UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

ESCUELA DE POSGRADO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICO-QUÍMICAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# *LA NOCIÓN DE CÓNICA EN LA EDUCACIÓN POLIMODAL*

**TESIS DE MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

## ANEXOS

60655 anexo

# ANEXO I

## DECRETO N°2205 DEL PODER EJECUTIVO DE LA PROVINCIA DE LA PAMPA

**"Proyecto de Cambio en la Educación Media" (1991)**

- En una auténtica jerarquización del rol docente, como enseñante y orientador del proceso de enseñanza-aprendizaje;

POR ELLO:

EL GOBERNADOR DE LA PROVINCIA

D E C R E T A :

<u>Artículo 1°.-</u>Apruébase el "PROYECTO DE CAMBIO EN LA EDUCACION MEDIA", cuyos Lineamientos Curriculares fueron publicados por el Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia en octubre de 1990, según consta a - fojas 7 del expediente n° 3467/91.-

<u>Artículo 2°.-</u>El Proyecto de Cambio, a aplicarse en todas las Escuelas Diurnas del Nivel Medio provincial (incluídas las escuelas de modalidad agropecuarias) dependientes del Ministerio de Cultura y Educación, estará sujeto a una evaluación contínua de su desarrollo y efectos educativos sobre la población escolar a que está destinado. Podrá ser modificado, en - consecuencia, para optimizar el cumplimiento de los fines que expresa.-

<u>Artículo 3°.-</u>A los efectos indicados en el artículo anterior, el Ministerio de Cultura y Educación adoptará todas las medidas de carácter - técnico-administrativo que permitan efectivizar el seguimiento del Proyecto de Cambio.-

<u>Artículo 4°.-</u>El presente Decreto será refrendado por el señor Ministro de - Cultura y Educación.-

<u>Artículo 5°.-</u>Dése al Registro Oficial y al Boletín Oficial, comuníquese, publíquese y pase al Ministerio de Cultura y Educación a sus efectos.-

DECRETO N° 2205

cnv/

GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE LA PAMPA
REPUBLICA ARGENTINA

Dr. NESTOR AHUAD
GOBERNADOR DE LA PAMPA

MIGUEL ANGEL TANOS
Ministro de Cultura y Educación

SANTA ROSA, 17 SET 1991

VISTO:

La necesidad de implementar un nuevo Currículum para las Escuelas de Enseñanza Media dependientes del Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia; y

CONSIDERANDO:

Que el diagnóstico realizado en las Escuelas de Nivel Medio Provincial da cuenta de la necesidad de un cambio expresado por los distintos sectores de la comunidad pampeana;

Que entre las causas señaladas por esta necesidad de transformación aparece la idea de desintegración que fragmenta la realidad e imposibilita su conocimiento y la necesidad de actualización de las disciplinas;

Que se hace necesario contribuir a la democratización de la estructura interna y del rol social de las escuelas secundarias de la provincia;

Que es necesario que la Escuela Media dé respuesta a los adolescentes y jóvenes que viven en el mundo en constante cambio a partir de nuestra identidad sobre la base de nuestros valores;

Que si bien a partir del presente ciclo se encuentra en marcha en la Educación Media el PROYECTO DE CAMBIO es necesario dictar la norma que le dé el respaldo legal correspondiente;

Que, en este sentido, el Ministerio de Cultura y Educación ha elaborado el mencionado proyecto basado en:

- En una concepción del hombre que es persona humana abierta a la trascendencia en todas las dimensiones, capaz de realizar sus potencialidades en el marco del amor, buscando la paz, el bien común y la justicia (Congreso Pedagógico).
- En la unidad del hombre, superando las antinomias de saber y actuar, sentir, pensar, decir y hacer, que tienden a dividirlo atentando contra esa unidad esencial.
- En una realidad que se presente como una unidad, y en ese sentido hay que apreciarla, observarla, investigarla y transformarla en cuanto sea necesario.
- En una Escuela que permita al adolescente desarrollar la comprensión acerca del mundo del trabajo.
- En un auténtico protagonismo del adolescente que le permite construir el conocimiento, logrando encontrarse con su propia identidad.
- En la actitud fraterna y solidaria para la construcción de una sociedad mejor.

///

# ANEXO II

## LIBROS DE TEXTO

**El águila y la bala**

Dicen que apostó una bala
con un águila a volar,
y ésta dijo sin tardar:
—Vete, plomo, noramala.
¿Quién a estas plumas iguala
con que hasta los vientos domo?
Mi cuerpo de tomo y lomo
verás donde tú no subes,
que esto de andar por las nubes
no es para un ave de plomo.

Despreció la bobería,
siempre la bala en sus trece,
diciendo: —¿A quién se le ofrece
negarme la primacía?
¿Pues no es más claro que el día
que nunca mi vuelo igualas?
En mal camino resbalas,
ave infeliz, porque en suma,
si son tus alas de pluma,
de pólvora son mis alas.

Ni el ave la lucha esquiva,
ni la bala se convence.
—¿Probamos a ver quién vence?
—Arriba. —Vamos arriba.
Subió la bala tan viva,
que dio a su rival antojos,
pues fue, para darle enojos
y centuplicar sus quejas,
un estruendo a sus orejas
y un relámpago a sus ojos.

Subió el águila con calma
cuando la bala caía,
y la dijo: —Amiga mía,
¿quién se llevará la palma?
Si te hundes en cuerpo y alma,
paciencia, yo no desmayo.
Harás de tu capa un sayo,
pero que sepas es bueno
que el que sube como un trueno
suele bajar como un rayo.

JUAN MARTÍNEZ VILLERGAS (1816-1894)

En estas cuatro *décimas* se describe *el reto* de una bala a un águila sobre quién podía volar más alto.

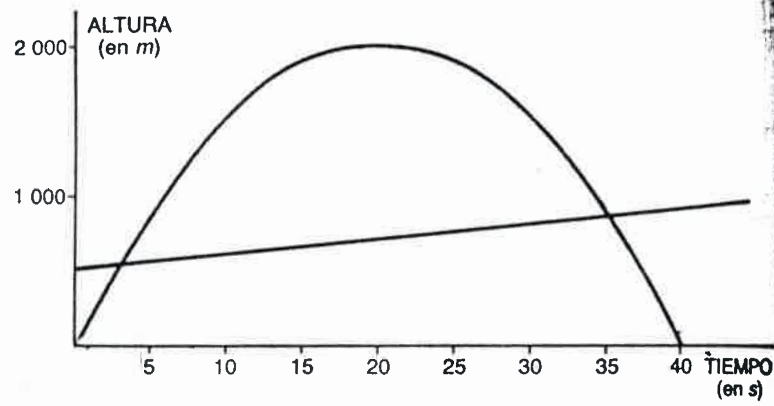
**¿Cuánto tiempo después de la salida adelanta la bala al águila? ¿A qué altura? ¿Cuánto tiempo tardan en volver a cruzarse?**

Hagamos algunos supuestos:

*a)* La bala fue lanzada desde el suelo, verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 200 m/s.

*b)* El águila comenzó a subir en el mismo momento desde su nido a 525 m del suelo, con una velocidad constante de 10 m/s.

Éstas son las gráficas de los dos movimientos:




## Análisis de las gráficas por separado

La bala sube muy deprisa; su gráfica es la curva trazada en color verde. Vemos que llega al punto más alto (2 000 m) en 20 segundos y tarda en caer otros 20 segundos. Aquí acaba su movimiento.

El águila sube despacio, siempre a la misma velocidad. La recta indica su subida, *lenta pero segura.*

## Análisis simultáneo de las dos gráficas

¿Cuánto tiempo tarda la bala en adelantar al águila? ¿A qué altura ocurre esto?

El primero de los dos **puntos de corte,** responde a ambas preguntas: a los 3 segundos y a una altura de unos 560 m.

El siguiente encuentro, *«cuando la bala caía»*, se produce en el instante 35 *s*, a unos 880 m de altura. Muy poco después (5 *s*), la bala *«se hunde en cuerpo y alma»*, apenas sin tiempo de *escuchar* la larga parrafada que le dedicaba su adversaria.

El estudio conjunto de ambas gráficas ha servido para comparar los movimientos. Los **puntos de corte** han sido cruciales.

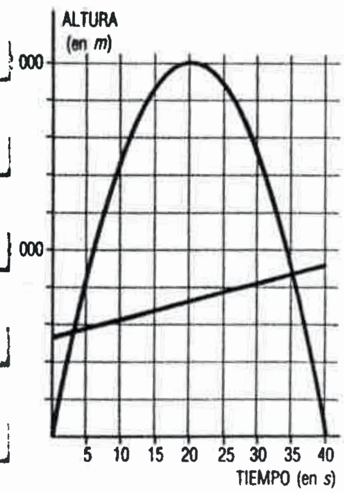
# Intersecciones de rectas y parábolas

¿Recuerdas la apuesta del águila y la bala? Las ecuaciones de sus movimientos son:

el águila: $a = 525 + 10t$

la bala: $a = 200t - 5t^2$

Y las gráficas correspondientes:




A la vista de las gráficas podemos deducir, como ya hicimos en su momento, que la bala adelanta al águila a los 3 segundos, y a unos 560 m de altura. Se vuelven a cruzar a los 35 segundos a una altura de unos 880 m.

¿Cómo obtener estos valores, con precisión, a partir de las ecuaciones de las dos curvas?

¿Cómo obtener la coincidencia, en altura y tiempo, del águila y de la bala?

¿Cómo averiguar los puntos de corte de una recta y una parábola, a partir de sus ecuaciones?

## Resolución del problema inicial

Se trata de encontrar los valores de $t$ (los instantes) para los cuales águila y bala están a la misma altura. Eso es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a = 525 + 10t \\ a = 200t - 5t^2 \end{cases}$$

Igualando los segundos miembros:

$$525 + 10t = 200t - 5t^2 \quad \rightarrow \quad 5t^2 - 190t + 525 = 0$$

Dividiendo entre 5: $\quad t^2 - 38t + 105 = 0$

y se resuelve la ecuación de segundo grado resultante:

$$t = \frac{38 \pm \sqrt{1\,444 - 420}}{2} = \frac{38 \pm 32}{2} = \begin{cases} 3 \\ 35 \end{cases}$$

Se obtiene que, efectivamente, el águila y la bala coinciden a los 3$s$ y a los 35$s$. Para obtener las alturas se sustituye el valor de $t$ en cualquiera de las dos ecuaciones:

$t = 3 \quad \rightarrow \quad a = 525 + 30 = 555$ m La bala adelanta al águila exactamente a los 555 m de altura.

$t = 35 \quad \rightarrow \quad a = 525 + 350 = 875$ m Se cruzan por segunda vez a los 875 m de altura.

## Generalización

Para calcular los puntos de corte de una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con una recta $y = mx + n$, se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$

Puede haber dos soluciones, una o ninguna.

1969

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA
MODERNA

MARIO O GONZÁLEZ
JULIÁN D MANCILL

# ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

1

PARA CUARTO AÑO
DEL BACHILLERATO

EDITORIAL
KAPELUSZ
Moreno 372 Buenos Aires

Como el punto Q está sobre la recta $y = mx + b$, sus coordenadas, dadas por [2], deben satisfacer esta ecuación, es decir:

$$y_1 - d \operatorname{sen} \alpha = m (x_1 - d \cos \alpha) + b$$

y despejando $d$ se obtiene:

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\operatorname{sen} \alpha - m \cos \alpha} \qquad [3]$$

Ahora bien, puesto que QP es perpendicular a la recta dada, cuya pendiente es $m$, tenemos (parágrafo 93):

$$m' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{m}$$

o

$$m \operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha \qquad [4]$$

y se deduce

$$m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$$
$$(1 + m^2) \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Sustituyendo en [4] obtenemos:

$$\cos \alpha = \frac{-m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Llevando estos valores de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$ a la expresión que figura en el denominador de [3] encontramos:

$$\operatorname{sen} \alpha - m \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{1 + m^2}$$

Por tanto, se obtiene la fórmula:

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}} \qquad [5]$$

Cuando el punto P está por arriba de la recta $(y_1 > mx_1 + b)$ la distancia resulta positiva, cuando el punto está en la recta $(y_1 = mx_1 + b)$ la distancia es nula, y cuando está por debajo de la recta $(y_1 < mx_1 + b)$ la distancia es entonces negativa.

Nótese que el numerador de la fórmula [5] se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto P en el primer miembro de la ecuación $y - mx - b = 0$.

En algunas cuestiones sólo interesa el valor absoluto de la distancia. En este caso las fórmulas [1] y [5] se escriben:

$$|d| = |x_1 - x_0|$$
$$|d| = \frac{|y_1 - mx_1 - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$



*Ejemplo.*

Hallar la distancia entre la recta $y = -2x + 1$ y el punto $(1, -4)$.

Aplicando la fórmula [5] obtenemos:

$$d = \frac{-4 + 2 - 1}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{5}}$$

El signo negativo del resultado indica que el punto $(1, -4)$ queda por debajo de la recta dada. Compruébese mediante un gráfico.

EJERCICIO 84

I. En cada uno de los siguientes ejercicios hallar la distancia entre la recta dada y el punto dado.

1°) $y = 3x - 2$, $P(1, -1)$
2°) $x - 2y - 6 = 0$, $P(-2, -3)$
3°) $x = 5$, $P(1, 2)$
4°) $y = -x + 3$, $P(2, 4)$
5°) $2x - y - 1 = 0$, $P(-1, 5)$
6°) $3x - 2y + 7 = 0$, $P(0, 0)$
7°) $x + y - 5 = 0$, $P(3, 0)$
8°) $-2x + y + 4 = 0$, $P(-1, 3)$
9°) $x + 2y + 1 = 0$, $P(2, 5)$
10°) $-3x + y - 6 = 0$, $P(0, 2)$

II. Calcular las longitudes de las alturas del triángulo cuyos vértices son los siguientes: $A \equiv (1, -2)$, $B \equiv (6, 1)$ y $C \equiv (3, 5)$.

III. Si la recta dada tiene por ecuación $Ax + By + C = 0$ $(B > 0)$ y el punto dado es $P = (x_1, y_1)$, demostrar que la fórmula [5] se transforma en

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

IV. Utilícese la forma normal de la ecuación de la recta (Ejercicio 81, VI, 10°) para dar una demostración directa de la fórmula del problema anterior.

## 100 Problemas fundamentales de la geometría analítica

En párrafos anteriores hemos estudiado métodos para obtener las ecuaciones correspondientes a rectas determinadas por ciertas condiciones. Estos casos no son sino sencillos ejemplos de uno de los problemas fundamentales de la Geometría analítica, a saber:

*Dado un lugar geométrico cualquiera obtener la ecuación que corresponde a este lugar geométrico.*

Otro de sus problemas fundamentales es el inverso del anterior, o sea:

*Dada una ecuación determinar el lugar geométrico o curva que corresponde a esta ecuación.*

Una vez establecida la relación que existe entre curva y ecuación se puede utilizar el conocimiento de las propiedades de uno cualquiera de ellos para derivar las propiedades del otro. En esto consiste el problema capital de la Geometría analítica que puede ser enunciado así:

*Obtener las propiedades de un lugar geométrico de las propiedades de su ecuación, o viceversa.*

La resolución de los dos primeros problemas puede considerarse como paso previo o preliminar a la resolución de este último.

En lo que sigue nos limitamos a ilustrar estos problemas fundamentales de la Geometría analítica con algunos sencillos ejemplos.

## 101 Lugar geométrico de una ecuación

Cuando las variables $x$ e $y$ están relacionadas por medio de una ecuación $f(x, y) = 0$ existen, en general, infinitos pares de valores de $x$ e $y$ que satisfacen la ecuación. Si estos pares de valores se consideran como coordenadas de puntos de un plano (referidas a un mismo sistema de ejes) y se marcan estos puntos se observará, tomando un número suficientemente grande de ellos, que no se hallan arbitrariamente distribuidos en el plano, sino que, en general, se disponen según una o varias líneas (rectas o curvas). Estas líneas constituyen el *lugar geométrico* o *gráfico* de la ecuación dada.

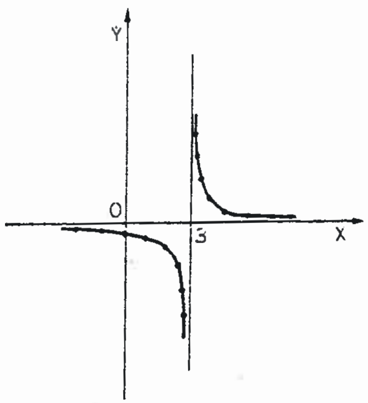
*El lugar geométrico de una ecuación es, pues, la línea (o conjunto de líneas) que contiene los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, y sólo ellos.*

Para dibujar el gráfico correspondiente a una ecuación se procede a dar a una de las variables, por ejemplo $x$, una sucesión de valores convenientemente escogida, y mediante la ecuación, se determinan los valores de $y$ que correspondan a cada uno de los valores asignados a $x$. Marcando los puntos cuyas coordenadas son los pares de valores así encontrados y trazando la curva que pasa por estos puntos* se tendrá aproximadamente el gráfico de la ecuación propuesta. Esta aproximación será tanto mejor cuanto más puntos se hayan tomado. En ciertos casos, cuando la ecuación cuyo lugar geométrico se busca no es sencilla, es necesario hacer un estudio previo de ella para determinar las regiones del plano en que pueda existir la curva, la simetría que presenta, los puntos en que corta a los ejes, las rectas a las cuales la curva se acerca indefinidamente** y otras interesantes particularidades que no nos detendremos a considerar porque ya su investigación se sale del terreno de lo elemental.

*Ejemplo.*

Construir el gráfico de la ecuación $y = \dfrac{1}{x-3}$.

En este ejemplo se observa que los valores de $y$ son negativos para todos los valores de $x$ menores que 3 y son, en cambio, positivos para todos los valores de $x$ superiores a 3.




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-2$ | $-0{,}2$ |
| $-1$ | $-0{,}25$ |
| $0$ | $-0{,}33$ |
| $+1$ | $-0{,}5$ |
| $+2$ | $-1$ |
| $+2{,}5$ | $-2$ |
| $+2{,}8$ | $-5$ |
| $+3{,}2$ | $+5$ |
| $+3{,}5$ | $+2$ |
| $+4$ | $+1$ |
| $+5$ | $+0{,}5$ |
| $+6$ | $+0{,}33$ |

* Este dibujo se hace a pulso o con auxilio de la plantilla de curvas.
** Estas rectas se llaman *asíntotas* de la curva.



Para $x = 3$ no existe valor correspondiente de $y$ puesto que la división por cero carece de significado. Si a $x$ se dan valores que se aproximen al 3, la $y$ toma valores absolutos cada vez mayores puesto que el módulo de un quebrado aumenta cuando su denominador tiende a cero. Se observará también que cuando a $x$ se dan valores positivos grandes o negativos muy pequeños, el valor de la $y$ se aproxima a cero, por valores positivos en el primer caso y por valores negativos en el segundo. Esto indica que el eje de abscisas es una asíntota de la curva. También es asíntota de la curva la recta $x = 3$ (véase figura).

EJERCICIO 85

Construir el gráfico de cada una de las ecuaciones siguientes:

1º) $y = x + 3$
2º) $y = 3x - 2$
3º) $y = -2x + 1$
4º) $5x - 4y = -2$
5º) $x^2 + y^2 = 9$
6º) $x^2 + y^2 = 16$
7º) $x^2 + y^2 = 36$
8º) $x^2 + y^2 = 100$
9º) $x^2 - y^2 = 1$
10º) $x^2 - y^2 = 4$
11º) $y^2 = x$
12º) $y^2 = -9x$
13º) $x^2 = 4y$
14º) $x^2 = 16y$
15º) $y = -x^2 + 5x - 6$
16º) $y = x^2 + x - 6$
17º) $y = x^2 + 3x - 4$
18º) $y = -x^2 + 2x + 3$
19º) $y = x^3$
20º) $y^2 = x^3$
21º) $y = \dfrac{1}{x-2}$
22º) $y = \dfrac{3}{x+1}$
23º) $y = \dfrac{4}{x-5}$
24º) $y = \dfrac{2}{x+4}$
25º) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$
26º) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$
27º) $xy = 5$
28º) $4x^2 + y^2 = 16$
29º) $16x^2 + 9y^2 = 144$
30º) $9x^2 - 25y^2 = 225$
31º) $xy - 3x = 4$
32º) $xy + y = 6$
33º) $y = -5x^2$
34º) $y(x-1)(x-2) = 8$
35º) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$
36º) $y - x + x^2y = 0$

## 102 Ecuación de un lugar geométrico

En éste y los párrafos subsiguientes vamos a ilustrar con varios ejemplos cómo se resuelve el problema de Geometría analítica que consiste en hallar para una curva o lugar geométrico dado su correspondiente ecuación. Este problema es, en general, más difícil que el resuelto en el párrafo anterior, pero en esta dificultad reside parte de su atractivo e interés debido a la ingeniosidad de que es preciso hacer uso en ciertos problemas para llegar a su resolución.

Se dice que una ecuación *corresponde* a un lugar geométrico, o que *representa* a este lugar geométrico, cuando queda satisfecha por las coordenadas de cada uno de los puntos del lugar, y sólo por las coordenadas de estos puntos.

Para poder establecer la ecuación que corresponde a un lugar geométrico se necesita conocer la propiedad o propiedades que lo caracterizan. Una vez elegidos los ejes de coordenadas convenientemente, se expresan esas propiedades en el lenguaje del Álgebra con auxilio de los principios fundamentales de Geometría analítica que hemos estudiado en párrafos anteriores.*

En ciertas ocasiones el lugar geométrico viene definido cinemáticamente, considerándolo como la trayectoria de un punto (o recta, u otro ente geométrico) que se mueve bajo ciertas condiciones. En tal caso estas condiciones contendrán de manera más o menos explícita las propiedades geométricas a que es preciso atender para llegar a establecer la ecuación correspondiente. Así, por ejemplo, si consideramos el lugar descrito por el centro C de una circunferencia que rueda sobre otra circunferencia de centro O, de tal condición resulta que la distancia CO se mantiene constante y, por consiguiente ésta es la propiedad geométrica que debe tenerse en cuenta para escribir la ecuación que corresponde a dicho lugar geométrico.

*Ejemplos.*

1º) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A \equiv (2, 3)$ y $B \equiv (5, 6)$ (véase figura siguiente).

Sea $M \equiv (x, y)$ un punto cualquiera perteneciente al lugar geométrico. La propiedad geométrica que caracteriza este lugar es:

$$|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$$

Utilizando la fórmula [2] del parágrafo 89 para expresar la distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2}$$

de donde

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36$$

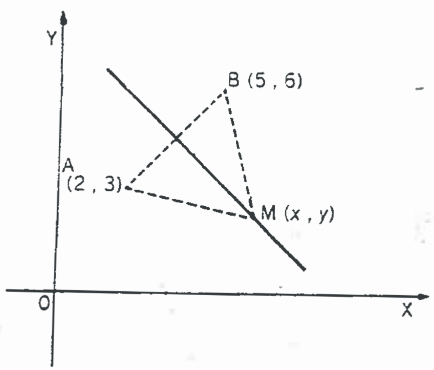
o sea

$$6x + 6y = 48$$

o

$$x + y = 8$$

que es la ecuación buscada. Esta ecuación representa una recta, como era de esperarse, pues el lugar geométrico dado es la mediatriz del segmento AB.

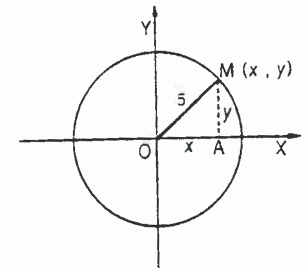



* Como se verá en los ejemplos que siguen una de las fórmulas más útiles para este propósito es la encontrada en el parágrafo 89 para expresar la distancia entre dos puntos.



II. Hallar la ecuación de una circunferencia de radio 5.

Tomando como origen de coordenadas el centro de la circunferencia, como ejes de coordenadas dos diámetros perpendiculares y llamando $M \equiv (x, y)$ a un punto cualquiera sobre la curva, la propiedad característica de la circunferencia (tener sus puntos equidistantes del centro) se escribe:




$$|\overline{OM}| = 5$$

Expresando la distancia de M al origen en función de sus coordenadas, tenemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

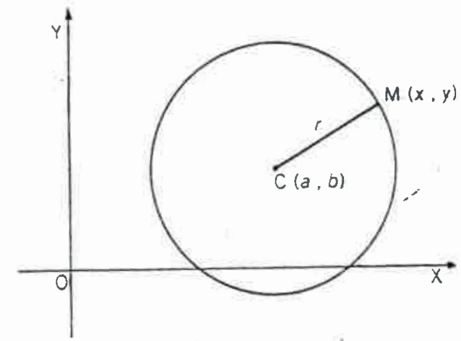
de donde

$$x^2 + y^2 = 25$$

que es la ecuación de la circunferencia dada.* Esta ecuación se puede obtener inmediatamente aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OAM (véase figura).

## 103 Ecuación general de la circunferencia

En este parágrafo nos proponemos hallar la ecuación de una circunferencia con centro en el punto $C \equiv (a, b)$ y radio $r$.




Sea $M \equiv (x, y)$ un punto cualquiera de esta circunferencia. La propiedad característica de esta curva es:

$$|\overline{CM}| = r$$

o sea (parágrafo 89):

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

o bien

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad [1]$$

* Se ve fácilmente que las coordenadas de los puntos no situados en la circunferencia no pueden verificar esta ecuación, pues se tiene $x^2 + y^2 < 25$ para todo punto interior y $x^2 + y^2 > 25$ para todo punto exterior.

*Ejemplo.*

Si el centro es el punto $(2, -3)$ y el radio es 4, la ecuación correspondiente es

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$$

o

$$x^2+y^2-4x+6y=3$$

*Caso particular.* Cuando el centro está en el origen, $a=b=0$ y la ecuación [1] se reduce a $x^2+y^2=r^2$.

Desarrollando los cuadrados que figuran en la ecuación [1] se tiene:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

que es una ecuación de la forma

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \qquad [2]$$

en donde $A=-a$, $B=-b$, $C=a^2+b^2-r^2$. De estas relaciones se deduce

$$r^2=a^2+b^2-C=A^2+B^2-C$$

Por tanto, una ecuación del tipo [2] representará una circunferencia siempre que $A^2+B^2-C>0$. Si $A^2+B^2-C=0$, resulta $r=0$ y la circunferencia se reduce a un punto. En el caso $A^2+B^2-C<0$ no hay ningún par de valores reales que satisfaga la ecuación [2], y esto se expresa diciendo que dicha ecuación representa una circunferencia imaginaria.

*Ejemplo.*

En el caso de la ecuación

$$x^2+y^2+4x-2y-4=0$$

se tiene $A=2$, $B=-1$, $C=-4$, y resulta $A^2+B^2-C=9>0$. Por tanto, esta ecuación representa una circunferencia real. Para hallar su centro y su radio basta completar cuadrados con objeto de poner la ecuación en la forma [1]. Así se obtiene:

$$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=4+1+4=9$$

o

$$(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$$

Por consiguiente, la ecuación tiene su centro en el punto $(-2, 1)$ y su radio es 3.

EJERCICIO 86

I. En cada caso hallar la ecuación de la circunferencia con los datos que se indican:

1º) Centro en $(3, 4)$ y radio 3.
2º) Centro en $(-1, 5)$ y radio 2.
3º) Centro en $(-3, -2)$ y radio 4.
4º) Centro en $(1, -1)$ y radio 7
5º) Centro en $(0, 4)$ y radio 6.
6º) Centro en el 2º cuadrante, radio 2 y tangente a los ejes coordenados.
7º) Centro en $(-2, 2)$ y que pase por $(2, 2)$.
8º) Tal que los extremos de un diámetro sean los puntos $(3, 4)$ y $(-2, 6)$.
9º) Tal que los extremos de un diámetro sean los puntos $(-3, -4)$ y $(2, 2)$.
10º) Tal que pase por los tres puntos $(4, 5)$, $(-2, 5)$ y $(4, -3)$.



II. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias tangentes a los ejes y cuyos siguientes y representarlas gráficamente:

1º) $x^2+y^2+4x-6y+12=0$
2º) $x^2+y^2-8x+6y=0$
3º) $x^2+y^2+9y-2=0$
4º) $2x^2+2y^2+3x-5y-1=0$
5º) $x^2+y^2-x-y=0$
6º) $4x^2+4y^2+16x+15=0$
7º) $9x^2+9y^2+6x-12y+4=0$
8º) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
9º) $x^2+y^2+8x=0$
10º) $4x^2+4y^2-4x+12y+7=0$

III. Hallar la ecuación de la familia de cicunferencias tangentes a los ejes y cuyos centros están sobre la recta $y=x$.

## 104 Secciones cónicas

Se llama *sección cónica* (o simplemente *cónica*) a toda sección plana de una superficie cónica circular. Según la inclinación del plano secante resultan curvas distintas que reciben nombres diferentes. A pesar de su apariencia diversa estas curvas poseen propiedades análogas.

Si el plano secante corta un solo manto de la superficie cónica circular e intersecta a todas las generatrices,* la curva resultante se llama *elipse* (E en la figura siguiente).

Si el plano secante es paralelo a una generatriz, la sección cónica se denomina *parábola* (P en la figura).

Esta curva es abierta y posee una sola rama, pues el plano secante no puede intersectar el segundo manto de la superficie cónica circular.

Finalmente, cuando el plano secante intersecta ambos mantos de la superficie cónica circular (y no pasa por el vértice) la curva resultante se llama *hipérbola*, la cual se compone de dos ramas abiertas (HH' en la figura).

*Ejemplos ilustrativos.*

El chorro de agua de una manguera de jardín describe una parábola.

Las pequeñas curvas que el saca-puntas forma en las caras de un lápiz exagonal son hipérbolas.

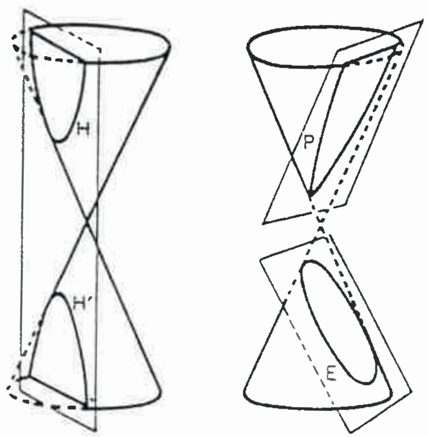
El corte oblicuo del machete en una caña cilíndrica origina una elipse.

Los nombres de elipse, hipérbola y parábola que se da a estas curvas se deben al gran geómetra Apolonio, de la Escuela de Alejandría: Apolonio, hacia el año 225 a. C.

* Se llaman así las rectas que pasan por el vértice O y están contenidas en la superficie. La superficie cónica circular puede considerarse engendrada por el movimiento de una de estas rectas al apoyarse sucesivamente en los puntos de una circunferencia (directriz).

escribió su gran tratado sobre las Secciones Cónicas en ocho libros, siete de los cuales han llegado hasta nosotros.

La obra de Apolonio es muy completa y sistemática, conteniendo cerca de 400 proposiciones sobre las cónicas.

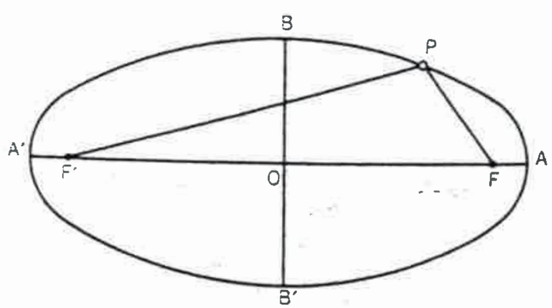



En lo que sigue consideraremos estas curvas como lugares geométricos planos definiéndolas mediante ciertas propiedades que las caracterizan.

## 105 La elipse

**Definición.** *La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano es una constante mayor que la distancia entre los puntos fijos* (véase figura).

Los puntos fijos F y F′ son los *focos* de la elipse. La distancia $FF' = 2c$ se llama *distancia focal*. Los segmentos PF y PF′ que unen un punto cualquiera P de la elipse con los focos reciben el nombre de *radios vectores*. Su suma constante la representaremos por $2a$, esto es: $PF + PF' = 2a$.






De acuerdo con la definición se tiene $2c < 2a$, o sea, $c < a$. La razón $e = \frac{c}{a} < 1$ se llama *excentricidad* de la elipse. La excentricidad puede usarse como una medida de lo que la elipse se separa de la forma circular. Si los focos se confunden, $c = 0$ y la excentricidad es nula. Entonces la elipse se convierte en una circunferencia.

La recta de los focos FF′ encuentra a la curva en los puntos A y A′. La mediatriz del segmento FF′ la encuentra en otros dos puntos B y B′. Estos cuatro puntos A, A′, B, B′ son los *vértices* de la elipse; los segmentos AA′ y BB′ son los *ejes*. AA′ es el *eje mayor* y BB′ el *eje menor*. Su intersección O es el *centro* de la curva.

