# UNRC
# Tesis por la Opción al Grado: Magister en Didáctica de la Matemática

## Análisis Didáctico del Tema Cuádricas en el Texto Algebra Lineal y Geometría de A. Larrotonda, Propuestas Alternativas para su Utilización

Autora: Ing. Dora Elia Moreno
Director: Dr. Jorge Antonio Vargas
Codirector: Dr. Eduardo Gonzalez

Año 2003

# *Agradecimientos*

- ✓ Al Dr. Jorge Antonio Vargas por su valiosa participación en la concreción de éste trabajo de tesis.
- ✓ Al Dr. Eduardo Gonzalez por los aportes didácticos realizados.
- ✓ A la Ing. María Ziletti de la U. N. R. C. por la colaboración prestada en la selección de ejercicios de aplicación.
- ✓ Al Ing. Victor Rodrigo por su aporte en la ubicación práctica del problema propuesto que vincula con temas de mecánica racional.
- ✓ A mis docentes de didáctica de la matemática Mg. Irma Saiz y Dr. André Rouchier.
- ✓ A los restantes docentes de los distintos cursos de la Maestría a quienes les debo haber logrado una visión más amplia de la realidad en la que estoy inmersa al cumplir con mi función docente.
- ✓ A la FICES – UNSL por su apoyo académico.
- ✓ A la UNRC por generar esta Maestría.

# Indice


| Tema | pág. |
|---|---|
| 1.- Introducción. | 1 |
| 1.1.- Resumen. | 1 |
| 1.2.- Generalidades. | 1 |
| 1.3.- Estructura del trabajo. | 4 |
| 2.- Problema de investigación. | 6 |
| 3.- Objetivos. | 10 |
| 4.- Estado del arte sobre el tema. | 11 |
| 5.- Marco teórico conceptual. | 23 |
| 6.- Diseño experimental. | 36 |
| 7.- De los conocimientos previos. | 41 |
| 8.- Análisis de texto. | 45 |
| 8.1.- Generalidades. | 45 |
| 8.2.- Formas cuadráticas. | 45 |
| 8.3.- Funciones cuadráticas. | 58 |
| 8.4.- Cónicas y cuádricas. | 68 |
| 8.5.- Centro y tangente. | 87 |
| 8.6.- Forma normal.- | 93 |
| 8.7.- Cuádricas en el espacio euclídeo. | 96 |
| 8.8.- Clasificación de las cuádricas. | 102 |
| 8.9.- Cuádricas en $R^3$. | 106 |
| 9.- Origen del texto. | 110 |
| 10.- Consideraciones y alternativas didácticas. | 114 |
| 10.1.- Consideraciones. | 114 |

10.2.- Aportes didácticos referentes a algunos conceptos teóricos tomados del texto analizado. 117
10.3.- Análisis de algunos aportes didácticos presentados por el autor del texto. 121
10.4.- Aporte didáctico personal. 127
10.5.- Análisis del aporte didáctico. 130
11.- Conclusiones. 132
12.- Bibliografía. 136

# 1.- Introducción

## 1.1.- Resumen

El objetivo de éste trabajo es rescatar la posibilidad de que un texto, creado para satisfacer las necesidades de alumnos y docentes de ciencias exactas, pueda ser utilizado con alumnos y por docentes de matemática en Carreras de Ingeniería. Por ello, se realiza un análisis del desarrollo teórico, ejemplos y ejercicios de aplicación presentados por el autor del texto Álgebra Lineal y Geometría (Larrotonda, A. 1973), del tema Cónicas y Cuádricas. Se proponen situaciones de aprendizaje que hacen viables adoptar el texto como bibliografía básica del docente. Además se presenta enfoques modernos en lo que se refiere al tratamiento del tema en cuestión, según las necesidades de algunas carreras.

## 1.2.- Generalidades

El siglo XX, tal vez para la gran mayoría de los seres humanos, es considerado como el más pródigo en transformaciones de toda la historia de la humanidad. Esto se debe a que en él, se revolucionó toda la vida económica, política, social, científica, técnica, cultural, idiomática y hasta la propia vida doméstica del hombre común cambió, la cual cambió para una parte considerable del mundo.

La educación no permaneció indiferente a estos cambios y desde los primeros años del citado siglo, que ya finalizó, se oyeron reclamos de transformación en el terreno

pedagógico y didáctico. Esta centuria, también fue testigo de un hecho inédito, la atención por la sicología de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje, hecho cada vez más reconocido entre pedagogos y docentes. Quizás en la educación superior hubo más lentitud para aceptar la introducción de los resultados en las investigaciones psicológicas dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje, pero en diferentes latitudes y en particular en Argentina, este proceso ha ido tomando auge en la última década. V. Guyot (Revista Alternativa, Año IV-N° 17, p.17) advierte que *la educación, entendida como un proceso social protagonizado por sujetos que se desarrollan relacionalmente en su peculiar situación, supone ciertos a priori históricos, .. . Las formas de la organización política, económica y social, las representaciones de los sujetos acerca del mundo y de sí mismo, el grado de desarrollo del conocimiento científico y tecnológico, los modos subjetivos del vivir y del pensar en la compleja trama de la cultura, condicionan las prácticas educativas y sus modos de concreción.* Existen interrogantes generalizados vinculados a la práctica efectiva de la enseñanza de las ciencias y esta preocupación afecta de diversas maneras a los sujetos que participan de ella, generando interrogantes cada vez más apremiantes respecto de las posibilidades de una transformación que mejore las condiciones de la enseñanza.

En la práctica docente, la función del conocimiento requiere un abordaje epistemológico puesto que debe distinguirse el conocimiento científico producido y utilizado por la comunidad científica, del conocimiento en su forma escolarizada, transpuesto didácticamente a los fines de la enseñanza (Chevallard, Y. 1997).

La presente tesis concede un peso importante a la tarea fundamental y general de la comunidad matemática, que como lo indica Miguel de Guzmán (Revista Alternativas, Año IV – N° 17, p. 37), consiste en contribuir de modo efectivo al desarrollo integral de la cultura humana.

Admitiendo que la psicología de la educación matemática mira la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque nuevo, diferente de aquel en el que las matemáticas escolares se inspiran (su lógica interna y la incorporación de su propia evaluación). Considerando que el enfoque psicológico intenta comprender qué hacen los alumnos cuando se encuentran frente a las matemáticas y asume que el aprendizaje de ellas tiene su propia psicología y además aceptando también que los estudiantes y profesores

tienen ideas propias acerca de las matemáticas en las situaciones de aprendizaje (Gutierrez Rodríguez, A. 1991, p. 62), esto conduce a preguntarse:

¿Quién puede decidir cómo deberían enseñarse las matemáticas?

y por ende,

¿Cómo se enseñaron o se enseñan las matemáticas?.

Se encuentra en este punto las opiniones aportadas no solo por la sicología, sino también por la epistemología y la metodología de la enseñanza.

Esta Tesis se concentra en el análisis de un texto destinado al nivel universitario que trata temas de álgebra y geometría. El análisis tiene la intención de resaltar los siguientes aspectos:

- ✓ La concepción epistemológica del autor.
- ✓ La propuesta didáctica subyacente.
- ✓ La posibilidad de lograr cambios en la propuesta didáctica del autor con el objetivo de crear situaciones de aprendizaje.

Ello se trabaja a partir de la idea de que los docentes sienten la necesidad de validar la organización de los objetos de conocimiento y su accionar los lleva a seleccionar un libro de texto en el cual encuentra de manera conciente o inconsciente, una coincidencia entre su concepción epistemológica y la del autor.

En la elección del texto se puede observar la influencia en la decisión de "*Como deberían enseñarse las matemáticas*" y subyacente a esto, "*Como se enseñan las matemáticas*".

La selección de un texto para su análisis y posterior transformación a situaciones de aprendizaje acorde a las postuladas por la Teoría de las Situaciones, presentada por G. Brousseau (cabe recordar que fue el primero en referirse a las situaciones de aprendizaje y se lo considera el creador de la teoría de las situaciones, la que ha sido puesta a prueba por

numerosos investigadores), lleva a presentar no solo la concepción epistemológica implícita, sino los conocimientos previos para desarrollar el objeto de conocimiento ***Cónicas y cuádricas***. El texto seleccionado tiene por autor a Ángel Rafael Larrotonda y responde al título Álgebra Lineal y geometría – EUDEBA – Ed. 1973. ¿Por qué? Por que es un libro que, a juicio de varios miembros de la comunidad científica, está bien escrito, está en castellano y además fue muy usado en carreras tales como Licenciaturas en Matemáticas en diversas Universidades del país.

Luego del análisis del texto "*capítulo 4*" se realizan aportes de situaciones de aprendizaje y se presentan los resultados del análisis mediante cuadros en los que se destaca las capacidades que el autor desea desarrollar y las posibles capacidades a desarrollar, creando nuevas situaciones.

### 1.3.- Estructura del trabajo

Luego de la introducción, en el apartado 2 (Problema de Investigación) se alude al problema de la elección de textos para la enseñanza y en el apartado 3, se listan los objetivos generales y específicos de la investigación.

En el apartado 4 (Estado del Arte sobre el tema), se presentan ideas globales relativas al objeto de estudio de la didáctica de la Matemática, la trasposición didáctica, y la teoría de las situaciones; se plantea en forma general posturas epistemológicas en la didáctica y el concepto de obstáculo epistemológico.

En el apartado 5 (Marco teórico conceptual) se presenta una distinción entre un marco constructivista y uno conductista, además de una breve reseña del desarrollo histórico - epistemológico de las Cónicas.

En el apartado 6 (Diseño experimental), se describen las dimensiones del análisis consideradas (epistemológica, social y cognitiva pedagógica).

El cuerpo del trabajo (apartado 7: De los conocimientos previos, apartado 8: Análisis de texto y apartado 9: Origen del texto), consta de una descripción pormenorizada del texto en cuestión y un análisis descriptivo de las potencialidades de la ejercitación presentada en el mismo. Además, en el apartado 10 (Consideraciones y alternativas

didácticas), se realiza el análisis de un teorema de matemática avanzada, tomado de otro texto, a los efectos de comparar y extraer conclusiones acerca de la posición epistemológica del autor. Por último, se realiza una propuesta didáctica a través de la presentación de un problema que llevará al alumno a la investigación de objetos matemáticos específicos.

El trabajo finaliza con las conclusiones extraídas de los apartados anteriores.

## 2.- Problema de investigación

La epistemología, como una rama de la filosofía interesada por el conocimiento científico, plantea cuestiones acerca del origen del conocimiento científico, los criterios de validación, y el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento, entre otras. Aquí interesa el conocimiento científico correspondiente al dominio particular de las matemáticas. Existen preferencias a enfocar, en algunos, las cuestiones epistemológicas de una manera filosófica, y otros de una manera más científica. Esto conduce a cuestiones en el primer caso, del tipo ¿cómo se puede explicar racionalmente un resultado científico sobre la base de lo que se obtiene de él? En el otro, la pregunta es, ¿cómo se obtuvo de hecho un resultado científico dado?

Estas preguntas nos muestra dos tipos de intereses creados. Uno de ellos es el de los interesados en los fundamentos de las matemáticas, y el otro, el de los educadores matemáticos. Estos últimos están más interesados en explicar los procesos de crecimiento del conocimiento matemático y los procesos de descubrimiento matemático realizado tanto por los expertos matemáticos como por sus estudiantes.

No todos los educadores comparten la misma epistemología, aun cuando se interesen por cuestiones epistemológicas similares. La práctica educativa conduce, a través de su accionar, a la producción de resultados cuya lectura debe realizarse.

Si nos referimos a un objeto de conocimiento, ***Cuádricas en $R^n$*** (que admite un estudio a partir de la geometría euclideana o a partir del álgebra lineal), es notable la dificultad puesta de manifiesto por los alumnos que consideraban haber aprendido el tema en una asignatura determinada y se encuentran en otra correlativa en la cual no son capaces de reconocer el mismo objeto de conocimiento si se lo representa simbólicamente a través de una ecuación apropiada según el sistema de referencia más usado. Cuando se supone

superado este obstáculo, el mismo reaparece al utilizarse dichos objetos de conocimiento en asignaturas específicas de la carrera. Si la dificultad persiste:

¿Qué genera este obstáculo?

Normalmente, éste objeto de conocimiento se estudia adoptando como sistema de referencia, el sistema de coordenadas cartesianas. Pero ello lleva a trabajar a las mismas dentro de un marco geométrico cuando se refiere a cuádricas en $R^2$ y $R^3$. Dicha posibilidad se pierde cuando debe trabajarse en $R^n$ con $n > 3$. Si bien las posibilidades de utilizar distintas representaciones semióticas (analíticas, algebraicas, etc), se pierde en el juego de marcos la representación geométrica.

Por otra parte, en éste punto se encuentra el hecho de mantener como referencia una base ortonormal aún cuando se trabaje con ecuaciones paramétricas.

Asimismo, no se encuentra especificado en los contenidos mínimos que muchos modelos físicos importantes, no se definen en base al sistema de coordenadas cartesianas.

¿Es posible enseñar las cónicas en una base tal como la cilíndrica o la esférica?.

¿Qué impide el tratamiento de los temas en las distintas bases?

Obviamente hay muchas razones. Algunas de ellas se detallan a continuación.

- ✓ En los contenidos mínimos no se explicita la importancia del manejo de los distintos sistemas de referencia.
- ✓ La autonomía de cátedra suele confundirse con el aislamiento que impide la verticalidad de las relaciones entre una asignatura y las que se sustentan de ellas.
- ✓ La abundancia de objetos matemáticos necesarios a enseñar.
- ✓ El tiempo máximo destinado al aprendizaje de ellos según la curricula de la carrera.
- ✓ Los tiempos necesarios para lograr el aprendizaje de los mismos.
- ✓ Los métodos de enseñanza más aptos para lograr reducir los tiempos de aprendizaje varían con el docente que los aplica, los alumnos, sus edades, sus historias de aprendizaje, etc.

