_i)) = \mu_a^{\pm}(\{g < a\} \cap B \cap \Omega_i) \leq 0.$$

Por lo tanto $g_{|\Omega_i} \in \mu(f_{|\Omega_i}, \mathcal{B}_{\Omega_i})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. El hecho de que cada función $g_{|\Omega_i}$ es $\mathcal{B}_{\Omega_i}$-medible se desprende del hecho que para todo núemro real a

$$\{g_{|\Omega_i} > a\} = \{g > a\} \cap \Omega_i$$

Para ver la otra implicación supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $g_{|\Omega_i} \in \mu(f_{|\Omega_i}, \mathcal{B}_{\Omega_i})$ y tomemos $a \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{B}$. Del hecho que Ω_i forman una partición de Ω se sigue que

$$\mu_a^{\pm}(\{g > a\} \cap B) = \mu_a^{\pm}\left(\bigcup_{i\geq 1}\left(\{g > a\} \cap B \cap \Omega_i\right)\right)$$
$$= \sum_{i\geq 1} \mu_a^{\pm}\left(\{g_{|\Omega_i} > a\} \cap B \cap \Omega_i\right) \geq 0.$$

y análogamente se tiene

$$\mu_a^{\pm}(\{g < a\} \cap B) \leq 0.$$

Además, de la igualdad

$$\{g > a\} = \bigcup_{i\geq 1}\left\{g_{|\Omega_i} > a\right\},$$

se sigue que g es $\mathcal{B}$-medible. $\square$

Presentamos ahora uno de los principales resultados que aparece en esta monografía, el cual nos dá una caracterización más abstracta y general del mejor φ-aproximante, en el sentido, que unifica y extiende resultados ya conocidos en la teoría de aproximación.

Teorema 4.18 ***(F. Mazzone, H. Cuenya)*** *Sea $f \in L_\varphi$ y sea Ω' como lo definimos en* (4.14) *con $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_f$. Entonces, $g \in \mu(f, \mathcal{L})$ si y sólo si*

a) $g \in L_\varphi(\mathcal{L})$

b) *g es constante en cada conjunto $A \in Atom(\mathcal{A}_f)$. Además, $g_{|A}$ es un mejor φ-aproximante constante a $f_{|A}$ en cada conjunto $A \in Atom(\mathcal{A}_f)$.*

c) $g_{|\Omega_i} \in \mu(f_{|\Omega_i}, \mathcal{A}(\mathcal{L})_{\Omega_i})$.

Dem. Tomemos en primer lugar, $g \in \mu(f, \mathcal{L})$ claramente vale a). Sea $A \in Atom(\mathcal{A}_f)$, del Corolario 4.8 tenemos que $\{g > a\} \in \mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{A}_f$ para todo $a \in C(f)$. Sea,

$$a^* = \sup\{a : \mu(\{g > a\} \cap A) = \mu(A)\} =: \sup M,$$

a^* esta bien definido, pues $-\infty \in M$ y M está acotado superiormente por $+\infty$. Veamos que $g \equiv a^*$ en casi todo punto de A. Si tomamos $\alpha > a^*$ se tiene que

$\mu(\{g > \alpha\} \cap A) = 0$, lo cual nos está diciendo que $\{g \leq a^*\}$ en casi todo A. Además, si existiera $a < a^*$ para el cual $\mu(\{g > a\} \cap A) = 0$, enonces tomando $a < b \leq a^*$ tenemos

$$\mu(\{g > b\} \cap A) \leq \mu(\{g > a\} \cap A) = 0,$$

lo que contradice la definición de a^*. Por lo tanto, $\mu(\{g > a\} \cap A) = \mu(A)$ para todo a menor que a^*. Así $g \equiv a^*$ en casi todo punto de A. La otra parte de b) se sigue del Lema 4.17 y del hecho que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_f$. Para ver c) basta usar el Lema 4.17 y el Lema 4.16 teniendo en cuenta que como $\mathcal{L}^{'} = \mathcal{L}_f$ entonces $\mathcal{A}(\mathcal{L}^{'}) = \mathcal{A}_f$. La otra implicación sale pues, de a) tenemos que $g \in L_{\varphi}(\mathcal{L})$; por c) y Lema 4.16 se sigue que g es una mejor φ-aproximante a f de $\mathcal{A}_f$ en $\Omega^{'}$ por consiguiente, usando b) y Lema 4.17 se tiene que $g \in \mu(f, \mathcal{L})$. Lo que finaliza la demostración del teorema. $\square$

Corolario 4.19 *Sea $\Omega = [0,1]$ y $g \in \mu(f, \mathcal{L}^1)$, siendo $\mathcal{L}^1$ el σ-retículo estándar definido en el Ejemplo 2.2. Entonces existe un conjunto abierto V, tal que g es constante en cada componente conexa de V y $g = f$ en $[0,1] - V$ en casi todo punto respecto a μ.*

Este corolario que obtenemos por aplicación del Teorema 4.18, no es más que el resultado ya conocido en la teoría de aproximación, para el cono de funciones no decrecientes del $[0,1]$: una función no decreciente g, es un mejor φ aproximante a f por funciones no decrecientes si y sólo si g es el mejor φ-aproximante constante en cada átomo de $\mathcal{A}_f$ y fuera de los átomos g coincide con f (ver [10], [11]).

Bibliografía

[1] F. D. Mazzone, H. H. Cuenya (2004):*A Characterization of Best φ-Approximants with Applications to Multidimensional Isotonic Approximation*. Constructive Approximation. **21**:207-223.

[2] H. Lebesgue (1910) : *Sur l intégration des fonctions discontinues*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **27**: 361–450.

[3] E. DiBenedetto. Real Analysis. Birkhäuser. Boston. 2002.

[4] N. Fava, F. Zó. Medida e Integral de Lebesgue. Red Olímpica. Argentina. 1996.

[5] D. Landers, L. Rogge (1980): *Best approximants in L_φ-spaces*. Z. Wahrsch. Verw. Gabiete. **51**: 215–237.

[6] M. Marano (1997): *Monotone l_φ-approximation*. Approx. Theory Appli. **13**: 51–57.

[7] R. Wheeden, A. Zygmund. Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis. Marcel Dekker. Inc. New York and Basel. 1977.

[8] S. Johansen (1967): *The descriptive approach to the derivative of a set function with respect to a σ-lattice*. Pacific Journal of Mathematics. **21**: 49–58.

[9] H. D. Brunk, S. Johansen (1970): *A Generalized Radon-Nikodym Derivative*. Pacific Journal of Mathematics. **34**: 585–617.

[10] R. Huotari, A. Meyerowitz, M. Sheard (1986): *Best monotone approximations in $L^1([0,1])$*. J. Approx. Theory. **47**: 85–91.

[11] M. Marano, J. Quesada (1997): *L_φ-approximation by non-decreasing functions on the interval*. Constr. Approx. **13**: 177–186.