Por ser A y A′ puntos de la curva se tiene:

$$FA + F'A = FA + F'F + FA = 2\,FA + F'F = 2a \qquad [1]$$

$$\text{y} \quad A'F + A'F' = A'F' + F'F + A'F' = 2\,A'F' + F'F = 2a \qquad [2]$$

luego

$$FA = A'F' \qquad [3]$$

Por otra parte:

$$A'A = A'F' + F'F + FA$$

Sustituyendo A′F′ por su igual FA tenemos:

$$A'A = 2\,FA + F'F$$

pero, según [1], el segundo miembro de la igualdad anterior vale $2a$. Por tanto:

$$A'A = 2a$$

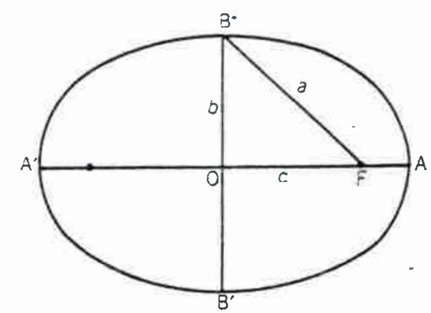
es decir: *la longitud del eje mayor es igual a la suma constante de los radios vectores.*

Puesto que B es también un punto de la elipse se verifica:

$$BF + BF' = 2a$$

pero $BF = BF'$, por ser BB′ la mediatriz de F′F, luego

$$2\,BF = 2a \quad \text{o} \quad BF = a$$



Si se representa por $b$ la distancia OB y se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OBF (véase figura), se tiene:

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad [4]$$

o bien

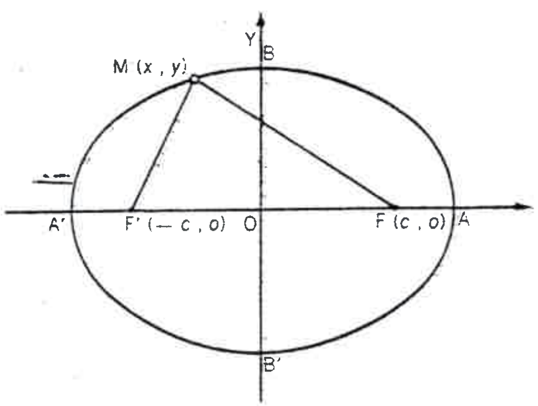
$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad [5]$$

Es evidente que $\text{OB}'^2 = a^2 - c^2 = b^2$, de donde, $\text{OB}' = b$ y $\text{BB}' = 2b$. Como en el triángulo OBF se tiene $a > b$, resulta $2a > 2b$ o $\text{AA}' > \text{BB}'$. Esto justifica la denominación de eje mayor dada a AA'.*

## 106 Ecuación de la elipse referida a sus ejes

Tomaremos como origen de coordenadas el centro de la curva y como ejes de coordenadas los ejes de la curva. Usaremos las notaciones introducidas en el parágrafo 105, de modo que tenemos:

$$\overline{\text{A'A}} = 2a, \quad \overline{\text{B'B}} = 2b, \quad \overline{\text{F'F}} = 2c, \quad b^2 = a^2 - c^2$$




Los focos tienen por coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente. Llamando $M \equiv (x, y)$ a un punto cualquiera de la elipse, tenemos, según la propiedad que le sirve de definición:

$$|\overline{\text{MF}}| + |\overline{\text{MF}'}| = 2a$$

o bien

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

* Para un estudio más extenso de la elipse, así como de las restantes secciones cónicas, consúltese: M. O. González, *Complementos de Geometría*, Minerva Books, 1965.



Racionalizando:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

o

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

Simplificando y trasponiendo términos resulta:

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

pero como $a^2 - c^2 = b^2$, la ecuación puede escribirse:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo por $a^2b^2$ resulta finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la elipse referida a sus ejes.

Una derivación completamente análoga muestra que si los focos de la elipse están dados sobre el eje OY, de modo que $F \equiv (0, c)$, $F' \equiv (0, -c)$, entonces se obtiene para la elipse la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

En este caso el eje mayor de la elipse queda sobre OY y el eje menor sobre OX.

Cuando $a = b$ la ecuación de la elipse se reduce a $x^2 + y^2 = a^2$, que es una circunferencia con centro en el origen y radio $a$.

### EJERCICIO 87

I. Hallar las coordenadas de los focos y de los vértices de cada una de las siguientes elipses y hacer un gráfico aproximado:

1º) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

2º) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

3º) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

4º) $x^2 + 2y^2 = 2$

5º) $3x^2 + 4y^2 = 6$

6º) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7º) $3x^2 + y^2 = 6$

8º) $9x^2 + 16y^2 = 36$

9º) $25x^2 + 4y^2 = 100$

10º) $5x^2 + 3y^2 = 60$

II. Escribir las ecuaciones de las elipses cuyos datos se dan a continuación:

1º) Focos en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$; eje menor igual a 8.

2º) Focos en $(5, 0)$ y $(-5, 0)$; eje mayor igual a 24.

3º) Focos en $(0, 4)$ y $(0, -4)$; eje mayor igual a 10.

4º) Focos en $(0, 2)$ y $(0, -2)$; eje menor igual a 6.

5º) $a = 6$, $e = \dfrac{1}{2}$

6º) $c = 6$, $e = \dfrac{4}{5}$

7º) $b = 2.5$, $c = 6$

8º) $c = 4$, $e = \dfrac{2}{3}$

[En los problemas 5º a 8º tómese el eje mayor sobre OX.]

## 107 La hipérbola

**Definición.** *La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (del mismo plano) es una constante menor que la distancia entre los puntos fijos* (véase figura siguiente).

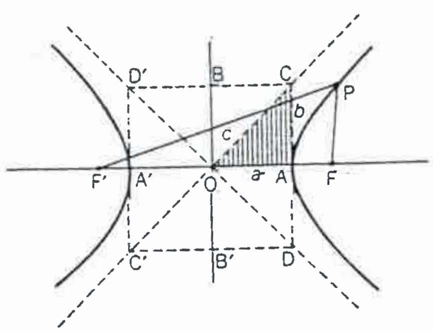
Como en el caso de la elipse, los puntos fijos F y F′ reciben el nombre de *focos*. $FF' = 2c$ se llama distancia *focal*. Los segmentos PF y PF′ que unen un punto cualquiera P de la hipérbola con los focos son los *radios vectores*. Su diferencia constante la representaremos por $2a$, de modo que $PF' - PF = 2a$ para una de las ramas y $PF - PF' = 2a$ para la otra.

Según la definición se tiene: $2a < 2c$ o $a < c$. La razón $e = \dfrac{c}{a} > 1$ se llama *excentricidad* de la hipérbola, la cual es siempre mayor que la unidad.

La recta de los focos FF′ encuentra a la curva en los puntos A y A′. Estos puntos se denominan *vértices* de la hipérbola y el segmento A′A se llama *eje transverso*. Si en la mediatriz de A′A se toman los puntos B y B′ tales que

$$OB = OB' = \sqrt{c^2 - a^2} = b \qquad [1]$$

se obtiene un segmento $B'B = 2b$ que recibe el nombre de *eje no transverso*.




El punto O, intersección de AA′ y BB′, se llama *centro* de la hipérbola.

Por pertenecer los puntos A y A′ a la hipérbola se verifica

$$F'A - AF = (F'F - AF) - AF = F'F - 2AF = 2a \qquad [2]$$

$$\text{y} \quad AF' - F'A' = (F'F - F'A') - F'A' = F'F - 2F'A' = 2a \qquad [3]$$

Comparando [2] y [3] resulta:

$$AF = F'A' \qquad [4]$$

y como

$$A'A = F'F - AF - F'A'$$



teniendo en cuenta [4] se puede escribir:

$$A'A = F'F - 2AF$$

luego,

$$A'A = 2a$$

en virtud de [2]. Por tanto: *la longitud del eje transverso es igual a la diferencia constante de los radios vectores.*

Si se construye el rectángulo cuyas dimensiones son $A'A = 2a$ y $B'B = 2b$ y se trazan sus diagonales C′C y D′D, se ve en seguida que

$$C'C = D'D = 2c$$

pues, según la relación [1] se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad [5]$$

y en el triángulo rectángulo OAC:

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 = a^2 + b^2$$

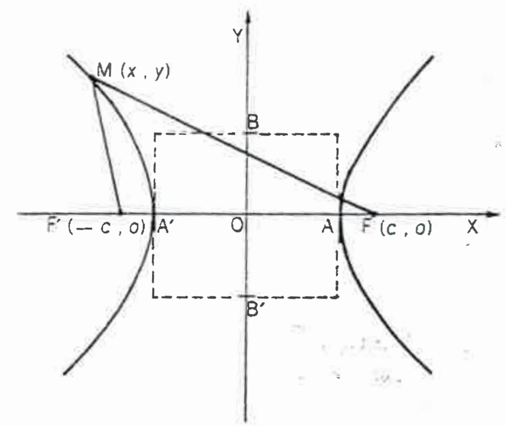
luego, $OC = c$.

Si las diagonales C′C y D′D se prolongan se obtienen rectas a las cuales la hipérbola se aproxima indefinidamente. Estas rectas se denominan *asíntotas* de la curva.

Cuando $a = b$ las asíntotas son bisectrices de los ángulos que forman los ejes y la hipérbola se llama *equilátera*.

## 108 Ecuación de la hipérbola

Para deducir la ecuación de la hipérbola procederemos como en el caso de la elipse, tomando por ejes de coordenadas los ejes de la curva. El eje transverso lo tomaremos por eje de abscisas y el no transverso por eje de ordenadas: el origen coincidirá entonces con



el centro de la curva. Recordaremos que, según las notaciones introducidas en el parágrafo 107, se tiene:

$$\overline{A'A} = 2a, \quad \overline{B'B} = 2b, \quad \overline{F'F} = 2c, \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Los focos son los puntos $F \equiv (c, 0)$ y $F' \equiv (-c, 0)$. Si $M \equiv (x, y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola resulta, en virtud de la definición de esta curva que:

$$|\overline{MF}| - |\overline{MF'}| = \pm 2a$$

En el segundo miembro de esta igualdad se utilizará el signo + o el — según que el punto M esté en la rama de la izquierda o en la de la derecha.

Expresando analíticamente las distancias $|\overline{MF}|$ y $|\overline{MF'}|$, tenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

o bien

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 4a^2$$

o

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = cx + a^2$$

Elevando al cuadrado de nuevo resulta:

$$a^2x^2 + 2c^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

o

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$$

pero como en la hipérbola se verifica $c^2 - a^2 = b^2$, sustituyendo obtenemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

y de aquí se deduce, dividiendo por $a^2b^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes.

Cuando los focos de la hipérbola están dados sobre el eje OY, de modo que $F \equiv (0, c)$, $F' \equiv (0, -c)$, se obtiene entonces para la hipérbola la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En este caso el eje transverso de la hipérbola queda sobre OY y el eje no transverso sobre OX.

EJERCICIO 88

I. Hallar las coordenadas de los focos y de los vértices de cada una de las siguientes hipérbolas, trazar las asíntotas y hacer un gráfico aproximado:

| | |
|---|---|
| 1º) $x^2 - y^2 = 1$ | 6º) $16x^2 - 9y^2 = 144$ |
| 2º) $x^2 - y^2 = 9$ | 7º) $9x^2 - y^2 = 81$ |
| 3º) $4x^2 - 9y^2 = 36$ | 8º) $5x^2 - y^2 = 5$ |
| 4º) $x^2 - y^2 + 4 = 0$ | 9º) $4x^2 - 3y^2 = 12$ |
| 5º) $16x^2 - y^2 = 16$ | 10º) $x^2 - 2y^2 + 2 = 0$ |

II. Escribir las ecuaciones de las hipérbolas cuyos datos se dan a continuación:

1º) Focos en (3, 0) y (— 3, 0); vértice en (1, 0).

2º) Focos en (4, 0) y (— 4, 0); vértice en (2, 0).

3º) Focos en (0, 2) y (0, — 2); vértice en (0, 1).



4º) Focos en (0, 5) y (0, — 5); eje no transverso igual a 4.

5º) Focos en (1, 0) y (— 1, 0); una asíntota tiene por ecuación $y = \frac{2x}{3}$

6º) $a = 6$, $b = 3{,}2$; eje transverso sobre OX.

7º) $a = 6$, $c = 6{,}5$; eje transverso sobre OX.

8º) $a = 4{,}4$, $e = \frac{5}{4}$; eje transverso sobre OX.

9º) $c = 7$, $e = \frac{7}{6}$, eje transverso sobre OY.

10º) $c = 5$, $e = \frac{5}{3}$; eje transverso sobre OY.

## 109 La parábola

**Definición.** *La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto y de una recta fijos situados en el mismo plano.*

El punto fijo F recibe el nombre de *foco* de la parábola y la recta fija D se llama *directriz*. La perpendicular trazada por el foco a la directriz es el *eje* de la parábola. El punto en donde el eje intersecta la curva es el *vértice*. La distancia del foco a la directriz recibe el nombre de *parámetro* de la curva y se representa por $2p$, esto es: $AF = 2p$.

Según la definición, para cualquier punto P de la parábola se tiene:

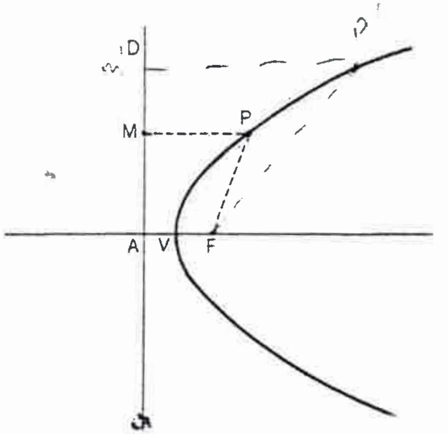
$$PF = PM$$

En particular, para el vértice V resulta:

$$VF = VA$$

es decir, V es el punto medio del segmento AF. Por consiguiente:

$$\overline{VF} = \overline{AV} = p$$




El segmento $\overline{PF}$ que une un punto de la parábola con el foco se denomina *radio vector* correspondiente a dicho punto.

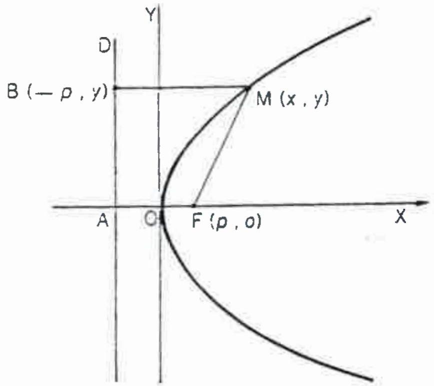
## 110 Ecuación de la parábola

En este caso conviene, para llegar a la ecuación de la forma más sencilla posible, tomar como eje de abscisas el eje de la parábola y como eje de ordenadas la perpendicular a aquél trazada por el vértice de la curva (véase figura).

Sea AD la directriz, F el foco, $M \equiv (x, y)$ un punto arbitrario sobre la parábola y MB la perpendicular a la directriz bajada desde M (la cual resulta paralela a FA). Según la notación introducida en el parágrafo 109 se tiene:

$$\overline{AO} = \overline{OF} = p$$

siendo $p$ el semiparámetro. Las coordenadas de los puntos F y B son entonces $(p, 0)$ y $(-p, y)$, respectivamente.




La propiedad geométrica característica de la parábola es la de tener sus puntos equidistantes del foco y de la directriz, o sea:

$$|\overline{MF}| = |\overline{MB}|$$

Expresando estas distancias en función de las coordenadas, se obtiene

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2} = |x+p|$$

de donde

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Simplificando y trasponiendo, resulta:

$$y^2 = 4px$$

que es la ecuación de la parábola referida a su eje y a la tangente en el vértice.

En la figura anterior se ha supuesto que el parámetro $p$ de la parábola es positivo, pero puede suponerse también que $p$ es negativo, en cuyo caso el foco $F \equiv (p, 0)$ quedaría a la izquierda del origen, en tanto que la directriz $x = -p$ estaría situada a la derecha y la parábola se abriría en la región que contiene la parte negativa del eje de abscisas.

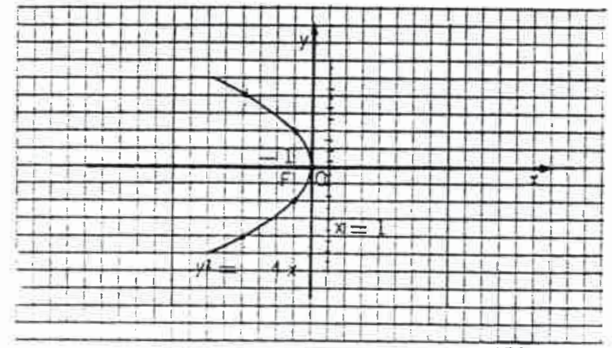
Por ejemplo, si la ecuación de la parábola es $y^2 = -4x$, entonces $p = -1$, y la curva tiene la posición que muestra la figura siguiente.



Si el foco se da sobre el eje OY, es decir, si $F = (0, p)$, entonces la ecuación de la directriz es $y = -p$ (pudiendo $p$ ser positivo o negativo), y resulta, análogamente, que la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py$$

En este caso la parábola se abre hacia arriba si $p$ es positivo, hacia abajo si $p$ es negativo.




EJERCICIO 89

I. Hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de cada una de las siguientes parábolas:

| | |
|---|---|
| 1º) $y^2 = 8x$ | 6º) $y^2 = -6x$ |
| 2º) $y^2 = 2x$ | 7º) $x^2 = 4y$ |
| 3º) $y^2 = -3x$ | 8º) $x^2 = -6y$ |
| 4º) $x^2 = y$ | 9º) $4x^2 = 9y$ |
| 5º) $2y^2 = 3x$ | 10º) $y^2 + 16x = 0$ |

II. Hallar las ecuaciones de las parábolas cuyos datos se indican a continuación y construir sus gráficos:

1º) Foco en $(4, 0)$ y directriz $x = -4$.

2º) Foco en $(-3, 0)$ y directriz $x = 3$.

3º) Foco en $(1, 0)$ y directriz $x = -1$.

4º) Foco en $(-2, 0)$ y directriz $x = 2$.

5º) Foco en $(0, 3)$ y directriz $y = -3$.

6º) Foco en $(0, 1)$ y directriz $y = -1$.

7º) Foco en $(0, -2)$ y directriz $y = 2$.

8º) Foco en $(0, -4)$ y directriz $y = 4$.

III. Determinar los valores de la pendiente $m$ de modo que la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = mx + 1$, a) se intersecten en dos puntos, b) sean tangentes, c) no se intersecten.

IV. Hallar $m$ de modo que la recta $y = mx + 2$ sea tangente a la parábola $y^2 = x$.

## EJERCICIO 90 (Repaso)

I. Resolver los siguientes problemas:

1º) Dibujar el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos $(1, 3)$, $(-2, 2)$, $(0, 5)$ y $(3, 6)$, y demostrar que es un paralelogramo.

2º) Demostrar que el triángulo cuyos vértices son los puntos $(a, 0)$, $(a + c, d)$ y $(a - d, c)$ es rectángulo.

3º) Dado un triángulo cualquiera por las coordenadas de sus vértices, demostrar analíticamente que los lados del triángulo obtenido uniendo los puntos medios de los lados de dicho triángulo tienen longitudes iguales a las mitades de las longitudes de los lados del triángulo dado.

4º) Demostrar analíticamente que un paralelogramo es un rectángulo si, y sólo si, sus diagonales son iguales.

5º) Demostrar que la suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo es igual a tres cuartas partes de la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.

II. Hallar las ecuaciones de las rectas determinadas del siguiente modo:

1º) Pasa por el punto $(2, -3)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

2º) Intersecta al eje OY en el punto $(0, 4)$ y tiene pendiente $-2$.

3º) Pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4º) Intersecta al eje OX en $(-5, 0)$ y al eje OY en $(0, -1)$.

5º) Pasa por el punto $(2, 4)$ y tiene parámetros directores $3$ y $-1$.

6º) Pasa por el extremo del vector $-3\vec{i} + 2\vec{j}$ y un vector director de la recta es $4\vec{i} - 5\vec{j}$.

7º) Pasa por el punto $(3, 2)$ y es paralela a la recta $2x - y = 7$.

8º) Pasa por el punto $(4, -1)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y = 1$.

9º) Pasa por el punto $(3, 5)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.

10º) Pasa por el punto $(2, 0)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $(-1, -1)$ y $(4, 3)$.

III. Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos $A \equiv (-1, 6)$, $B \equiv (7, 3)$ y $C \equiv (4, -2)$, hallar:

1º) Las coordenadas del punto de intersección de la altura relativa al lado BC con la mediana relativa al lado AC.

2º) La longitud de la altura relativa al lado BC.

3º) El área del triángulo.

IV. Construir el gráfico que corresponde a cada una de las ecuaciones siguientes:

1º) $x^2 + y^2 = 16$ 3º) $4x^2 + 25y^2 = 100$

2º) $x^2 - y^2 = 16$ 4º) $x^2 = -6y$

V. Hallar las coordenadas del centro y el radio de cada una de las circunferencias siguientes:

1º) $x^2 + y^2 + 6x = 0$ 3º) $x^2 + y^2 + 6(x + y) + 14 = 0$

2º) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 4º) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$



VI. Escribir las ecuaciones de las elipses cuyos datos se especifican a continuación:

1º) Focos en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$; eje menor igual a 6.

2º) Focos en $(0, 3)$ y $(0, -3)$; eje mayor igual a 10.

3º) $a = 17$, $b = 15$, eje mayor sobre OX.

4º) $a = 8$, $e = \frac{2}{3}$, eje mayor sobre OY.

VII. Escribir las ecuaciones de las hipérbolas cuyos datos se especifican:

1º) Focos en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$; vértice en $(1, 0)$.

2º) Focos en $(0, 4)$ y $(0, -4)$; vértice en $(0, 2)$.

3º) $a = 8$, $b = 6$, eje transverso sobre OX.

4º) $c = 4$, $e = \frac{3}{2}$, eje transverso sobre OY.

VIII. Escribir las ecuaciones de las parábolas cuyos datos se especifican:

1º) Foco en $(2, 0)$ y directriz $x = -2$.

2º) Foco en $(-4, 0)$ y directriz $x = 4$.

3º) Foco en $(0, 5)$ y directriz $y = -5$.

4º) Foco en $(0, -1)$ y directriz $y = 1$.

IX. Resolver los problemas siguientes:

1º) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de $(-1, 3)$ y $(4, -2)$.

2º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos que equidistan de $(2, 5)$ y $(5, -3)$.

3º) Un punto se mueve permaneciendo constantemente a 4 unidades de distancia del punto $(3, -1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.

4º) Un punto que se mueve manteniéndose a distancia constante del punto $(6, 8)$, pasa en su recorrido por el origen de coordenadas. Hallar la ecuación de su trayectoria.

5º) Deducir la ecuación general de una circunferencia tangente a ambos ejes de coordenadas.

6º) Un punto se mueve de tal modo que su distancia al punto $(3, 0)$ es siempre igual a la distancia del mismo punto al eje OY. Encontrar la ecuación de su trayectoria.

7º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos equidistantes de $(0, 5)$ y el eje OX.

8º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos equidistantes del punto $(0, -6)$ y de la recta $y = -2$.

9º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(3, 0)$ y $(5, 0)$ sea 4.

10º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(1, 2)$ y $(5, -3)$ sea 3.

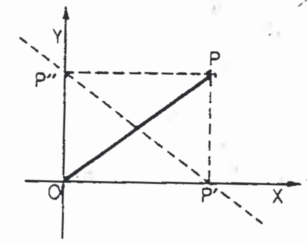
11º) Un punto se mueve de modo que la razón de su distancia al punto $(3, 4)$ y su distancia al punto $(6, 2)$ es 3. Determinar la ecuación de su trayectoria.

12º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ sea 10.

13º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a los puntos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ sea 8.

14º) Una circunferencia de radio 3 rueda sobre otra circunferencia fija de radio 5. Encontrar la ecuación del lugar geométrico descrito por el centro de la circunferencia móvil.

15º) Una circunferencia de radio 2 rueda apoyándose por la parte interior de una circunferencia de radio 6. Hallar la ecuación del lugar descrito por el centro de la primera circunferencia.




16º) Sean P' y P'' las proyecciones del punto P sobre los ejes de coordenadas (véase figura). Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que la suma o diferencia de las proyecciones de OP sea constante.

17º) En la misma figura anterior hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que la razón de las proyecciones de OP sea constante.

18º) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que la recta P'P'' se mantenga paralela a una dirección fija.

19º) Hallar la ecuación del lugar de los puntos P tales que el segmento P'P'' tenga una longitud constante.

20º) Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y de una circunferencia dadas.

Serie POLIMODAL A-Z

MATEMÁTICA

► Una mirada numérica
*Aritmética, probabilidad y estadística*

► Una mirada funcional
*Álgebra y geometría*

► Una mirada analítica
*Análisis* (en preparación)

► Una mirada matemática
*Modelización* (en preparación)

aZ editora

Matemática, una mirada funcional

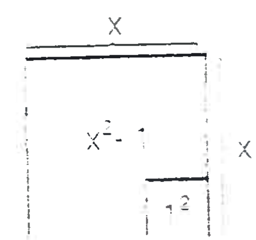
Serie POLIMODAL A-Z

# Matemática
## una mirada funcional

*Álgebra y geometría*


Liliana M. Gysin
Graciela I. Fernández

Asesoramiento didáctico:
Graciela Chemello


aZ editora

# LUGAR GEOMÉTRICO

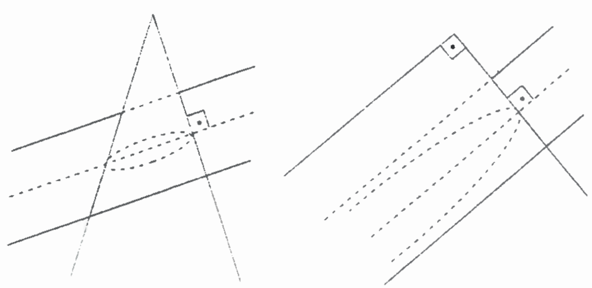
## UN POCO DE HISTORIA

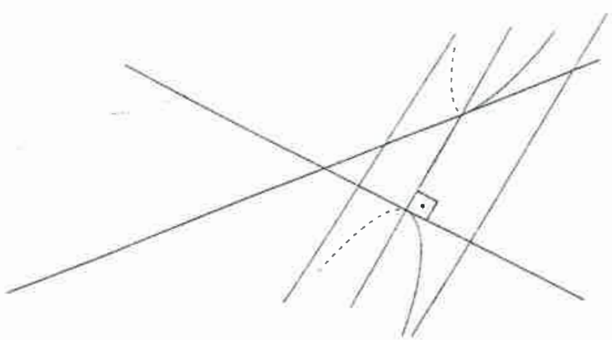
*En general, hablamos de lugares geométricos cuando la propiedad que caracteriza al conjunto de puntos que estudiamos es una propiedad geométrica o mecánica (la curva determinada por la trayectoria de un punto que se mueve en determinadas condiciones, por ejemplo). Los lugares geométricos conocidos como cónicas son la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola. Según los diferentes momentos de la historia, estas curvas fueron "pensadas" de diferentes maneras.*

*Hoy, por ejemplo, hablamos de la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo, llamado centro de la circunferencia.*

*Menecmo (400 a. C.) obtuvo la parábola, la hipérbola y la elipse cortando conos de diferentes ángulos, con planos perpendiculares a su generatriz. Él llamaba* **oxitoma** *(sección del cono agudo) a la elipse,* **ortotoma** *(sección del cono recto) a la parábola, y* **amblitoma** *(sección del cono obtuso) a la hipérbola.*

### Sección de distintos conos

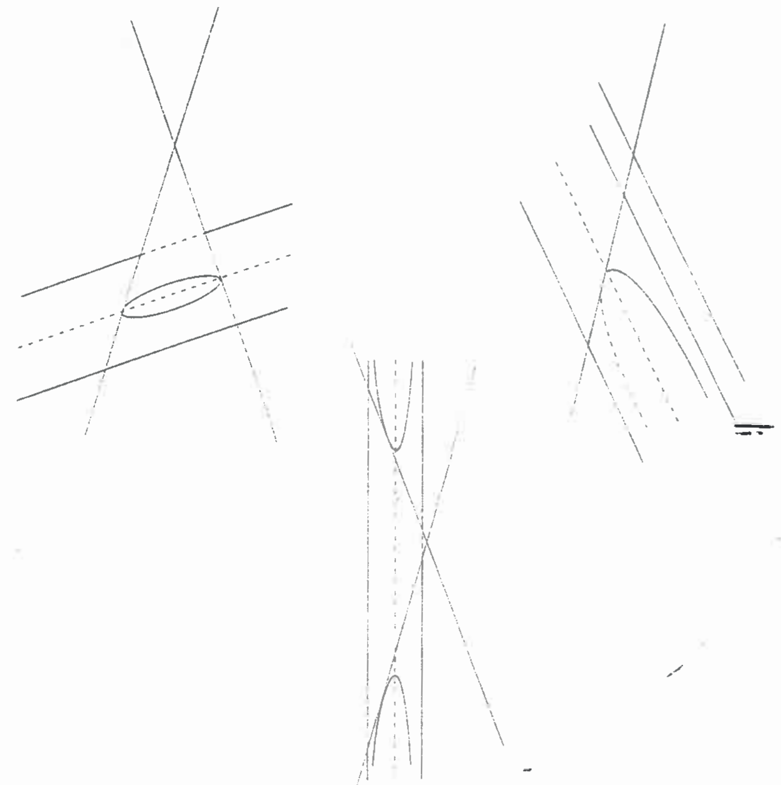






*Apolonio (262 a. C.) obtuvo las cónicas a partir de las intersecciones de un cono circular cualquiera, al que cortaba con planos de diferente inclinación.*

### Secciones de un cono agudo



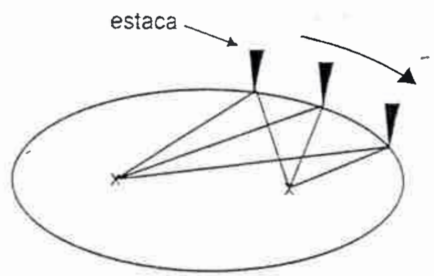
*Johannes Kepler (1571-1630) encontró nuevas relaciones entre las distintas cónicas, según que alejara o acercara los focos entre sí. Estudió especialmente la elipse, en relación al movimiento de los planetas. Descubrió que Marte gira en una órbita elíptica alrededor del Sol, con éste en uno de sus focos.*

*En el siglo XVII, con René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), apareció una nueva manera de representar los lugares geométricos: la manera algebraica. Fermat, reconstruyendo los lugares geométricos de Apolonio, llegó a enunciar que una ecuación con dos incógnitas siempre es un lugar geométrico. Pensaba en la ecuación como la expresión algebraica de las propiedades que caracterizan el lugar geométrico (hoy llamamos curva al lugar geométrico determinado por una ecuación con dos incógnitas).*

# OCUPANDO LUGARES

## *Curvas como lugar geométrico*

El llamado **método del jardinero** para marcar el contorno de un cantero consiste en tomar un hilo y clavar las puntas en el suelo, de manera que el hilo no quede estirado. Luego, se estira el hilo con una estaca o palo y se desliza la estaca, marcando con ella todas las posiciones que puede tomar de modo que el hilo quede siempre tenso, como muestra la figura.




1. ¿Qué figura le quedó marcada al jardinero luego de pasar ~~por~~ todos los puntos posibles?

2. Supongamos que tomamos un hilo de 50 cm de longitud y fijamos los extremos al piso, uno a 30 cm del otro. Llamemos $F_1$ y $F_2$ a estos dos puntos. ¿Pertenece alguno de ellos a la curva? ¿Por qué?

3. Hay dos puntos de la curva en que parte del hilo se superpone, ¿cuáles son sus posiciones con respecto a $F_1$ y a $F_2$? ¿A qué distancia están uno de otro? Llámenlos $A_1$ y $A_2$.

4. ¿Cuánto vale la suma de las distancias de $A_1$ a $F_1$ y de $A_1$ a $F_2$? ¿Y la suma de las distancias de $A_2$ a $F_1$ y de $A_2$ a $F_2$?

5. Elijan un punto cualquiera de la curva, ¿cuánto vale la suma de sus distancias a $F_1$ y a $F_2$? Definan la elipse como el lugar geométrico de los puntos tales que... . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (completen).



Una elipse se parece a una circunferencia "achatada". Si tomamos una elipse, siempre podemos trazar un rectángulo dentro del cual queda inscripta. Basta tomar el rectángulo que tiene como base la distancia entre $A_1$ y $A_2$, que decimos que mide 2a, y como altura la distancia entre $B_1$ y $B_2$, que son los puntos de la elipse que están sobre la mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ (el punto máximo y mínimo de la elipse), que decimos que mide 2b. Los segmentos $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{B_1B_2}$ se llama *ejes* de la elipse, y miden respectivamente 2a y 2b. Tratemos de determinar estas medidas para la elipse del jardinero.