- ✓ El tiempo de prueba y error en la aplicación de una metodología de enseñanza es apreciable, aproximadamente un 10% del período de actividad docente.
- ✓ Las situaciones de aprendizaje a crear son numerosas.
- ✓ Los libros de textos cubren un espectro de objetos de conocimiento, pero toda amplitud en un aspecto (mayor cantidad de objetos de conocimientos a tratar), lleva implícito una limitación en otro (menor profundidad en el tratamiento de cada uno).
- ✓ Etc.

Volviendo al origen, es decir, a los momentos en que se planifica y se ejecuta el proceso de enseñanza de las cuádricas, se observa que los docentes que deben enseñar este tema, lo hacen siguiendo uno de los dos caminos indicados a continuación: desde la geometría analítica hasta culminar en el álgebra lineal y las formas bilineales, o en el sentido opuesto. En cualquier caso, es común que el docente, en sus comienzos acepte la guía que proporciona un texto o construya su accionar en base a las representaciones que logre desde la lectura de varios textos que tratan sobre el tema. M. P. Jiménez (1997) hace referencia a la importancia que un profesor le asigna a un texto. Advierte que una de las decisiones más importantes, es la de elegir un libro determinado, llevando en algunos casos a optar por dos posiciones extremas.

- ✓ Atribuirle la mayor parte de los males que aquejan a la enseñanza de las ciencias.
- ✓ Enseñar con referencia al ´sacrosanto` texto, desde la creencia – implícita o explícita – de que todo cuanto se propone en él es correcto y adecuado, tanto desde el punto de vista didáctico como científico.

Los textos, en su desarrollo, muestran en parte las representaciones del o de los autores, además de encontrarse subyacente su concepción epistemológica.

Si el tema *Cónicas y cuádricas* se desarrolla a partir de los conocimientos del álgebra lineal, esto es, desde las formas bilineales, se encuentra abundante bibliografía que trata este objeto de conocimiento. Parte de ella no tiene 4 años de vigencia y se aproxima a las expectativas actuales del docente. Esto ha llevado a caer en desuso bibliografía que fue adoptada, hace aproximadamente tres décadas, como guía del docente.

¿Porqué?

Es lícito admitir que es frecuente que las representaciones de los autores no sean interpretadas con total fidelidad por los lectores, y esto contribuye a modificar, o no, su accionar en lo que se refiere a toma de decisiones respecto a los objetos del conocimiento a tratarse en el aula.

Es cierto que aún en los casos en los que el docente adopte un texto como básico, es posible que la ejercitación propuesta no sea utilizada en su totalidad. Además, puede encontrarse que la selección o no del texto base, esté influenciada por la ejercitación propuesta por el autor, debido al grado de aproximación entre las representaciones del autor y del docente con respecto al tema en cuestión. Estas representaciones, en el caso del docente, pueden estar fundadas en las características de la carrera en la cual está inserto el objeto de conocimiento, en los tiempos didácticos destinados al aprendizaje, en su experiencia personal, etc. Por ello, normalmente las representaciones del autor están generalmente direccionadas por su apreciación personal respecto a como se aprende y esto involucra la postura de cómo debe enseñarse.

Hay también una relación entre los hábitos que toman los alumnos y el tipo de enunciados a los que se los habitúa.

Por todo esto, es importante preguntarse si cualquier texto o enunciado de ejercicios puede ser llevado a cualquier práctica o si, por el contrario, ciertos enunciados inducen ya por sí mismo, al desarrollo limitado de ciertas capacidades individuales.

Intentando arribar a una respuesta con fundamento, se plantean los siguientes objetivos.

## 3.- Objetivos

### Objetivos generales

- ✓ Inferir las representaciones del autor de un texto a partir del análisis del tratamiento teórico y ejercitación propuesta de un tema determinado.
- ✓ Determinar la posibilidad de utilizar el texto en la enseñanza de temas en asignaturas destinadas a carrera de ingeniería.

### Objetivos específicos

- ✓ Analizar el desarrollo teórico del tema *Cónicas y cuádricas* presentado en el texto Álgebra lineal y geometría cuyo autor es Ángel R. Larrotonda.
- ✓ Realizar un análisis didáctico de la ejercitación propuesta por el autor.
- ✓ Proponer formas alternativas de tratamiento de tema para lograr desarrollar otras capacidades en los alumnos.

## 4.- Estado del arte sobre el tema

En la práctica docente (Pd) se destacan tres elementos que funcionan desencadenando modos de relación entre los mismos. Ellos son: docente (d), alumno (a) y conocimiento (c).

$$Pd = \{d, a, c\}$$

Pero este microespacio está contenido en otros tales como institución escolar (Ie), sistema educativo (Se), etc. Esto hace que el problema de la práctica docente no sea resuelto únicamente desde la perspectiva pedagógica, ya que requiere también de las ciencias sociales y la epistemología.

$$Pd \subset Ie \subset Se$$

La función que cumple el conocimiento en la práctica docente también debe ser abordado desde la epistemología debido a la necesidad de diferenciar el conocimiento científico, producido y utilizado por la comunidad científica, del conocimiento en su forma escolarizada. Esta diferencia se pone de manifiesto, por un lado, debido a que el mismo es construido a los fines de ser enseñado según la lógica dada por el sistema de enseñanza, la currícula, las secuencias temporales de los aprendizajes y los procesos de evaluación (Chevallard, Y. 1997). Por otro lado, el docente ha constituido una red de conceptos, representaciones y certezas en base a su saber, que lo llevan a partir de su experiencia personal a plantear, con ayuda de sus opciones teórico – pedagógicas, su proyecto docente (Guyot,V. y col. 1992).

Si la ciencia que nos compete es la matemática, podemos continuar esperando de ella su contribución al progreso humano. Miguel de Guzmán (1999 p. 39) sintetiza en tres tareas el modo de lograrlo.

- ✓ Resolver los problemas del campo y los que el desarrollo de la sociedad impone.
- ✓ Conservar y transmitir el legado matemático.
- ✓ Transferir a la sociedad los resultados de sus éxitos.

Obviamente la producción del conocimiento científico implica partir de un orden legitimado previamente por la comunidad científica. Esta comunidad está inmersa en una situación histórica, y esa misma situación histórica impone cambios en las prioridades en educación matemática.

En las últimas décadas del siglo XX se evidencian necesidades de cambio en diversas latitudes del planeta. Del estudio de bibliografía y biografía de científicos reconocidos, se infieren los grupos de movimiento en aras de una mejor educación. Esto ocurre tanto en Francia como en España, en Latinoamérica y otros lugares. Se destacan el IREM (centro de experimentación e investigación), ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), ICME (Congreso Internacional sobre la Educación Matemática) entre otros. Cada uno surge como respuesta a un problema del momento y de la región, pero con una visión particular que los une complementándose a través del espacio y el tiempo.

Al matemático se lo suele considerar como el encargado de realizar aportes a la educación matemática en los momentos en los cuales se pretende generar un nuevo rumbo que afecta a los contenidos en la educación matemática, sin menospreciar los aportes de los especialistas en didáctica de la matemática y los expertos en la sicología de los procesos de aprendizaje matemático.

A la matemática no se la debe ver como un conjunto de técnicas o herramientas útiles a nuestra civilización para alcanzar sus fines diversos. Es, ante todo, una parte importante de la cultura humana. Esta forma de pensar, la encontramos en casi la totalidad de los especialistas en esta ciencia. Por ello, la presencia del matemático colaborando en la solución de los problemas presentados en la educación matemática, es imprescindible.

También la historia de la matemática juega un papel importante en la formación del científico y del docente puesto que muestra las condiciones de emergencia del conocimiento, sus posibilidades y sus límites. Bachelard (1938 p. 22) también manifiesta desde su postura epistemológica, cuando se refiere a los progresos de la ciencia en término de obstáculo, explicita que no se refiere a las matemáticas pues: *De hecho, la historia de*

*las matemáticas es una maravilla de regularidad. Conoce periodos de detención. No conoce periodos de errores. ...* , lo cual es confirmado por Boyer (1968 p. 657) cuando se refiere, por ejemplo a lo que titula como la época heroica de la geometría, expresando *La geometría ha sido, de todas las ramas de la matemática, la que más sometida ha estado a cambios según cambiaban las preferencias de una época a otra. ....*

Esta historia de la matemática que nos interesa, debe ser capaz de restituir al descubrimiento, su dimensión histórica cultural en su completa trama de relaciones articulada con el estructural sistemático que nos permite rescatar la peculiaridad de un conocimiento que se va cristalizando a partir de un ordenamiento lógico, metodológico, operativo, instrumental, que asume como resultado, de acuerdo con la postura epistemológica de Lakatos (1981), el carácter de logro de la humanidad.

Si el conocimiento matemático, además de estar en estrecha relación con dos elementos, el docente y el alumno, implica una interiorización de la problemática, los sistemas, los métodos que constituyen la estructura del conocimiento erudito, también existe el hecho de que en su forma escolarizada, presenta siempre un proceso de transposición que lo distingue del erudito o saber sabio. En consecuencia, el saber sabio y el saber enseñado se presentan desde el punto de vista epistemológico y pedagógico como dos registros con características propias.

Recordando que la filosofía de la ciencia francesa es considerada como historicista, lo cual es evidenciado en Poincare, Bachelard y Piaget, no debe olvidarse que Dieudonne defendió una epistemología "estructuralista" de las matemáticas, en el sentido de que consideró las matemáticas como una interacción y comparación de patrones. Como Poincare, Dieudonne (1992) no se interesó por el contexto de justificación. La restricción de la epistemología al contexto de justificación y a las reconstrucciones racionales de los procesos de investigación científica ha sido contestada por algunos filósofos.

Mientras que Kuhn y Feyeraben apoyaron sus análisis en datos históricos y consideraciones sociológicas, Piaget fue el primero en coordinar la lógica del descubrimiento científico con los datos psicológicos, de una manera sistemática y metodológicamente clara. Piaget enfatizó las características comunes de la psicogénesis e historia de la ciencia. Para él, ambos desarrollos eran secuenciales, en el sentido de que no eran aleatorios, y se pueden distinguir estadios en el avance del desarrollo. Cada estadio siguiente es, al mismo tiempo, un resultado de las posibilidades abiertas por el previo y una

condición necesaria para el posterior. Además, cada estadio comienza con una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones que ocurrieron en los estadios precedentes.

La matemática es identificada como un cuerpo o conjunto particular de conocimientos, del cual, un subconjunto se considera apropiado para todos los escolares y otro subconjunto puede entrar en la educación superior en temas de matemática, o identificando tipos particulares de actividades llamadas de matematización, incluyendo modelización, reconocimiento de patrones, generalización, demostración, etc. Esto no implica ignorar el cuerpo o conjunto de conocimientos matemáticos como experiencia que se ha desarrollado mediante la matematización. En la práctica, los currículos nacionales, en gran medida o exclusivamente especifican contenidos.

Una visión sociológica está particularmente interesada con la justificación del conocimiento socialmente valorado, siendo este el proceso por el cual las comunidades se validan a sí mismas y establecen y retienen el poder. Esto es aplicable también a una comunidad académica y a las subcomunidades dentro de ella.

Ya se hizo referencia al compromiso que tienen los matemáticos con el estatus social de la matemática en la sociedad, y también ocurre lo mismo para los educadores matemáticos en las currículas escolares en todo el mundo. De manera similar, dentro de la comunidad de la educación matemática se pueden identificar subgrupos con compromisos de diferentes tipos en perspectivas de investigación, estilo de enseñanza, etc.

Los educadores matemáticos que están trabajando dentro de la tradición que se ha desarrollado en Francia desde mediados de los setenta, han dedicado mucho espacio en su trabajo a una reflexión sobre la epistemología de la educación matemática, esto es, sobre la naturaleza de este conocimiento – que recibe el nombre de ***didáctica de la matemática*** -, sobre su objeto como un campo de la investigación científica, sobre su lugar entre las demás disciplinas, sobre los modos en que este conocimiento es construido y validado. También han hecho investigación sustancial sobre la epistemología de nociones y dominios matemáticos específicos.

Los dos autores más citados en este dominio son Guy Brousseau e Yves Chevallard, el primero por su ***teoría de las situaciones,*** y el último, por el concepto de ***transposición didáctica***. Estas teorías lograron desarrollarse rápidamente durante la década del 80` y al

comienzo de los 90`. Chevallard propuso un marco teórico más general, ***la antropología de los saberes***, del que la teoría de la transposición didáctica forma parte.

La teoría de la transposición didáctica aporta ciertas distinciones epistemológicas útiles. No es necesario afirmar que las matemáticas escolares deberían ser legitimizadas mediante su referencia a las matemáticas de los matemáticos universitarios, pero, insisto en que tenemos que advertir que los dos conocimientos son epistemológicamente, objetos muy distintos. Ambos crecen de fuentes diferentes y de manera diferente. Mientras que el desarrollo de la investigación matemática está inducida por los problemas, el motivo más poderoso del progreso del aprendizaje matemático en la escuela, es un tipo de dialéctica entre el material antiguo y el nuevo, generada por la obligación de traducir en actos lo que se espera debe realizarse, sin saber, en muchos casos, como llevarlo a cabo en la propia práctica docente.

Además, las diferencias entre los contratos institucionales, dentro de los que ambos conocimientos se inscriben, son tales que cierta conducta matemática de ´ tipo investigativa` puede ser difícil de obtener en la clase. Esto es especialmente verdadero en el caso de las actividades de demostrar. El tipo de formación de interacción que se establece en la clase de matemáticas lleva en sí mismo más a conductas argumentativas, en las que el fin es alcanzar un acuerdo, que a demostrar que se requiere establecer la verdad del enunciado. Un cambio en esta situación requeriría una renegociación de las reglas del contrato con los estudiantes. Esto puede ser, sin embargo, difícil, ya que la mayor parte del tiempo los estudiantes no actúan como hombres teóricos sino como prácticos. Ellos reconocen que su tarea es solucionar el problema que les da el profesor, además, esa solución debe ser aceptable en relación a la situación de la clase. En este contexto, es obvio que lo que importa es ser eficiente, y no es importante ser riguroso. Se trata de producir una solución y no de producir un conocimiento. Por ello, un docente debe analizar la naturaleza del objetivo pretendido dado que si los estudiantes ven el objetivo como ´ hacer` más como ´ conocer`, entonces sus conductas argumentativas podrían verse más como siendo ´ económicas` que como conductas matemáticas.