6. ¿Cuánto vale a para la elipse del jardinero?

7. Llamen $B_1$ al punto máximo de la elipse y (0, b) a sus coordenadas. Estamos considerando un sistema de origen O en la intersección de los ejes de la elipse; eje x en la dirección de $\overline{A_1A_2}$; eje y en la dirección de $\overline{B_1B_2}$. ¿Cómo es el triángulo $B_1\hat{O}F_1$? ¿Cuánto mide $\overline{OF_1}$? ¿Cuánto mide $\overline{F_1B_1}$? (Recuerden que la suma de las distancias de $B_1$ a $F_1$ y de $B_1$ a $F_2$ debe ser 2a, y observen que además coinciden.) Calculen b.

8. Tracen en un gráfico el rectángulo y la elipse a escala.

9. Para el mismo valor de a, tomen un valor de b mayor que el que tenían antes (pero siempre menor que a). Calculen las coordenadas de los puntos análogos a $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $F_1$ y $F_2$ para la nueva elipse y grafíquenla.

10. Hagan lo mismo para un nuevo valor de b = a. ¿En qué se transformó el rectángulo? ¿Qué pasó con los focos? ¿Qué pasó con la elipse?

Ahora procedamos al revés, para buscar la ecuación de la elipse. Sabemos que la ecuación de la circunferencia (con centro en el origen) es

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

donde a es el radio de la circunferencia. Parece razonable suponer que la elipse tendrá una ecuación también cuadrática en x e y, con otros coeficientes que queremos hallar. Veamos si esto es posible.

11. Consideren la ecuación

$$E\,x^2 + F\,y^2 = a^2,$$

y reemplacen los valores de la coordenada de $A_2$ (es decir, $(a, 0)$).

12. Obtengan el valor de E.

13. Reemplacen en la ecuación el valor de las coordenadas de $B_1$. Calculen el valor de F. Reemplacen los valores de E y F que obtuvieron, dividan la ecuación por $a^2$, y verifiquen que hayan obtenido la *ecuación general* de la elipse con centro en el origen y ejes 2a y 2b, es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

14. ¿Qué tienen de diferente dos elipses, una que tiene $a > b$ y otra que tiene $b > a$? Justifiquen.

15. Analicen, para las siguientes circunferencias de radio 1, cuál es su centro. Grafíquenlas (salvo la del inciso f)).

a) $x^2 + y^2 = 1$
b) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$
c) $x^2 + (y - 3)^2 = 1$
d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$
e) $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$
f) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$

16. Busquen los centros de las siguientes elipses, de ejes 2 y 1, y grafíquenlas (salvo la del inciso f)).

a) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

b) $\dfrac{(x - 2)^2}{4} + y^2 = 1$

c) $\dfrac{x^2}{4} + (y - 3)^2 = 1$

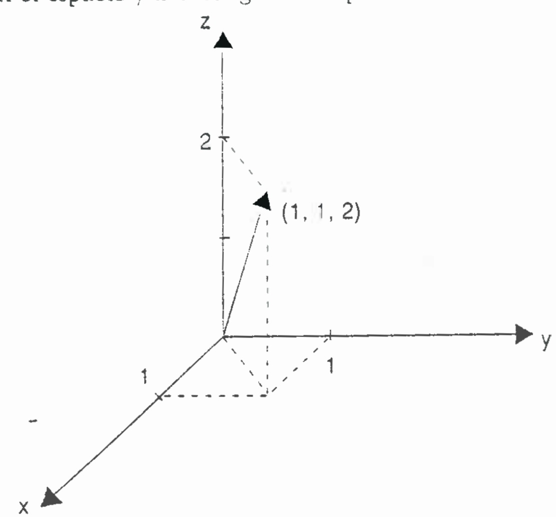
d) $\dfrac{(x - 2)^2}{4} + (y - 3)^2 = 1$

e) $\dfrac{(x + 5)^2}{4} + (y + 2)^2 = 1$

f) $\dfrac{(x - x_0)^2}{4} + (y - y_0)^2 = 1$



Dijimos que fue Apolonio quien descubrió que cualquiera de estas curvas se puede hallar como intersección de un cono con un plano; por eso se llaman cónicas. Para analizar esto, en el caso de las elipses, veamos primero cómo obtener un cono. Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas en el espacio y la recta generada por el vector (1, 1, 2).




17. Si hacemos girar el vector alrededor del eje z, (es decir, consideramos todos los vectores que forman con el eje z el mismo ángulo), ¿en qué plano se encuentra siempre el extremo del vector? ¿Qué figura describe? ¿Por qué?

18. Tomen otro vector, distinto del (1, 1, 2), que esté contenido en la recta generada por él, y determinen, como antes, en qué plano está contenido el extremo del vector y qué figura es la que describe al girar alrededor del eje z.

Si hacemos girar toda la recta alrededor del eje $z$, el lugar geométrico de los puntos que están en cualquiera de las rectas, en cualquiera de sus posiciones, se llama *superficie cónica*. Un *cono* es la unión de la superficie cónica con el interior de la misma (la superficie cónica es el borde del cono. En las figuras, los bordes son curvas; en los cuerpos, los bordes son superficies). Es como pensar en un cucurucho de helado: el cucurucho sería parte de la superficie cónica; el cucurucho más el helado que contiene serían una parte del cono. En general, se utiliza la palabra cono para referirse también a la superficie cónica. Haremos esto siempre que no provoque confusión.

Para figuras en general, nombramos sus bordes (un rectángulo, un polígono, etc.) y nos referimos a su perímetro cuando queremos calcular la longitud de esta curva, o a su área cuando queremos calcular la medida de la figura plana encerrada por esta curva. En el caso de la circunferencia, usamos nombres distintos para la curva (circunferencia) y para la figura (círculo). En los demás casos, se usa el mismo nombre para la curva y para la figura. Así, por ejemplo, cuando estamos hablando de la elipse como lugar geométrico, o de la ecuación de una elipse, estamos haciendo referencia a la curva. Cuando calculamos el área nos referimos a la figura encerrada por la elipse, aunque también la llamamos elipse.

La recta que hicimos girar, en cualquiera de sus posiciones, se llama una *generatriz* del cono. Para este cono en particular, su eje coincide con el eje $z$. En general, el *eje* es la recta alrededor de la que hacemos girar la generatriz para obtener el cono. El punto de intersección de las generatrices se llama *vértice* del cono.

19. Si hacemos la intersección de la superficie cónica con un plano perpendicular a su eje, salvo el que pasa por el vértice (que nos daría un punto), ¿qué curva obtenemos? ¿Por qué? 6

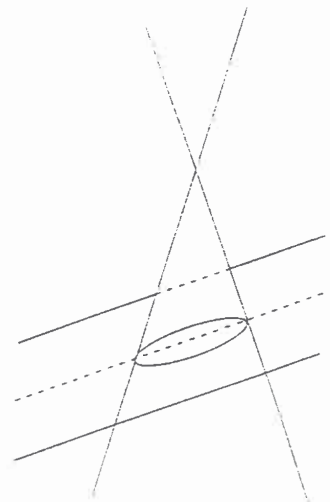
Para analizar qué figuras se obtienen si hacemos la intersección con un plano que no es perpendicular al eje, hagamos un corte longitudinal del cono con un plano que contenga al eje del cono. La intersección de este plano con la superficie cónica son dos generatrices.

Según que el ángulo que forman entre sí las dos generatrices sea agudo, recto u obtuso, el cono se llama agudo, recto u obtuso. En general, hacemos los gráficos con conos agudos, aunque los resultados valen para cualquiera de ellos.

Si consideramos una lámpara o linterna con una pantalla circular, la zona iluminada por ella es un cono, cuyo vértice está en el filamento de la lámpara. Si apuntamos la luz de la lámpara o linterna perpendicularmente sobre una pared, la zona que aparece iluminada sobre la pared es un círculo. Esto es así porque la intersección de un cono con un plano perpendicular a su eje es un círculo. Si modificamos la inclinación de la fuente de luz, obtendremos otras figuras, que son las que resultan de cortar un cono con un plano en diferentes posiciones relativas.

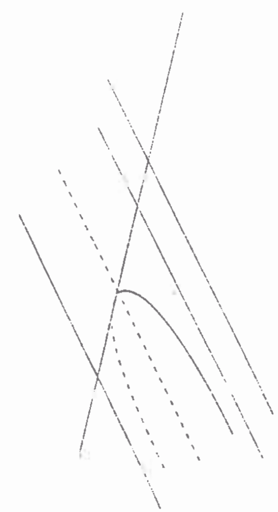


Comencemos con un plano perpendicular al eje del cono, que no pase por el vértice, que ya sabemos que al cortar la superficie cónica nos da una circunferencia. Si comenzamos a inclinar el plano, mientras no llegue a hacerse paralelo a alguna generatriz, corta a la superficie cónica en una curva cerrada, que es una elipse.



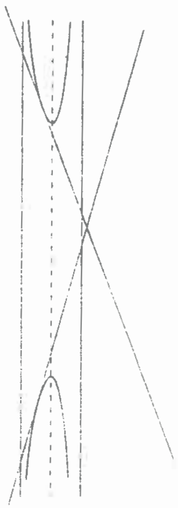
La elipse como intersección de un cono y un plano.

Si el plano es paralelo a una generatriz, sigue cortando en una sola curva, pero la curva es abierta. El plano nunca llega a cortar a la generatriz que es paralela a él. La curva que se obtiene es una **parábola**.



La parábola como intersección de un cono y un plano.

Si seguimos inclinando el plano, cortará a la superficie cónica en dos curvas (una de cada lado del vértice del cono) y a una sola generatriz de cada lado del vértice. Las curvas que se obtienen son las dos ramas de una **hipérbola**.



La hipérbola como intersección de un cono y un plano.

Si seguimos inclinando el plano, cuando se haga paralelo a la otra generatriz nuevamente cortará en una parábola, y luego volverá a determinar elipses, hasta volver a ser perpendicular al eje y cortar en una circunferencia.

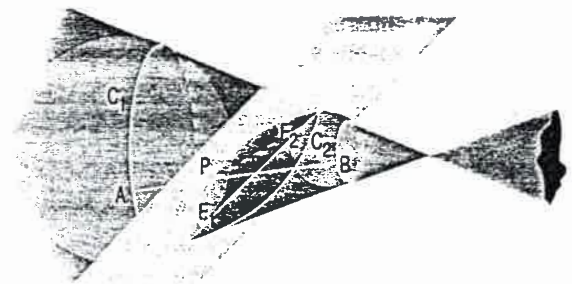
Queremos ver que, realmente, al cortar una superficie cónica con un plano que la corta de un solo lado del vértice del cono y no es paralelo a la generatriz, la intersección es una elipse. Definimos anteriormente la elipse como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Veamos cómo relacionar esto.

20. Dibujen una esfera cualquiera y un punto Q exterior. Tracen desde Q dos tangentes a la esfera y llamen R y S a los puntos de tangencia. ¿Son iguales las distancias de Q a R y de Q a S? Justifiquen.

Consideremos ahora las esferas $C_1$ y $C_2$ que son tangentes al cono y al plano.








Llamemos $F_1$ al punto de tangencia del plano con $C_1$, y $F_2$ al punto de tangencia del plano con $C_2$. Tomemos un punto P sobre la intersección de la superficie cónica con el plano (que queremos ver que es una elipse) y analicemos.

Como P es un punto de la superficie cónica, P pertenece a una generatriz, que llamamos g. Como $C_1$ es tangente al cono, g es tangente a $C_1$. Llamen A al punto en que g es tangente a $C_1$. Para $C_2$ vale un razonamiento análogo. Llamen B al punto en que g es tangente a $C_2$.

21. ¿Son iguales la distancia de P a $F_1$ y la distancia de P a A? ¿Por qué?

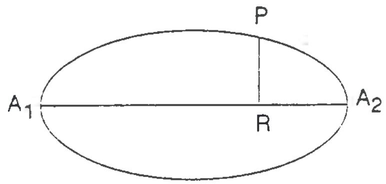
22. ¿Cómo son la distancia de P a $F_2$ y la distancia de P a B? ¿Por qué?

23. La suma de las distancias de P a $F_1$ y de P a $F_2$ coincide, entonces, con la longitud del segmento $\overline{AB}$ (contenido en g). Esta longitud, ¿depende del punto P? ¿De qué depende?

24. ¿Podemos afirmar que, para todos los puntos de la intersección, la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante? ¿Podemos afirmar que la intersección es una elipse?

Veamos ahora otra propiedad que obtuvo Apolonio a partir de la intersección de un cono con un plano que vale para la elipse. Tomemos un punto cualquiera P de la intersección del plano con la superficie cónica, y llamemos R a la proyección perpendicular del punto sobre la recta que contiene a los focos. $A_1$ y $A_2$ son los puntos de la elipse que están sobre esta recta. Entonces vale que

$$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R} \cdot \overline{RA_2}\right),$$




Propiedad de Apolonio

donde k es una constante positiva. Haremos aquí una demostración para el caso particular de las circunferencias, en que k = 1.

25. Tracen una circunferencia y un diámetro; $A_1$ y $A_2$ son los extremos del diámetro. Elijan un punto P cualquiera de la circunferencia y proyéctenlo perpendicularmente sobre el diámetro. Llamen R a la proyección. El triángulo $A_2\hat{P}A_1$ es un triángulo rectángulo recto en P. ¿Por qué?

26. Demuestren que son semejantes los triángulos $R\hat{P}A_1$ y $P\hat{R}A_2$.

27. Escriban la proporción entre los lados de los triángulos y obtengan la propiedad buscada.

Con esta propiedad, eligiendo adecuadamente los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas, es sencillo obtener la ecuación de la elipse. Para ello consideremos una elipse en el plano.

28. Elijan un sistema de coordenadas que tenga como eje x la recta que pasa por $F_1$ y $F_2$. Como eje y elijan la mediatriz del segmento $\overline{F_1F_2}$. Tomen la escala de modo que las coordenadas de $A_1$ sean (–a, 0). ¿Cuáles son las coordenadas de $A_2$?





29. Para un punto P de coordenadas (x, y), llamen R a su proyección sobre el eje x. ¿Cuáles son las coordenadas de R? ¿Cuánto vale $\overline{PR}^2$?

30. ¿Cuánto valen, respectivamente, $\overline{A_1R}$ y $\overline{RA_2}$, en función de x y de a?

31. Reemplacen estos valores en la ecuación

$$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R} \cdot \overline{RA_2}\right).$$

32. Operen sobre la ecuación obtenida hasta escribirla de la forma

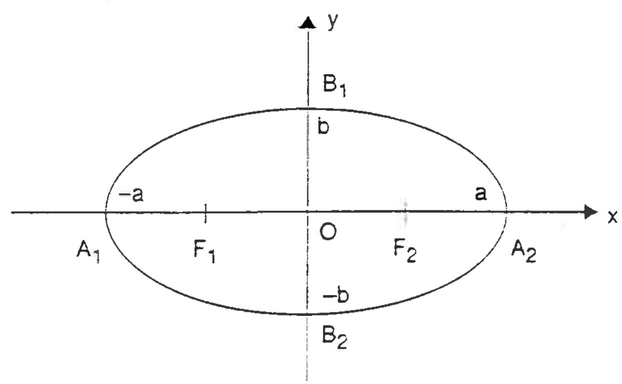
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

¿Cuánto vale $b^2$? ¿Es cierto que si k = 1, obtenemos la ecuación de una circunferencia? ¿Cuál es su radio?

Veamos ahora que si un punto P de coordenadas (x, y) verifica la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

entonces la suma de las distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante. Para ello veamos qué es gráficamente b, y qué relación hay entre a, b y las coordenadas de los focos. En el siguiente gráfico, marcamos las coordenadas de los puntos $A_1$, $A_2$, $B_1$ y $B_2$.



33. Prueben que esos puntos verifican la ecuación de la elipse. (Reemplacen sus coordenadas en la ecuación y verifiquen que obtienen una identidad.)

34. Como los focos son simétricos respecto del origen del sistema de coordenadas, y lo mismo vale para los puntos $A_1$ y $A_2$, la distancia de $A_1$ a $F_2$ coincide con la distancia de $A_2$ a $F_1$. Usando esto, ¿cuánto vale la suma de las distancias de $A_1$ a los focos, en función de a?

35. Usando otra vez la simetría y el valor que acaban de hallar, ¿cuánto vale la distancia de $B_1$ a cada uno de los focos?

36. Usando que el triángulo $B_1\hat{O}F_2$ es rectángulo, si las coordenadas de $F_2$ son (c, 0), ¿cuánto vale c?

37. Calculen la distancia de un punto P de coordenadas (x, y) a $F_1$ y a $F_2$, respectivamente, sabiendo que P verifica la ecuación de la elipse. Sumen las distancias y verifiquen que siempre da 2a.

Finalmente, observemos que, dada una elipse, siempre podemos encontrar un cono tal que su intersección con el plano que contiene a la elipse es la elipse. Para ello, consideren la elipse de eje mayor 2a, con sus focos en (–c, 0) y (c, 0).

38. Grafiquen la elipse. Tracen en el mismo gráfico la recta $x = -a$, y la circunferencia de centro $(-c,\ a-c)$ y radio $a - c$. Tracen la tangente a la circunferencia desde el punto (a, 0). Llamen V al punto de intersección de la tangente trazada con la recta $x = -a$. El cono buscado es el que tiene el vértice en V y como generatrices a las rectas que lo determinan. Justifiquen esto, comparando con la esfera $C_1$ que construimos anteriormente.

La situación que acabamos de resolver es algo así como el perro que se muerde la cola. Con la notación utilizada, probamos que:





1. Si un punto P pertenece a la intersección del plano (η) con el cono, entonces la suma de las distancias de P a los focos es constante $\left(\overline{PF}_1+\overline{PF}_2=\text{cte.}\right)$.

2. Si un punto P pertenece a la intersección del plano (η) con el cono, entonces verifica la relación

$$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R}\cdot\overline{RA_2}\right) \quad \text{(k constante positiva).}$$

3. Si un punto P verifica la relación $\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R}\cdot\overline{RA_2}\right)$, entonces las coordenadas (x, y) de P satisfacen la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (donde $b^2 = k\,a^2$).

4. Si las coordenadas de un punto P satisfacen la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, entonces la suma de las distancias de P a los focos es $\overline{PF}_1+\overline{PF}_2=2a$.

Donde

$$F_1 = (-c, 0)$$
$$F_2 = (c, 0)$$
$$b^2 + c^2 = a^2.$$

5. Si un punto P verifica $\overline{PF}_1+\overline{PF}_2=2a$, entonces existen un cono y un plano η tales que P pertenece a la intersección del plano (η) con el cono.

Si sólo tomamos en cuenta los enunciados 1 y 5, lo que hicimos fue probar la equivalencia

P pertenece a la intersección del plano (η) con el cono $\Leftrightarrow$ $\overline{PF}_1+\overline{PF}_2=\text{cte.}$,

con lo cual podemos usar cualquiera de los dos para definir la elipse.

Si analizamos los enunciados 2, 3, 4, y 5, podemos escribir abreviadamente:

$P \in \text{cono} \cap \eta \Rightarrow \overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R} \cdot \overline{RA_2}\right) \Rightarrow P$ verifica

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow P \in \text{cono} \cap \eta.$

Entonces tenemos 4 enunciados (llamémoslos A, B, C, D) entre los que probamos las siguientes implicaciones: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow A$.

39. Afirmamos que también $C \Rightarrow B$, pues $C \Rightarrow D \Rightarrow A \Rightarrow B$, de donde $B \Leftrightarrow C$, es decir, B y C son equivalentes. ¿Es cierto que A, B, C y D son todos equivalentes entre sí? ¿Por qué?

40. ¿De cuántas maneras diferentes se puede definir una elipse? ¿Cuál de ellas se acerca más a la idea que ustedes tienen de lo que es una elipse?

## ESTE ASIENTO SE VENDIÓ DOS VECES

### *Sistemas mixtos*

En el apartado anterior trabajamos con propiedades geométricas para ver que la intersección de un cono con un plano de determinada inclinación es una elipse. 12

Analicemos un poco más esto, pero ahora con herramientas algebraicas.

Primero necesitamos la ecuación de una superficie cónica.

Pensemos en el cono que tiene su vértice en el origen del sistema de coordenadas y como generatriz la recta generada por el vector $(1, 1, 2\sqrt{2})$. Su eje es el eje $z$ (alrededor de él hacemos girar la recta para obtener el cono). Analicemos qué circunferencias obtenemos al cortar la superficie cónica con planos paralelos al plano $xy$.

> Cuando trabajamos, como en este caso, con curvas y las figuras que determinan, podemos hacerlo desde un punto de vista geométrico, que fue el que usaron los griegos. Por ejemplo, cuando definimos una curva como lugar geométrico, cuando usamos propiedades de semejanza o congruencia de triángulos, o cuando construimos las figuras y analizamos las posiciones relativas de sus elementos y de las medidas de éstos. Pero también podemos hacerlo desde un punto de vista algebraico, trabajando con las ecuaciones y operando con las expresiones algebraicas. Cada uno de estos tratamientos tiene ventajas y desventajas. Cuál es la forma de trabajo más conveniente en cada caso dependerá del problema que estemos estudiando y de nuestras propias habilidades.





1. Para $z = 2$, tenemos el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ que al girar describe una circunferencia que tiene por radio el módulo de la proyección del vector $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ sobre el plano $xy$. ¿Por qué?

2. Calculen el radio de la circunferencia. ¿Qué relación tiene con $z = 2$?

3. Hagan lo mismo para $z = 4$ y para $z = 6$.

4. Analicen si para otros planos de ecuación $z = k$, el radio de la circunferencia siempre es $\frac{k}{2}$.

5. Analicen si la ecuación de la superficie cónica puede ser $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$. (Hallen las intersecciones con planos de la forma $z = k$.)

6. Hallen un corte longitudinal del cono $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$ (es decir, su intersección con el plano $x = 0$), busquen las generatrices y calculen el ángulo que forman. ¿Es un cono agudo? ¿Por qué?

Cuando cortamos este cono con planos perpendiculares a su eje (que es el eje $z$), las circunferencias que obtenemos tienen centro en dicho eje. Si tuviéramos un cono con el eje inclinado o corrido, los centros de las circunferencias también estarían corridos. 13

7. Hallen la intersección del cono $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$ con el plano $z = \frac{y+1}{\sqrt{2}}$, y verifiquen que se obtiene una elipse. ¿Cuál es su centro?

# Hemos aprendido...

Un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos, del plano o del espacio, que verifican una determinada propiedad. La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La *elipse* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante.

Si hacemos girar una recta que pasa por el origen alrededor del eje **z**, el lugar geométrico de los puntos que están en cualquiera de las rectas, en cualquiera de sus posiciones, se llama *superficie cónica*. Un *cono* es la unión de una superficie cónica con el interior de la misma (la superficie cónica es el borde del cono). En general, se utiliza la palabra cono para referirse también a la superficie cónica (haremos esto siempre que no provoque confusión). La recta que hicimos girar, en cualquiera de sus posiciones, se llama una *generatriz* del cono. Para este cono en particular, su eje coincide con el eje **z**. En general, el eje del cono es la recta alrededor de la que hacemos girar la generatriz para obtenerlo, y puede no coincidir con el eje **z**. El punto de intersección de las generatrices se llama *vértice* del cono.

Las *cónicas* llevan ese nombre genérico porque todas ellas pueden obtenerse como intersecciones de un cono (en realidad, de la superficie cónica) con un plano que no pasa por el vértice. Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección es una **circunferencia**. Si inclinamos el plano, mientras no llegue a hacerse paralelo a alguna generatriz, corta la superficie cónica en una curva cerrada, que es una **elipse**. Si el plano es paralelo a una generatriz, sigue cortando en una sola curva, pero la curva es abierta. El plano nunca llega a cortar la generatriz que es paralela a él. La curva que se obtiene es una **parábola**. Si seguimos inclinando el plano, cortará la superficie cónica en dos curvas (una de cada lado del vértice del cono) y una sola generatriz de cada lado del vértice. Las curvas que se obtienen son las **dos ramas de una hipérbola.**

Para el caso particular de la **elipse**, aunque puede hacerse algo análogo para cualquiera de las cónicas, vimos la siguiente secuencia de propiedades: partiendo de la elipse como intersección de un cono con un plano, si tomamos un punto cualquiera P de la elipse, llamamos R a la proyección perpendicular de P sobre la recta que contiene a los focos, y llamamos $A_1$ y $A_2$ a los puntos de la elipse que están sobre esta recta, vale que

$$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R}\cdot\overline{RA_2}\right),$$

donde **k** es una constante positiva.



Polimodal A-Z Matemática. © A-Z Editora. Fotocopiar libros es un delito



De esto se dedujo que las coordenadas del punto P verifican **la ecuación general de la elipse** con centro en el origen y ejes 2a y 2**b**, es decir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Luego mostramos que si las coordenadas de un punto verifican esta ecuación, la **suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.** Finalmente, probamos que, dada una elipse, siempre podemos encontrar un cono tal que su intersección con el plano que contiene a la elipse es la elipse.

De esta secuencia se puede deducir que cualquiera de las propiedades involucradas sirve para definir la elipse, ya que todas ellas son equivalentes (podemos llegar de una a otra, en cualquier sentido, con implicaciones demostradas).

Llamamos centro de la elipse al punto de intersección de sus ejes.

La elipse con centro en el origen, de ecuación general

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

corta al eje **x** en los puntos de coordenadas (–a, 0) y (a, 0); al eje **y** en los puntos de coordenadas (0, –**b**) y (0, **b**); y sus focos están sobre el eje **x**, en los puntos de coordenadas (–c, 0) y (**c**, 0), donde $c^2 + b^2 = a^2$.

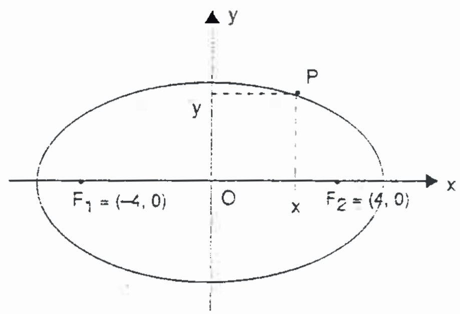
Una elipse de ecuación $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, tiene la misma forma que la anterior, pero está trasladada según el vector $(x_0, y_0)$, que además son las coordenadas del centro de la elipse.

# Podemos resolver...

1. Deduzcan algebraicamente la ecuación de la elipse con focos

$$F_1 = (-4, 0) \text{ y } F_2 = (4, 0),$$

sabiendo que la suma de las distancias de un punto a los focos es 10. Para ello sigan los pasos que indicamos a continuación.




Llamen (x, y) a las coordenadas de un punto cualquiera P de la elipse y planteen la ecuación, en coordenadas, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$. (Recuerden que para hallar la distancia entre dos puntos conociendo sus coordenadas hay que usar el teorema de Pitágoras.)

a) Eleven ambos miembros de la ecuación al cuadrado. Despejen (dejen de un solo lado de la ecuación) el término que quedó con raíces cuadradas.

b) Eleven nuevamente al cuadrado y resuelvan todo lo que se pueda para llegar a la ecuación general.

2. Una elipse con centro en el origen tiene un foco en (6, 0) y pasa por el punto (0, 5). ¿Alcanzan estos datos para determinar la elipse? Si alcanzan, hallen su ecuación.

3. Una elipse con centro en el origen y ejes sobre los ejes del sistema de coordenadas corta la circunferencia de centro (0, 0) y radio 5 en los puntos (5, 0) y (–5, 0).

a) ¿Sobre qué recta pueden estar los focos de la elipse?

b) Para cada una de las respuestas del ítem anterior, ¿cuál de los parámetros de la ecuación general está determinado (a, b, o ambos)?

c) Si pedimos además que $b < 5$, ¿sobre qué recta están los focos de la elipse? ¿Por qué?

d) Si la elipse también es tangente a la circunferencia de centro (0, 0) y radio 3, ¿cuál es su ecuación?

4. ¿En cuántos puntos distintos pueden cortarse dos elipses...?

a) Si tienen el mismo centro.

b) Si tienen centros distintos.

Ejemplifiquen cada caso gráficamente.



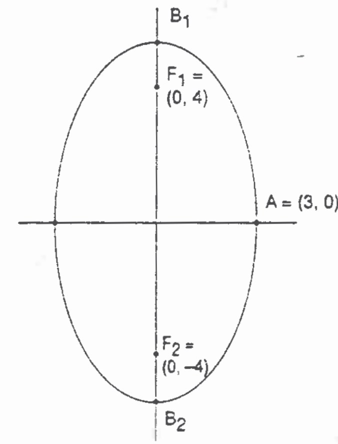


5. Dado el siguiente gráfico:

a) Hallen la ecuación de la elipse.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de $B_1$ y $B_2$?

c) ¿Cuánto vale la suma de las distacias de un punto P de la elipse a cada uno de los focos?




6. Analicen.

a) Si dos elipses tienen el mismo centro y un foco común, ¿son iguales? ¿Por qué?

b) ¿Y si además pasan las dos por un mismo punto? Justifiquen.

7. Justifiquen geométricamente (por ejemplo, construyendo) que siempre es posible hallar un valor de k, para que la recta $y = x + k$ sea tangente (toque en un solo punto) a la elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Hallen el valor de k.

8. Consideren la superficie cónica $3x^2 + 2y^2 = z^2$.

a) ¿Qué curva se obtiene haciendo la intersección con el plano $z = y + 1$? (Completen cuadrados en y.)

b) ¿Cuál es su centro? ¿Cuáles son sus ejes?

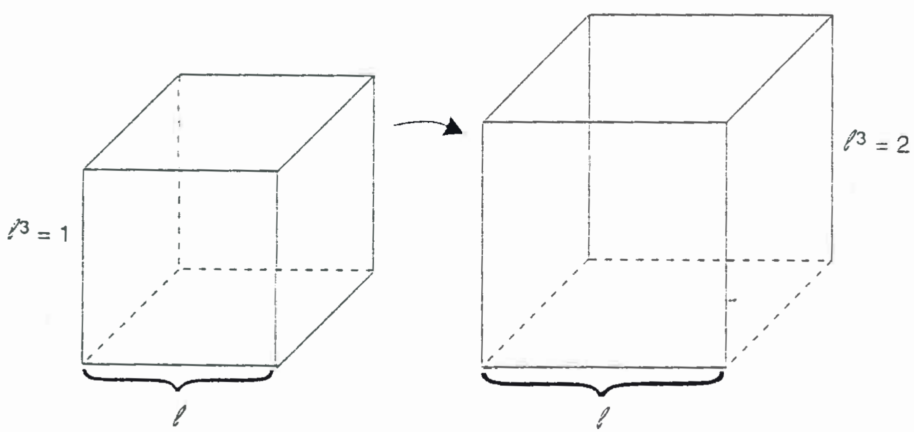
# Relacionando...

## *Los problemas clásicos y las cónicas*

La cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo son tres problemas planteados en la Grecia antigua y se conocen como "problemas clásicos". Su origen parece ser religioso.

Cuenta la historia que los griegos consultaron el oráculo del dios Apolo en Delfos para saber qué hacer a fin de superar una plaga. Como respuesta, el oráculo les indicó que construyeran un altar con la misma forma que el existente pero con el doble de volumen. El problema se reducía, entonces, a construir un cubo con el doble de volumen que otro cubo conocido (duplicación del cubo).

**Duplicación del cubo**




El problema de la trisección del ángulo pide hallar, dado un ángulo cualquiera, otro que mida su tercera parte. El de la cuadratura del círculo pide hallar, dado un círculo, un cuadrado que tenga la misma área.

Los griegos debían resolver estos problemas utilizando sólo la regla (no graduada) y el compás, que eran los instrumentos que permitían dibujar las curvas más perfectas (rectas y circunferencias).

Posteriormente, y durante siglos, los matemáticos buscaron sin éxito construcciones con regla y compás que permitieran resolver alguno de estos problemas. Pero fue recién en el siglo XVIII cuando se probó que ninguno de ellos se podía resolver con regla y compás.



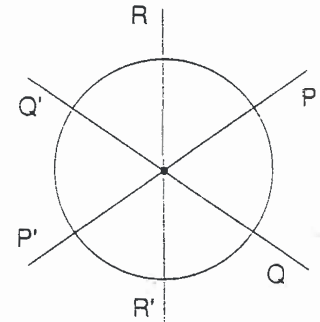


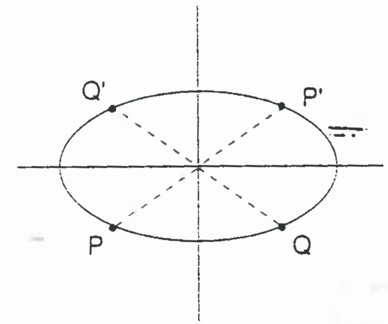
Claro que, durante todo ese tiempo, también se buscaron otras maneras de resolver estos problemas. Incluso los mismos griegos intentaron con métodos alternativos. En esta búsqueda construyeron o encontraron nuevas curvas. Así, por ejemplo, la parábola fue hallada por Menecmo, quien la utilizó para resolver el problema de la duplicación del cubo.

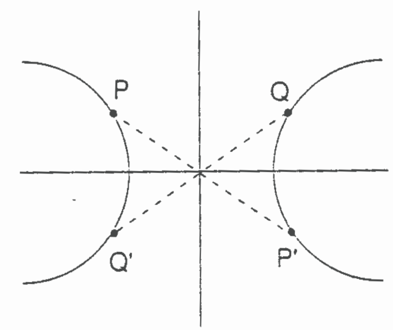
## *Las cónicas y las simetrías*

En la circunferencia, el centro C es centro de simetría. Es decir, todo punto de la circunferencia va a parar, por una simetría de centro C, a otro punto de la circunferencia. Además, cualquier recta que pase por C es eje se simetría de la circunferencia.

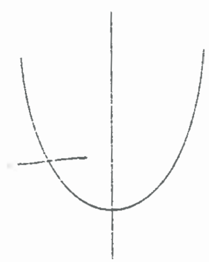
En la elipse y en la hipérbola, sólo hay 2 ejes de simetría (las rectas que contienen a los ejes). El punto de intersección de los ejes de simetría es centro de simetría (y se lo llama centro de la elipse y de la hipérbola, respectivamente).




La parábola tiene un único eje de simetría (que es el eje de la parábola) y no tiene centro.



# CUANDO LOS NÚMEROS HABLAN...

## *Análisis de las fórmulas*

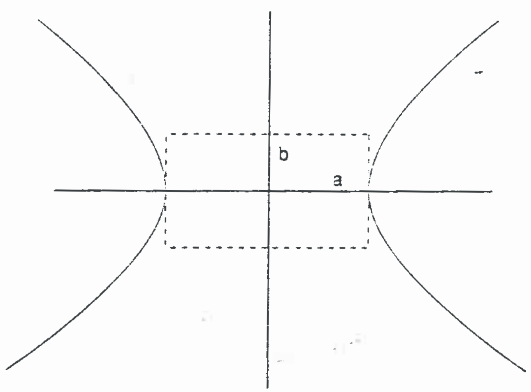
El mismo trabajo que hicimos con la elipse se puede hacer con la parábola y con la hipérbola. 1

La *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. La propiedad de Apolonio es la misma, sólo que la ubicación de los focos y los puntos $A_1$ y $A_2$ está invertida respecto de las posiciones que ocupan en la elipse.

Consideremos que si proyectamos un punto P de la hipérbola perpendicularmente sobre la recta que contiene a los focos, vale que

$$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R} \cdot \overline{RA_2}\right).$$

1. Escriban la ecuación de la hipérbola en función de a y b (Consideren a y b de acuerdo a lo indicado en el gráfico siguiente), $b^2 = k\,a^2$. ¿Qué relación hay entre a, b y c, si los focos están en los puntos (c, 0) y (–c, 0)?




Hipérbola de semiejes a y b.

2. Hallen la intersección del cono $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$ con el plano y = 2; y verifiquen que es una hipérbola. ¿Cuánto valen a, b y c para la hipérbola que obtuvieron? ¿Cuáles son sus ejes de simetría?



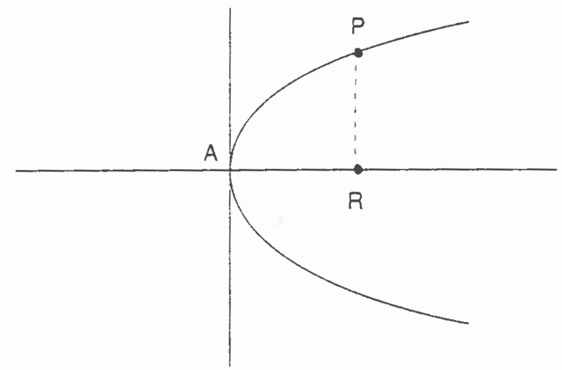


La *parábola* es el lugar geométrico de los puntos tales que la distancia a un punto fijo, llamado **foco**, es igual a la distancia a una recta fija, llamada **directriz**. La propiedad de Apolonio aquí varía, porque la parábola tiene un solo foco. 2

3. Si proyectamos un punto P de la parábola perpendicularmente sobre la recta que contiene el foco y el vértice, vale que

$$\overline{PR}^2 = k \cdot \overline{AR} \quad \text{(donde A es el vértice).}$$

Escriban la ecuación de la parábola en función de k, poniendo el eje x en el eje de simetría de la parábola y el eje y perpendicular a éste por el vértice.




Propiedad de Apolonio.

4. Hallen la intersección del cono $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$ con el plano z = 2 y + 1; y verifiquen que es una parábola. ¿Cuánto vale k para la parábola que obtuvieron?

5. Prueben que ninguna de las curvas obtenidas es función, pensando x como la variable independiente (abcisa). 3

6. ¿Cuál de ellas sí sería función si tomaran como variable independiente la otra? Justifiquen.

7. Hallen, en cada caso, dos funciones cuya unión dé toda la curva.

# Hemos aprendido...

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a un punto fijo llamado foco es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.

Para la elipse, la hipérbola y la parábola, las propiedades de Apolonio y las ecuaciones son las siguientes.

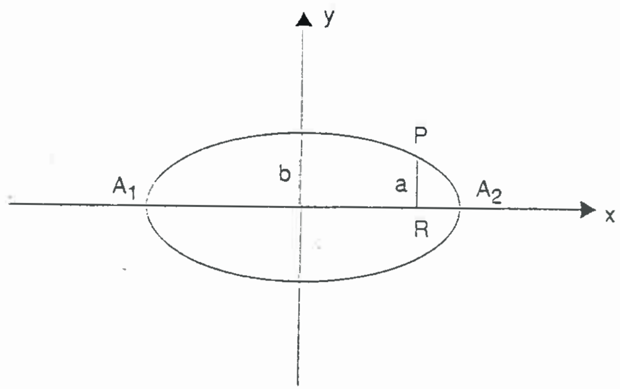
**Elipse**

$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R} \cdot \overline{RA_2}\right)$

$y^2 = k\,(a + x)\,(a - x)$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2 = a^2\,k$



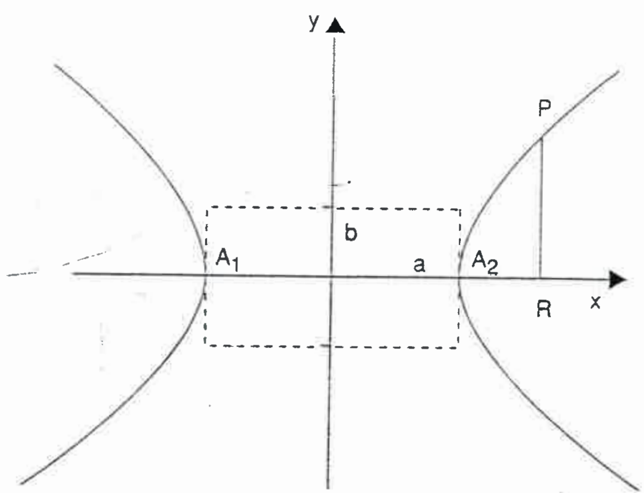

**Hipérbola**

$\overline{PR}^2 = k\left(\overline{A_1R} \cdot \overline{RA_2}\right)$

$y^2 = k\,(x + a)\,(x - a)$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2 = a^2\,k$







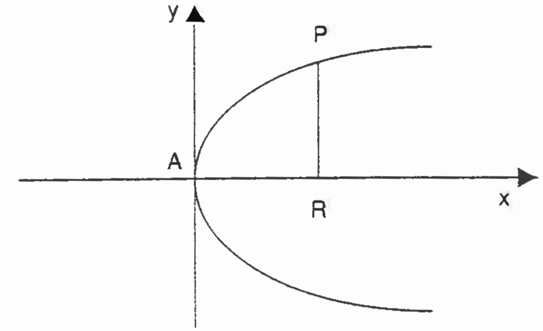

**Parábola**

$\overline{PR}^2 = k \cdot \overline{AR}$

$y^2 = k\,x$

$y^2 = 2\,p\,x$

$2\,p = k$




Cuando tenemos un punto en el espacio, podemos determinar su ubicación utilizando *coordenadas cartesianas* (x, y, z); *coordenadas esféricas* ($r$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\theta}$); o *coordenadas cilíndricas* ($r$, $\hat{\varphi}$, $z$). Las relaciones entre las diferentes coordenadas se pueden escribir como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\hat{\varphi} = \operatorname{arcotg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\hat{\theta} = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$x = r \operatorname{sen} \hat{\theta} \, \cos \hat{\varphi}$$

$$y = r \operatorname{sen} \hat{\theta} \, \operatorname{sen} \hat{\varphi}$$

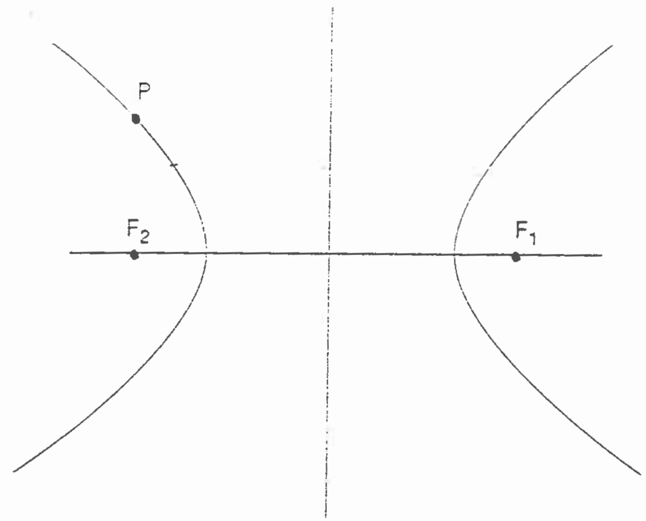
$$z = r \cos \hat{\theta}$$

Si además el punto está sobre la esfera terrestre, podemos dar sus coordenadas geográficas, es decir, su *latitud* y su *longitud*. Si tenemos las coordenadas esféricas de un punto sobre la esfera, $\hat{\varphi}$ determina la longitud y $\hat{\theta}$ la latitud.

Cuando hacemos girar una curva (o recta) alrededor de un eje, obtenemos una superficie que llamamos *superficie de revolución*. La unión de una superficie de revolución con su interior es un *sólido de revolución*, por ejemplo, la esfera, el paraboloide circular, etcétera.

# Podemos resolver...

1. Deduzcan algebraicamente la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (-5; 0)$ y $F_2 = (5; 0)$, sabiendo que la diferencia de las distancias de un punto a los focos es 8.




Llamen (x; y) a las coordenadas de un punto cualquiera P de la hipérbola y planteen la ecuación, en coordenadas, $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 8$. Sigan los pasos del ejercicio 1 (página 170) del "Podemos resolver..." del apartado anterior.

2. Una hipérbola con centro en el origen tiene un foco en (6, 0) y pasa por el punto (4, 0). ¿Alcanzan estos datos para determinar la hipérbola? Si alcanzan, hallen su ecuación.

3. Una hipérbola con centro en el origen y ejes sobre los ejes del sistema de coordenadas corta a la circunferencia de centro (0, 0) y radio 5 en los puntos (5, 0) y (–5, 0).
a) ¿Sobre qué recta pueden estar los focos de la hipérbola?
b) ¿Cuál de los parámetros de la ecuación general está determinado (a, b, o ambos)?
c) Comparen con el ejercicio 3 (página 170) del "Podemos resolver..." del apartado anterior.

4. ¿En cuántos puntos distintos pueden cortarse dos hipérbolas...?
a) Si tienen el mismo centro.
b) Si tienen centros distintos.
Ejemplifiquen cada caso gráficamente.





5. ¿En cuántos puntos distintos pueden cortarse dos parábolas...?
a) Si tienen sus ejes paralelos.
b) Si tienen sus ejes perpendiculares.
Ejemplifiquen cada caso gráficamente.

6. Analicen.
a) Si dos hipérbolas tienen el mismo centro y un foco común, ¿son iguales? ¿Por qué?
b) ¿Y si además pasan las dos por un mismo punto? Justifiquen.

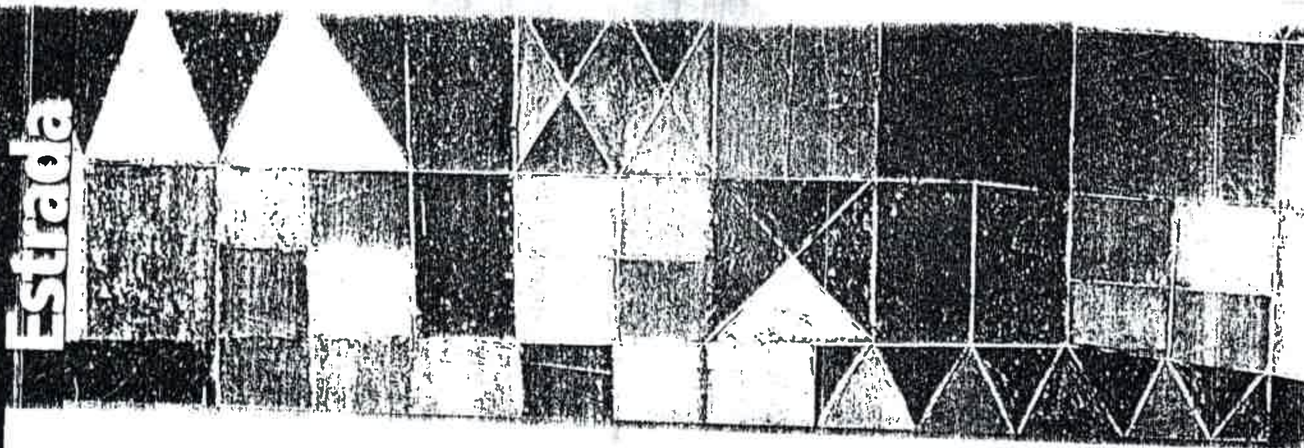
7. Analicen.
a) Si dos parábolas tienen el mismo eje y el foco común, ¿son iguales? ¿Por qué?
b) ¿Y si además pasan las dos por un mismo punto? Justifiquen.

8. Justifiquen geométricamente (por ejemplo, construyendo) que siempre es posible hallar un valor de k para que la recta $y = x + k$ sea tangente (toque en un solo punto) a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hallen el valor de k.

9. Resuelvan.
a) El punto P tiene coordenadas cartesianas $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Hallen sus coordenadas cilíndricas y esféricas. Grafíquenlo.
b) Representen la esfera terrestre en un sistema de ejes cartesianos, haciendo coincidir el plano **xy** con el plano del Ecuador, con el semieje $z^+$ pasando por el polo Norte y el semieje $x^+$ pasando por el meridiano de Greenwich. Supongan que el radio de la Tierra mide 6.300 km. Consideren una ciudad ubicada en las coordenadas cartesianas $\left(\frac{6300}{\sqrt{3}}, \frac{6300}{\sqrt{3}}, \frac{6300}{\sqrt{3}}\right)$, ¿cuáles son sus coordenadas geográficas?

10. Hallen la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto V = (3, 0) y su foco en el punto F = (5, 0). ¿Cuál es la ecuación de la directriz?

11. ¿Qué curva se obtiene al intersectar la superficie cónica $(2x)^2 + y^2 = z^2$ con el plano $z = y + 1$? Justifiquen.



Estrada

# Matemática I

## Modelos matemáticos para interpretar la realidad


María Beatriz Camuyrano

Gabriela Net

Mariana Aragón

*Coordinación:*
María Beatriz Camuyrano



Estrada Polimodal

SERIE
Libros con libros

# Cónicas

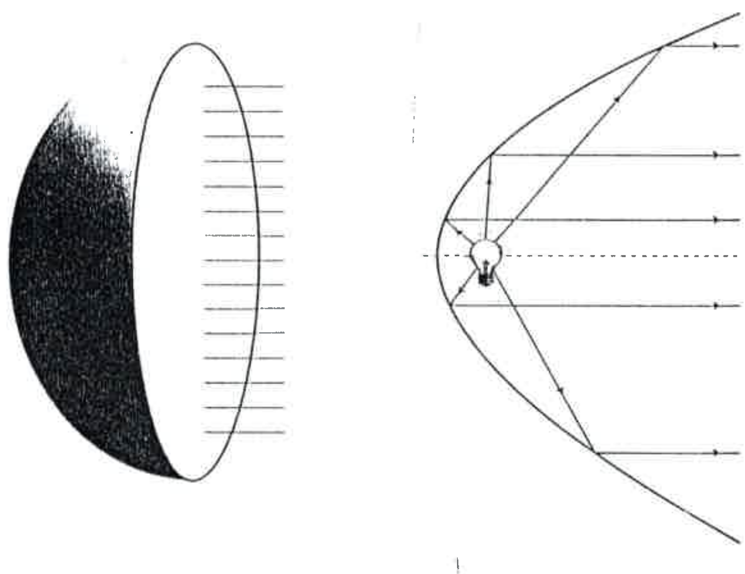
Geometría
en el plano

*Los antiguos griegos, particularmente Euclides, Arquímedes y Eratóstenes, se destacaron en el estudio de la geometría. Algunos de ellos se interesaron por las curvas que se obtenían al cortar con planos una superficie cónica: parábolas, elipses e hipérbolas, y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Estas curvas, llamadas cónicas, se pueden definir como lugares geométricos. Se utilizan como modelos de situaciones de la realidad, como, por ejemplo, las órbitas de satélites y planetas y las trayectorias de móviles, en el diseño de reflectores parabólicos, y en plantas y estructuras arquitectónicas.*

## ◆ Situación 1: el faro de un automóvil

Este es el esquema del corte transversal del faro de un automóvil. En el interior del faro hay una lamparita; todos los rayos que parten de ella se reflejan al llegar a la superficie curva, y salen formando un haz luminoso de rayos paralelos.

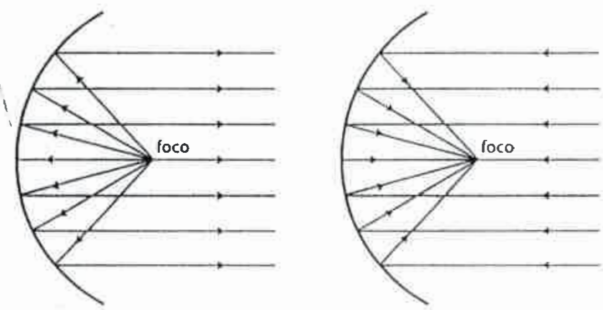
**a** | ¿Qué características tiene la forma de este faro, que le permite tener esta importante propiedad de reflexión?



*Una parábola es el gráfico de una función cuadrática. En este capítulo daremos una definición geométrica.*

El faro tiene la forma de una **superficie parabólica**. Este tipo de superficie se genera al rotar una **parábola** alrededor de su eje. Por lo tanto, el corte transversal del faro puede representarse con una parábola.

Una superficie parabólica se caracteriza por la siguiente propiedad: si ubicamos una fuente luminosa en un punto "especial" llamado foco, los rayos provenientes de la fuente se reflejan paralelamente al eje de simetría. Recíprocamente, todos los rayos que inciden paralelos al eje se concentran en el foco.




*Los diseños parabólicos son utilizados en el campo de las comunicaciones, en radares y sonares, y también para la emisión y recepción de comunicaciones satelitales.*

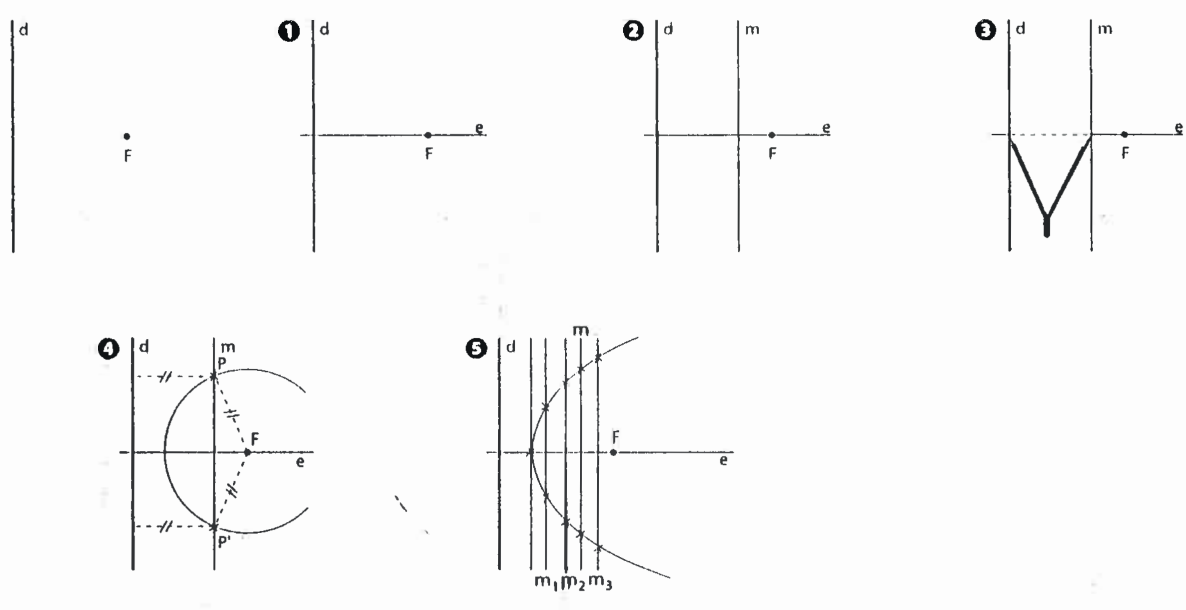
**b|** ¿Cómo se puede dibujar el corte del faro "punto por punto"?

Para dibujar la parábola, primero debemos dar su definición como lugar geométrico:

> ***Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.***

La siguiente construcción geométrica permite dibujar una parábola "punto por punto", dados su foco F y su directriz **d**:

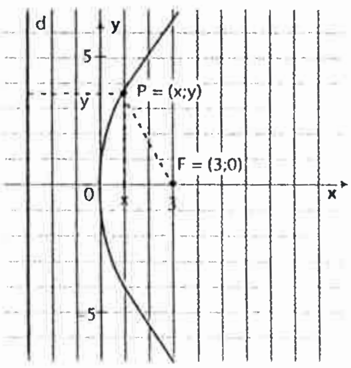
1. Trazar la recta perpendicular a **d**, que pasa por F; llamarla **e**.
2. Trazar una recta **m**, paralela a la directriz, del lado del foco.
3. Con un compás, tomar la distancia entre las rectas **d** y **m**.
4. Trazar una circunferencia con centro en F y radio igual a la distancia anterior. Señalar los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta **m**.
5. Repetir los pasos 2 al 4, considerando cada vez una recta distinta, $m_1$, $m_2$, $m_3$..., paralela a la directriz.

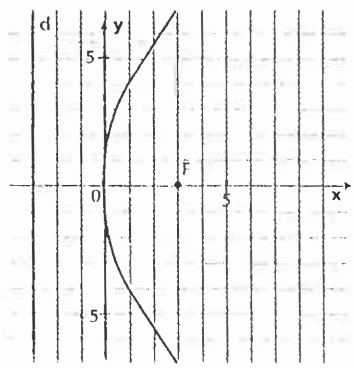


Como podemos observar en la figura 4 de la página anterior, señalamos un punto P en la gráfica si y solo si su distancia a la recta **d** es igual a su distancia al punto F. Esto se debe a que la medida del radio de la circunferencia trazada con centro en F es igual a la distancia entre las rectas **m** y **d**.

*Cada una de las circunferencias que se trazan en la construcción, salvo la que determina el vértice de la parábola, corta en dos puntos a la recta **m**. Se señalan así dos puntos de la parábola, uno a cada lado de la recta **e**, que resulta ser, entonces, el eje de simetría.*

**c |** En un sistema de coordenadas se representó el esquema del faro del automóvil, mediante una parábola cuyo foco es el punto de coordenadas (3;0), y cuya directriz es la recta de ecuación x = –3. Queremos determinar una ecuación que sea cumplida por todos los puntos de esta parábola, y solamente por ellos.




Dado un punto P = (x;y), P es equidistante de la recta **d** y del punto F:

$$\Leftrightarrow \quad \text{Dist}(P,d) = \text{Dist}(P,F)$$

$$\Leftrightarrow \quad |x+3| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$

*La distancia entre P y **d** es igual a la distancia entre los números reales **x** y –3, es decir:*

$$Dist(P,d) = |x - (-3)| = |x + 3|$$

Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow \quad (x+3)^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2$$

Desarrollando los binomios:

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

Cancelando y reagrupando:

$$\Leftrightarrow \quad 6x + 6x = y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 12x = y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y^2}{12}$$

Luego, la ecuación de la parábola de foco F = (3;0) y directriz x = –3 es: $x = \frac{y^2}{12}$.

*Por ejemplo, $P = \left(\frac{1}{3};2\right)$ pertenece a esta parábola, porque $\frac{1}{3} = \frac{2^2}{12}$.*

*En cambio, Q = (2;5) no pertenece a esta parábola, porque $2 \neq \frac{5^2}{12}$.*

## Ejercitación

**1** En un sistema de coordenadas:

• Señalar el foco y la directriz, dibujar "punto por punto" y luego hallar la ecuación de las siguientes parábolas:

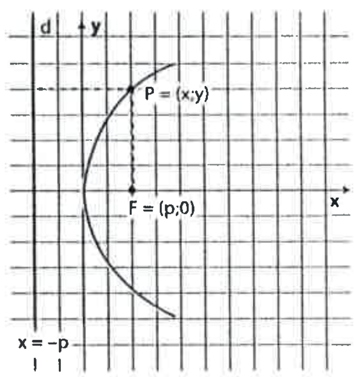
- Con foco F = (–4;0) y directriz x = 4.
- Con foco F = (0;3) y directriz y = –3.
- Con foco F = (0;–2) y directriz y = 2.

• ¿En qué se parecen los gráficos y las ecuaciones obtenidas? ¿En qué se diferencian?

# Ecuación de la parábola

En la situación 1 hemos encontrado la ecuación de una parábola particular, con foco $F = (3;0)$ y directriz $x = -3$.

Para encontrar la ecuación general de una parábola $\mathcal{P}$, se puede elegir el sistema de coordenadas, de manera que el vértice tenga coordenadas $V = (0;0)$, y que el eje de simetría coincida con alguno de los ejes de coordenadas:




*Esta elección del sistema de coordenadas permite obtener la ecuación más simple.*

***Si el eje de simetría es el eje x, el foco $F = (p;0)$ y la directriz $x = -p$, donde $p \in \Re \neq 0$, la ecuación de $\mathcal{P}$ es: $x = \dfrac{y^2}{4p}$.***

***$|p|$ es la distancia entre el vértice y el foco o entre el vértice y la directriz.***

Porque:

$$P = (x;y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Dist}(P,d) = \text{Dist}(P,F)$$

$$\Leftrightarrow |x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$$

*La distancia entre P y **d** es igual a la distancia entre los números reales **x** y **–p**, es decir:*

*$\text{Dist}(P,d) = |x - (-p)| = |x + p|$*

Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow (x + p)^2 = (x - p)^2 + (y - 0)^2$$

Desarrollando los binomios:

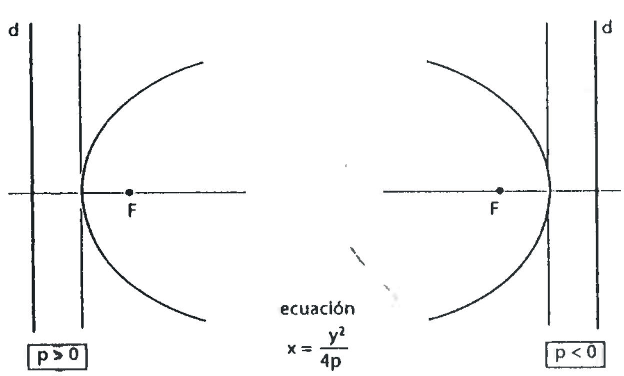
$$\Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

Cancelando y reagrupando:

$$\Leftrightarrow 2px + 2px = y^2$$

$$\Leftrightarrow 4px = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4p}$$

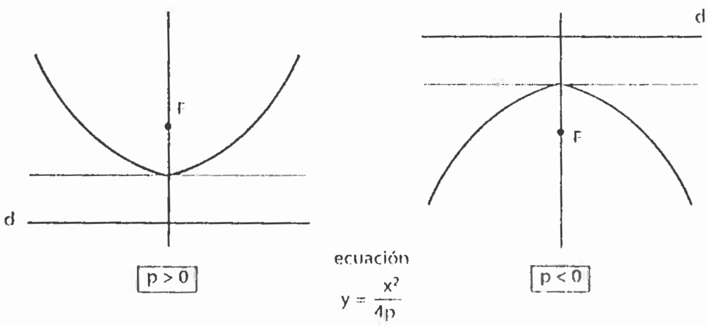



- *Si $p > 0$, el foco está a la derecha de la directriz y la parábola tiene sus ramas hacia la derecha.*
- *Si $p < 0$, el foco está a la izquierda de la directriz y la parábola tiene sus ramas hacia la izquierda.*

*Si el eje de simetría es el eje y, el foco $F = (0;p)$ y la directriz $x = -p$, donde $p \in \Re \neq 0$, la ecuación de $\mathcal{P}$ es: $y = \frac{x^2}{4p}$.*

*$|p|$ es la distancia entre el vértice y el foco, y entre el vértice y la directriz.*

La demostración es similar al caso anterior:



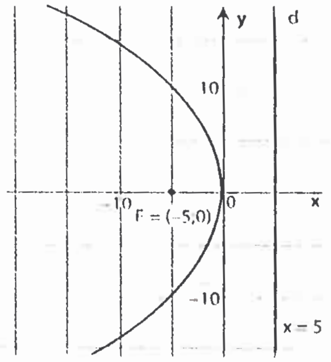

*• Si $p > 0$, el foco está arriba de la directriz y la parábola tiene concavidad positiva (ramas hacia arriba).*

*• Si $p < 0$, el foco está debajo de la directriz y la parábola tiene concavidad negativa (ramas hacia abajo).*

Por ejemplo:

• Si se quiere hallar la ecuación de la parábola con $F = (-5;0)$ y directriz $x = 5$: la ecuación será $x = \frac{y^2}{4p}$. La distancia del foco al vértice $V = (0;0)$ es 5; luego, $|p| = 5$. Como debe ser $p < 0$, porque la parábola tiene las ramas hacia la izquierda, resulta $p = -5$. Luego, la ecuación es:

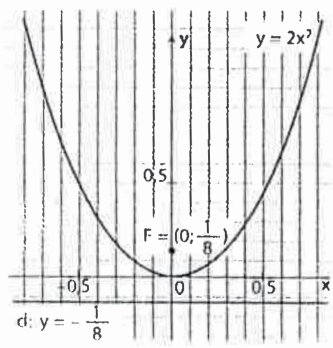
$$x = \frac{y^2}{-20}$$




• Para hallar el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y = 2x^2$: $\frac{1}{4p} = 2$; luego, $p = \frac{1}{8}$. La parábola tiene sus ramas hacia arriba, porque $p > 0$; luego,

$$F = \left(0;\frac{1}{8}\right)$$

y la directriz es la recta $y = -\frac{1}{8}$.




## Ejercitación

**1** Dadas las siguientes parábolas

$\mathcal{P}_1: x = \frac{y^2}{10}$ $\qquad$ $\mathcal{P}_2: y = -4x^2$ $\qquad$ $\mathcal{P}_3: -12x = y^2$

se pide:

• Determinar sus ejes de simetría, focos y directrices.

• Graficarlas en un sistema de coordenadas cartesianas.

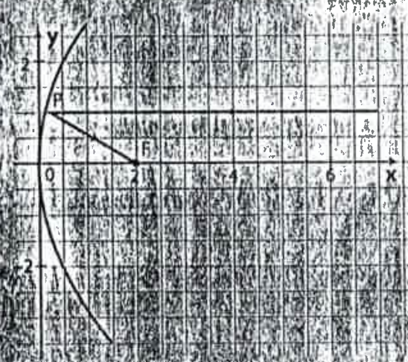
**2** ¿Verdadero o falso? Justificar la respuesta.

• La recta $y = 0$ es el eje de simetría de la parábola de ecuación $x = \frac{y^2}{8}$.

• La parábola de ecuación $-4y = x^2$ tiene foco $F = (-1;0)$ y directriz $y = 1$.

• El punto A = (−3;2,5) pertenece a la parábola $\mathcal{P}$.