Otra distinción útil lograda por la teoría de la transposición didáctica es la que se establece entre el conocimiento del profesor (el conocimiento para ser enseñado) y el conocimiento del que los alumnos se hacen responsables (el conocimiento para ser aprendido).

La teoría de la transposición didáctica alude también a las nociones de despersonalización y descontextualización del conocimiento. El proceso de transposición didáctica comienza cuando el matemático se dispone a comunicar sus resultados a sus colegas matemáticos. Este proceso lleva a eliminar del resultado, la historia personal de su descubrimiento, su heurística, y el contexto de las cuestiones y problemas particulares del que nació. El autor tratará de establecer su resultado al nivel más abstracto y general. Cuando el resultado se publica, es despersonalizado y descontextualizado, es público, abierto a examen y a nuevas generalizaciones y aplicaciones en contextos diferentes.

En el proceso del aprendizaje, se produce un proceso inverso. El aprendiz tiene que hacer como propio, creando un camino personal para su comprensión y encarnándolo en el contexto de los problemas en los que está trabajando actualmente. El conocimiento debe convertirse en conocimiento personal.

Para Chevallard, que estudia los sistemas didácticos a un nivel macro, la fuente de cambio está en el trabajo de la noosfera o la interfase entre la escuela y la sociedad en su conjunto, donde la organización, los contenidos y el funcionamiento del proceso educativo se conciben.

La teoría de las situaciones de Brousseau ha sido extensamente estudiada y aplicada por los investigadores en Francia y en otras partes. En la base de esta teoría está la hipótesis epistemológica de que el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente solo por que representa una solución óptima en un sistema de restricción. El aprendizaje ocurre cuando la aplicación de nociones previamente construidas resultan ser demasiado costosas, y el sujeto está obligado a hacer adaptaciones o incluso rechazo. Esto nos conduce a postular que un concepto no se desarrollará si el sujeto nunca tiene necesidad del mismo.

Para un concepto cuya enseñanza se pretende, la tarea del didacta consiste en organizar situaciones o sistemas de restricciones para los que el concepto dado aparecerá como una solución óptima. Para lograr esto, Brousseau sugiere un estudio epistemológico del concepto, comprendiendo investigación sobre:

- ✓ Los significados del concepto dentro de la estructura de la teoría actual.
- ✓ Las condiciones históricas y culturales de la emergencia del concepto (sus variadas formas intermedias, concepciones y perspectiva que crearon, obstáculos con

respecto a la evolución del concepto, visto desde la perspectiva de la teoría actual, problemas que llevaron a una superación de estos obstáculos y permitieron un desarrollo posterior).

- ✓ El estudio de la psicogénesis del concepto (o su epistemología genética).
- ✓ Un análisis didáctico, esto es, un estudio de los significados del concepto pretendido y/ o transmitido por su enseñanza, actualmente o en el pasado (incluyendo el estudio de la transposición didáctica o una comparación con los resultados de los análisis estructurales e históricos).

Brousseau propuso que el diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado, se orienten a la construcción de su génesis artificial, que simularía los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes, y que, sin reproducir el proceso histórico, conduciría no obstante, a resultados similares (Brousseau, 1981, p. 50). Él identificó varios tipos de situaciones didácticas, o estado de un contrato didáctico que, para él, crearía un esquema general de una *secuencia didáctica* o situaciones que provocan una génesis artificial de un concepto matemático: situaciones centradas sobre la acción, donde los estudiantes hacen los primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor, situaciones centradas sobre la comunicación, donde los estudiantes comunican los resultados de sus trabajos a otros estudiantes y al profesor; situaciones centradas sobre la validación, donde se deben usar argumentaciones teóricas más bien que empíricas; y situaciones de institucionalización, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidas, y la atención se centra sobre los hechos importantes, los procedimientos, las ideas, y la terminología oficial.

A partir de la fase de institucionalización, el significado de los términos ya no es un objeto de negociación, sino de corrección por referencia a las definiciones, las notaciones, los teoremas, los procedimientos aceptados. Dentro de cada una de estas situaciones, hay un componente a-didáctico, esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación cae enteramente de parte de los estudiantes. Se considera que esta es la parte más importante, ya que, de hecho, el fin último de la enseñanza es lo que Brousseau llama ***la devolución del problema a los estudiantes***.

La hipótesis básica de la teoría de situaciones es que el conocimiento construido o usado en una situación, es definido por las restricciones de esta situación, y que, por tanto,

creando ciertas restricciones artificiales, el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento.

En algunas investigaciones en educación matemática, se ve a la epistemología como una reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, sobre los procesos y condiciones de su desarrollo, sobre las características de la actividad matemática actual y pasada, y sobre lo que constituye la naturaleza específica de un dominio matemático u otro. Artigue (1990 p. 3) se pregunta acerca del papel que desempeña el análisis epistemológico en didáctica. Debe recordarse que el especialista en didáctica está interesado en la construcción de conocimiento matemático en un medio constituido para tal fin, por individuos. En este sentido, está confrontado con el problema de elaboración (para investigaciones del tipo de la ingeniería didáctica) o del análisis de génesis del conocimiento, que para distinguirlos de la génesis histórica se lo califica como génesis artificial.

Rescatando de Bachelard (1938 p. 13) su posición, esto es: *Cuando se buscan las condiciones psicológicas de los progresos de la ciencia, se llega pronto a la convicción de que es en términos de obstáculos como debe plantearse el problema del conocimiento científico. No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una suerte de necesidad funcional, las lentitudes y los trastornos. ... De hecho se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimiento mal hechos, superando lo que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización.* Y recordando que Bachelard aparta explícitamente a las matemáticas de sus opiniones, pues según él, escapan a este tipo de funcionamiento. Encontramos que los especialistas en didácticas y en especial el programa de investigación inscripto en la teoría de situaciones de Brousseau están centrados en la noción de obstáculo epistemológico, exportado de la posición de Bachelard.

Si bien el primero en hablar de obstáculos en epistemología es Bachelard, Artigue recuerda que la noción de obstáculo epistemológico es rescatada y presentada por Brousseau, G. con el objeto de cambiar el estatus del error y fracaso de los alumnos. Para Brousseau, *el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se le quiere asignar. El error no es solo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como a veces se cree en las teorías empíricas conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un*

*conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.*

Partiendo del hecho de considerar que para Brousseau, el aprendizaje es una adaptación a un medio problemático, el objeto principal de la didáctica es entonces *estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de estas concepciones sucesivas.*

Existen también análisis epistemológicos de los conceptos o dominios matemáticos que se han realizado fuera del programa de Brousseau, sin usar la noción de obstáculo epistemológico o sin adoptar una perspectiva histórica.

A la existencia de los distintos análisis, no podemos ignorar la importancia de la época en la cual se genera ni los avances tecnológicos que se suceden y hacen irrupción en el ámbito de la Educación Matemática. Ejemplo de ello es la aparición de calculadoras y computadoras personales en la década del 80, e Internet en la década del 90, que plantean situaciones que involucran retos a nivel educativo. Estos elementos han llevado al nivel de obsoletos, determinados conocimientos y/ o habilidades a los que antes requerían se les dedicara un considerable esfuerzo para su formación. Ello permite disminuir el tiempo que se dedica al desarrollo de esas destrezas y ampliar el tiempo destinado a la comprensión de ideas básicas y a la profundización de otros aspectos, entre los cuales se destaca como prioritario, la enseñanza de la resolución de problemas. Esta corriente se funda en el hecho de advertir que la resolución de problemas es consustancial a la propia existencia del hombre como ser racional.

En la década del 80, se instala esta temática en distintos foros importantes sobre enseñanza de la matemática.(Reuniones Interamericanas de Educación Matemática, Reuniones Latinoamericana de Matemática Educativa, etc.). Al respecto, Saiz (Saiz, I. 1996 p. 80) asegura que *la didáctica de la matemática plantea la posibilidad de introducir un tema nuevo, con un problema. En algunos casos, el problema es introducido con la intención de lograr que los anteriores sean utilizados como herramientas para resolver nuevos problemas, (ampliar el campo de aplicabilidad del conocimiento). En otros, la situación problemática presentada puede ser abordada con esos conocimientos previos,*

*pero que, a la vez, no son suficientes para su resolución total y es necesario modificarlos o incorporar nuevos.*

Aceptando que en el aprendizaje de la matemática es importante la resolución de problemas, lo que los docentes necesitan es el enunciado de esos problemas a llevar al aula. Al respecto, es posible encontrar en la bibliografía numerosas experiencias realizadas por investigadores que informan no solo el enunciado del problema y su justificación para llevarlo al aula, sino también las ventajas e inconvenientes que el propio problema o el grupo de alumnos involucrados crea. Las investigaciones fueron realizadas en distintos niveles (primario, secundario, universitario). Entre otros, son reconocidos los aportes en nuestro país de investigadores tales como Carmen Sessa, Patricia Sadosky, Irma Saiz, Dilma Fregona; en México, Ricardo Cantoral Uriza, María Rosa Farfan. De estos dos últimos investigadores, es conveniente rescatar sus trabajos realizados en el nivel superior (Cantoral, R. y Farfan, R. 1999), tanto en temas generales de didáctica como en específicos de la matemática universitaria, en la rama del cálculo, fundamentalmente.

Si los aportes de los investigadores no llegan en su totalidad a todos los docentes, o no cubren las expectativas o inquietudes, estos recurren a los libros de textos. Siendo los libros de textos, elementos de apoyo frecuente para el desarrollo de las actividades docentes, es importante conocer cuales son las representaciones del autor impresa en el tratamiento de los conceptos teóricos y propuestas de ejercicios de aplicación.

De las representaciones del autor a las representaciones que el lector puede inferir que posee el autor, es posible que no se llegue a la coincidencia total. Pero un análisis detallado del texto puede dar una aproximación aceptable que permita acordar o valorar si es posible que parte o todo el texto sea seleccionado para servir de base o referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Ciertamente, la elección depende de la personalidad e historia del profesor, pero esto traduce, al menos parcialmente, las ideas actuales del profesor, sus concepciones, sus convicciones sobre las matemáticas, la manera de enseñar y aprenderlas. El análisis del texto justifica las expresiones: ***Este libro es bueno, la ejercitación propuesta me gusta*** o ***La forma de tratar el tema en este libro, no me simpatiza. Prefiero .....***, etc.

Volviendo al hecho que tanto las ciencias como así también nuestra cultura se expresan y se difunden mediante textos, y en la pretensión que algunos de ellos deberían representar una ayuda en el aprendizaje, debe reconocerse que los alumnos tropiezan con

serios obstáculos cuando se enfrentan con ellos. Debe admitirse, además, que a menudo el texto es sustituido por los apuntes que los alumnos redactan en la clase o aquellos que han sido elaborados por el docente.

Si el docente recurre a los textos,

¿Porqué siente la necesidad de redactar apuntes para los alumnos?

¿Qué es lo que no encuentra o no le convence de los textos?

¿Tiene que ver con la transposición didáctica?

¿Por qué no utiliza toda la ejercitación propuesta por el autor?

¿Tiene que ver con las situaciones de aprendizaje que propone el autor y que no reconoce o no sirven a las necesidades del lector?

En lo que se refiere al análisis de ejercicios, Robert y Robinet (1989) advierten que hay numerosas publicaciones del grupo de APMEP, en Francia, que trabaja sobre los manuales. En el caso particular del trabajo realizado por Robert y Robinet sobre "*Enunciado de ejercicios de manuales de segundo y representaciones de los autores de manuales*" muestran el interés por sacar a la luz aquello que gobierna las diferentes selecciones de los autores de manuales. Para ello parte de considerar las representaciones sociales como elemento necesario para ajustarnos al mundo, conducirnos en él, identificar y resolver problemas.

Citando de Abric a Moscovici (1987) quien presenta la definición "*La representación es el producto y el proceso de una actividad mental por la cual un individuo o grupo reconstituye lo real a lo cual está confrontado, y le atribuye un significado específico.*

*Este significado resulta directamente de las actitudes y de las opiniones, concientes o no, desarrolladas por el individuo o por el grupo*".

Convienen en llamar representaciones metacognitivas a las que conciernen un aspecto de la vida profesional de los docentes o la de los alumnos. Estas expresan las ideas de los profesores (respecto de los alumnos) sobre las matemáticas y la manera de aprenderlas y enseñarlas previstas en su relación dialéctica potencial con las prácticas. No incluyen la relación matemática/profesor, donde intervienen factores inconscientes.

Para dilucidar las preguntas que motivan la investigación, realizan cuestionarios en los cuales, de las respuestas, encuentran el surgimiento de tres dimensiones: la dimensión epistemológica (concepción de las matemáticas), la dimensión social (rol social del profesor de matemática y de las matemáticas), y una dimensión cognitiva pedagógica, que reagrupa las ideas sobre el aprendizaje en general (escolar o individual).

Por lo antes expuesto, es importante la existencia de los aportes de los distintos investigadores en temas de análisis de textos. Por ello, en este trabajo de tesis se pretende aportar con una pequeña contribución, la cual permita a los docentes situar su posición, la del autor, y busque a través de una ingeniería didáctica rescatar las bondades del texto, conduciendo su propuesta mediante la creación de situaciones de aprendizaje que se aproximen cada vez más a un constructivismo, si el autor no comparte éste modo de accionar.

## 5.- Marco Teórico Conceptual

Partiendo de lo expresado por G. Brousseau (1993 p. 1), *la didáctica de la matemática estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico de la matemática*, es posible encontrar en los aportes generados por los resultados de las investigaciones, en lo que se refiere a comportamiento cognitivo de los alumnos, tipos de situaciones empleadas para enseñar, fenómenos que genera la comunicación del saber, etc., la formación de la base teórica requerida en toda ciencia.