❸ Este es el esquema de un espejo parabólico en un sistema de coordenadas cartesianas:

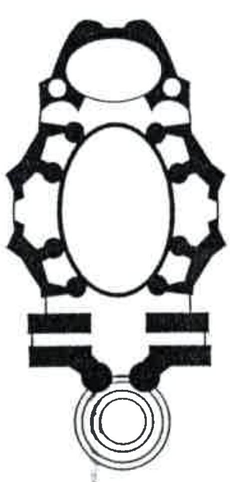



• Calcular las coordenadas del punto P de incidencia del rayo luminoso señalado.
• Calcular la distancia de P a F y a la directriz de la parábola.

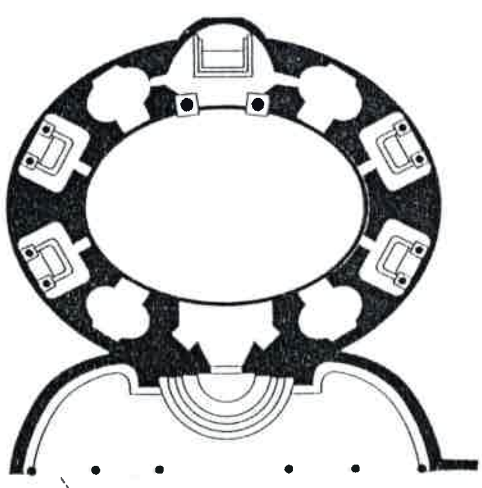
## Elipse

### ◆ Situación 2: planos y bóvedas

**a|** Los siguientes dibujos son los planos arquitectónicos correspondientes a dos iglesias construidas durante los siglos XVII y XVIII:



*"Santa María Magdalena", en Karlovy Vary (Checoslovaquia).*



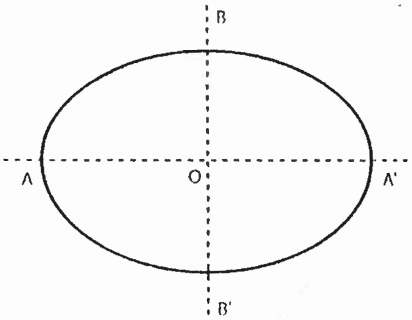
*"San Andrés del Quirinal", en Roma (Italia).*

¿Qué tienen en común ambos diseños?

Podemos observar que los dos sectores centrales tienen forma de **elipse**. El uso de esta curva es característico de la arquitectura barroca. En muchas construcciones de los siglos XVII y XVIII, la elipse aparece como forma básica o como punto de partida para la creación de formas más complejas.

Una elipse es una curva que posee dos ejes de simetría, como muestra el esquema de la derecha.

En una circunferencia, todos los diámetros tienen igual longitud. En cambio, en la elipse, la longitud AA' es mayor que la longitud BB'. Por eso, una planta elíptica permite lograr un espacio con una componente longitudinal, que no poseen las plantas circulares.



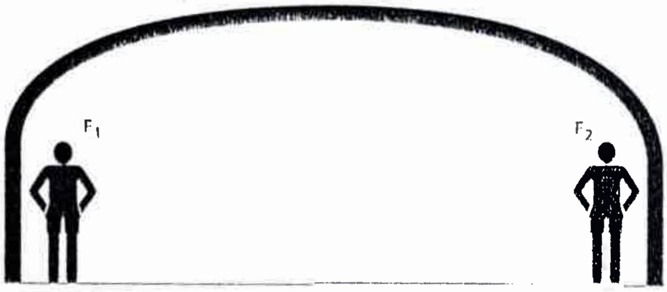

*O es el punto de intersección de los ejes de simetría de la elipse; se denomina **centro**.*

*Los puntos A, A', B y B' son los puntos de intersección de la elipse con los ejes de simetría; se denominan **vértices**.*

*El segmento AA' se denomina **eje mayor** de la elipse.*

*El segmento BB' se denomina **eje menor** de la elipse.*

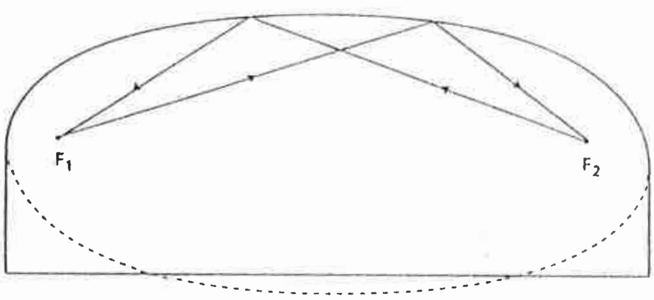
**b |** Observamos el corte transversal de un salón cuya bóveda tiene propiedades acústicas particulares:




Un sonido emitido desde el punto $F_1$ se refleja de manera que una persona puede escucharlo con mucha claridad desde $F_2$, como si se hubiera utilizado un micrófono, y recíprocamente. En realidad, si dos personas están ubicadas, respectivamente, en $F_1$ y $F_2$ y hablan, pueden escucharse claramente, aunque no estén cerca. Este efecto es conocido como "murmullo de auditorio".

¿Qué forma debe tener la bóveda del techo del salón para poseer la propiedad acústica señalada?

El corte transversal de la bóveda tiene forma elíptica (en realidad, de un arco de elipse). El efecto "murmullo de auditorio" se debe a las propiedades de reflexión de la elipse. Todas las ondas sonoras (o luminosas) que parten del punto $F_1$ se reflejan en la elipse hacia $F_2$, y recíprocamente. Los puntos $F_1$ y $F_2$ reciben el nombre de **focos** de la elipse.



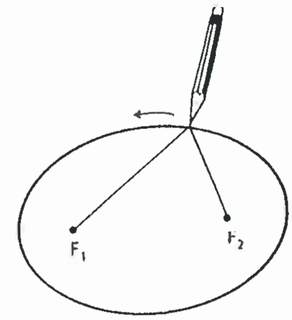

**c |** ¿Cómo se puede realizar el dibujo de una planta o de una bóveda elíptica?

Es muy fácil dibujar una elipse, con un trazo continuo, si se siguen estos pasos:

1. En una hoja de papel, apoyada, por ejemplo, sobre una plancha de corcho, determinar dos puntos fijos: $F_1$ y $F_2$ (se pueden utilizar chinches para señalarlos).

2. Tomar un hilo de mayor longitud que la distancia entre $F_1$ y $F_2$. Fijar un extremo en $F_1$ y, el otro, en $F_2$.

3. Tensar el hilo con la punta de un lápiz y deslizarlo para dibujar la curva sobre el papel.

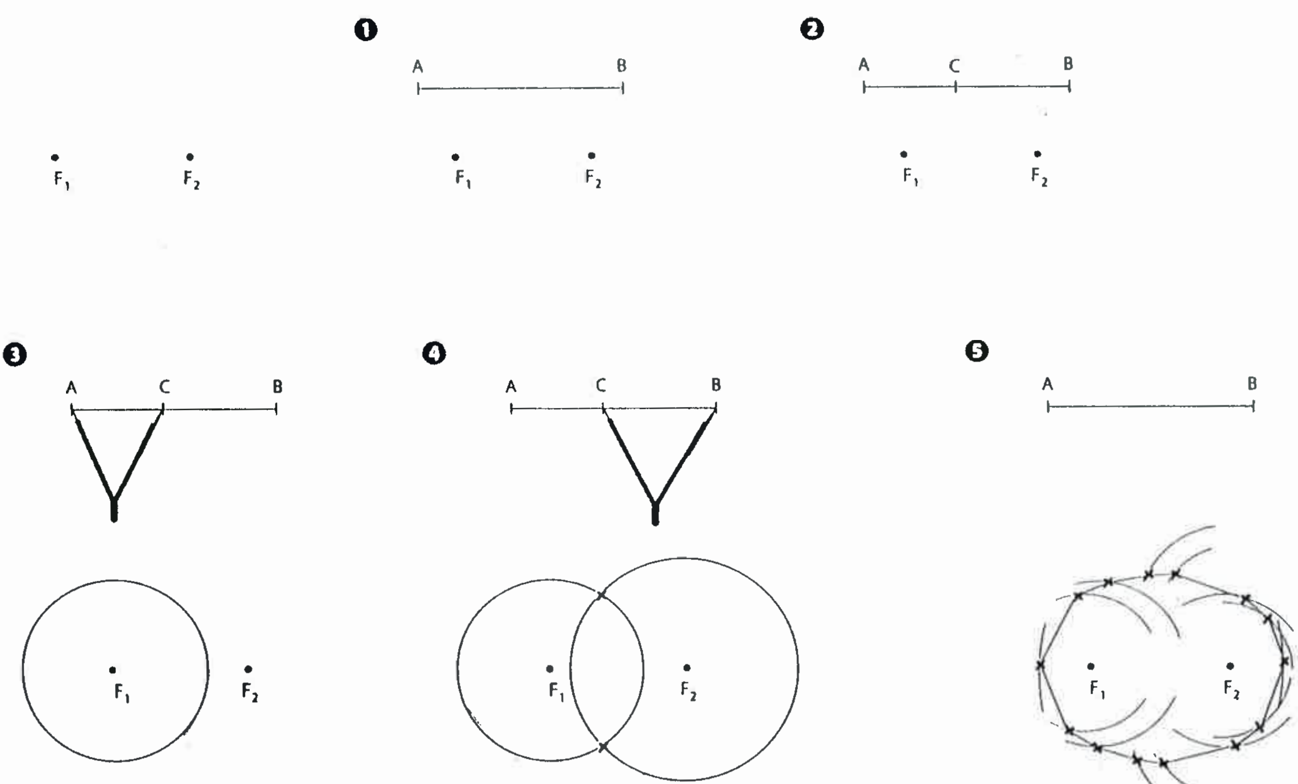



Podemos observar que la suma de las distancias de cualquier punto de la curva a $F_1$ y $F_2$ es constante, e igual a la longitud del hilo utilizado. Esta construcción está basada en la definición de elipse como lugar geométrico:

***Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.***

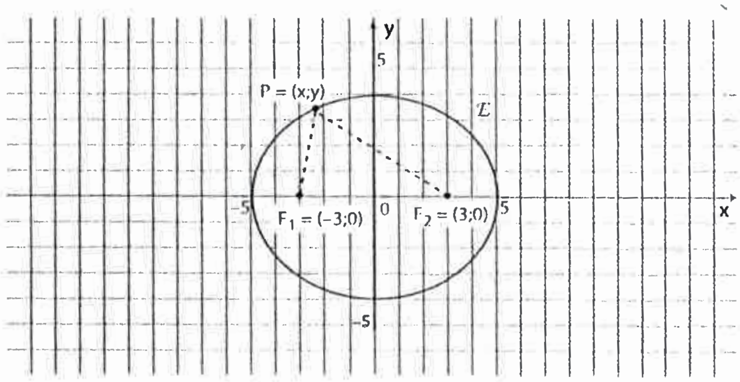
También es posible dibujar una elipse "punto por punto", dados sus focos $F_1$ y $F_2$:

1. Trazar un segmento AB, cuya longitud sea mayor que la distancia entre $F_1$ y $F_2$.
2. Señalar un punto C en el segmento AB, distinto de los extremos.
3. Trazar una circunferencia con centro en $F_1$, y radio igual a la medida del segmento AC.
4. Trazar una circunferencia con centro en $F_2$, y radio igual a la medida del segmento CB. Señalar los puntos de intersección de ambas circunferencias.
5. Repetir los pasos 2 a 4, considerando cada vez un punto C diferente.



Al realizar el procedimiento descripto, señalamos un punto en la gráfica si y solo si su distancia a $F_1$ es igual a la medida de AC, y su distancia a $F_2$ es igual a la medida de CB. Luego, un punto pertenece a la gráfica si y solo si la suma de sus distancias a $F_1$ y $F_2$ es igual a la suma de las medidas de AC y CB, que es la medida del segmento AB.

**d|** Una planta arquitectónica se representa mediante la elipse $\mathcal{E}$ con focos $F_1 = (-3;0)$ y $F_2 = (3;0)$, y suma constante igual a 10. Queremos determinar una ecuación que sea cumplida por todos los puntos de esta elipse, y solamente por ellos.




Dado un punto $P = (x;y)$, $P$ pertenece a $\mathcal{E}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Dist}(P,F_1) + \text{Dist}(P,F_2) = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2$$

Cancelando y reagrupando:

$$\Leftrightarrow \quad 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 100 - 12x$$

Multiplicando por $\frac{1}{4}$:

$$\Leftrightarrow \quad 5\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 25 - 3x$$

Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow \quad 25(x^2 - 6x + 9 + y^2) = 625 - 150x + 9x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2 = 625 - 150x + 9x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 16x^2 + 25y^2 = 400$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \text{ que es la ecuación buscada.}$$

## Ejercitación

**1** Dada la elipse de focos $F_1 = (0;8)$ y $F_2 = (0;-8)$, y suma constante 20, se pide:

- Dibujarla "punto por punto".
- Hallar su ecuación.

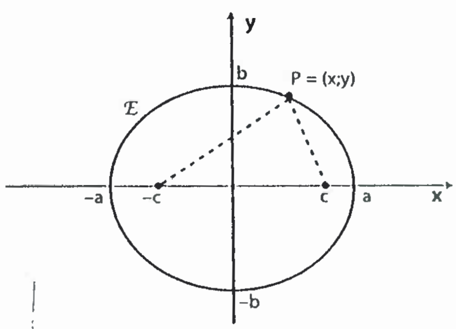
## Ecuación de la elipse

En la situación 2 encontramos la ecuación de una elipse particular, con focos en los puntos de coordenadas (–3;0) y (3;0), y suma constante igual a 10.

*Esta elección del sistema de coordenadas permite obtener la ecuación más simple.*

Para encontrar la ecuación general de una elipse $\mathcal{E}$, se puede elegir el sistema de coordenadas, de manera que el centro de la elipse tenga coordenadas C = (0;0) y que los ejes de simetría coincidan con los ejes **x** e **y**.

***Si el eje mayor de la elipse está ubicado sobre el eje x, los focos tienen coordenadas $F_1 = (-c;0)$ y $F_2 = (c;0)$ y la suma constante es 2a ($a, c \in \Re > 0$; $a > c$), la ecuación de $\mathcal{E}$ es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$. En este caso es a > b.***




*Los puntos A = (–a;0) y A' = (a;0) son los vértices de la elipse.*
*El eje mayor tiene longitud 2a.*
*Los puntos B = (0;b) y B' = (0;–b) son los extremos del eje menor de la elipse, que tiene longitud 2b.*
*La distancia entre los focos, o **distancia focal**, es 2c.*

Porque:

$$P = (x;y) \in \mathcal{E} \iff \text{Dist}(P,F_1) + \text{Dist}(P,F_2) = 2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Cancelando y reagrupando:

$$\iff 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{4}$:

$$\iff a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\iff a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Cancelando y reagrupando:

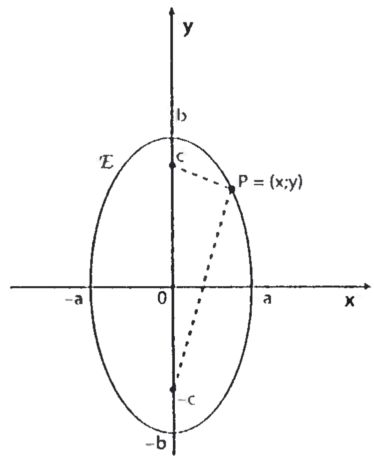
$$\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como a > c y a > 0, c > 0, entonces, $a^2 - c^2 > 0$. Llamando $b^2 = a^2 - c^2$, resulta:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*Si el eje mayor de la elipse está ubicado sobre el eje y, los focos tienen coordenadas $F_1 = (0;c)$ y $F_2 = (0;-c)$ y la suma constante es $2b$ $(b, c \in \Re > 0; b > c)$, la ecuación de $\mathcal{E}$ es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = b^2 - c^2$. En este caso es $a < b$.*

La demostración es similar a la del caso anterior.




*Los puntos $B = (0;b)$ y $B' = (0;-b)$ son los vértices de la elipse. El eje mayor, tiene longitud $2b$.*
*Los puntos $A = (-a;0)$ y $A' = (a;0)$ son los extremos del eje menor de la elipse, que tiene longitud $2a$.*
*La distancia focal es $2c$.*

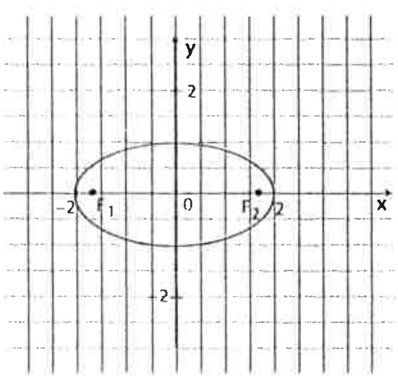
Por ejemplo:

- Se quiere hallar la ecuación de la elipse de focos son: $F_1 = (-\sqrt{3};0)$, $F_2 = (\sqrt{3};0)$ y eje mayor de longitud 4.

Se trata de una elipse con focos sobre el eje **x**. Como el eje mayor tiene longitud 4, es $2a = 4$; entonces, $a = 2$.

Como $c = \sqrt{3}$ y $b^2 = a^2 - c^2$, resulta: $b^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$.

Entonces, la ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.




- Encontrar los focos, vértices, longitudes de los ejes y distancia focal de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

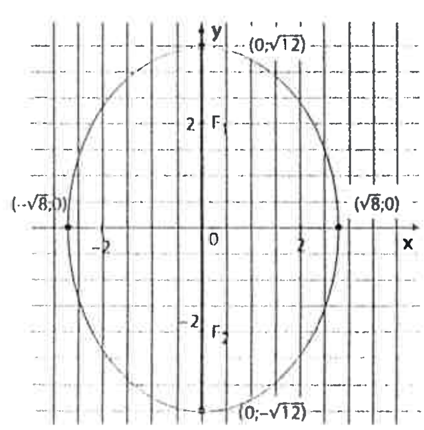
Como $a^2 = 8$ y $b^2 = 12$, resulta: $a = \sqrt{8}$ y $b = \sqrt{12}$; entonces, $a < b$. Se trata de una elipse con sus focos ubicados sobre el eje **y** de coordenadas.

Como $a^2 = b^2 - c^2$, $c^2 = b^2 - a^2 = 12 - 8 = 4$. Entonces, $c = 2$ y los focos son: $F_1 = (0;2)$ y $F_2 = (0;-2)$.

Los vértices son: $A' = (-\sqrt{8};0)$, $A = (\sqrt{8};0)$, $B = (0;\sqrt{12})$ y $B' = (0;-\sqrt{12})$.

El eje mayor tiene longitud $2b = 2\sqrt{12}$, y el eje menor tiene longitud $2a = 2\sqrt{8}$.

La distancia focal es $2c = 2 \cdot 2 = 4$.




## Ejercitación

**1** **Para cada una de las siguientes elipses**

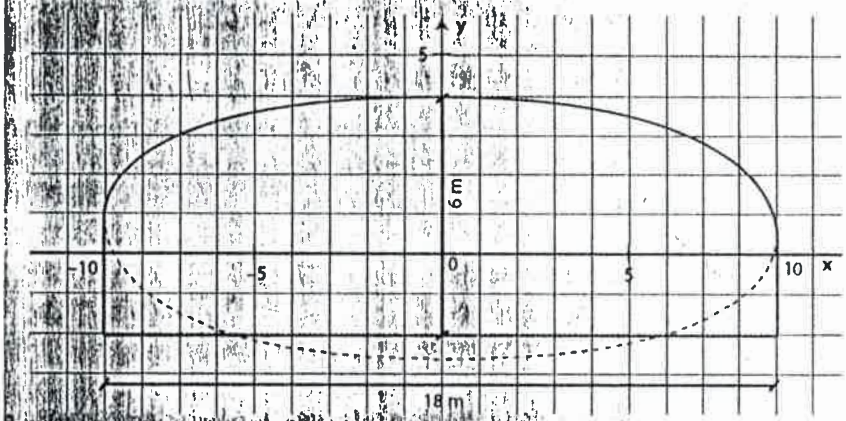
$\mathcal{E}_1: \dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad \mathcal{E}_1: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

**se pide:**

- **Determinar sus focos, vértices, longitudes de los ejes y distancias focales.**
- **Graficarlas en un sistema de coordenadas cartesianas.**

**2** Una mesa tiene contorno elíptico, y sus dimensiones son las siguientes:
Longitud del eje mayor: 3,50 metros.
Longitud del eje menor: 1,45 metros.
- Determinar la ecuación de la elipse.
- Realizar un gráfico a escala de la mesa en un sistema de coordenadas cartesianas, de manera que una unidad en ambos ejes represente 25 centímetros.

**3** Este es el corte transversal de un salón en un sistema de coordenadas. Su bóveda tiene forma elíptica:




- Teniendo en cuenta las dimensiones del salón, dar las coordenadas de las posiciones en que deberían ubicarse dos personas para poder escucharse mutuamente bajo el efecto del "murmullo de auditorio".

## Hipérbola

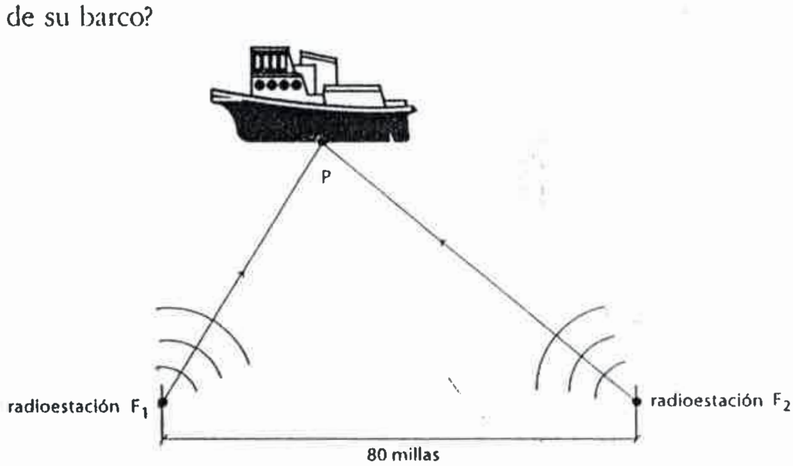
### ◆ Situación 3: un sistema de radionavegación

El capitán de un barco que está navegando recibe dos señales de radio enviadas al mismo tiempo por dos estaciones emisoras, cuya posición es conocida, ubicadas a 80 millas de distancia una de otra. Ambas señales viajan a una velocidad de 0,2 millas por microsegundo.

*Un microsegundo (μs) es la millonésima parte de un segundo, es decir,*

$$1\ \mu s = \frac{1}{1\,000\,000}\ s$$

**a|** La señal de la radioestación $F_1$ se registra, en el instrumental de navegación del barco, 350 microsegundos antes que la señal proveniente de la radioestación $F_2$. Con estos datos, ¿puede el capitán determinar la posición de su barco?




Se trata de determinar el punto P donde está ubicado el barco.

Multiplicando la velocidad de las señales por la diferencia de tiempo de arribo, el capitán obtiene la diferencia entre la distancia del barco a la radioestación $F_2$ y la distancia del barco a la radioestación $F_1$. Es decir:

$$\text{Dist}(P,F_2) - \text{Dist}(P,F_1) = 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s} \cdot 350\ \mu s = 70 \text{ millas}$$

***Dist(P,F₁)**: distancia entre el barco y la estación $F_1$.*
***Dist(P,F₂)**: distancia entre el barco y la estación $F_2$.*

Veamos por qué: la velocidad de la señal de radio proveniente de la estación $F_1$ se puede calcular como el cociente entre la distancia que separa al barco de la estación $F_1$, y el tiempo que tarda dicha señal en viajar de la estación al barco desde que fue emitida.

Entonces, $v_1 = \dfrac{\text{Dist}(P,F_1)}{t_1}$, de donde resulta:

$$\text{Dist}(P,F_1) = v_1 \cdot t_1 = 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s} \cdot t_1$$

*$v_1$: velocidad de la señal de la estación $F_1$.*
*$t_1$: tiempo que tarda en registrarse en el barco la señal proveniente de la estación $F_1$.*

De la misma manera, la velocidad de la señal de radio proveniente de la estación $F_2$ se puede calcular como el cociente entre la distancia que separa al barco de la estación $F_2$, y el tiempo que tarda dicha señal en viajar de la estación al barco desde que fue emitida.

Entonces, $v_2 = \dfrac{\text{Dist}(P,F_2)}{t_2}$, de donde resulta:

$$\text{Dist}(P,F_2) = v_2 \cdot t_2 = 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s} \cdot t_2$$

*$v_2$: velocidad de la señal de la estación $F_2$.*
*$t_2$: tiempo que tarda en registrarse en el barco la señal proveniente de la estación $F_2$.*

Luego,

$$\text{Dist}(P,F_2) - \text{Dist}(P,F_1) = 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s} \cdot t_2 - 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s} \cdot t_1 = 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s}(t_2 - t_1)$$

Como se sabe que las señales se registraron en el instrumental del barco con una diferencia de 350 μs, es $t_2 - t_1 = 350\ \mu s$, y, entonces:

$$\text{Dist}(P,F_2) - \text{Dist}(P,F_1) = 0{,}2\ \frac{\text{millas}}{\mu s} \cdot 350\ \mu s = 70 \text{ millas}$$

Con los datos obtenidos, el capitán sabe que en el momento de registrarse las señales su barco se encuentra ubicado en un punto P, tal que la **diferencia** entre la distancia de P a la radioestación $F_2$ y la distancia de P a la radioestación $F_1$ es de 70 millas.

*Como el capitán recibió primero la señal de la radioestación A, sabe que está más cerca de esta que de la radioestación B.*

Vamos a representar en un gráfico a escala 0,5 cm = 10 millas, algunas de las posibles posiciones del barco. En la siguiente tabla las hemos registrado a partir de las distancias en millas a las radioestaciones:

| Punto | $\text{Dist}(P_i,F_2)$ | $\text{Dist}(P_i,F_1)$ | $\text{Dist}(P_i,F_2) - \text{Dist}(P_i,F_1)$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 120 | 50 | 120 − 50 = 70 |
| $P_2$ | 110 | 40 | 110 − 40 = 70 |
| $P_3$ | 100 | 30 | 100 − 30 = 70 |
| $P_4$ | 80 | 10 | 80 − 10 = 70 |
| $P_5$ | 75 | 5 | 75 − 5 = 70 |

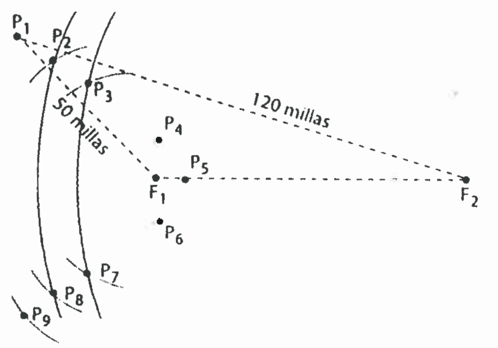
*En cada renglón de la tabla ubicamos posibles distancias del punto $P_i$ a $F_2$ y a $F_1$, de manera que*

$$\text{Dist}(P_i,F_2) - \text{Dist}(P_i,F_1) = 70$$

*Para determinarlas, fijamos un valor para la distancia entre $P_i$ y $F_2$, y calculamos, luego, la distancia entre $P_i$ y $F_1$ haciendo $\text{Dist}(P_i,F_1) = \text{Dist}(P_i,F_2) - 70$.*

Para representar, por ejemplo, los puntos que están a 120 millas de distancia de $F_2$, y a 50 millas de distancia de $F_1$, construimos una circunferencia con centro en $F_2$, cuya medida de radio sea 12 cm, y una circunferencia con centro en $F_1$, cuya medida de radio sea 5 cm. La intersección de ambas circunferencias permite obtener dos puntos $P_1$ y $P_9$, que verifican lo pedido:

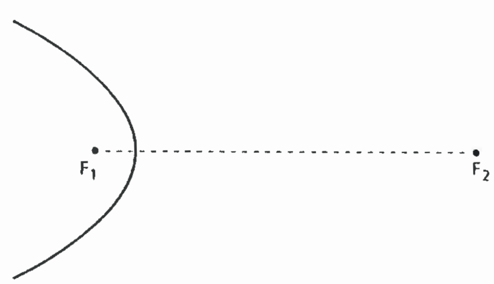
*Las posibles posiciones del barco quedan representadas por puntos del gráfico.*




En general, podemos trazar pares de circunferencias, una con centro en $F_2$, y otra con centro en $F_1$, de manera que la diferencia de las medidas de los radios sea 3,5 cm, y que la circunferencia de radio mayor sea la centrada en $F_2$ (dado que el barco está más próximo a $F_1$). Los puntos de intersección de ambas representan posibles ubicaciones del barco.

Si representamos **todas** las posibles ubicaciones P del barco, tales que $\text{Dist}(P,F_2) - \text{Dist}(P,F_1) = 70$ millas, obtenemos esta curva:

*La curva obtenida es simétrica respecto de la recta que pasa por $F_1$ y $F_2$.*



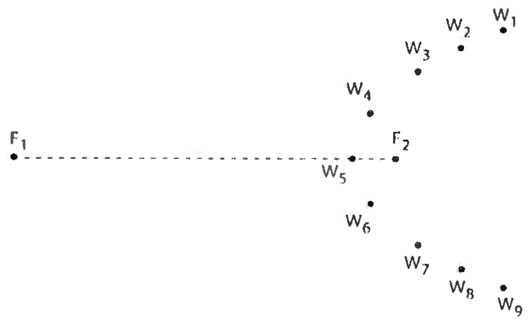

Con los datos de las radioseñales, el piloto sabe que su barco se encuentra en algún punto de esta curva, pero no puede determinar la posición del mismo.

**b** | Si la señal de la radioestación $F_2$ se registra, en el instrumental de navegación del barco, 350 microsegundos antes que la señal proveniente de la radioestación $F_1$, ¿qué gráfico se obtiene al representar todas las posibles ubicaciones P del barco?

*Como ahora el capitán recibió primero la señal de la radioestación $F_2$, sabe que está más cerca de esta que de la radioestación $F_1$.*

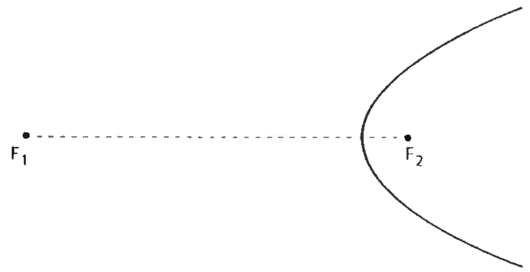
Con un razonamiento similar al mostrado en **a**, el capitán concluye que su barco se encuentra ubicado en un punto W, tal que la **diferencia** entre la distancia de W a la radioestación $F_1$ y la distancia de W a la radioestación $F_2$ es de 70 millas.

En el gráfico, representamos algunas ubicaciones posibles del barco:




Como en el caso anterior, trazando pares de circunferencias, una con centro en $F_1$ y otra con centro en $F_2$, de manera que la diferencia de la medida de los radios sea 3,5 cm y que la de mayor radio sea la circunferencia centrada en $F_1$ (dado que en esta ocasión el barco se encuentra más cerca de $F_2$), quedan determinadas geométricamente las posibles ubicaciones del barco.

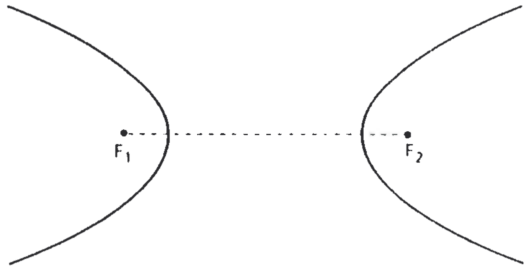
Si representamos **todas** las posibles ubicaciones W del barco, tales que $Dist(W,F_1) - Dist(W,F_2) = 70$ millas, obtenemos la siguiente curva:




*La curva obtenida es simétrica a la obtenida en el caso anterior respecto de la mediatriz del segmento $F_1F_2$.*

**c|** ¿Qué curva se obtiene al representar todas las posibles ubicaciones del barco si el capitán recibe las señales de las radioestaciones $F_1$ y $F_2$ con una diferencia de 350 µs, pero no puede distinguir a qué radioestación pertenece cada una? ¿Qué características tiene? ¿Cómo se puede construir "punto por punto"?

En este caso, el capitán sabe que su barco se encuentra situado en un punto P ubicado sobre la curva siguiente:




*La curva posee dos ejes de simetría: la recta que pasa por $F_1$ y $F_2$, y la mediatriz del segmento $F_1F_2$.*

Porque:

• Si la primera señal detectada en el instrumental del barco proviene de la radioestación $F_1$, la situación es la descripta en **a**.

En este caso, $Dist(P,F_2) - Dist(P,F_1) = 70$, y el punto P está en la rama izquierda de la curva.

*Si no se puede distinguir cuál es la radioseñal que arriba antes, solo se sabe que el punto P está ubicado sobre la* ***unión*** *de las curvas obtenidas en* ***a*** *y* ***b****.*

• Si la primera señal proviene de la radioestación $F_2$, la situación es la descripta en **b**. Luego, $Dist(P,F_1) - Dist(P,F_2) = 70$, y el punto P está en la rama derecha de la curva.

Entonces, sin poder distinguir cuál es la radioseñal que arriba antes, sabemos que:

$$Dist(P,F_2) - Dist(P,F_1) = 70 \quad \text{o} \quad Dist(P,F_1) - Dist(P,F_2) = 70$$

que es equivalente a:

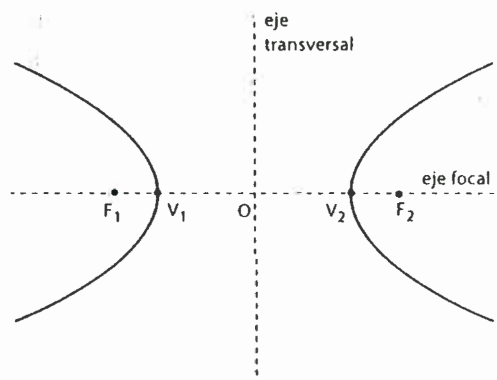
$$Dist(P,F_1) - Dist(P,F_2) = 70 \quad \text{o} \quad Dist(P,F_2) - Dist(P,F_1) = -70$$

Lo anterior puede resumirse diciendo que, si el punto P representa la posición del barco, **el valor absoluto de la diferencia** de la distancia del barco a la radioestación $F_1$ y la distancia del barco a la radioestación $F_2$ es de 70 millas, es decir:

$$|Dist(P,F_1) - Dist(P,F_2)| = 70$$

La curva obtenida al representar todos los puntos P que cumplen con la condición anterior se denomina **hipérbola**.

*Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.*




*La recta que pasa por los focos se denomina **eje focal** de la hipérbola.*
*Los puntos $V_1$ y $V_2$ son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal. Se denominan **vértices**.*
*La mediatriz del segmento que une los focos se denomina **eje transversal**.*

En la figura, podemos observar que:

• Una hipérbola es una curva formada por dos ramas.

• O, el punto de intersección de los ejes de simetría, es un centro de simetría. Se denomina **centro** de la hipérbola.

*Los puntos $F_1$ y $F_2$, que en este caso representan las posiciones de las dos radioestaciones, se denominan **focos**.*

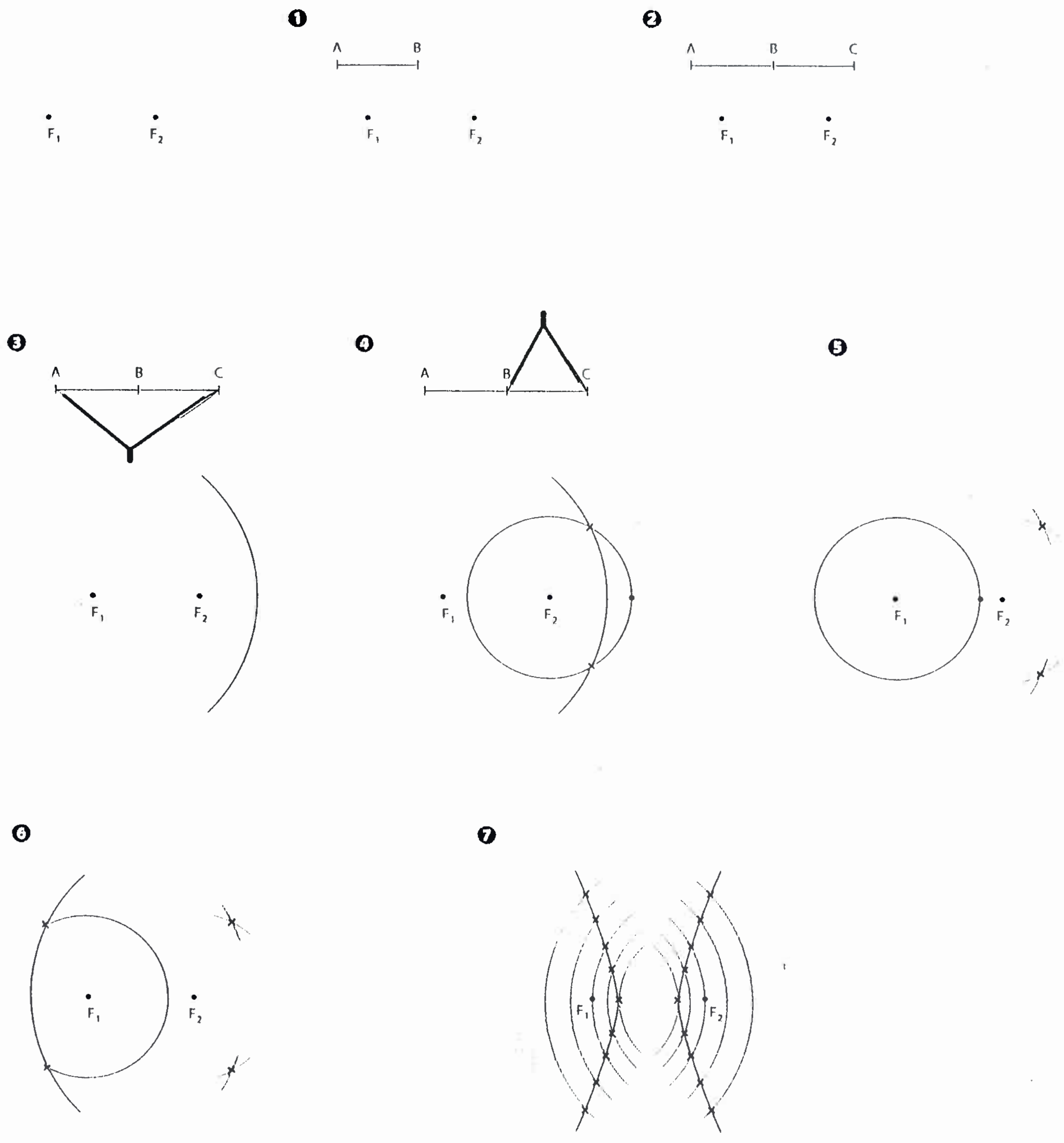
Para construir una hipérbola "punto por punto", dados sus focos $F_1$ y $F_2$, tendremos en cuenta su definición como lugar geométrico (ver desarrollo en página siguiente):

1. Trazar un segmento AB, cuya longitud sea menor que la distancia $\overline{F_1F_2}$.
2. Señalar un punto C sobre la recta, a la derecha de B.
3. Trazar una circunferencia con centro $F_1$ y radio igual a la medida del segmento AC.
4. Trazar una circunferencia con centro en $F_2$ y radio igual a la medida del segmento BC. Señalar los puntos de intersección de ambas circunferencias.

5. Trazar la circunferencia con centro $F_1$ y radio igual a la medida del segmento BC.

6. Trazar la circunferencia con centro $F_2$ y radio igual a la medida del segmento AC. Señalar los puntos de intersección de ambas circunferencias.

7. Repetir los pasos 2 a 6, considerando cada vez un punto C diferente.

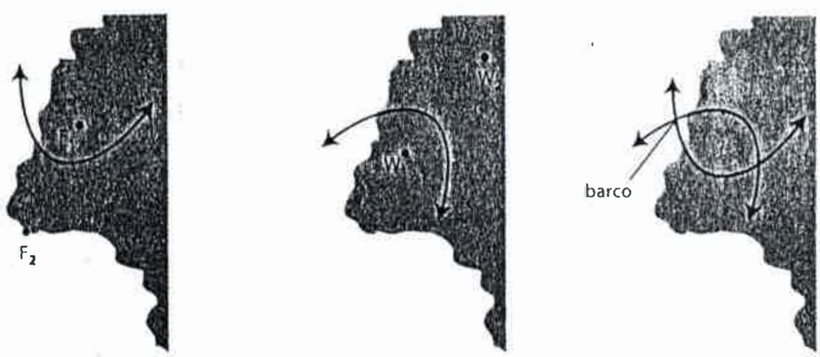


En el procedimiento anterior, señalamos un punto en la gráfica si y solo si su distancia a $F_1$ es igual a la medida de AC, y su distancia a $F_2$ es igual a la medida de BC, o bien si su distancia a $F_1$ es igual a la medida de BC, y su distancia a $F_2$ es igual a la medida de AC. Luego, un punto pertenece a la gráfica si y solo si el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a $F_1$ y $F_2$ es igual a la diferencia de las medidas de AC y BC, que es la medida del segmento AB.

*Este sistema de radionavegación, descripto aquí en forma simplificada, emplea hipérbolas para la determinación precisa de posiciones. Es conocido como Sistema Loran, y puede ser utilizado por navegantes marítimos y aéreos en las zonas de cobertura, donde se encuentran ubicados los pares de radioestaciones terrestres.*

**d|** ¿Queda determinada la posición del barco, si el capitán recibe, además del primer par de señales, dos señales emitidas por otras dos radioestaciones, $W_1$ y $W_2$, y sabe, entonces, que su barco está ubicado también sobre un punto de la rama de otra hipérbola?

En la parte **a** comprobamos que con el primer par de señales, provenientes de las radioestaciones $F_1$ y $F_2$, se determina una rama de hipérbola que contiene la posición del barco. Al repetir el procedimiento con las señales que emiten las radioestaciones $W_1$ y $W_2$, queda determinada una rama de otra hipérbola que también contiene la posición del barco. Luego, el punto de intersección de ambas curvas representa la localización real del barco. Si hubiera más de un punto de intersección, el navegante debe interpretar, a partir del conocimiento de la ubicación aproximada del barco, cuál corresponde a su posición.



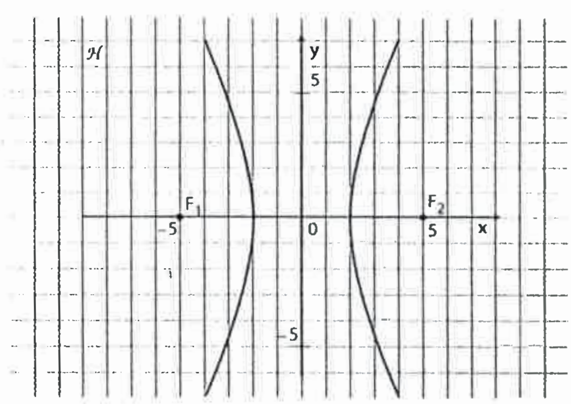

1ª determinación — 2ª determinación — ubicación del barco

**e|** En el esquema de la derecha se representaron las posibles ubicaciones de un barco, mediante la hipérbola $\mathcal{H}$, cuyos focos son los puntos de coordenadas (–5;0) y (5;0), y cuyo valor absoluto de la diferencia de distancias a los mismos es 4. Se quiere determinar una ecuación que cumpla todos los puntos de esta hipérbola, y solamente ellos.

Dado un punto P = (x;y), P pertenece a $\mathcal{H}$:

$$\Leftrightarrow \left|\mathrm{Dist}(P,F_1) - \mathrm{Dist}(P,F_2)\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2}\right| = 4$$




Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = 16$$

Desarrollando, cancelando términos y reagrupando:

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{(x+5)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = -2x^2 - 2y^2 - 34$$

Elevando nuevamente al cuadrado:

$$\Rightarrow 4(x^2 + 10x + 25 + y^2)(x^2 - 10x + 25 + y^2) = (-2x^2 - 2y^2 - 34)^2$$

Desarrollando, cancelando términos y reagrupando:

$$\Leftrightarrow 336x^2 - 64\,y^2 = 1\,344$$

$$\Leftrightarrow \frac{336x^2}{1\,344} - \frac{64y^2}{1\,344} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1,$$ que es la ecuación buscada.

*Por ejemplo, $P = (-4;\sqrt{63})$ pertenece a esta hipérbola, porque $\frac{(-4)^2}{4} - \frac{(\sqrt{63})^2}{21} = 1$.*

*En cambio, $Q = (3;5)$ no pertenece a $\mathcal{H}$, porque $\frac{3^2}{4} - \frac{5^2}{21} \neq 1$.*

## Ejercitación

**1** **Una hipérbola $\mathcal{G}$ tiene focos $F_1 = (0;5)$ y $F_2 = (0;-5)$. El valor absoluto de la diferencia de distancias a los focos es 4.**

- **Representarla gráficamente "punto por punto".**
- **Encontrar su ecuación. ¿En qué se diferencia de la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$, de la situación 3, punto e?**

## Ecuación de la hipérbola

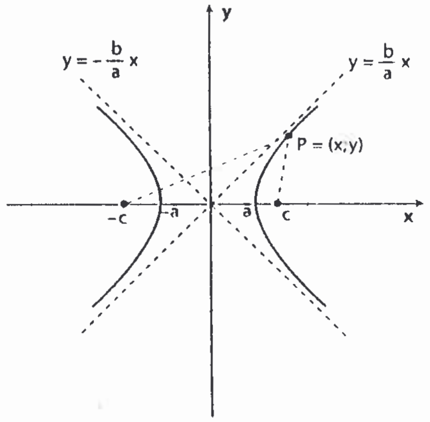
En la situación 3 hallamos la ecuación de una hipérbola particular, con focos en los puntos de coordenadas (–5;0) y (5;0), y valor absoluto de la diferencia de las distancias a aquellos igual a 4.

Para encontrar la ecuación general de una hipérbola $\mathcal{H}$ se puede elegir el sistema de coordenadas, de manera que el centro de la hipérbola tenga coordenadas C = (0;0), y que los ejes de simetría coincidan con los ejes **x** e **y**.

*Esta elección del sistema de coordenadas permite obtener la ecuación más simple.*

*Si el eje focal de la hipérbola está ubicado sobre el eje **x**, los focos tienen coordenadas $F_1 = (-c;0)$, $F_2 = (c;0)$ y el valor absoluto de la diferencia de las distancias es 2a ($a, c \in \mathfrak{R} > 0$; $a < c$), entonces, la ecuación de $\mathcal{H}$ es:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b^2 = c^2 - a^2.$$




*Los puntos $A = (-a;0)$ y $A' = (a;0)$ son los **vértices** de la hipérbola.*

*La distancia entre los focos, o **distancia focal**, es 2c.*

*Las rectas de ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ son llamadas **asíntotas**. No forman parte de la hipérbola, solo sirven de ayuda para su dibujo.*

Porque $P = (x;y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |\text{Dist}(P,F_1) - \text{Dist}(P,F_2)| = 2a$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2$$

Desarrollando, cancelando términos y reagrupando:

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a^2 + x^2 + y^2 + c^2$$

Elevando nuevamente al cuadrado:

$$\Rightarrow (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = (-2a^2 + x^2 + y^2 + c^2)^2$$

Desarrollando, cancelando términos y reagrupando:

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como $c > a$ y $c > 0$, $a > 0$, entonces, $c^2 - a^2 > 0$. Llamando $b^2 = c^2 - a^2$:

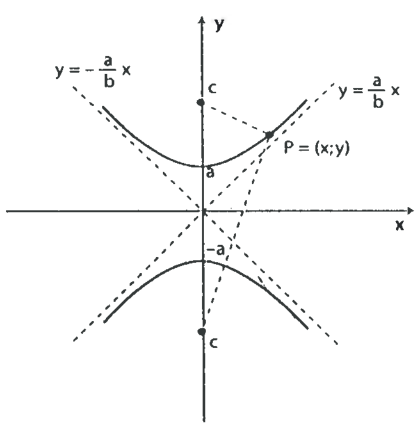
$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

***Si el eje focal de la hipérbola está ubicado sobre el eje y, los focos tienen coordenadas $F_1 = (0;c)$, $F_2 = (0;-c)$ y el valor absoluto de la diferencia de las distancias es $2a$ ($a, c \in \mathfrak{R} > 0$; $a < c$), entonces, la ecuación de $\mathcal{H}$ es:***

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b^2 = c^2 - a^2.$$

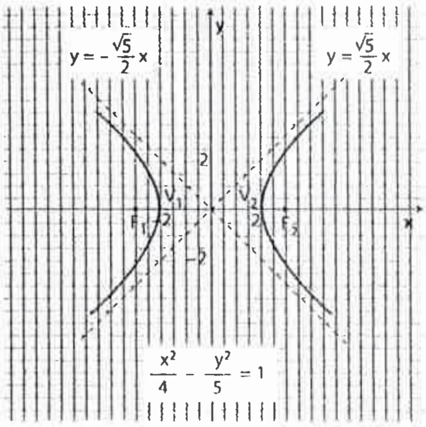
La demostración es similar a la del caso anterior.




*Los puntos $A = (0;a)$ y $A' = (0;-a)$ son los vértices.*
*La distancia focal es $2c$.*
*Las rectas de ecuaciones*
$y = \frac{a}{b}x$ *e* $y = -\frac{a}{b}x$ *son las asíntotas.*

Por ejemplo:

• Se quiere hallar la ecuación de la hipérbola de focos $F_1 = (-3;0)$, $F_2 = (3;0)$, y vértices $V_1 = (-2;0)$ y $V_2 = (2;0)$:




Se trata de una hipérbola con focos sobre el eje **x**. La ecuación será, entonces,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se sabe que $c = 3$ y $a = 2$.

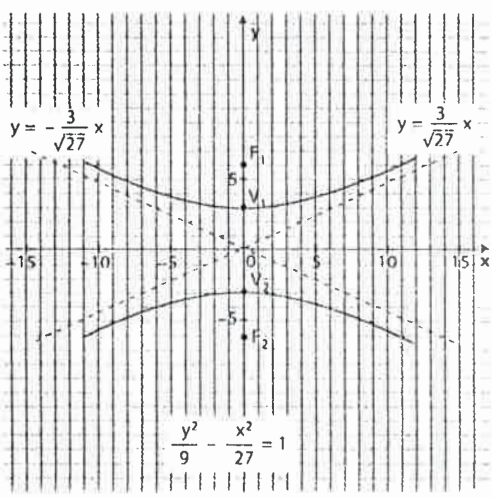
Como $b^2 = c^2 - a^2$, resulta: $b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$.

Entonces, la ecuación buscada es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

*Como $b^2 = 5$, resulta $b = \sqrt{5}$; entonces, las asíntotas son las rectas de ecuaciones $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ e $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$.*

• Encontrar los focos, vértices, distancia focal y asíntotas de la hipérbola de ecuación $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$.

Como la ecuación es de la forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, con $a^2 = 9$ y $b^2 = 27$, se sabe que se trata de una hipérbola cuyos focos están ubicados sobre el eje **y**.




Como $b^2 = c^2 - a^2$, entonces, $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 27 = 36$.

Luego, $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{27}$ y $c = \sqrt{36} = 6$.

Entonces, los focos son $F_1 = (0;6)$ y $F_2 = (0;-6)$. La distancia focal es $2 \cdot 6 = 12$. Los vértices son $V_1 = (0;3)$ y $V_2 = (0;-3)$.

*Las asíntotas son las rectas de ecuaciones $y = \frac{3}{\sqrt{27}}x$ e $y = -\frac{3}{\sqrt{27}}x$.*

## Ejercitación

❶ Para cada una de las siguientes hipérbolas

$\mathcal{H}_1: \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{49} = 1$ $\quad$ $\mathcal{H}_2: \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

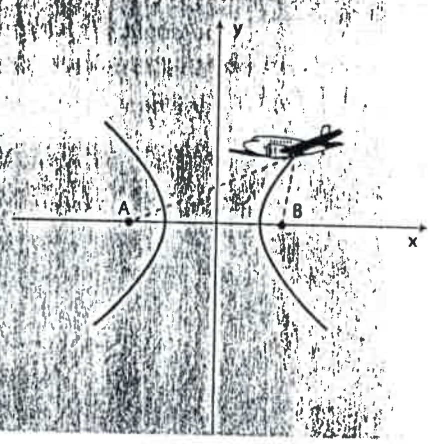
se pide:

- Determinar sus focos, vértices y asíntotas.
- Graficarlas en un sistema de coordenadas cartesianas.

❷ El gráfico en un sistema de coordenadas cartesianas del corte transversal de un espejo hiperbólico es una de las ramas de una hipérbola, la que contiene al vértice $V = (2;0)$ y cuyas asíntotas son las rectas de ecuaciones $y = \dfrac{5}{2}x$ e $y = -\dfrac{5}{2}x$.

- Determinar la ecuación de la hipérbola.
- Dar las coordenadas del foco correspondiente a la rama indicada.
- Graficar con precisión el corte del espejo hiperbólico.

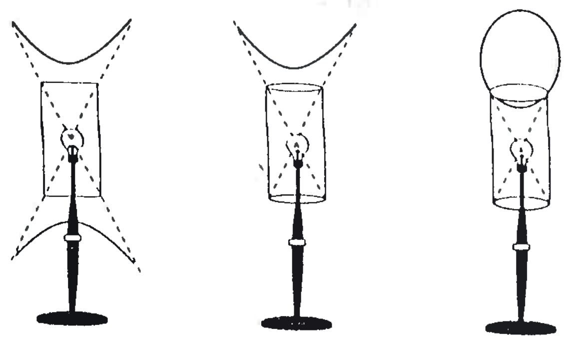
❸ Dos radioestaciones Loran están ubicadas a 160 millas de distancia. El piloto de un avión, empleando las señales enviadas por estas, sabe que, en un determinado instante, la diferencia de las distancias de su avión a la radioestación A y a la radioestación B es de 100 millas. Hallar la ecuación de la curva que contiene las posibles posiciones del avión en el instante registrado.




## Secciones cónicas

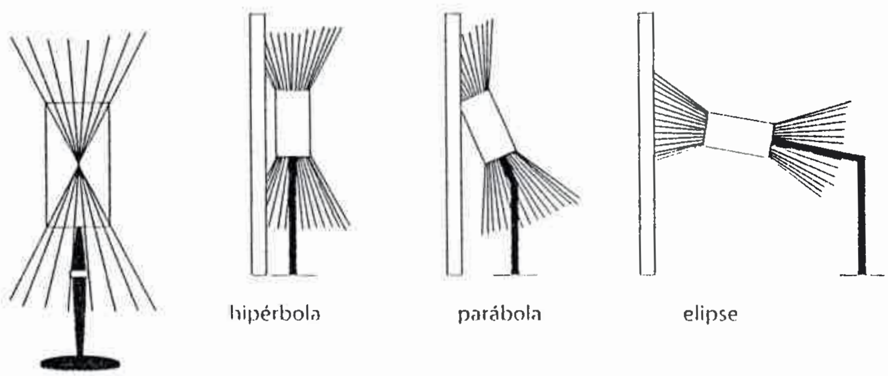
### ◆ Situación 4: las luces

a| En una habitación hay una lámpara con una pantalla cilíndrica, con su pie articulado, ubicada cerca de una pared. Al encenderla, se puede observar sobre la pared la proyección de curvas luminosas, que cambian al mover la posición de la lámpara.



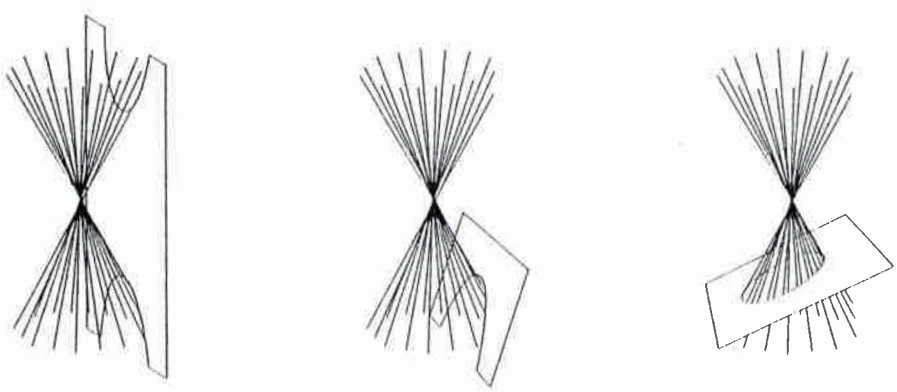
¿Qué forma tienen estas curvas?

Como la pantalla tiene forma cilíndrica, los rayos de luz que emergen de la lamparita, al quedar comprendidos entre los dos bordes circulares de la pantalla, forman dos conos unidos por el vértice. Esta superficie luminosa queda "cortada" por el plano de la pared, porque la lámpara está cerca de esta, y así se pueden observar las distintas secciones.




Al seccionar esta superficie cónica con el plano de la pared, se puede obtener una hipérbola, una parábola o una elipse, dependiendo de la inclinación de los rayos que emergen.

*Es posible pasar con continuidad de una curva a otra, es decir, ver cómo la hipérbola se "transforma" en una parábola, y la parábola en una elipse, con solo mover la posición de la lámpara.*

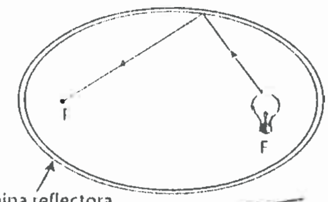


**b|** En el caso anterior, vimos que hipérbolas, parábolas y elipses pueden obtenerse como proyección de los cortes de conos de luz con el plano de la pared. ¿Qué otras características comunes se pueden señalar?

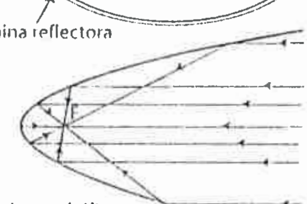
*Los focos son puntos fijos especiales que intervienen en la definición de las tres curvas como lugares geométricos.*

- Cuando se ubican fuentes luminosas en los focos, los rayos emergentes se comportan con propiedades particulares. Por ejemplo:

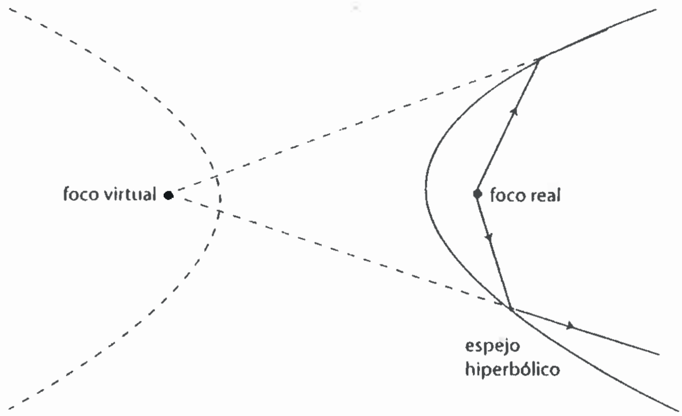
- Se dispone una lámina reflectora en forma de elipse y se ubica una lamparita en la posición de uno de los focos. Aislando un rayo de luz en un ambiente oscuro, podemos observar que el rayo se refleja en la lámina y pasa por el otro foco.




- Si se expone un espejo parabólico a los rayos del sol (que se pueden considerar paralelos), podemos comprobar que todos los rayos reflejados pasan por un punto: el foco de la parábola. Recíprocamente, si se ubica una lámpara en el lugar del foco, los rayos que emanan se reflejan en el espejo y dan lugar a un haz de rayos paralelos. (Es el caso del faro de un automóvil.)



- En un espejo hiperbólico, un rayo de luz emitido desde el llamado foco "real" se refleja sobre la superficie, de manera que su prolongación pasa por el foco "virtual", dando la sensación de que proviene de este. Así, los rayos reflejados resultan divergentes y abarcan un campo de iluminación mayor que en el caso de un espejo parabólico, aunque de menor intensidad.



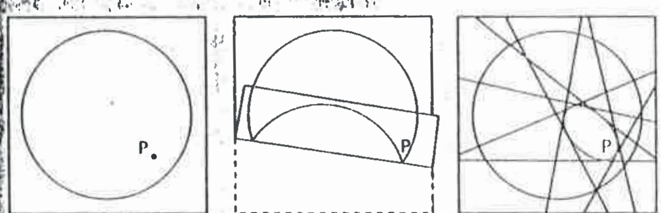

• También podemos encontrar otra característica común considerando las ecuaciones de estas curvas, ubicadas en un sistema de coordenadas cartesianas, estudiadas en las situaciones 1, 2 y 3:

| Curva | Ecuación |
|---|---|
| Parábola | $y = \frac{x^2}{4p}$ o $x = \frac{y^2}{4p}$ |
| Elipse | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| Hipérbola | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ |

Todas son ecuaciones de **segundo grado** con variables **x** e **y**.

## Ejercitación

**1** En un papel de calcar, dibujar una circunferencia y señalar un punto interior P. Doblar el papel de modo que un punto de la circunferencia se superponga con P. Con este plegado, se determina una recta **t**. Repetir el procedimiento de plegado, por lo menos 15 veces, y observar que las rectas envuelven una elipse.




**2** Realizar el plegado anterior ubicando el punto P fuera de la circunferencia. ¿Qué curva se obtiene como envolvente de las rectas?

**3** En un papel de calcar dibujar una recta **d** y señalar un punto P que no esté sobre la misma.
Doblar el papel de modo que un punto de la recta **d** se superponga con P. Así se determina una recta. Repetir el procedimiento de plegado, por lo menos 15 veces. ¿Qué curva se obtiene como envolvente de las rectas?

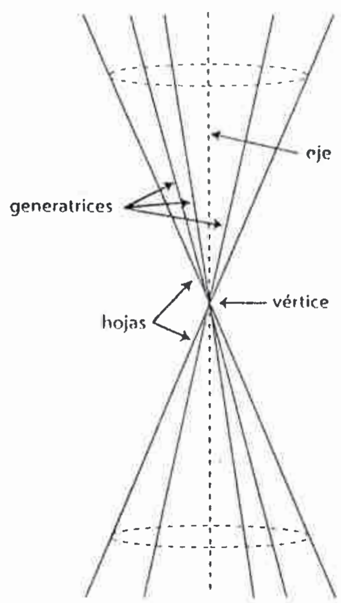
## Qué son las secciones cónicas

Los antiguos griegos (300 años a.C.) fueron los primeros en descubrir que parábolas, elipses e hipérbolas pueden obtenerse cortando una superficie cónica con planos de distinta inclinación.

Una **superficie cónica** está formada por dos conos circulares rectos unidos por el vértice, con un eje común y extendidos infinitamente en dirección opuesta al vértice.

Cada uno de los conos que forman la superficie cónica se denomina **hoja**.

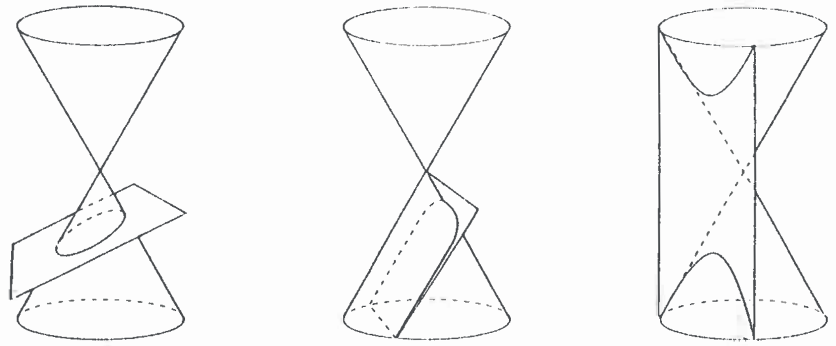
Se denomina **generatriz** a cualquier recta que pase por un punto de la superficie cónica y el vértice.




Si se corta una superficie cónica con un plano inclinado, de manera que:

- corte a una sola de las hojas y a todas las generatrices, se obtiene una **elipse**;
- sea paralelo a una generatriz, se obtiene una **parábola**;
- corte a las dos hojas sin pasar por el vértice, se obtiene una **hipérbola**.

*Por este motivo, parábolas, elipses e hipérbolas reciben el nombre genérico de* ***cónicas****.*



*La demostración formal de estas afirmaciones permite relacionar parábolas, elipses e hipérbolas como secciones cónicas con sus definiciones como lugares geométricos. Es conocida como* ***teorema de Dandelin****.*

Las propiedades de reflexión de rayos luminosos y sonoros emergentes de los focos de las cónicas, conocidas como **propiedades focales**, resultan muy importantes en relación con las aplicaciones que surgen de ellas y constituyen otra característica común.

Desde el punto de vista analítico, parábolas, elipses e hipérbolas pueden representarse mediante una ecuación general de segundo grado en las variables **x** e **y**:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con A, B, C, D, E y F números reales, y A, B y C no nulos a la vez. Por ejemplo:

- La ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, que corresponde a una elipse, es equivalente a

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$$

Entonces, es un caso particular de la ecuación anterior, donde:

$$A = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2},\ B = D = E = 0 \text{ y } F = -1$$

- La ecuación $x = -2y^2$, que corresponde a una parábola, es equivalente a $2y^2 + x = 0$.