Ante la pregunta ¿cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos ***necesarios*** para la educación y la sociedad, y como llevar a cabo dichos aportes?, existe abundante bibliografía intentando responder a la misma. Lo importante es que, en una sociedad, la racionalidad instalada no depende únicamente de las virtudes individuales de sus miembros, sino que exige una práctica social y una cultura que debe enseñarse en la escuela. Es generalizada la idea de que las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse en el desarrollo de la racionalidad, forjando su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales.

La teoría de las situaciones didácticas, tiende a unificar e integrar los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y de regulación de la enseñanza de la matemática.

Consideraré ***situación*** a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas situaciones requieren de la adquisición anterior de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que

ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso ***genético***.

Si la pretensión es lograr que el alumno construya el conocimiento, es importante ubicarse en el hecho de reconocer el tiempo que les llevó a los matemáticos construir ese objeto de conocimiento. Respuesta a esto se extrae de la evolución historico – epistemológica de la matemática.

Para el objeto de conocimiento *Cuádricas*, conviene remontarse a la época conocida como ***Edad de Oro*** de la matemática griega (siglo III a. C.). De la lectura de Boyer (1968) surge:

- ✓ Herodes y Aristóteles no querían arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la de la civilización griega, aunque reconocieran su existencia en una antigüedad mucho mayor, generada para satisfacer las necesidades de la humanidad. El origen del conocimiento matemático es, como lo expresa Kitcher (1988) naturalista.
- ✓ La Edad de Oro fue dominada por tres grandes genios de la época: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Dado que las cónicas no eran reconocidas como curvas por Platón y su escuela, Apolonio es quien las eleva a ese status pero las construye de modo diferente al estilo utilizado por Platón. Apolonio es quien se revela a los mandatos de Platón.
- ✓ Luego del importante desarrollo de la Geometría impulsado por Apolonio, el pensamiento matemático pasa por un largo período de estancamiento, probablemente influenciado por las condiciones sociales del medio. Este punto es lo que llama la atención a Bachelard y que considera importante en el desarrollo de una ciencia. La matemática lo cumple.
- ✓ Apolonio de Persa, fue reconocido por su extraordinaria capacidad matemática incluso con posterioridad a su época, por lo que recibiera el apelativo de el ***Gran Geómetra***. También escribió sobre otros temas, alcanzando una gran repercusión como astrónomo. De toda su vasta producción científica, solo dos de sus obras se conservan casi completas, gracias a las traducciones al árabe que hicieran otros matemáticos del siglo XVIII. Estas son, ***Secciones en una razón dada*** y el tratado

sobre ***Las cónicas*** que es la más conocida y famosa , siendo considerada su obra maestra

- ✓ A pesar que las cónicas ya habían sido estudiadas por varios matemáticos, incluidos los otros grandes de la época (Arquímedes y Euclides), fue Apolonio quien las generalizó, dándoles la forma sistemática con las que las conocemos hoy, transformándolas en un modelo de rigor, elegancia y organización axiomática deductiva. Dichas curvas: elipse, parábola e hipérbola, denominadas de ésta forma por Apolonio, se conocían con otros nombres, los que estaban directamente relacionados a las formas como fueron descubiertas. El mérito de Apolonio es el de obtener las cónicas de una forma más general, utilizando un cono circular recto cualquiera y no necesariamente de revolución. Variando la inclinación del plano secante, descubre una propiedad que caracteriza a cada una de éstas secciones como lugares geométricos planos.
- ✓ En el período del renacimiento en Europa, el desarrollo matemático estuvo fuertemente influenciado por la matemática griega. La influencia de éste patrimonio cultural, sumada al propio desarrollo científico de la Europa occidental, permite que se destaquen varios matemáticos, tales como Cardano, Bombelli, Vieta, Fermat y Descartes entre otros. En Álgebra de Bombelli se puede apreciar además que, en aquel momento, por demostración algebraica se entendía demostración geométrica, es decir, un conjunto de razonamientos de carácter geométrico que dieran una explicación razonada de tal regla, basándose en la interpretación geométrica de los elementos de la ecuación, en términos de segmentos, áreas y volúmenes. Además, llama la atención que éste tipo de interpretación se daba cuando el problema no tenía ninguna relación con la geometría.
- ✓ El *Ars Magna* de Cardano (1545) y la *Géométrie* de Descartes (1637) son parte de los progresos de la época y adquieren una importancia decisiva en el posterior desarrollo de toda la matemática, como la formación y constitución del álgebra simbólica. La creación de este lenguaje eminentemente matemático y autosuficiente, basado en símbolismos operativos sometidos a ciertas reglas sintácticas, a partir de las cuales, determinadas relaciones simbólicas adquirían un sentido específico, permitió la resolución de problemas, que sin su uso, habrían

permanecido sin solución. Además, es de no dudar que el álgebra entregó los elementos necesarios para favorecer el nacimiento del cálculo infinitesimal y la aparición de la geometría analítica.

- ✓ La influencia más importante de la traducción de los cuatro primeros libros de las Cónicas de Apolonio, en el desarrollo de la matemática, está relacionada directamente con el nacimiento de la Geometría Analítica, atribuido a Fermat y principalmente a Descartes, quienes conocían y admiraban profundamente esta obra. El importante aporte de Descartes nos permite ahora no solo visualizar la perfecta armonía entre expresiones analíticas y figuras geométricas, sino también, poder traducir hechos geométricos en fórmulas analíticas.
- ✓ En la época del renacimiento conviven junto con las ideas cartesianas, el uso de aparatos que permiten dibujar las secciones cónicas. No hay progreso importante hasta Descarte y Fermat, en que una cierta teoría algebraica comienza a desprenderse de su jerga geométrica. Fermat sabe que una ecuación de segundo grado en el plano representa una cónica e insinúa algo semejante para las cuádricas.
- ✓ Con el desarrollo de la Geometría analítica, aparece en el siglo XVIII dos problemas centrales: la reducción de una forma cuadrática a una suma de cuadrados y la búsqueda de sus ejes con relación a su forma métrica. Aquí se destaca, que ambos problemas son elementales para el caso de las cónicas, no ocurriendo lo mismo para el caso de varias variables. El primero fue resuelto por Lagrange en 1759, a propósito de los máximos de funciones de varias variables, y el segundo no se resuelve hasta que es formulada la invarianza del rango.
- ✓ El problema de la reducción de una cuádrica a sus ejes presenta dificultades mayores que su análogo para las cónicas. Euler es el primero en abordarlo, si llegar a probar resultados basados en los valores propios, y sin llegar a una justificación completa. El resultado correctamente demostrado lo presenta Cauchy. Es también Cauchy quien demuestra que la ecuación característica que da los valores propios es invariante respecto de cualquier cambio de ejes rectangulares.
- ✓ Hasta 1930 se hablaba de un polinomio homogéneo de segundo grado con relación a sus coordenadas respecto a un sistema de ejes dados, y comienza a hablarse de forma cuadrática, a partir de la idea de espacio de Hilbert en 1930.

- ✓ Cayley tiene la idea de reemplazar los puntos cíclicos de la geometría proyectiva como cónicas degeneradas tangencialmente con una cónica cualquiera. Esa idea va a desembocar en la geometría de Lobatschevsky, que va a cambiar la idea de distancia clásica entre dos puntos.
- ✓ Klein en 1872 establece un nuevo cuadro general para los fenómenos geométricos, que es la base de las ideas principales de los cursos de Álgebra lineal actual, a partir de las ideas de grupo de similitudes. Una consecuencia inmediata es el tratamiento moderno que pretendemos dar al estudio de las cuádricas mediante el uso de las matrices.
- ✓ Las representaciones adoptadas actualmente se basan en el estudio de determinantes simétricos que aparecen en el trabajo de Pfaff, a principio del siglo XIX, quien buscaba la resolución de formas diferenciales a una normal. La noción de forma bilineal simétrica asociada a una forma cuadrática (Cayley, 1849) es el caso más elemental del proceso de polarización, uno de los instrumentos fundamentales de la teoría de los invariantes.
- ✓ Una aproximación aritmética se atribuye a Hermite, en 1853. Esta noción, que se conoce bajo el nombre de producto escalar, se populariza a través del cálculo vectorial a finales del siglo XIX, y a partir de la teoría del espacio de Hilbert, aparece la noción de adjunto de un operador, que por 1925 se aplicara a la teoría cuántica.
- ✓ Los trabajos de Jordan (1900), y la teoría de grupo moderna, proporcionan un lenguaje algebraico como el que es habitual encontrar a partir de los libros de Álgebra lineal que se utilizan desde mediados del siglo XX.
- ✓ Un análisis del desarrollo histórico de la matemática provocó en Lakatos la idea de que las posiciones clásicas llamadas Logicismo, Intuicionismo y Formalismo eran programas Euclídeos, centrados en el desarrollo de las matemáticas como sistemas que aseguran la transmisión de la verdad desde axiomas indudables, por medio de ciertos procedimientos deductivos, hasta enunciados igualmente seguros. El argumentó que, por el contrario, la matemática procede de un modo similar al de las ciencias, un cuasi – empirismo en el que la falsedad de los contraejemplos a las conjeturas se retransmite a los axiomas y definiciones. Si algo que se considera como enunciado básico resulta ser falso en virtud de axiomas y definiciones

admitidas, en lugar de rechazar el enunciado, los axiomas y las definiciones se cambian para que se ajusten a dicho enunciado.

Si como proyecto científico, se establece la idea de construir modelos de situaciones utilizadas para introducir o enseñar las nociones matemáticas, estas deberían permitir ser criticadas para posteriormente aceptarlas, corregirlas, rechazarlas o imaginar otras más apropiadas. Cuando se plantean los problemas de esta manera, es posible analizar tanto la organización lógico – matemática del saber, como la economía del proceso, la incidencia de los aspectos psicológicos y sociológicos y las representaciones que los actores tienen del tratamiento de la ciencia involucrada.

Por ello, conviene recordar qué posturas condicionan las tendencias de la investigación psicológica y educativa, esto es, constructivismo y conductismo.

Respecto al modelo constructivismo, se reconocen varios tipos, ya que es una posición compartida por diferentes tendencias. Entre ellas se encuentran las teorías de Piaget, Vigotsky, Ausubel y la actual psicología cognitiva. Básicamente puede decirse que el constructivismo es el enfoque a la idea que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento, como en los afectivos. No es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. Esta construcción se realiza fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea. Ella depende sobre todo de dos aspectos: de la relación inicial que tengamos de la nueva información, y de la actividad externa o interna que se desarrolle al respecto.

Carretero (1993) distingue tres miradas constructivistas diferentes con puntos comunes.

- ✓ La visión de Piaget, Ausubel y la psicología cognitiva se basa en la idea de un individuo que aprende al margen de su contexto social. Se aprende por acción del sujeto sobre el objeto de conocimiento. A la hora de la teoría se concede un papel a la cultura y a la interacción, pero no se especifica como interactúa con el desarrollo cognitivo y el aprendizaje.

- ✓ Una visión intermedia mantiene que la interacción social favorece el aprendizaje mediante la creación de conflictos cognitivos que causan un cambio conceptual. El intercambio de información entre compañeros que tienen diferentes niveles de conocimiento provoca una modificación de los esquemas del individuo y acaba produciendo aprendizaje, además de mejorar las condiciones motivacionales. En definitiva, en este enfoque se estudia el efecto de la interacción y el contexto social sobre el mecanismo de cambio y aprendizaje individual.
- ✓ La posición Vigotskiana, que en la actualidad a conducido a posiciones como la *cognición situada* en el contexto social. Desde esta posición se mantiene que el conocimiento no es un producto individual sino social. Así, cuando el alumno está adquiriendo información, lo que está en juego es un proceso de negociación de contenidos establecidos arbitrariamente por la sociedad. Por lo tanto, aunque el alumno realice también una actividad individual, el énfasis debe ponerse en el intercambio social. Resulta evidente que el peligro de éste enfoque es el riesgo de la desaparición del alumno individual, es decir, de los procesos individuales de cambio.

En el modelo conductista, la característica es que el conocimiento se fundamenta en la percepción. Proviene exclusivamente de afuera y se graba en la mente del sujeto por ejercitación. Se busca homogeneizar sin tener en cuenta las diferencias individuales.

Cuando se reconoce la existencia de dos saberes, el saber erudito y el saber enseñado, debe rescatarse de esto el proceso que se reconoce como transposición didáctica.

Ahora bien, ese objeto de saber o conocimiento, a través de la transposición didáctica, difiere de una institución a otra, ya que las adaptaciones ***legítimas*** del objeto del conocimiento responden a los requerimientos del medio. La teoría de las situaciones, al intentar explicar si realmente son diferentes, debe aislar un conocimiento y la situación que lo involucra. De esta manera, puede aproximar una respuesta. La misma está condicionada por los actores involucrados en la situación (profesor, alumnos), y para simplificar no se suele tener en cuenta que los actores y el objeto de conocimiento están inmerso en contextos más amplios que ejercen influencia sobre ellos.

Chevallard (1996 p. 3) advierte que una persona **x**, adoptando una posición en la institución **I**, se encuentra con un conjunto de los objetos **o** que tiene que tratar en el cuadro de los dispositivos en el que realiza determinados gestos que activan esos objetos **o**. Es a través de esos gestos que en **I** podrá apreciarse su relación personal con **o** y que podrá declarársela conforme, no conforme o insuficientemente conforme.

De la experiencia personal, hay que rescatar que si una institución **I** brinda su conformidad ante un gesto de la persona **x** al interactuar con el objeto **o**, esto no necesariamente puede ser extendido a otra institución **I'**. Por ello, toda propuesta de actividad no puede ser aceptada o rechazada sin considerar si la misma está en el repertorio de actividades de dicha institución.

Si la institución es una ***institución educativa***, el concepto moderno de enseñanza pide al docente que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas mediante una buena elección de problemas que él le proporcione. Se espera del docente que, en la elección, priorice el deseo de que los alumnos acepten los mismos, reflexionen y logren evolucionar. Se supone que el profesor debe crear condiciones para la apropiación de los conocimientos, y debe reconocer esta apropiación cuando se produce. De manera implícita, se le exige al docente el conocimiento a enseñar.

Por ello, en el aula, todo aprendizaje constructivo supone una construcción que se realiza a través de un proceso mental que finaliza con la adquisición de un conocimiento nuevo. Pero en éste proceso no es solo el nuevo conocimiento lo que se ha adquirido, sino también está la posibilidad de construirlo. De esta manera, el pensamiento abre nuevas vías intransitables hasta entonces, pero que a partir de éste momento pueden ser de nuevo recorridas.

Si la nueva construcción es una serie de razonamientos elaborados por el individuo que hacen posible la resolución de un problema, la adquisición más importante para el individuo es la elaboración de toda esa serie de razonamientos, pues ello le permitirá aplicar lo ya conocido a una situación nueva. El conocimiento que no es construido o reelaborado por el individuo no es generalizable, sino que permanecerá ligado sólidamente a la situación en que se aprendió, sin poder ser aplicado a contenidos diferentes.

La necesidad de que el alumno construya los conocimientos puede parecer una pérdida de tiempo innecesaria, cuando pueden transmitirse directamente, ya construidos, pero estos conocimientos adquiridos de modo mecánico solo sirven para ser aplicados en

situaciones muy semejantes a las que se aprendieron y que se olvidan tan pronto como se ha cumplido la finalidad para la cual se aprende (generalmente aprobar unos exámenes).

En el aprendizaje memorístico, la información nueva no se asocia a los contenidos previos en la estructura cognitiva y por ello se produce una interacción nula o mínima entre la información recibida y la ya almacenada. Es así que cada unidad o fragmento de conocimiento debe ser almacenado arbitrariamente en la estructura cognitiva.

En el constructivismo cada conocimiento nuevo es un nuevo eslabón que se engancha al eslabón del conocimiento previo (ideas, hipótesis, preconceptos etc.)

Una característica del constructivismo es también considerar positivo el momento del error, el error sistemático (propio del proceso de construcción del conocimiento) para producir desde la interacción, la reflexión que lleva al sujeto a corregirlo y a aprender.

Por ello, ante el cúmulo de variables que actúan en la práctica profesional, es natural que el docente busque apoyo generalmente en textos que tratan el tema. Los libros de texto ofrecen no solo el objeto de conocimiento, sino también una postura epistemológica. El docente realiza la selección de un texto, influenciado por la presencia del objeto de conocimiento y la coincidencia de su postura epistemológica con la postura epistemológica del autor.

Hay instituciones en las cuales un docente no adoptaría como texto de apoyo para desarrollar su función, uno que presente los objetos de conocimiento en su forma descontextualizada. Aquellos textos que además de presentar el objeto de conocimiento, exponen algunas de sus aplicaciones, son los que tienen más aceptación. Ellos brindan ayuda o guía para el cumplimiento de la función profesoral, pues es de aceptación universal que el conocimiento a enseñar debe estar inmerso en un contexto que permita al alumno construir el mismo.

La construcción de una situación didáctica relativa a un concepto matemático dado, se orientara, según lo entiende Brousseau, a la construcción de su ***génesis artificial***. Para muchos docentes, la situación didáctica que permitirá a los estudiantes construir el objeto de conocimiento, debe basarse fundamentalmente en la resolución de problemas. Pero para resolver problemas, hay que procurar que se desarrollen capacidades. Para ello, los docentes proponen tareas **T** a los alumnos.

Estas **T** pueden aparecer como rutinarias o como problemáticas, según el contexto en el cual se desarrollen. Las actividades rutinarias permitirán al alumno generar y dominar

una manera de hacer, es decir, una ***técnica***. Dicha técnica, cuando puede ser justificada, genera una ***tecnología*** de la técnica. Más allá de la tecnología que justifica la técnica, existe una justificación de esa justificación, que Chevallard (1996 p. 10) llama ***teoría***.

Las tareas, las técnicas, las tecnologías, pueden ser generadoras de obstáculos (en el sentido bachelardiano del término). Estos obstáculos pueden ser creados en algunos casos, porque:

- ✓ Paralelamente al lenguaje natural, se inventaron símbolos particulares que se desarrollaron a lo largo de la historia, y generaron el lenguaje de la ciencia.
- ✓ Los significantes (representaciones simbólicas, disposiciones espaciales, etc. creadas para constituir el lenguaje), tienen distintas funciones.
- ✓ La experiencia básica está profundamente conectada a la percepción sensible, a la percepción común y cotidiana de la realidad de cada sujeto en particular y la de éste en cuanto es un ser social y cultural de una determinada cultura.
- ✓ Debe renunciar a ciertas explicaciones básicas para dar un salto a una abstracción.
- ✓ El alumno no es una página en blanco, sino que viene con construcciones, en gran medida, inconscientes.
- ✓ La opinión de los que integran el entorno escolar, traduce las necesidades en conocimiento.
- ✓ El profesor no dispone, en el momento, de una técnica relativamente confiable y fácil de manejar para realizar esas tareas.
- ✓ El profesor ha eliminado actividades rutinarias cuando trabaja con un nuevo grupo de alumnos.
- ✓ El profesor otorga al error y al fracaso, un papel simplificado, es decir, el efecto de la ignorancia.
- ✓ Existe la tendencia a una generalización abusiva.
- ✓ Los cambios de campos a los fines del aprendizaje, no jugaron un papel adecuado en la construcción del saber.
- ✓ Etc.

En este punto, es conveniente recordar que previo a la corriente constructivista, lideraba la corriente conductista la cual, pese a sus falencias, a los docentes les

proporcionaba guías concretas para su accionar. Sus metas y objetivos de la enseñanza de la matemática, tiene en cuenta el desarrollo de capacidades o conductas desarrolladas a través de **T**.

De la bibliografía se pueden extraer diversas propuestas, todas ellas dentro del marco de la teoría conductista. Una de ellas emplea los siguientes niveles de conducta:

A. Conocimiento e información: recordar definiciones, notación, conceptos.
B. Técnicas y habilidades: computación, manipulación de símbolos.
C. Comprensión: capacidad para comprender problemas, para traducir fórmulas, para seguir y ampliar el razonamiento.
D. Aplicación: de conceptos apropiados en situaciones matemáticas desconocidas.
E. Inventiva: razonar en forma creadora en matemática.

Otro, sugiere lo mismo que en los niveles A, B y D anteriores, pero las categorías C y D son:

C. Traducción de datos en símbolos o esquemas o viceversa
E. Comprensión: capacidad para analizar problemas para seguir el razonamiento.

Una tercera clasificación destaca <u>contenidos</u> de <u>conductas</u>.

Contenidos:

A. Aritmética
B. Álgebra
C. Geometría
    C1. Geometría plana
    C2. Geometría del espacio
    C3. Geometría analítica.

D. Trigonometría

E. Misceláneo

E1. Probabilidad y estadística

E2. Cálculo

F. General

Conductas:

a. Capacidad para recordar definiciones, notaciones.
b. Operaciones y conceptos.
c. Capacidad para interpretar datos simbólicos.
d. Capacidad para transformar los datos en símbolos.
e. Capacidad para entender demostraciones.
f. Capacidad para construir demostraciones.
g. Capacidad para aplicar conceptos a problemas matemáticos.
h. Capacidad para aplicar conceptos a problemas no matemáticos.
i. Capacidad para analizar problemas y para determinar las operaciones que pueden aplicarse.
j. Capacidad para inventar generalizaciones matemáticas.

Otra propuesta interesante organiza los niveles cognitivos de la siguiente manera:

1.- Recordar y/ o reconocer definiciones, hechos y símbolos.

2.- Efectuar manipulaciones matemáticas.

3.- Comprender conceptos y procesos matemáticos.

4.- Resolver problemas matemáticos: sociales, técnicos y académicos.

5.- Emplear la matemática y el razonamiento matemático para analizar situaciones problemáticas, definir problemas, formular hipótesis.

6.- Apreciar y emplear la matemática.

En esta propuesta, el nivel 6 se caracteriza por que es en parte una categoría cognitiva.

Todas las propuestas han sido enfocadas hacia la evaluación del aprendizaje en la matemática de la escuela secundaria, pero ello no impide que similares modelos puedan aplicarse a la enseñanza universitaria. Wilson (1995 p. 223) presenta un modelo (similar a

los anteriormente mencionados) proponiendo como idea esencial, que las medidas del rendimiento en matemática puedan clasificarse en dos maneras:

1.- Por categoría de contenido matemático.
2.- Por niveles de conducta.

Los niveles de conducta se encargan de reflejar la complejidad cognitiva de una tarea. Estos niveles de conducta son: Computación, Comprensión, Aplicación y Análisis. Si bien los niveles de conducta tienen que ver con la matemática, este modelo presentado por personal y consultores de School Mathematic Study Group (SMSG) en su National Longitudinal Study of Mathematical Abilities (NLSMA), lo desarrollaron mediante el cuidadoso estudio de la Taxonomía de los objetivos de la Educación (Blom, 1968).

De los cuatro niveles de conducta, los items de Computación (A.0) están preparados para exigir el recuerdo de hechos y terminología básicos o la manipulación de elementos de problemas conforme a reglas que presumiblemente el estudiante ha aprendido. El énfasis está puesto en el conocimiento y realización de operaciones, y no en decidir cuales son las operaciones apropiadas. Los ítems Comprensión (B.0) se relacionan con el recuerdo de conceptos y generalizaciones o con la transformación de elementos de problemas de una forma a otra. El énfasis está puesto en la demostración de una comprensión de los conceptos y sus relaciones, y no en el empleo de conceptos para producir una solución. Los ítems Aplicaciones (C.0), exige recordar el conocimiento pertinente, seleccionar operaciones apropiadas y llevar a cabo las operaciones. Requieren que el estudiante utilice conceptos en un contexto específico y en una forma que presumiblemente ha practicado. Los ítems de Análisis (D.0) requieren una aplicación no rutinaria de conceptos. Pueden exigir la detección de relaciones, el descubrimiento de esquemas y la organización y empleo de conceptos y operaciones dentro de un contexto que no ha sido practicado.

Se hace referencia a las dos teorías (constructivismo y conductismo), pues del análisis dentro el marco de cada una puede deducirse la postura del autor.

# 6.- Diseño experimental

El modelo adoptado en la presente tesis, para el análisis de texto, es el que surge de las investigaciones realizadas por Robert y Robinet (1989). De la misma surge naturalmente que el autor de un libro de ciencias cumple con un propósito, aportar directamente a un sector de la comunidad e indirectamente a toda la sociedad, los conocimientos imprescindibles para el desarrollo de ésta. Al presentar dichos conocimientos, lo hace ante la convicción de que sabe tanto de la ciencia que los contiene como de la manera adecuada en que deben presentarse los mismos. Por ello es que un autor que además es docente, conciente o inconcientemente a adoptado una posición epistemológica de la ciencia que se vincula especialmente con su experiencia tanto en lo referente a la necesidad de ciertos conocimientos matemáticos para el futuro profesional de sus alumnos que están insertos en una sociedad determinada, como en el modo más conveniente para apropiarse de ellos. Así es que entre sus aportes está la ejercitación, a través de la cual muestra la postura didáctica con la que pretende ayudar a un sector de la comunidad generalmente predefinido. En consecuencia se trabajará según las siguientes dimensiones:

- ✓ Epistemológica
- ✓ Social
- ✓ Cognitiva pedagógica

En la dimensión epistemológica, se tiende a rescatar la concepción epistemológica del autor puesta de manifiesto en el tratamiento de los objetos matemáticos. Del desarrollo

teórico de los conceptos tratados se deducirá la postura epistemológica impresa por el autor.

En la dimensión social, se tendrá en cuenta el sector de la comunidad a la cual va dirigido el trabajo.

En la dimensión cognitiva pedagógica, se buscará una interpretación de la ejercitación desde el punto de vista constructivista y además desde el punto de vista conductista.

En la orientación constructivista, se clasificará cada ejercicio como tarea tal como lo concibe Chevallard: rutinarias (**R**) y problemáticas (**P**).

En la orientación conductista, se determinará en cada ejercicio las capacidades a desarrollar en el alumno. Dichas capacidades representarán niveles de complejidad con subniveles. Ellos son:

Nivel de Computación (A), que representa las conductas menos complejas que se espera que exhiba el alumno como resultado de la enseñanza de la matemática. Las tareas son de índole rutinarias. Una primera subcategoría es el conocimiento de hechos específicos (A.1). Puede incluir objetivos en los cuales se espera que el estudiante reproduzca o reconozca el material casi exactamente de la misma forma en que fue presentado en el curso. También puede incluir unidades fundamentales que presumiblemente son conocidas por el estudiante porque ha estado en contacto con ellas durante un largo período de tiempo. Una segunda subcategoría se refiere al conocimiento de la terminología (A.2). Una tercer subcategoría se refiere a la capacidad para realizar algoritmos (A.3).

Nivel de Comprensión (B), se pretende que sea un conjunto de conductas más complejo que la computación aunque la línea divisoria sea difusa. El conocimiento de Conceptos (B.1) se incluye como una conducta del nivel de comprensión, por que un concepto es una abstracción, y una abstracción requiere teóricamente, un cierto grado de adopción implícita, de decisiones con respecto a la utilización de un concepto o la determinación de si un objeto es un ejemplo de un concepto.

Un razonamiento igual se aplica al ítem conocimiento de principios, reglas y generalizaciones (B.2). El conocimiento de la estructura matemática (B.3) es también una conducta en el nivel de comprensión, pero la conducta central del nivel de comprensión es

la capacidad para transformar los elementos de un problema de una modalidad a otra (B.4), es decir, realizar un juego de campos.

Otras conductas del nivel de comprensión son: la capacidad para seguir una línea de razonamiento (B.5) y la capacidad para leer e interpretar un problema de matemática (B.6).