Se puede obtener a partir de la ecuación general, tomando:

$$A = B = D = F = 0,\ C = 2,\ D = 1$$

- La ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, que corresponde a una hipérbola, es equivalente a

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 - 1 = 0$$

Se puede obtener a partir de la ecuación general con $A = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{1}{16}$, $B = D = E = 0$ y $F = -1$.

*La ecuación de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si es $a = b$, resulta equivalente a $x^2 + y^2 = a^2$, que es la ecuación de una circunferencia de centro (0;0) y radio **a**.*

*La ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, que corresponde a una circunferencia de centro (3 ; –1) y radio 2, es equivalente a $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ y también se puede obtener a partir de la ecuación general, tomando:*
*$A = C = 1,\ B = 0,\ D = -6,\ E = 2,\ F = 6$.*

*En general, el conjunto de puntos del plano de coordenadas (x;y), que cumplen con la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ —con A, B, C, D, E y F números reales; A, B y C no nulos a la vez— es una sección cónica.*

## Ejercitación

**1** Determinar qué figura se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que corte a ambas hojas y que pase por el vértice.

**2** ¿Es posible obtener una circunferencia cortando una superficie cónica con un plano? En caso afirmativo, explicar cómo.

**3** Dadas las siguientes ecuaciones:

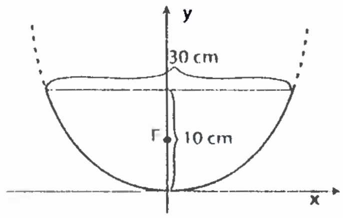
$y = -3x^2$ $\qquad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ $\qquad y^2 - 8x = 0$

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ $\qquad 2x^2 - 9y^2 = 18$ $\qquad x^2 + y^2 = 9$

- Indicar si se trata de la ecuación de una parábola, elipse o hipérbola.
- Dar los valores de A, B, C, D, E y F que corresponden en la ecuación general a esta cónica.

# Actividades de síntesis

**1** El siguiente es el esquema de un corte transversal de un espejo parabólico en un sistema de coordenadas cartesianas:




- Hallar la ecuación de la parábola.
- Determinar la distancia del vértice al foco F.

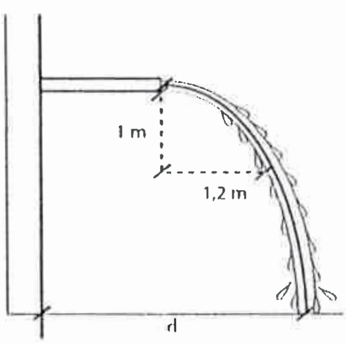
**2** Determinar las ecuaciones de las siguientes elipses:
- $\mathcal{C}_1$: con vértices $A = (-7;0)$, $A' = (7;0)$, $B = (0;11)$, $B' = (0;-11)$.
- $\mathcal{C}_2$: con focos $F_1 = (7;0)$, $F_2 = (-7;0)$ y la longitud del eje menor, 6.
- $\mathcal{C}_3$: con focos $F_1 = (-5;0)$ y $F_2 = (5;0)$ y la longitud del eje menor es $\frac{2}{3}$ de la longitud del eje mayor.

**3** La órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse, con el Sol ubicado en uno de los focos. El eje mayor de la órbita mide 297 millones de kilómetros y la excentricidad es $e = 0{,}017$.
- Hallar la ecuación de la órbita.
- ¿Cuál es la longitud del eje menor?
- Graficar la órbita.
- Hallar la mínima y la máxima distancia de la Tierra al Sol.

*Dada una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, se denomina* ***excentricidad de la elipse*** *al cociente $e = \frac{c}{a}$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.*

**4** La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene centro $C = (0;0)$. Uno de sus vértices es $V = (6;0)$ y pasa por el punto $P = (12;\sqrt{192})$. Se pide:
- Determinar la ecuación de $\mathcal{H}$.
- Hallar las ecuaciones de las asíntotas.
- Graficar la hipérbola y sus asíntotas; señalar focos y vértices.

**5** Por el extremo de un tubo horizontal de 1,5 m de largo, ubicado a 3 m de altura, sale un chorro de agua. El chorro describe una curva parabólica con vértice en el extremo del tubo. Determinar la distancia **d**. (Sugerencia: ubicar la parábola en un sistema de coordenadas cartesianas tal que el vértice tenga coordenadas (0;0).)



**6** El arco de un puente tiene forma de semielipse, cuya longitud del eje mayor es de 75 metros. Su altura máxima es de 25 metros. Determinar la altura de dos columnas verticales situadas, cada una, a 20 metros del centro del puente.

**7** • Dada la hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, ¿existe alguna elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos sean los vértices de $\mathcal{H}$, y dos de cuyos vértices sean los focos de $\mathcal{H}$? En caso afirmativo, escribir la ecuación de $\mathcal{E}$ y graficar, en un mismo sistema de coordenadas, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$. En caso negativo, justificar la respuesta.

• Dada la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$, ¿existe alguna hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos sean los vértices de $\mathcal{E}$ ubicados sobre el eje **y**, y cuyos vértices sean los focos de $\mathcal{E}$? En caso afirmativo, dar la ecuación de $\mathcal{H}$ y graficar $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ en un mismo sistema de coordenadas. En caso negativo, justificar la respuesta.

**8** Un arco parabólico tiene una altura de 6 m y un ancho de 4 m en su base. Si el vértice de la parábola está en la parte superior del arco, ¿a qué altura del piso el arco tiene 2 m de ancho?

**9** Determinar la ecuación de una hipérbola $\mathcal{H}$ sabiendo que su centro es el punto de coordenadas (0;0), la distancia focal es $2\sqrt{5}$ y una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.

**10** Mediante el sistema de radionavegación Loran, el capitán de un barco en navegación sabe que el punto que representa la posición de su barco en un sistema de coordenadas cartesianas pertenece a la rama de la hipérbola $\mathcal{H}_1: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, que pasa por $P = (3;0)$, y a la rama de la hipérbola $\mathcal{H}_2: y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, que pasa por $Q = (0;1)$.

- Representar, en un sistema de coordenadas cartesianas, las hipérbolas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.
- Indicar en el gráfico la posición de las estaciones radioemisoras. Dar sus coordenadas.
- Determinar gráfica y analíticamente las coordenadas de la posición del barco.

# ANEXO III

## PROBLEMA DE LA HISTORIA

## TRABAJO DE LOS ALUMNOS

1.- Sean $R$ y $R'$ dos rectas del plano perpendiculares en o, $d$ una distancia fija y $A$ y $B$ dos puntos de las rectas $R$ y $R'$ respectivamente tales que $\overline{AB} = d$. Si $I$ es un punto fijo cualquiera de $\overline{AB}$ ¿Cuál es el conjunto de puntos $I$ cuando $A$ y $B$ se mueven sobre las respectivas rectas?

2.- Sean $R$ y $R'$ dos rectas del plano no perpendiculares que se cortan en o y $d$ una distancia dada. Si $A$ y $B$ dos puntos sobre $R$ y $R'$ respectivamente tales que $\overline{AB} = d$ y consideramos a $I$ el punto medio de $\overline{AB}$ ¿Cuál es el conjunto de puntos $I$ cuando $A$ y $B$ varían su posición?

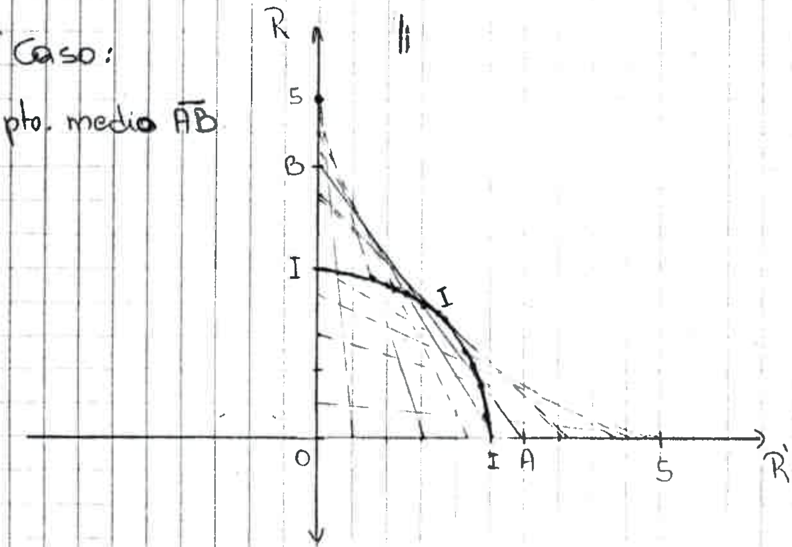
Gentile, C.
Villafañe, A.
Perez, C.
ualda, N.

# Trabajo.

17-08-00.

① 1er Caso:

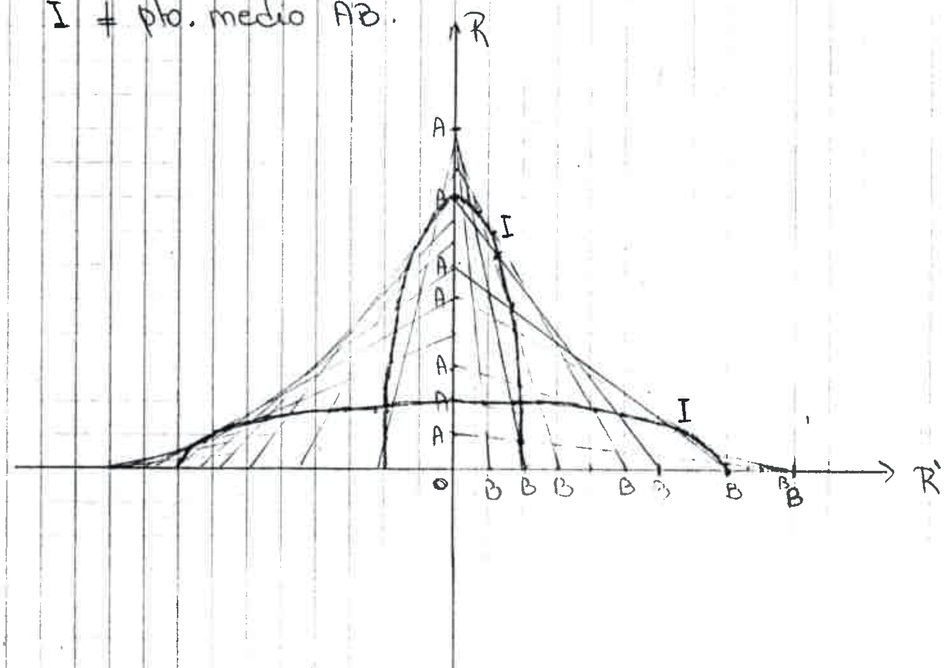
I = pto. medio $\overline{AB}$




Como conclusión obtuvimos que cuando A y B varían e I se mantiene fijo el conjunto de ptos. I forman una circunferencia.

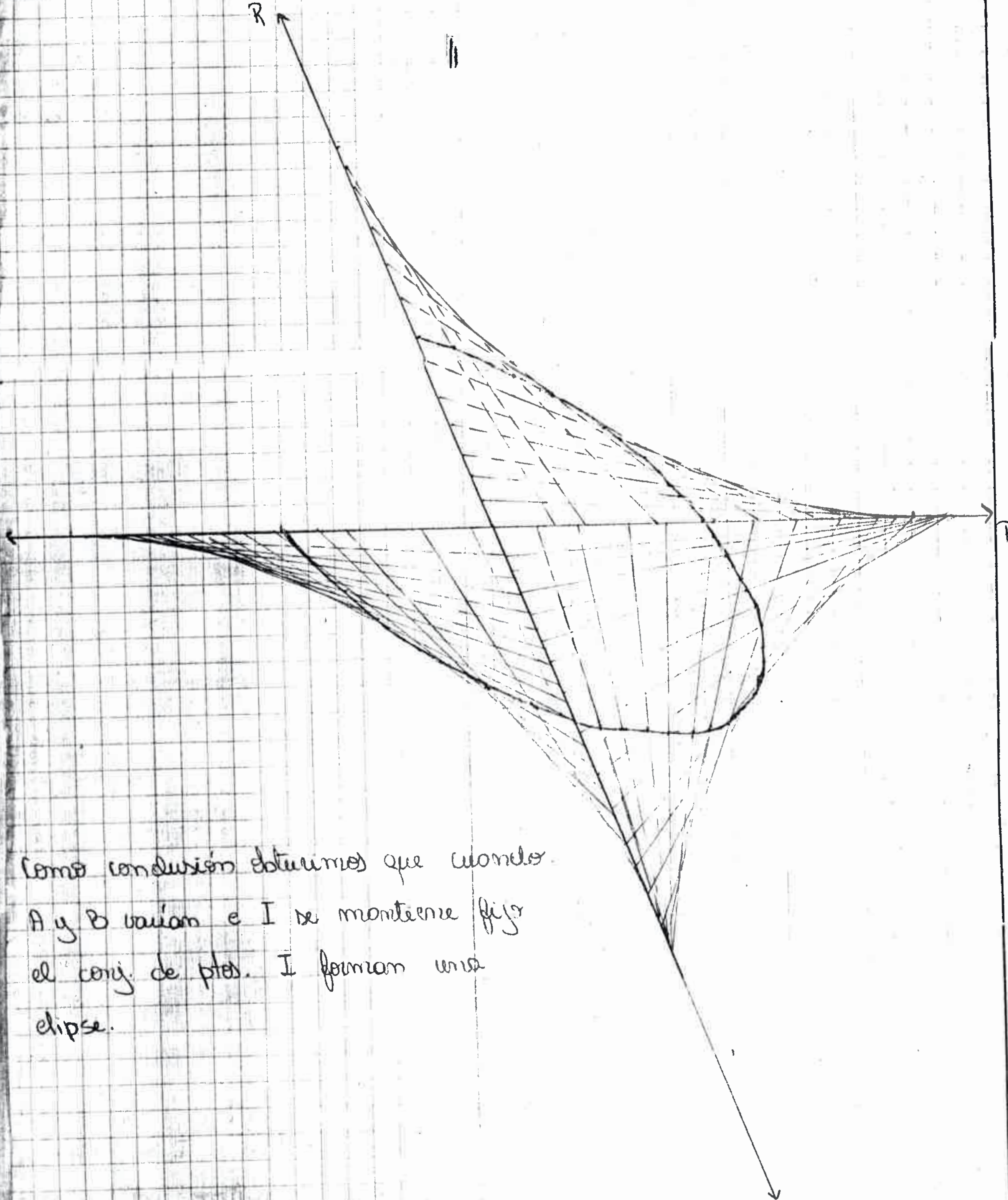
2do caso:

I ≠ pto. medio $\overline{AB}$.




Como conclusión obtuvimos que cuando A y B varían e I se mantiene fijo el conj. de ptos. I forman una elipse simétrica al eje x o al eje y, dependiendo de la ubicación de I.

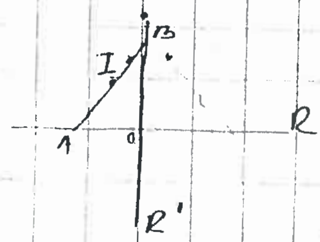
②




Como conclusión obtuvimos que cuando A y B varían e I se mantiene fijo el conj. de ptos. I forman una elipse.

(4)

* Supongo q' $I = \frac{\overline{AB}}{2} \Rightarrow \overline{AI} = \overline{IB}$



Si $A = 0 \wedge B \in R'^{\uparrow} \Rightarrow I \in R'^{\uparrow}$, $I = \frac{\overline{AB}}{2}$ $\Rightarrow \overline{OI} = \frac{d}{2}$

Si $B = 0 \wedge A \in R^{\rightarrow} \Rightarrow I \in R^{\rightarrow}$, $I = \frac{\overline{AB}}{2}$ $\Rightarrow \overline{OI} = \frac{d}{2}$

Si $A = 0 \wedge B \in R'^{\downarrow} \Rightarrow I \in R'^{\downarrow}$, $I = \frac{\overline{AB}}{2}$ $\Rightarrow \overline{OI} = \frac{d}{2}$

Si $B = 0 \wedge A \in R^{\leftarrow} \Rightarrow I \in R^{\leftarrow}$, $I = \frac{\overline{AB}}{2}$ $\Rightarrow \overline{OI} = \frac{d}{2}$

$\therefore$ Como $\overline{OI} \in R'^{\uparrow} = \overline{OI} \in R^{\rightarrow} = \overline{OI} \in R'^{\downarrow} = \overline{OI} \in R^{\leftarrow}$

$\Rightarrow \overline{OI} = \text{radio} \therefore \text{Cong}(O, \overline{OI})$ : Circunsferencia

* Supongo que $\frac{\overline{AB}}{2} < I < B$ ¿?

Si $A = 0 \wedge B \in R'^{\uparrow} \Rightarrow I \in R'^{\uparrow} \Rightarrow \overline{OI} > \frac{d}{2}$

Si $A = 0 \wedge B \in R'^{\downarrow} \Rightarrow I \in R'^{\downarrow} \Rightarrow \overline{OI} > \frac{d}{2}$

Si $B = 0 \wedge A \in R^{\rightarrow} \Rightarrow I \in R^{\rightarrow} \Rightarrow \overline{OI} < \frac{d}{2}$

Si $B = 0 \wedge A \in R^{\leftarrow} \Rightarrow I \in R^{\leftarrow} \Rightarrow \overline{OI} < \frac{d}{2}$

$\therefore$ cuando $I \in R' \Rightarrow \overline{OI} > d/2$, $I \in R \Rightarrow \overline{OI} < d/2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Cong}(O, \overline{OI})$ = elipse con eje focal $R'$

1)

* Supongo que $A < I < \frac{\overline{AB}}{2}$

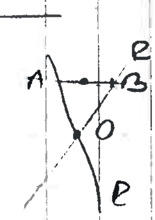
Analogamente que $\frac{\overline{AB}}{2} < I < B$

∴ cuando $I \in R \Rightarrow \overline{OI} > d/2$ <br> $I \in R' \Rightarrow \overline{OI} < d/2$ $\not\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Conj $(O, \overline{OI})$ = elipse con eje focal R

$\overline{AB} > d$

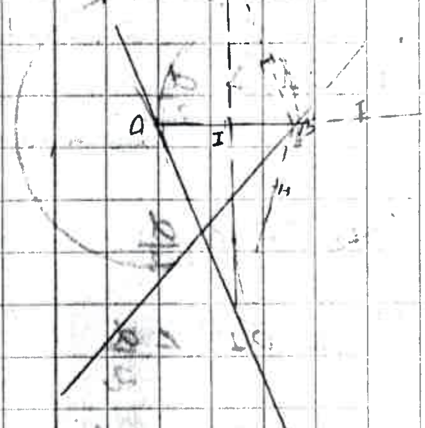
$I = \frac{\overline{AB}}{2} \Rightarrow \overline{AI} = \overline{IB}$




* Supongo que $\hat{AOB} < \pi/2$

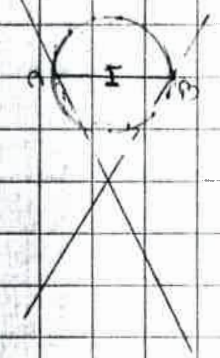
Si $A = O \wedge B \in e' \Rightarrow I \in e' \Rightarrow \hat{AOB}$ = llano

2) Si B es fijo y A varía, entonces forma una circumferencia de radio $\overline{AB}$ y centro B, entonces el conjunto de puntos I formará una circumferencia de centro B y radio $\frac{\overline{AB}}{2}$

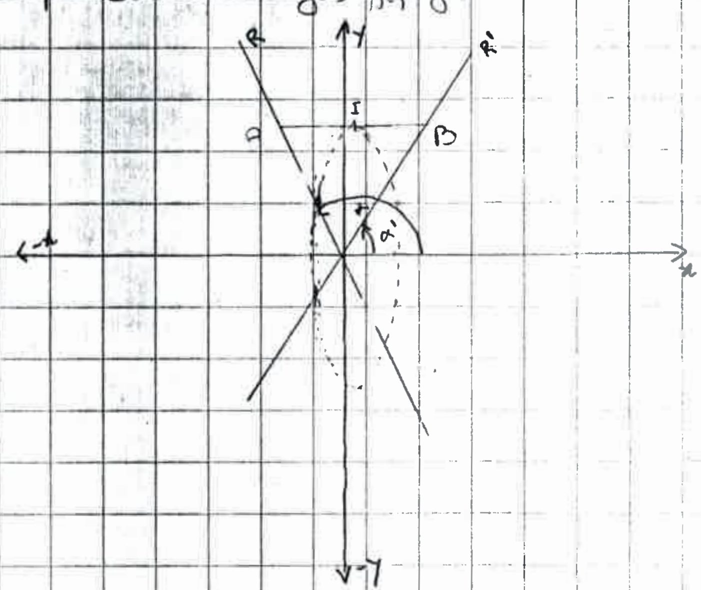



Si A es fijo, se repite el caso anterior, y el conjunto de puntos I, formará una circunferencia de centro A y radio $\frac{\overline{BA}}{2}$.
Por el punto medio de las 2 circumferencias, las cuales son secantes, pasa el eje radical.

Ahora si A y B varían en el mismo sentido (horario o antihorario), entonces puede ser una circunferencia de centro I y radio $\overline{AI} = \overline{IB}$

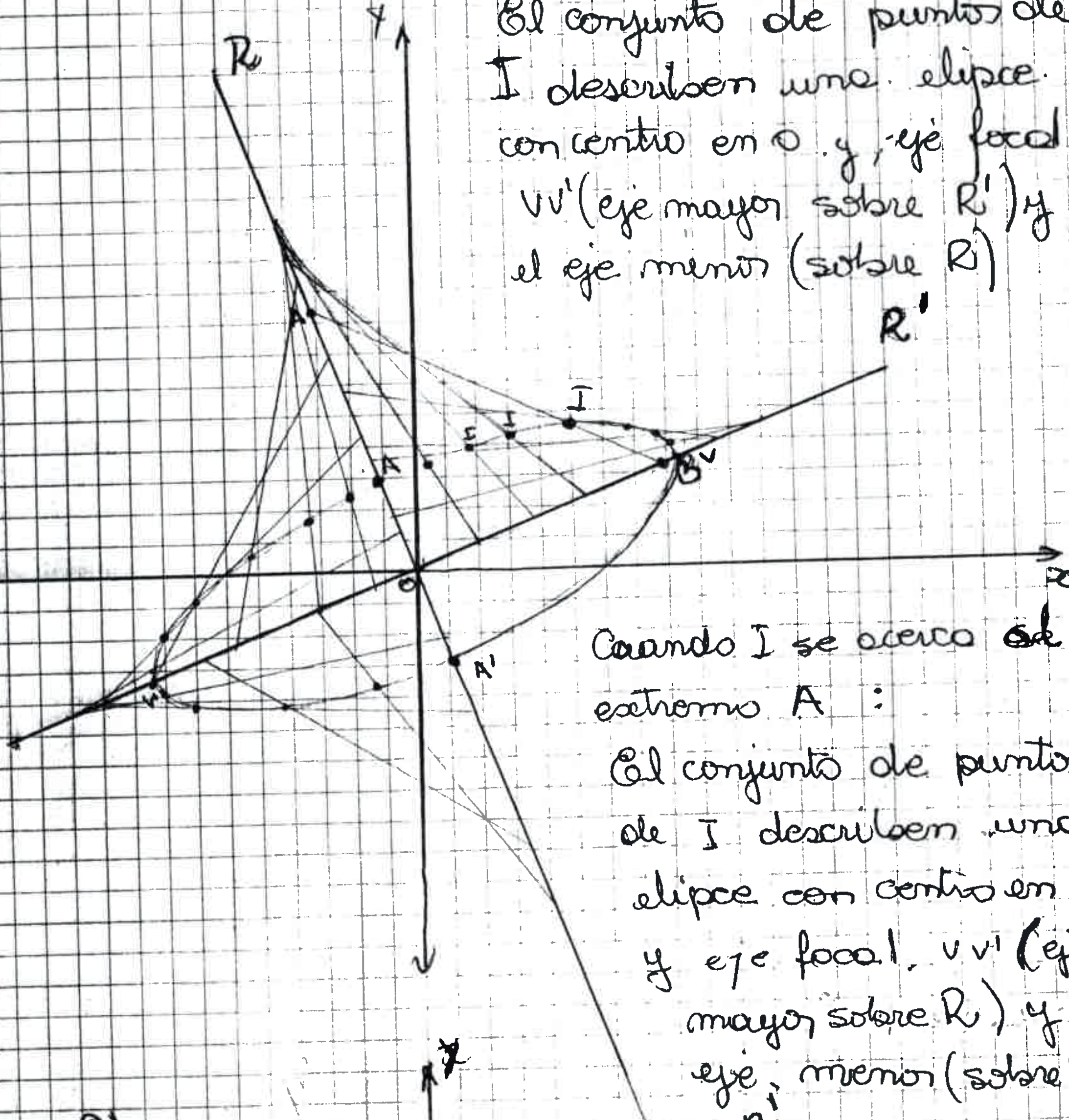



En el caso de que A y B varíen en sentidos diferentes formarían una elipse sobre los ejes con una rotación de un ángulo $\alpha$ y $\alpha'$.




Integrantes: BARRIOS CAROLINA
IMPACHE ANDREA
SOSA PATRICIA
ZANIN PABLO.

Problema I:

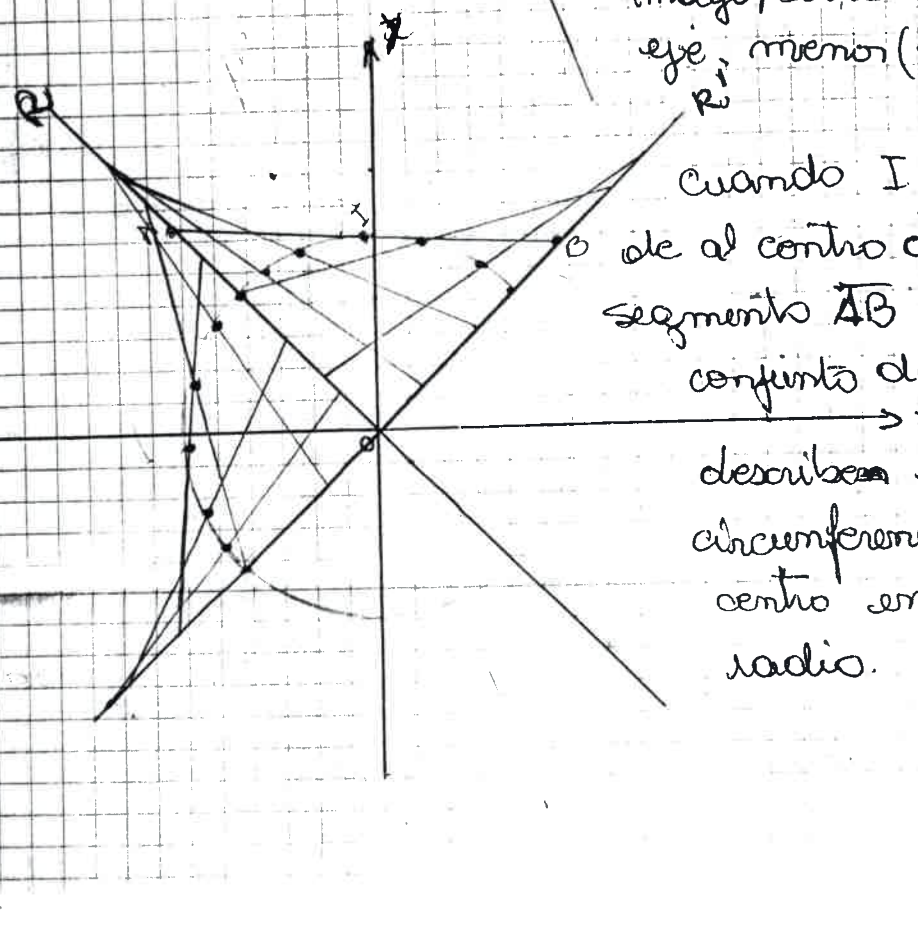



Cuando I se acerca al extremo B:

El conjunto de puntos de I describen una elipce con centro en O y eje focal VV' (eje mayor sobre R') y el eje menor (sobre R)

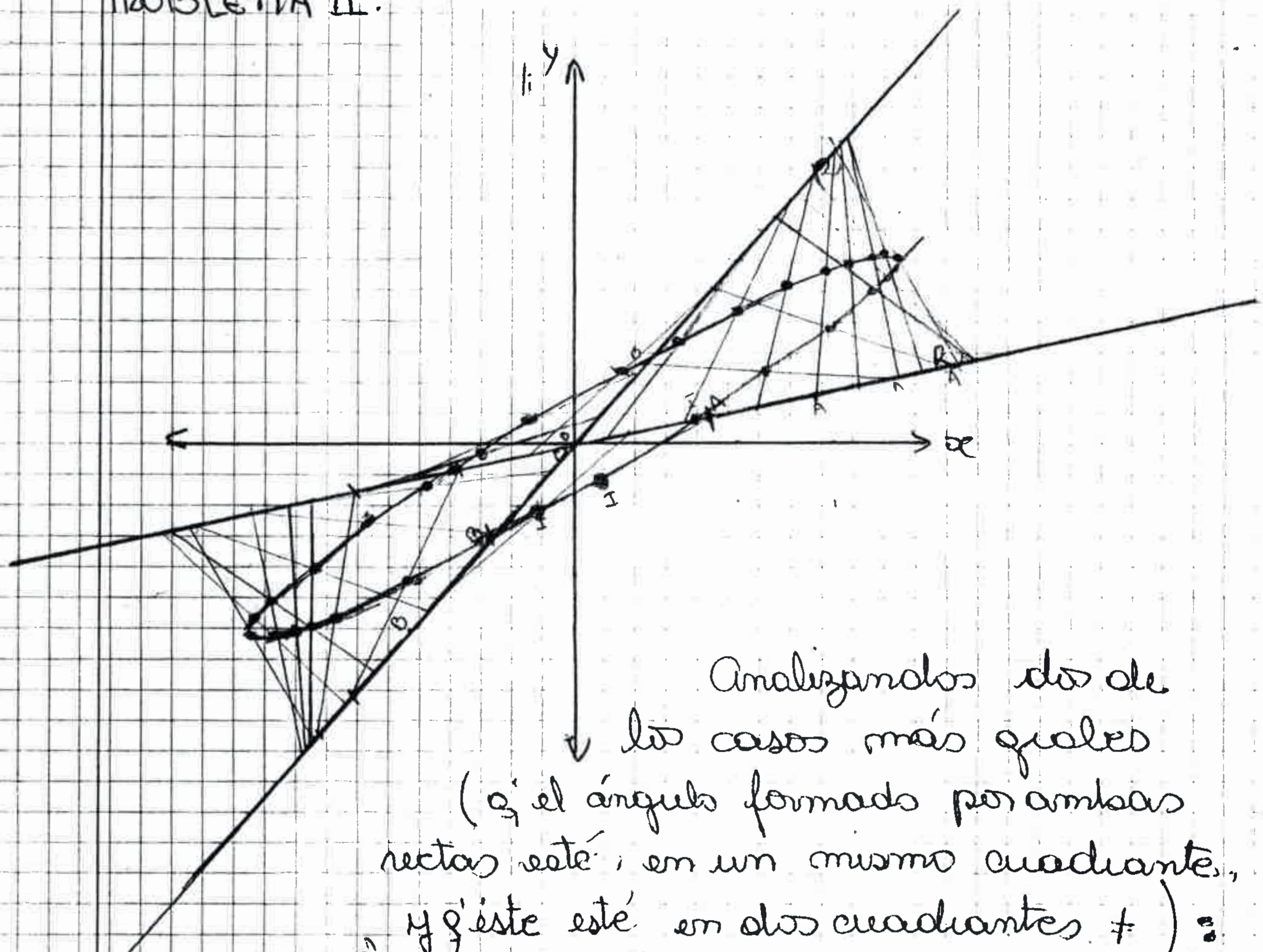
Cuando I se acerca al extremo A:

El conjunto de puntos de I describen una elipce con centro en O y eje focal VV' (eje mayor sobre R) y el eje menor (sobre R')



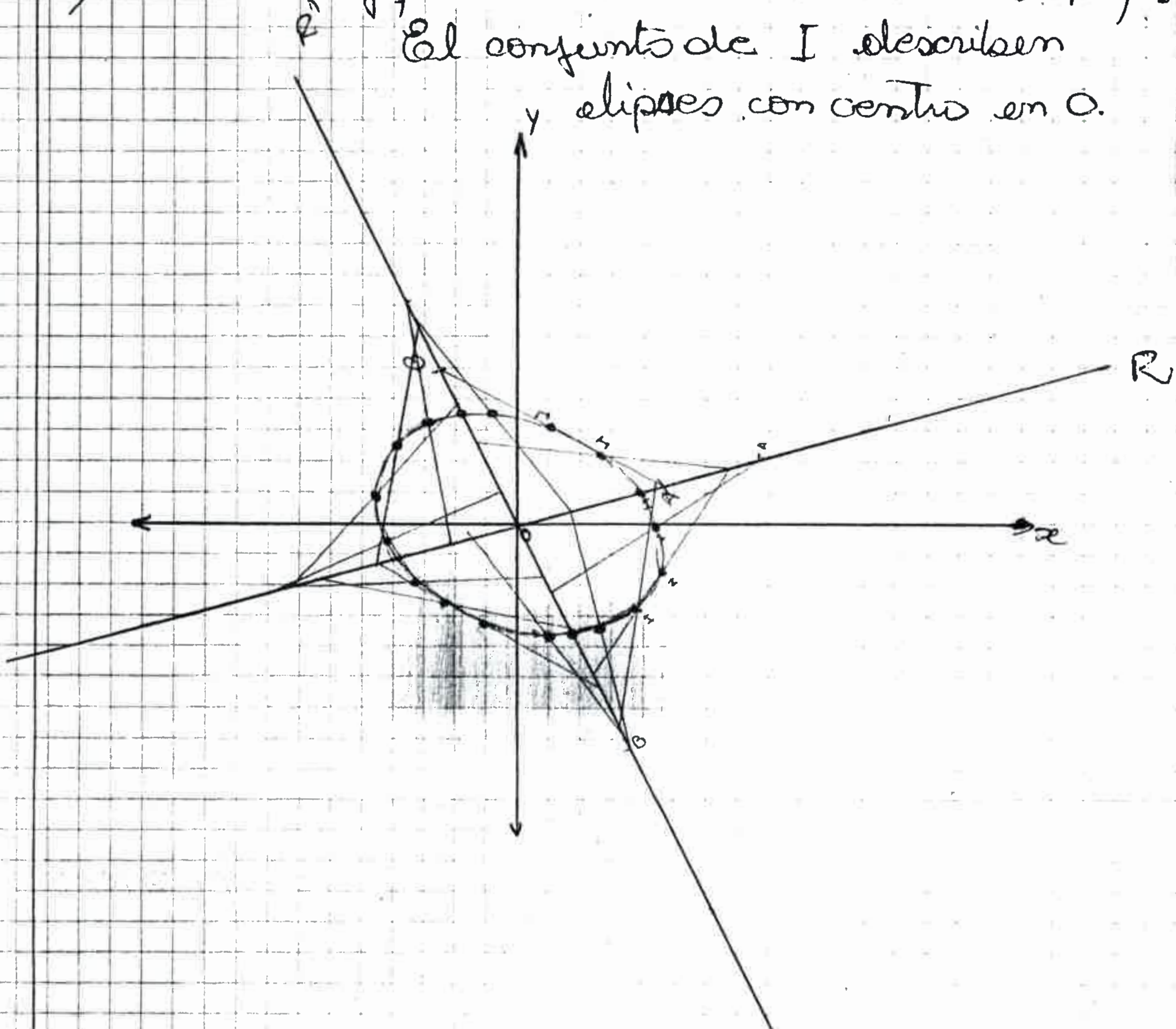

Cuando I corresponde al centro del segmento $\overline{AB}$ el conjunto de I describen una circunferencia con centro en O y radio $\frac{\overline{AB}}{2}$.