Nivel de Aplicación (C), las conductas implican una secuencia de respuestas por parte del estudiante. En este nivel se distinguen: la capacidad para resolver problemas de rutina (C.1), que en su caso mas limitado implica seleccionar y resolver un algoritmo; la capacidad para realizar comparaciones (C.2), en la cual se espera que el alumno recuerde información pertinente (concepto, reglas, estructura matemática, terminología), descubra una relación y formule una decisión; la capacidad de analizar datos (C.3), implica la lectura e interpretación de información, y realizar decisiones como resultado; la capacidad de reconocer modelos, isomorfismos y simetrías (C.4), puede abarcar el recuerdo de información pertinente, la transformación de elementos del problema, la manipulación de estos elementos dentro de una secuencia y el reconocimiento de una relación.

Nivel de Análisis (D), se incluye la solución de problemas que no son rutinarios, las experiencias de descubrimiento y la conducta creadora en la medida en que se refiere a la matemática. Los ítems son capacidad para resolver problemas no rutinarios (D.1), que comprende la reorganización de los elementos del problema en una nueva forma, con el objeto de determinar una solución, o quizás se requiera un enfoque heurístico; capacidad de descubrir relaciones (D.2); capacidad de construir demostración (D.3); capacidad de criticar demostraciones (D.4) y la capacidad para formular y validar generalizaciones (D.5).

Nivel de Utilidad (E), se refiere específicamente al reconocimiento por parte del alumno, de un modelo matemático que representa aproximadamente un hecho físico y que la solución aportada por la aplicación de dicho modelo pueda ser valorada para su aceptación o rechazo.

Si se amplía este modelo de rendimiento en matemática, agregando algunos tipos de conductas no cognitivos (Wilson, J. 1995 p. 245), tales como las categorías afectivas de Actitud (F.1), Interés (F.2), Motivación (F.3), Ansiedad (F.4) y Valoración de sí mismo (F.5), debe tenerse en cuenta que cualquier estructura afectiva posee un objeto asociado con ella. Se tiene una actitud hacia algo, el "algo" aquí es la matemática o los diversos

aspectos de la matemática. Los resultados afectivos son objetivos importantes en la enseñanza de la matemática, pero son tan complejos que presentan problemas de medición.

En consecuencia, se evaluará según:

A.- Computación.

A.1.- Conocimientos de hechos específicos.

A.2.- Conocimiento de la terminología.

A.3.- Capacidad para realizar algoritmos.

B.- Comprensión.

B.1.- Conocimiento de conceptos.

B.2.- Conocimiento de principios, reglas y generalizaciones.

B.3.- Conocimiento de la estructura matemática.

B.4.- Capacidad de transformar los elementos de un problema de una modalidad a otra.

B.5.- Capacidad e seguir una línea de razonamiento.

B.6.- Capacidad para leer e interpretar un problema matemático.

C.- Conductas.

C.1.- Capacidad para resolver problemas de rutina.

C.2.- Capacidad para realizar comparaciones.

C.3.- Capacidad para analizar datos.

C.4.- Capacidad de reconocer modelos, isomorfismos, simetrías, etc.

D.- Análisis.

D.1.- Capacidad para resolver problemas no rutinarios.

D.2.- Capacidad de descubrir relaciones.

D.3.- Capacidad de construir una demostración.

D.4.- Capacidad de criticar una demostración.

D.5.- Capacidad para formular y validar generalizaciones.

E.- Utilidad.

La selección de estas capacidades se fundamenta en los distintos pasos que normalmente se hace transitar a los alumnos cuando se los inicia en el aprendizaje de la matemática ya que la primera tendencia es lograr que el alumno aprenda los signos y

símbolos propios del lenguaje de la ciencia. Casi simultáneamente se intentan las aplicaciones con graduación que va desde la simple utilización del nuevo conocimiento hasta las elaboraciones más complejas, con intervalos de repetición o estancamiento para lograr la asimilación de las características de un determinado tipo de problema y la metodología de resolución.

Los conocimientos previos adquieren cada vez mayor importancia porque ayudan a la incorporación de los nuevos. De las exigencias de cada problema se podrá deducir la función en el desarrollo de las distintas capacidades.

El enunciado del problema orienta hacia las pretensiones básicas. En el mismo se destaca el nivel de importancia de conocer y usar la terminología; cuales son los conocimientos básicos esenciales; si es importante el conocimiento del concepto o solo interesa realizar una aplicación mecánica del mismo.

La resolución del mismo, por parte del docente, entrega mayor información que hace a la interpretación de las bondades didácticas al utilizar el mismo o al permitir realizar cambios que mejoren la situación de aprendizaje que se pretende crear.

En lo que se refiere a la Institución en la cual se deberá enseñar el objeto de conocimiento "Cónicas y cuádricas" se considerará una cuyo objetivo es formar ingenieros.

Se considerará que las disciplinas matemáticas en las titulaciones de ingeniería deben tener las siguientes características:

- ✓ Las asignaturas de matemática son un medio y no un fin para sus estudios. Son, en definitiva, asignaturas de servicio.
- ✓ En las asignaturas de matemática, se debe realizar un trabajo de campo para saber que tópicos de matemáticas se necesitan. Se debe dar una "matemática distinta" para cada titulación de ingeniería, debido a que son distintas las exigencias de cada una de ellas.
- ✓ El concepto estético de belleza de las matemáticas deja paso al de funcionalidad, es decir, utilidad de las matemáticas.

## 7.- De los conocimientos previos

Cuando un docente decide enseñar o producir en el alumno un objeto de conocimiento, deberá partir de la creación de situaciones problemáticas. Un elemento fundamental a tener en cuenta es que al alumno no debe considerárselo como equivalente a una página en blanco. Cada alumno tiene una historia vivida en una micro sociedad que puede diferir de la de sus compañeros. Además, ante una situación de aprendizaje, se espera que intente resolverla aplicando sus conocimientos supuestamente adquiridos y posiblemente la aludida situación los enfrente a una realidad en la cual sus conocimientos no alcanzan u obstaculizan la posibilidad de solucionar el problema.

De esto, es importante, en primer lugar, rescatar lo relativo a conocimientos que ya posee el alumno, ***conocimientos previos***, los cuales serán utilizados como peldaño o trampolín para alcanzar nuevos objetos de conocimiento.

Si el nuevo objeto de conocimiento es ***Cónicas y cuádricas***, los alumnos pertenecen al nivel ***universitario*** y el estudio de ellas será a partir de las ***formas bilineales***, entonces el docente tendrá que determinar cuales son los conocimientos previos que deben poseer los alumnos.

La presente tesis tiene por objetivo realizar un análisis de texto, y el texto en cuestión es ***Álgebra lineal y geometría*** cuyo autor es **Ángel Rafael Larrotonda**. El tema que interesa se encuentra desarrollado en el capítulo IV.

Como Robert y Robinet (1989) lo indican, hay una dialéctica muy estrecha entre las representaciones de los educadores ( y los autores generalmente lo son) y lo que está representado en el libro de texto. Por ello, partiendo de considerar al autor como un docente, es natural que él reconozca la necesidad de poseer ciertos conocimientos previos para lograr alcanzar los nuevos.

En este caso, los conocimientos previos necesarios han sido desarrollados en capítulos anteriores.

Para comenzar, el tratamiento de las formas cuadráticas debe apoyarse en el concepto de espacio vectorial. Este concepto, generalmente enseñado en el nivel universitario, implica conocer el concepto de cuerpo. En el nivel secundario, actualmente reconocido como Polimodal, es posible enseñarlo ya que se trabaja con los números racionales, los números reales y los números complejos. Si fue o no definida la estructura de cuerpo, es probable que en este nivel, hablar de cuerpo no tenga otro sentido que el de asignar un rótulo. Generalmente a los alumnos se les crea la necesidad de aprender a operar con los números y aplicar sus propiedades en caso de necesitarlas, y no se tiende a insistir en advertir la existencia de estructuras matemáticas. No obstante, cuando el alumno se encuentra en el nivel universitario, según la orientación de la carrera que eligieron seguir, al referirse a un cuerpo, es posible que si no recuerdan las características de esta estructura, acepten sin mayor curiosidad el nombre de cuerpo, sobre todo si se les aclara con el ejemplo de los números reales. El autor rescata este concepto bajo el título de Preliminares.

Volviendo al concepto de espacio vectorial, el conjunto de elementos que lo constituyen en algunos casos particulares han sido trabajados en el nivel secundario, ya sea en el área de matemática, cuando se estudian los polinomios y en el área de fisica, cuando se trabaja con el concepto de fuerza y su representación geométrica con las operaciones de suma de vectores y producto por un escalar.

En general, con conjuntos (sean o no espacios vectoriales), se trabaja en el nivel primario, y es posible realizar operaciones de unión, intersección, etc. En el nivel secundario, además de las operaciones ya citadas, se define el producto cartesiano entre dos conjuntos. Estos objetos matemáticos también se encuentran presente en la sección titulada Preliminares, en el libro de texto a analizar.

El concepto de espacio vectorial, es uno de los conceptos abstractos que los alumnos muestran tener dificultades para apropiarse del mismo. Es posible escucharles ´recitar` la definición de espacio vectorial, pero no les resulta fácil reconocer dicha estructura en conjuntos de elementos conocidos, tales como el conjunto de polinomios en una indeterminada de grado no mayor que dos (en el nivel secundario se habla normalmente de polinomios de una variable), con sus operaciones de suma y producto por un escalar, ya definidas. Llamar vectores a los elementos de un espacio vectorial, es fácil de aceptar, pero

reconocer y pensar como un vector a un polinomio del conjunto antes citado, no es aceptado por los alumnos, como algo natural.

Cuando se ingresa al concepto de espacio vectorial, obviamente se suele hacer referencia a los vectores usados en física. Ejemplos de este tipo ayudan a visualizar el concepto de espacio vectorial, o a calmar en parte la ansiedad puesta de manifiesto en el ***¿dónde están?*** o ***¿para que sirve?***. El autor del texto a analizar, también hace referencia a estos ejemplos, luego de haber enunciado la definición de espacio vectorial Larrotonda, A. 1973). Obviamente, tanto el autor, como muchos docentes, consideran que estos ejemplos son los que posibilitan lograr que los alumnos aprendan a aceptar la existencia de las estructuras matemáticas y puedan comenzar a trabajar con estos conceptos abstractos.

Iniciado el tratamiento del tema, el autor continúa, al igual que en otros textos que desarrollan los mismos tópicos, con los conceptos de subespacio y combinación lineal. En este texto, se cuenta no solo con el enunciado de las propiedades (ya sean teoremas, lemas, corolarios u proposiciones), sino también con la validación de ella a través de la demostración, las aclaraciones a través de ejemplos y observaciones, además de la ejercitación propuesta.

De la misma manera continúa el autor (Larrotonda) tratando los temas:

- ✓ Operaciones con subespacios. Transformaciones lineales.
- ✓ Independencia lineal y base.
- ✓ Suma directa.
- ✓ Transformaciones lineales y matrices.
- ✓ Dualidad.
- ✓ Sistema de ecuaciones lineales.
- ✓ Determinante.
- ✓ Autovectores y autovalores.
- ✓ Formas bilineales.
- ✓ Clasificación de las formas bilineales simétricas.

El capítulo II, con título Geometría lineal y afín, el autor lo inicia con un ejemplo para luego introducir los siguientes objetos de conocimiento:

- ✓ Variedades lineales.

- ✓ Cambio de origen. Independencia afín.
- ✓ Incidencia de variedades lineales.
- ✓ Aplicaciones a la geometría elemental.
- ✓ Transformaciones afines.
- ✓ Espacio afín.

En el capítulo III, con título Geometría métrica, el autor advierte inicialmente, que en él, todos los espacios vectoriales con los que se trabajará a continuación, serán reales. Los objetos de conocimiento tratados en esta sección se detallan a continuación:

- ✓ Producto interno.
- ✓ Espacio euclídeo.
- ✓ Ángulos.
- ✓ Variedades ortogonales.
- ✓ Área y volumen.
- ✓ Transformaciones ortogonales.
- ✓ El producto vectorial.
- ✓ Transformación adjunta.

Todos los temas enumerados, han sido tratados de manera casi exhaustiva por el autor, proporcionando al lector no solo las definiciones y enunciados de teoremas, corolarios, lemas, proposiciones, observaciones, sino también las respectivas demostraciones, salvo en casos que la misma tenga un procedimiento equivalente al utilizado en el tratamiento de un ítem anterior.

Mantiene los símbolos creados para representar distintos objetos. Además, estos son usados a continuación como parte del lenguaje escrito utilizado a lo largo del texto.

Cada vez que es necesario recurrir a un conocimiento previo, este se encuentra presente en el texto.

# 8.- Análisis de texto

## 8.1.- Generalidades

Del capítulo a analizar, se transcribirán algunos párrafos, teoremas o ejercicios que sean representativos del resto del texto. La selección tiene por intención, rescatar las representaciones del autor con respecto a como debe enseñarse la ciencia matemática. En este caso particular, el Capítulo IV tiene por título ***Cónicas y cuádricas***. Luego, en cada subtítulo, es desarrollado el objeto de conocimiento que interesa tratarse en esta tesis. El cambio de tipo de letra (Times New Roman $\leftrightarrow$ Arial), tiene por intención distinguir los comentarios personales (en el primer tipo de letra) del texto en cuestión (segundo tipo de letra).

## 8.2.- Formas cuadráticas.

En este capítulo, el autor comienza a desarrollar el tema de la siguiente manera:

Si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y $\Phi$: $\mathbf{V}\mathrm{x}\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ es una forma bilineal simétrica, la aplicación $\mathbf{X} \to \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ (de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{K}$) que indicamos provisoriamente con $\Psi(\mathbf{X})$, verifica $\Psi(\alpha.\mathbf{X}) = \Phi(\alpha.\mathbf{X}, \alpha.\mathbf{X}) = \alpha^2\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \alpha^2\,\Psi(\mathbf{X})$, si $\alpha \in \mathbf{K}$. Además

$$\psi(X + Y) = \Phi(X + Y, X + Y) = \Phi(X, X) + \Phi(Y, Y) + 2\Phi(X, Y) =$$
$$= \psi(X) + \psi(Y) + 2\Phi(X, Y)$$

nos da

$$2\Phi(X, Y) = \psi(X + Y) - \psi(X) - \psi(Y),$$

lo que permite (cuando $2 = 1 + 1$ es inversible en **K**) reconstruir $\Phi$ a partir de $\psi$. En todo caso, podemos definir:

1.1.- Definición

Si **V** es un **K** – espacio vectorial, una aplicación Q: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ se dirá una *forma cuadrática* si verifica:

$Q_1$) $Q(\alpha. X) = \alpha^2 Q(X)$, si $\alpha \in \mathbf{K}$ y $\mathbf{X} \in \mathbf{V}$. (1)

$Q_2$) Existe una forma bilineal $\Phi$: $\mathbf{V}x\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ tal que:

$$2\Phi(X, Y) = Q(X + Y) - Q(X) - Q(Y), \qquad (2)$$

para todo par de vectores **X**, **Y** en **V**.

Para evitar complicaciones supondremos en todo lo que sigue que **K** no tiene característica 2, vale decir $2 \neq 0$ en **K**.

En esta sección, se distingue la presentación de los elementos con los que trabaja (espacio vectorial, cuerpo, forma bilineal simétrica, etc), objetos ya tratados en capítulos anteriores y considerados en este momento como conocimientos previos. Es decir, el autor no está pensando que el lector pueda ser considerado como una página en blanco. Lo que sí está suponiendo, es que posee todos los conocimientos previos involucrados y lo que ellos representan tanto para el autor como para el lector, está en plena coincidencia. La utilización de la simbología apropiada al lenguaje matemático está presente desde sus comienzos. También se destacan las aclaraciones necesarias cuando el lector tiene una fuerte formación matemática (ejemplo: al comenzar esta página, entre paréntesis dice ' cuando $2 = 1 + 1$ es inversible en **K**). Luego de la definición 1.1.- continúa así:

1.2.- Observaciones

a) La forma bilineal $\Phi$ de (2) resulta simétrica, ya que el término de la derecha no varía al intercambiar **X** con **Y**, luego $2\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 2\Phi(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ de donde $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Phi(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ por la hipótesis hecha sobre **K**.

b) La discusión precedente nos dice que si $\Phi$ es una forma bilineal simétrica sobre **V** y ponemos $Q(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ entonces: 1º) Q es una forma cuadrática y 2º) la forma bilineal de $Q_2$) es exactamente $\Phi$.

La forma bilineal simétrica $\Phi$ de (2) se llama la *forma bilineal asociada* a la forma cuadrática Q, y Q es la *forma cuadrática asociada* a la forma bilineal $\Phi$.

Haciendo entonces una perfecta correspondencia entre formas cuadráticas y bilineales simétricas, obtenemos una fuente inagotable de ejemplos de formas cuadráticas. Análogamente, hablaremos de formas cuadráticas degeneradas, definidas positivas, etc.

## 1.3.- Ejemplos

Si $\Phi$: **VxV** $\to$ **K** es una forma bilineal simétrica y $\mathbf{a} = (a_{ij})$ es la matriz de $\Phi$ en una base $\mathbf{B} = \{\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n\}$ de **V**, escribiendo para $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$:

$$Q(\mathbf{X}) = Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i\right) = \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (3)$$

Obtenemos una forma cuadrática en **V**. Introduciendo la "matriz columna" $x \in \mathbf{K}^{nx1}$ formada por las componentes $x_i$ de **X** podemos escribir esto como:

$$Q(\mathbf{X}) = x^t \,.\, \mathbf{a} \,.\, x \qquad (4)$$

## 1.4.- Ejemplo

Si <, > es un producto escalar en un espacio vectorial real **V**, la norma (III. 1.5) asociada a <, > es $\|X\| = (\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle)^{1/2}$, así que $\|X\|^2$ es la forma cuadrática asociada a <, >.

## 1.6.- Ejemplo

Si $\varphi$, $\psi$ son formas lineales sobre **V**, la aplicación Q(**X**) = $\varphi$(**X**) . $\psi$(**X**) es una forma cuadrática, cuya forma bilineal asociada es:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\left[Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y)\right] =$$

$$\frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{X}).\psi(\mathbf{Y}) + \varphi(\mathbf{Y}).\psi(\mathbf{X})) \qquad (5)$$

Si $\varphi = \psi$, tendremos Q(**X**) = $\varphi(\mathbf{X})^2$ y en tal caso es:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \varphi(\mathbf{X}).\varphi(\mathbf{Y}) \qquad (6)$$

Toda forma cuadrática que sea, como en el ejemplo anterior, un producto de dos formas lineales se dice *reducible*.

En observaciones, el autor presenta particularidades de la forma bilineal antes definida. En ejemplo 1.3, rescata otra manera de representar simbólicamente una forma bilineal (previo conocimiento de la base del espacio vectorial) y presenta en 1.4 el caso particular de una forma bilineal asociada a una forma cuadrática. El ejemplo 1.6 considera un caso particular que luego en ciertas condiciones le permite presentar las formas lineales reducibles. A partir de ello, define el ***cono isótropo*** trabajando siempre con los conceptos de manera analítica con ayuda de los símbolos creados a tal fin. Siguiendo el desarrollo del tema en el texto, encontramos los ejemplos.

## 1.8.- Ejemplos

a) Si **K** = **R** y **V** = $\mathbf{R}^n$ y tomamos Q(**X**, **X**) = <**X**, **X**> = $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ , es evidente que C(Q) = {0} = **0**.

b) Si en $\mathbf{K}^2$ consideramos Q(x) = $x_1^2 - x_2^2$, el cono isótropo está formado por los ($x_1$, $x_2$) tales que $x_1^2 = x_2^2$, y por lo tanto $x_2 = \pm x_1$. Entonces C(Q) = $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$ donde $\mathbf{L}_1$ (resp.: $\mathbf{L}_2$) es la recta $x_1 - x_2 = 0$ (resp.: $x_1 + x_2 = 0$) (fig. IV. 1).

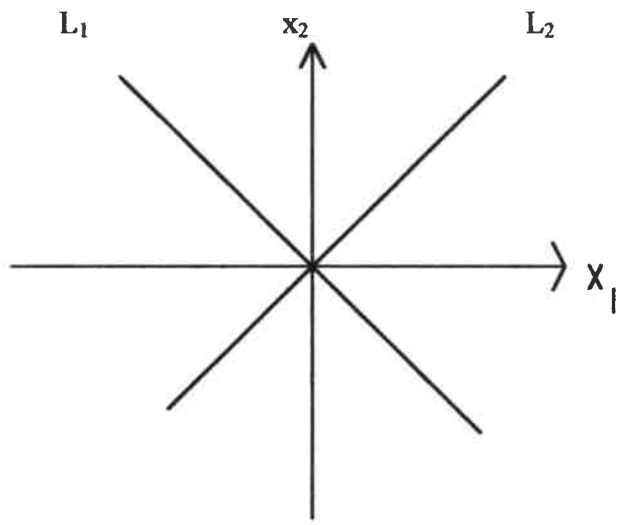



Fig. IV.1

c) Si $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ y $Q(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, el cono isótropo estará formado por los $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3$ que verifican $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$. De aquí deriva el nombre de "cono" (ver fig. IV. 2).

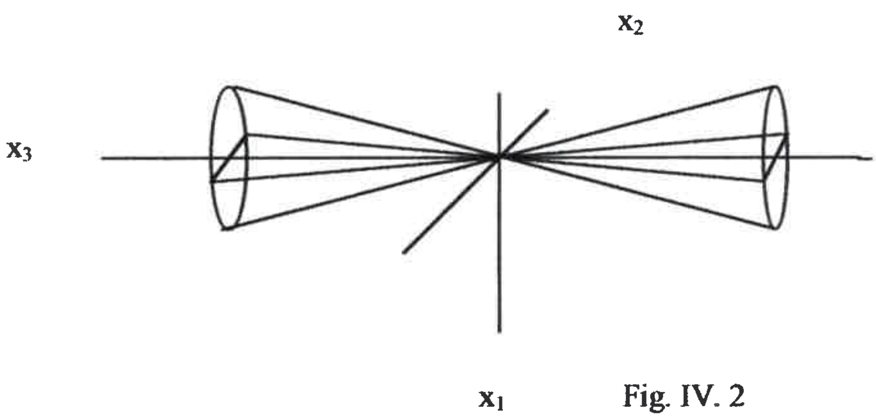



Fig. IV. 2

d) Si Q: **V** → **K** es reducible, digamos Q(**X**) = φ(**X**).ψ(**Y**) (ejemplo 1.6) entonces Q(**X**) = 0 equivale a "φ(**X**) = 0 ó ψ(**X**) = 0". Suponiendo (para eliminar trivialidades) Q ≠ 0, entonces φ ≠ 0 y ψ ≠ 0; llamando $\mathbf{H}_1$ = N(φ) y $\mathbf{H}_2$ = N(ψ) resulta que Q(**X**) =0 equivale a " **X** ∈ $\mathbf{H}_1$ ó **X** ∈ $\mathbf{H}_2$" . Por lo tanto, C(Q) = $\mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2$, unión de dos hiperplanos (el ejemplo b) anterior es un caso particular de esto). Si φ = ψ entonces C(Q) = $\mathbf{H}_1$ (un hiperplano).

e) Si **K** = **R** y **V** = $\mathbf{R}^3$, sea Q(**X**) = $x_1^2 + x_2^2$; esto no es lo mismo que el ejemplo a), ya que C(Q) consiste en los ($x_1$, $x_2$, $x_3$) con $x_1 = x_2 = 0$, luego C(Q) es una recta (el eje $x_3$).

f) Análogamente si Q(**X**) = $2x_1^2 + 3x_2^2$ en $\mathbf{R}^3$.

Notamos en los ejemplos a) e) f) y d) (con $\varphi = \psi$) que el caso C(Q) está contenido en un subespacio de **V**, diferente de **V**. Nuestro objetivo será probar que estos son esencialmente los únicos casos en que esto ocurre. Para ello precisamos un resultado trivial sobre subespacios:

En los ejemplos b) y c) el autor trabaja como en los demás, dentro de un marco analítico simbólico pero también hace un cambio de marco, concretamente, hace uso del marco geométrico que le permitirá al lector dar una representación visual un poco más concreta de aquello representado en un marco analítico simbólico. Cuando enuncia la necesidad de "un resultado trivial sobre subespacios" presenta a continuación el Lema.

1.9.- Lema

Sea **V** un **K** – espacio vectorial y sean $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ subespacios de **V**, diferente de **V**. Entonces $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \neq \mathbf{V}$.

*Demostración*

Supongamos que $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 = \mathbf{V}$. No puede ser $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2$ pues $\mathbf{S}_2 \neq \mathbf{V}$. Luego existe un $\mathbf{X} \in \mathbf{S}_1$, $\mathbf{X} \notin \mathbf{S}_2$. Análogamente (siendo $\mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_1$ falso pues $\mathbf{S}_1 \neq \mathbf{V}$) existe un $\mathbf{Y} \in \mathbf{S}_2$, $\mathbf{Y} \notin \mathbf{S}_1$. Pero si fuera $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \in \mathbf{S}_1$, sería $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = S_1 \in \mathbf{S}_1$, luego $\mathbf{Y} = S_1 - \mathbf{X} \notin \mathbf{S}_1$, absurdo. Como tampoco es $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \in \mathbf{S}_2$ (por la misma razón), resulta que $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \notin \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$. De esto, $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$ es un absurdo .

Tanto en el enunciado como en la demostración, el autor hace uso del lenguaje matemático expresado a través de símbolos. Además, para demostrar el lema, utiliza el

método del absurdo. En esta demostración, puede observarse la necesidad de poseer ciertos conocimientos previos referidos a teoría de conjuntos.

Luego del lema, se presenta la siguiente proposición.

1.10.- Proposición

Sea Q: **V** $\rightarrow$ **K** una forma cuadrática; si C(Q) $\subset$ **S** para algún subespacio **S** $\neq$ **V** entonces C(Q) = Ker ($\Phi$) siendo $\Phi$ la forma bilineal asociada a Q.

*Demostración:*

Como Ker ($\Phi$) $\subset$ C(Q) siempre ( si **X** $\in$ Ker ($\Phi$) es $\Phi$(**X**, **Y**) = 0 para todo **Y**, en particular $\Phi$(**X**, **X**) = Q(**X**) = 0) bastará probar C(Q) $\subset$ Ker ($\Phi$).

Sea **X** $\in$ C(Q), y sea V $\notin$ **S**; como Q(**X** - $\frac{2\Phi(X,V)}{Q(V)}$. V) = Q(**X**) - $\frac{2\Phi(X,V)}{Q(V)}$. $\Phi$(**X**, V) + $\frac{4\Phi(X,V)^2}{Q(V)^2}$. Q(V) = 0, por ser Q(**X**) = 0, nótese que Q(V) $\neq$ 0 pues V $\notin$ C(Q)), resulta que:

$$\mathbf{X} - \frac{2\Phi(X,V)}{Q(V)}.\, V \in \mathbf{S}.$$

Como **X** $\in$ **S** y V $\notin$ **S**, necesariamente debe ser $\Phi$(**X**, V) = 0.

Esto significa que: si **S´** = {**Y**: $\Phi$(**X**, **Y**) = 0}, cuando V $\notin$ **S** entonces V $\in$ **S´**.

Luego **S** $\cup$ **S´** = **V**; como **S** $\neq$ **V** deberá ser (por el lema anterior) **S´** = **V**. Pero **S´** = **V** significa que **X** $\in$ Ker ($\Phi$); como **X** $\in$ C(Q) es cualquiera resulta finalmente que C(Q) $\subset$ Ker ($\Phi$), lo que concluye la prueba.