PROBLEMA II.




Analizando los dos de los casos más grales (q' el ángulo formado por ambas rectas esté en un mismo cuadrante, y q' éste esté en dos cuadrantes ≠ ):

El conjunto de I describen elipses con centro en O.



# ANEXO III

## PROBLEMA USANDO SOFTWARE

## TRABAJO DE LOS ALUMNOS

**Problema**: A partir de la definición como lugar geométrico determinar la ecuación canónica de la elipse, indicando la rotación y/o traslación correspondiente, si las hubiera, sabiendo que los focos son los puntos $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y la constante $a=\sqrt{6}$. Graficar teniendo en cuenta los sistemas de coordenadas que correspondan.

María Daniela Scorímbolo

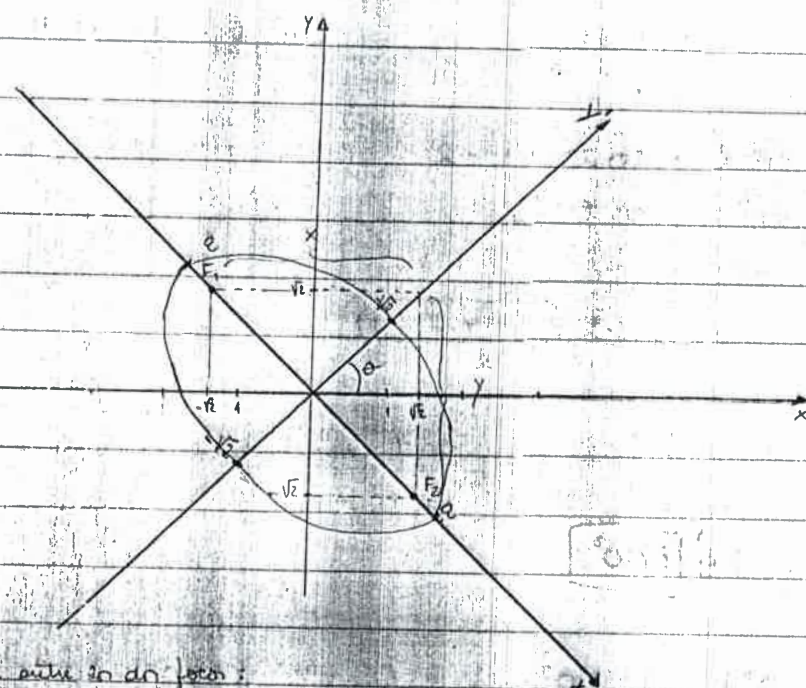
GEOMETRÍA II - PRIMER PARCIAL 30/09/99

1) $\mathcal{E} = \{ P \in \pi : |PF_1| + |PF_2| = 2a \}$

$F_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$F_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$a = \sqrt{6}$




$|F_1F_2| = 2c$

Calculo la distancia entre los dos focos:

$x = 2\sqrt{2}$

$y = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\overline{F_1F_2}^2 = x^2 + y^2$

$\overline{F_1F_2}^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8 + 8$

$\overline{F_1F_2} = \sqrt{16} \Rightarrow \boxed{\overline{F_1F_2} = 4}$

$|F_1F_2| = 2c \Rightarrow 4 = 2c \Rightarrow \boxed{c = 2}$

$a^2 - c^2 = b^2$

$(\sqrt{6})^2 - 4 = b^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = 2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ La ecuación canónica de la elipse en el sistema $x'y'$:

$$\boxed{\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{2} = 1}$$

El centro de la elipse es $(0,0)$

$tg\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

Se realizó una rotación de 45°

30 - 09 - 99 Paisal Sotecia

# Primer Parcial de Geometría II

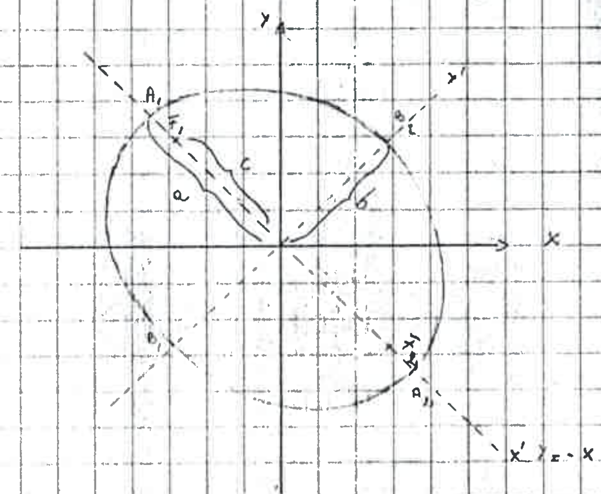
1- $F_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $F_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$

$a = \sqrt{6} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$6 = b^2 + 2 \Rightarrow 4 = b^2 \Rightarrow b = 2$

Ec. canónica es: $x^2/6 + y^2/4 = 1$

∃ una rotación en sentido anti-horario en un ángulo de 135° : el eje focal es $y = -x$



Russmann Claudio. Geometría I. 30-9-99.

Ejercicio N° 1

$a = \sqrt{6} \Rightarrow$ semieje mayor $= \sqrt{6} \Rightarrow$ eje mayor $= 2\sqrt{6}$.

distancia focal

$d = \sqrt{(-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2}$

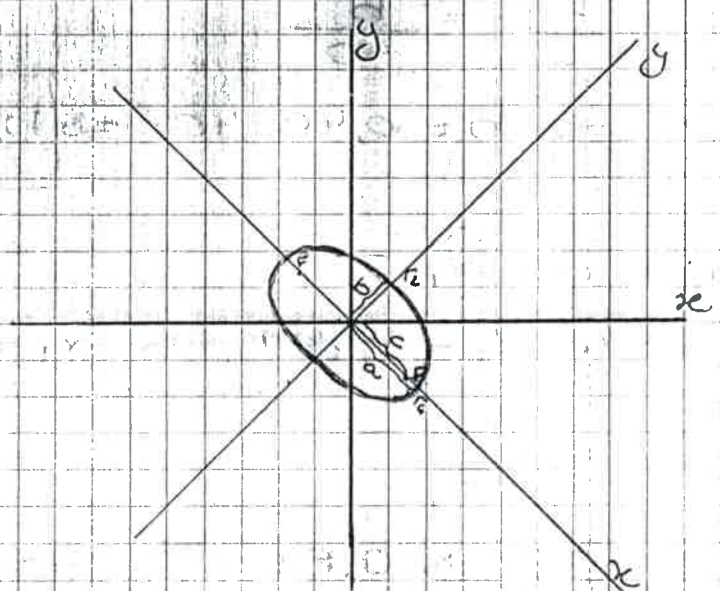
$d = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$.

$\Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6 = b^2 + 4 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

$$\boxed{\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{2} = 1}$$

hay una rotación de 135° o −45°



Vallejos

(1) $F_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ Dist Focal = $2c$.

$F_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $\boxed{A = \sqrt{6}}$

Como uno de los foco $F_1$ y $F_2$, su dist lo obtengo por.

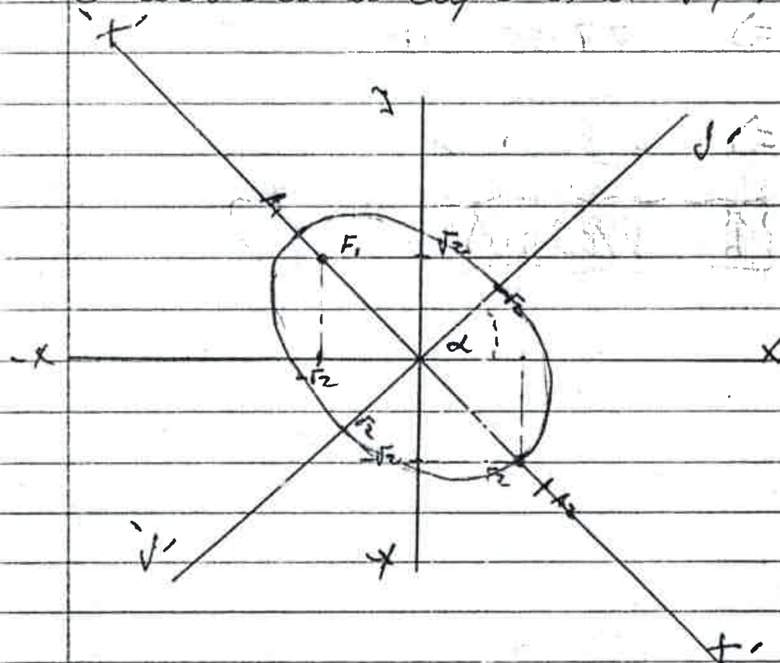
$\text{Dist}(F_1, F_2) = \|F_1 - F_2\| = 4$, ent $2c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

como $c^2 = A^2 - B^2 \Rightarrow 4 = 6 - B^2 \Rightarrow 4 - 6 = -B^2 \Rightarrow 2 = B^2$

$\boxed{B = \sqrt{2}}$

Ecu de la elipse es = $\dfrac{x'^2}{6} + \dfrac{y'^2}{2} = 1.$

El centro de la elipse es el $(0,0)$




como podemos ver esta elipse está girado con respecto al sistema $(x, y)$

El angulo de rotación es $\alpha$ donde $\alpha = 45°$.

Para determinar el angulo la ec elíptica debe ser así.

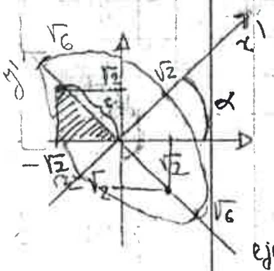
$2(c - a)\,\text{sen}\,\theta \cos\theta + b(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0.$

José Ledesma

30-09-99

GEOMETRIA I : Primer Parcial

Ejercicio 1




$b^2 = a^2 - c^2$

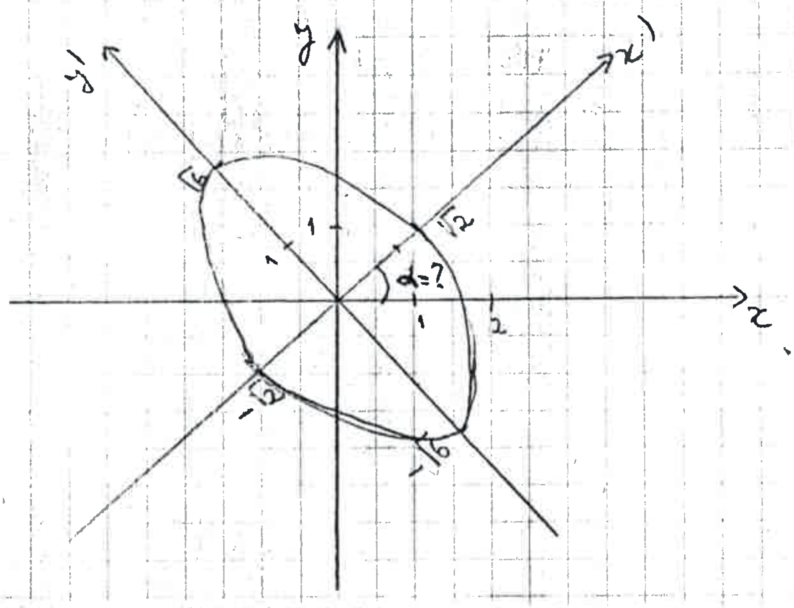
$b^2 = 6 - c^2$ ; $c^2 = (\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2$

$c^2 = 4$

$\rightarrow b^2 = 6 - 4$

$b^2 = 2$

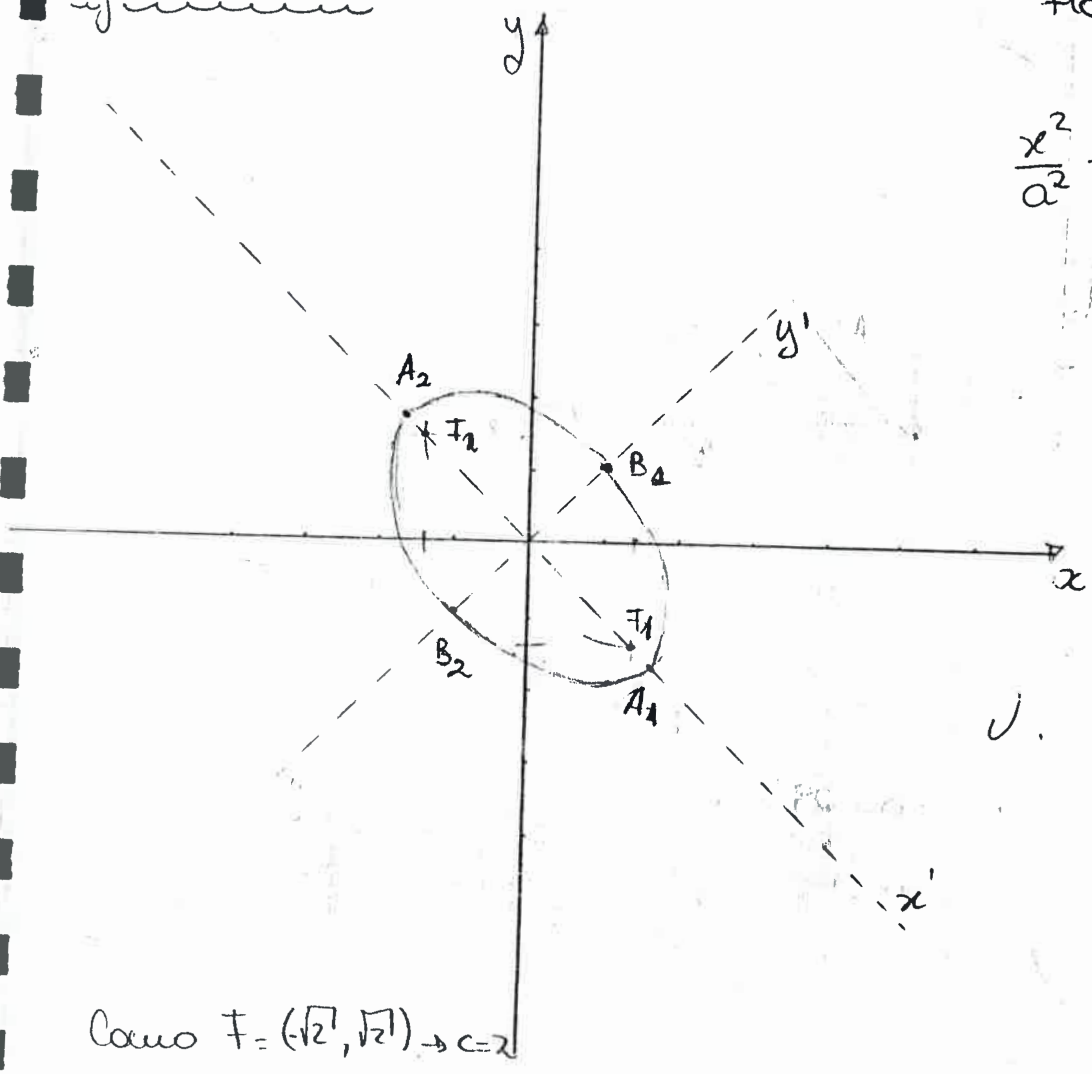
$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1}$$



Ejercicio n° 1:

Flores Ferreira Adriana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$




Como $F = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to c = 2$

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$(\sqrt{6})^2 = b^2 + 2^2$$
$$6 = b^2 + 4$$
$$6 - 4 = b^2 \to b^2 = 2$$
$$b = \sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

hay una rotación de 45° en sentido anti_horario

MALACALZA PAOLA

GEOMETRIA I

PAGINA: 1

FECHA: 30/9/99



1) $E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Focos: $f_1 : (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$f_2 : (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$2c = |\overline{f_1 f_2}| = \sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{4 \cdot 2 + 4 \cdot 2}$

$2c = 4 \Rightarrow c = 2$ $\boxed{a = \sqrt{6}}$

$b^2 = a^2 - c^2 = (\sqrt{6})^2 - 2^2$

$= 6 - 4 = 2$

$b^2 = 2 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{2}}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1}$

$x = x' \cdot \cancel{\text{sen}}\overset{\cos}{} \theta - y' \cancel{\cos}\overset{\text{sen}}{} \theta$ $(h, k) \in O(x, y)$

$y = x' \cancel{\cos}\underset{\text{sen}}{} \theta - y' \cancel{\text{sen}}\underset{\cos}{} \theta$ $(h, k)$ origen de $O'(x', y')$

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$

$B' = 0 \Rightarrow 2(C-A)\,\text{sen}\,\theta \cos\theta + b(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0$

$\text{tg}\, 2\theta = \frac{b}{a-c}$

$\text{tg}\, 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}$

$\theta = 36° \, 11' \, 2''$

$A' = \sqrt{6} \cdot \cos^2\theta + \sqrt{2} \cdot \text{sen}\,\theta \cos\theta + 2 \cdot \text{sen}^2\theta$

$A' = 0{,}81 + 0{,}67 + 0{,}69 = 2{,}177$

M. Moreno Soula

**1** $F_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; $F_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $a = \sqrt{6}$

$$\text{centro} = \frac{(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) + (\sqrt{2}, -\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{centro} = \frac{(-\sqrt{2}+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{centro} = (0,0)$$

$$c = \|(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - (0,0)\| \Rightarrow c = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (+\sqrt{2})^2}$$

$$c = \sqrt{2+2}$$

$$c = 2$$

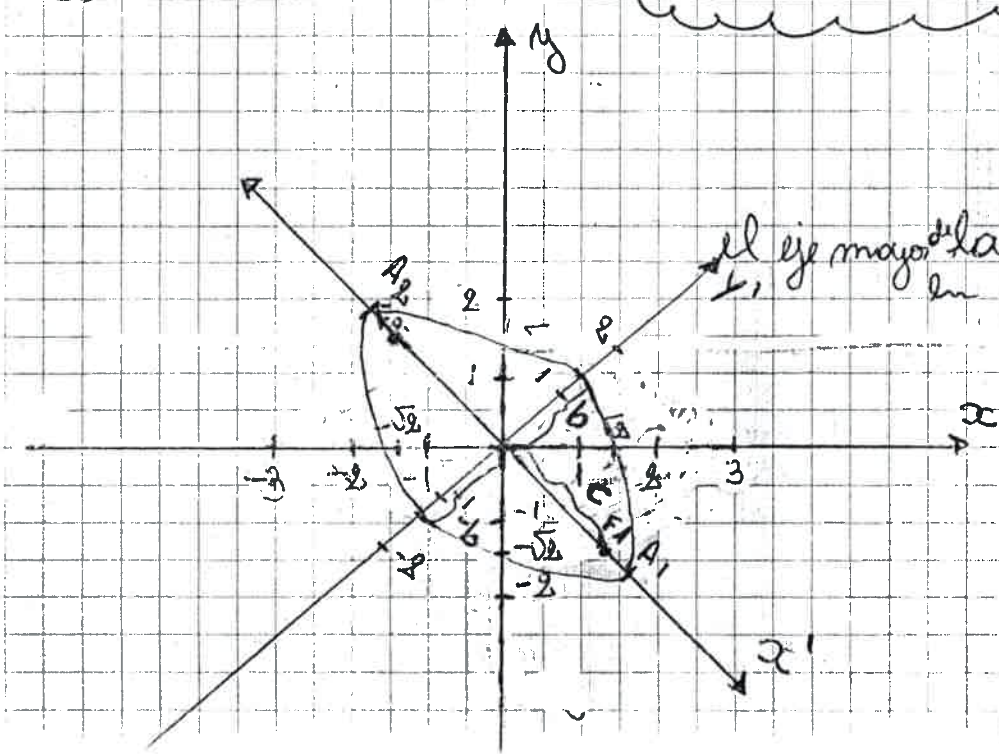
$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = (\sqrt{6})^2 - 2^2$$

$$b^2 = 6 - 4$$

$$b^2 = +2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{2} = 1$$




el eje mayor de la elipse se encuentra en el eje $x'$

$A_1 = (-\sqrt{6}, 0)$

$A_2 = (\sqrt{6}, 0)$

```
In[23]:=
   p[x_,y_,z_,k_]=Sqrt[(x-z)^2 + (y-k)^2]
Out[23]=
                    2          2
   Sqrt[(-k + y)  + (x - z) ]
In[24]:=
   (p[x,y,0,8])^2==(2*5-p[x,y,0,0])^2
Out[24]=
    2            2                  2     2   2
   x  + (-8 + y)  == (10 - Sqrt[x  + y ])
In[25]:=
   ExpandAll[%]
Out[25]=
         2              2
   64 + x  - 16 y + y  ==

          2     2              2     2
    100 + x  + y  - 20 Sqrt[x  + y ]
In[26]:=
   First[%]-Last[%]==0
Out[26]=
                           2     2
   -36 - 16 y + 20 Sqrt[x  + y ] == 0
In[27]:=
   (20Sqrt[x^2+y^2])^2==(-36-16y)^2
Out[27]=
          2     2                  2
   400 (x  + y ) == (-36 - 16 y)
In[28]:=
   ExpandAll[%]
Out[28]=
         2        2                            2
   400 x  + 400 y  == 1296 + 1152 y + 256 y
In[29]:=
   First[%]-Last[%]==0
Out[29]=
                  2                 2
   -1296 + 400 x  - 1152 y + 144 y  == 0
```

[illegible]

In[30]:=

```
First[%]/16==0
```

Out[30]=

$$\frac{-1296 + 400\ x^{2} - 1152\ y + 144\ y^{2}}{16} == 0$$

In[31]:=

```
ExpandAll[%]
```

Out[31]=

$$-81 + 25\ x^{2} - 72\ y + 9\ y^{2} == 0$$

```
<<Graphics`ImplicitPlot`
```

In[22]:=

```
ImplicitPlot[{25x^2+9y^2-72y-81==0},{x,-10,10}]
```

Out[22]=

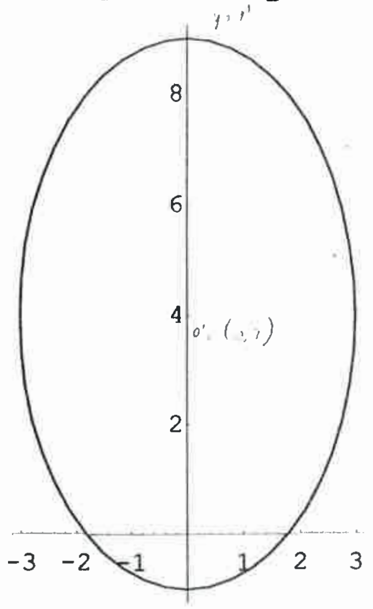
$$\text{ImplicitPlot}[\{-81 + 25\ x^{2} - 72\ y + 9\ y^{2} == 0\},$$
$$\{x, -10, 10\}]$$

*In[2]:=*

```
<<Graphics`ImplicitPlot`
```

*In[3]:=*

```
ImplicitPlot[{25x^2+9y^2-72y-81==0},{x,-10,10}]
```




*Out[3]=*

```
-Graphics-
```

## CONCLUSIÓN

Daniela Scarimbolo, Claudia Russm
Leticia Paisel, Eugenia Cullo

Para quien sabe manejar el programa Mathemáticas se facilitó mucho el trabajo y quien no sabe, teniendo las funciones definidas, lo puede usar cambiando los valores de las variables.

Lo que hace el programa es simplificar los pasos para la resolución de la elipse (en este caso)

Con respecto al gráfico, dibuja la elipse en los ejes originales, sin considerar los ejes trasladados (en este caso) o rotados. No nos dio el origen del nuevo sistema, y si existiera una rotación creemos que tampoco daría los ejes del nuevo sistema y el ángulo de rotación

Nos parecería interesante poder realizar algún paso para factorizar las expresiones y de esa manera hallar el origen del nuevo sistema.

1. $x^2 - 2xy + y^2 + 2y = 1$

$-2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases} \quad \theta' = \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \end{cases}$

$A' = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$B' = 0$

$C' = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$D' = 2\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{2}$

$E' = 2\cos\theta - 2\sin\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$F = 1$

$2y'^2 + \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 1 \quad (1)$

$2y'^2 + \sqrt{2}y' = 2\left(y'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 2\left[\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]$

$= 2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{1}{4}$

de $1 \Rightarrow 2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{1}{4} + \sqrt{2}x' - 1 = 0$

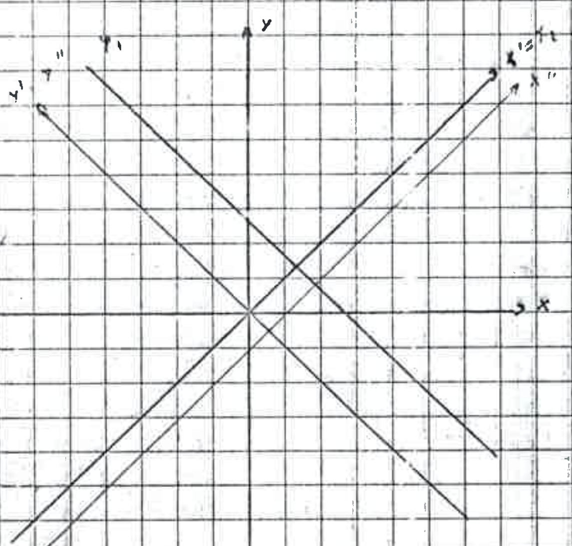
$A' = 2$, $C' = 0$, $D' = \sqrt{2}$, $E' = \sqrt{2}$ $\quad 2x'^2 + \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 1$

Así: $y'' = y' + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$x'' = x' - 0 \Rightarrow h = 0$

$\Rightarrow O'' = \left(0, -\sqrt{2}/4\right)$

$\Rightarrow$ NUEVA ECUACIÓN $2y''^2 + \sqrt{2}x'' - \frac{5}{4} = 0$



$y''^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x'' + \frac{5}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'' - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right)$

$y'' = y_1$

$x_1 = x'' - \frac{5}{4\sqrt{2}}$

$y_1^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 \Rightarrow 2p = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow p = -\sqrt{2}/4$

$O_1 = \left(5/4\sqrt{2}, 0\right)$ $\quad d = x = \frac{\sqrt{2}}{8}$

2. $F_1 = (0,0)$, $F_2 = (0,8)$, $a = 5$ — Elipse

3. $F_1 = (2,8)$, $F_2 = (2,2)$, $a = 6$ — Elipse

4. $F = (0,1)$, $d$: $x = -4$ — Parabola

5. $F_1 = (0,5)$, $F_2 = (0,-5)$, $a = 2$ — Hipérbola

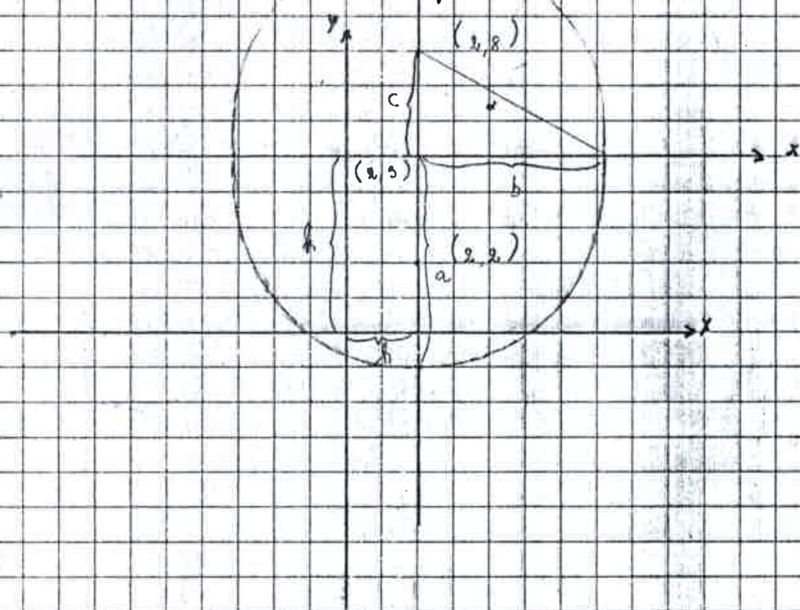
6. $F_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $a = 1$ — Hipérbola

ELIPSE $F_1 = (2,8)$ , $F_2 = (2,2)$ $a = 6$ $c = 3$ $a = \sqrt{c^2 + b^2}$

$36 - 9 = b^2 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$

$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{27} =$

ELIPSE TRASLADADA



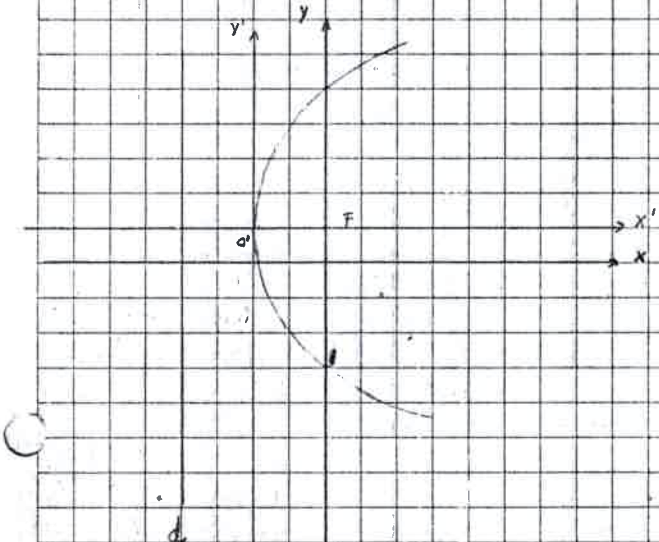

PARABOLA $F = (0,1)$ d. $x = -4$ $\Rightarrow (y-1)^2 = (x+2)\,8$

$y'^2 = 8x'$ $\Rightarrow$ PARABOLA TRASLADADA.

$O' = (-2,1)$

$2px' = 8x' \Rightarrow p = 4 \Rightarrow$

d $x' = -2$



60655 anexo