En este caso, al igual que en el lema, se utiliza el lenguaje matemático simbólico. Lo que se debe probar es la igualdad entre dos conjuntos, por ello se destaca en la demostración, el hecho de probar la inclusión de un conjunto en el otro y el segundo en el primero. Esto es logrado en base a la utilización de conocimientos previos ya desarrollados

en capítulos anteriores. Si nos detenemos en la observación siguiente presentada en el texto:

1.11.- Observación

Del resultado precedente se deduce un criterio bastante preciso para que C(Q) esté incluido en un subespacio.

Concretamente, sea **B** = {$V_1$, ..., $V_n$} una base de **V** en la cual la matriz **a** de $\Phi$ es diagonal, luego $a_{ii} = \Phi(V_i, V_i) = Q(V_i)$ ($1 \le i \le n$). Supondremos que {$V_{r+1}$, ..., $V_n$} es base de Ker ($\Phi$), así que $a_{ii} = 0$ si $r < i < n$, y llamamos **W** al subespacio generado por {$V_1$, ..., $V_r$}.

Si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ está en **V**, será:

$$Q(X) = \Phi(X, X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} Q(V_i) x_i^2 ,$$

y por lo tanto, C(Q) = {**X**: Q(**X**) = 0 } consiste en los $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ tales que $\sum_{i=1}^{r} Q(V_i) x_i^2 = 0$ .

La hipótesis "C(Q) está contenido en un subespacio propio de **V**" obliga por 1.10 a que C(Q) = Ker($\Phi$) y, por lo tanto, el único $X \in W$ que está en C(Q) debe ser **X** = **0**. Esto es lo mismo que decir que:

$$\sum_{i=1}^{r} Q(V_i) x_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ldots = x_r = 0. \qquad (7)$$

En otros términos, C(Q) $\cap$ **W** = **0** (o bien: la forma cuadrática Q/**W**: **W** $\to$ **K** debe tener como cono isótropo {0}). Los ejemplos 1.8e) y 1.8f) han sido construido de esta forma ya que tanto $x_1^2 + x_2^2$ como $2x_1^2 + 3x_2^2$ tienen como isótropo {0} en $\mathbf{R}^2$.

Más generalmente: las formas cuadráticas Q cuyo cono isótropo está contenido en un subespacio propio de **V** (y que entonces verifican Ker($\Phi$) = C(Q))

se obtienen tomando un subespacio $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$ y una forma cuadrática Q': $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{K}$ por $Q(W + Y) = Q'(W)$, para $\mathbf{W} \oplus \mathbf{M} = \mathbf{V}$, $W \in \mathbf{W}$ e $Y \in \mathbf{M}$. Esto es lo mismo que tomar una base $\{V_1, \ldots, V_r\}$ de $\mathbf{W}$ en la cual la matriz **a** de $\Phi'$ es diagonal, extenderla a una base $\{V_1, \ldots, V_r, \ldots, V_n\}$ de **V**, y poner:

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i\right) = Q\left(\sum_{i=1}^{r} x_i V_i + \sum_{i>r} x_i V_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} Q'(V_i) x_i^2 . \qquad (8)$$

De esto se deducen varias consecuencias:

Lo importante del tratamiento del tema realizado por el autor está en el hecho de permitir rescatar nueva manera de expresar a Q(**X**) cuando se ha determinado una base cualquiera de ese espacio. También se encuentra el criterio preciso para que C(Q) esté incluido en un subespacio. Del resultado se deducen varias consecuencias expresadas en corolarios.

## 1.12.- Corolario

Si **V** es un espacio vectorial real y Q: $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ es una forma cuadrática $\neq 0$ son equivalente las afirmaciones:

a) C(Q) está contenido en un subespacio **S** de **V**, $\mathbf{S} \neq \mathbf{V}$.
b) C(Q) = Ker($\Phi$).
c) $\mathbf{V}^{+} = \mathbf{0}$ o bien $\mathbf{V}^{-} = \mathbf{0}$.
d) Si $\mathbf{W} \oplus \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbf{V}$, $\overline{\Phi}/\mathbf{W}$ es definida positiva o negativa.

*Demostración:*

Que a) $\Rightarrow$ b) resulta de 1.10; es obvio que b) $\Rightarrow$ a). Es claro también que c) $\Leftrightarrow$ d). La discusión precedente nos dice además que b) ocurre si y sólo si Q/W: $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{R}$ tiene cono isótropo {0} y por lo tanto en (8) deberá ser $Q(V_i) > 0$ (para todo $i \leq r$), o bien, $Q(V_i) < 0$ (para todo $i \leq r$) que es d).

1.13.- Corolario

Sea **V** un espacio vectorial sobre **C** de dimensión n y sea Q: **V** → **C** una forma cuadrática ≠ 0. Entonces son equivalentes:

a) C(Q) está contenido en un subespacio **S** de **V**,

b) C(Q) = Ker(Φ).

c) Dim (ker(Φ)) = n – 1

d) Existe una forma lineal φ: **V** → **C**, φ ≠ 0, tal que Q(**X**) = λ φ(**X**)$^2$ para todo **X** ∈ **V** y un λ ≠ 0 (por lo tanto Q es reducible). ...

1.14.- Proposición

Sea Q: **V** → **K** una forma cuadrática no nula; entonces son equivalentes las afirmaciones:

a) C(Q) = $\mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2$, con $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$ hiperplanos de **V**.

b) Q es reducible. ...

En el primer corolario se demuestra la equivalencia de los puntos a), b), c), y d) usando los conocimientos previos del presente capítulo. En el siguiente corolario sigue igual tratamiento que el anterior. Se demuestra analíticamente la equivalencia entre lo expresado por a), b), c) y d). Lo mismo ocurre con la proposición, en la cual solo llama la atención el hecho de que se presente un gráfico con los hiperplanos intervinientes, esto es, la ayuda que puede brindar al lector un cambio de marco (marco analítico simbólico ↔ marco geométrico).

Finaliza la sección con la siguiente ejercitación propuesta.

1.15.- Ejercicios

1.- Probar que la forma cuadrática en $\mathbf{R}^3$

Q(X) = $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_3$

Es reducible (*Sugerencia*: "factorear" Q(X) como producto de polinomios de grado 1).

2.- Determinar para que valores de α y β (α > 0) la forma cuadrática Q(X) = $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2$ (en $\mathbf{R}^2$), es reducible.

3.- Toda forma cuadrática Q: **V** → **K** reducible tiene rango ≤ 2. Probar que toda forma cuadrática de rango 1 es reducible, y que una forma cuadrática de rango 2 es reducible si y solo si C(Q) no es un subespacio de **V**.

4.- Sea Q: $\mathbf{K}^3$ → **K** una forma cuadrática degenerada y ≠ 0. Probar que C(Q) es un plano, una recta o un par de planos.

5.- Si Q: **V** → **K** es una forma cuadrática ≠ 0, sea P = $\{\sum_{i=1}^{n} X_i$ : $X_i \in$ C(Q) para 1 ≤ i ≤ n}. Probar que P = **V** o P = Ker(Φ) (*Sugerencia*: P es un subespacio, usar 1.10).

6.- Si Q: **V** → **K** es una forma cuadrática ≠ 0 tal que C(Q) no está contenido en un subespacio de **V**, Q: **V** → **K** es suyectiva (*Sugerencia*: usando el ejercicio anterior probar que existen A y B en C(Q) tales que Φ(A, B) ≠ 0, razonar por el absurdo; considerar luego la recta $L_{AB}$ → **K** inducida por Q).

7.- Sea Q: **V** → **K** una forma cuadrática no degenerada. Probar que el conjunto de todos los endomorfismos f: **V** → **V** tales que Q(f(**X**)) = Q(**X**) para todo **X** ∈ **V**, es un grupo (subgrupo de GL(V)) que se indicará O(Q) (" grupo ortogonal de Q")

a) Si **V** es un EVPI y Q(**X**) = <**X**, **X**>, O(Q) es el grupo ortogonal O(V) de III.6.

b) Calcular la matriz (en la base canónica) de una f ∈ O(Q), siendo Q: $\mathbf{K}^2$ → **K** dada por Q(X) = $x_1^2 - x_2^2$ .

*Nota*

El grupo O(Q), para Q: $\mathbf{R}^4$ → **R** dada por Q(X) = $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ se denomina "grupo de Lorentz", de gran importancia en Relatividad (ver [1]).

8.- Usando los ejercicios 3 y 4, probar que:

a) Q: $\mathbf{K}^2$ → **K**, Q(X) = $x_1^2 + x_2^2$ es reducible si y solo si hay un α ∈ **K** tal que $\alpha^2$ = -1 ( caso particular: **K** = **C**)

b) Q: $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$, $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ o es reducible si $n \geq 3$.

c) Análogo a b) para Q: $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$, $Q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2$ .

Como se puede constatar, el autor presenta ocho (8) ejercicios, de los cuales en siete (7) de ellos se solicita que prueben "algo" y en uno (1) que determinen "algo". En este último caso, de la lectura del enunciado del ejercicio 1.15.2), se deduce que: el alumno debe reconocer la terminología (forma cuadrática, $\mathbf{R}^2$, reducible, etc.); poseer conocimientos previos (formas cuadráticas, formas cuadráticas reducible, etc); analizar los datos del problema ($X \in \mathbf{R}^2$, entonces $X = (x_1, x_2)$; $\alpha$ y $\beta$ representan constantes, pero solo se da restricción a $\alpha$, etc.); descubrir relaciones (entre dos formas lineales y la forma cuadrática; entre los coeficientes de las formas lineales y los datos; etc.); lo cual implica recordar la información pertinente, descubra una relación entre ella y lo solicitado en la actividad y formule una solución la cual se buscará inicialmente pensando que la actividad que propuso el docente tiene que ver con lo que se enseñó (actividad rutinaria).

De la búsqueda de la solución por parte de los alumnos, se llega a observar, entre otros aspectos, que ellos esperan aplicar los conceptos nuevos como si fuera una receta; resolver con facilidad este problema y dudar por ello de que la solución sea la correcta; encontrar una posible solución con facilidad o dificultad y sentir la necesidad de validar su respuesta con la de sus compañeros; carencia de alguno de los conceptos enseñados en el curso al cual pertenece el tema; errores de conceptos en temas enseñados en el curso; conceptos erróneos en temas del nivel secundario (factorizar, operar con expresiones algebraicas, etc.); esperar que les den la respuesta; solicitar la guía constante del docente mientras intenta resolver el problema, aspectos todos estos que mostrarán las distintas actitudes, intereses, valoración de sí mismo (esto pensado en el alumno), etc.

Los ejercicios en los cuales se solicita "probar", pueden ser agrupados en dos categorías. Una de ellas se debe trabajar sobre un ejemplo concreto. La otra, debe trabajarse con una abstracción.

Los ejercicios 1.15.1) y 1.15.8) pertenecen a la primera categoría enunciada.

En el ejercicio 1.15.1), es posible pretender que algunos símbolos se convierten en lenguaje rutinario (**R**$^3$ representa el espacio tridimensional, **X** representa un vector del espacio, en este caso de **R**$^3$, etc); que relacione los símbolos con su significado dentro del contexto de la actividad (Q representa la transformación aplicada sobre un vector **X** , la expresión de la transformación está en términos de $x_1$, $x_2$, $x_3$, en lugar de **X**, pero **X** es ($x_1$, $x_2$, $x_3$), o Q(X) es una forma cuadrática y la expresión es siempre del tipo polinomio de grado no mayor que 2, etc.); que reconozca la terminología (factorear, reducible, forma cuadrática, etc.); transforme la expresión dada en un producto de expresiones lineales, realizando los algoritmos necesarios, resolviendo el problema que corresponde al tipo de actividad rutinaria. También puede ocurrir que el alumno, luego de reconocer los datos e identificar el problema, busque la solución siguiendo un camino del pensamiento que le permite vincular la forma cuadrática con su equivalente, expresada como el producto de dos formas lineales y a partir de ello, se aboque a encontrar dos formas lineales cuyo producto da la forma cuadrática de referencia e infiera una metodología de trabajo o técnica.

En el ejercicio 1.15.8) también se debe trabajar con ejemplos particulares, aunque en ellos no alcanzan los conocimientos previos y en este caso particular, deben utilizar los resultados encontrados al resolver otras de las actividades propuestas. Esto establece una restricción en la selección arbitraria de ejercicios.

El ejercicio 1.15.7) solicita del alumno que trabaje inicialmente en un nivel de abstracción y posteriormente solicita se trabaje con elementos concretos.

En los restantes ejercicios, si se seleccionan como actividad del alumno, esta actividad va a cubrir un amplio espectro en el desarrollo de las capacidades, pues además de exigir recordar conocimientos previos que se refieren tanto a símbolos, terminología, conceptos aprendidos en los distintos niveles de enseñanza, determinación de los conceptos útiles para resolver la actividad, realizar análisis de datos del problema y vincular estos con la solución, ensayar una demostración que en algunos casos será en lenguaje común y en otros en lenguaje simbólico usando los símbolos matemáticos, admitiendo la posibilidad de casos intermedios entre estos dos extremos.

El cuadro 1 resumen el estudio realizado a la ejercitación propuesta.

## Cuadro 1

| FORMAS CUADRATICAS | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 1.15-1 | **R** | X | X | X | | | | X | | | X | | | X | | | | | X | |
| 1.15-2 | **R** | X | X | | X | | | | | | | X | X | | | X | | | | |
| 1.15-3 | **P** | | X | | X | | X | | X | | | | | X | X | | X | | | |
| 1.15-4 | **P** | | X | | X | | X | | X | | | | | X | X | | X | | | |
| 1.15-5 | **P** | | X | | X | | X | | X | | | | | X | X | | X | | | |
| 1.15-6 | **P** | | X | | X | X | X | | X | | | X | | X | X | X | X | | | |
| 1.15-7 | **P** | | X | | X | | X | | | | | X | | X | X | X | X | | X | |
| 1.15-8 | **P** | X | X | | X | | X | | X | | X | | X | | | X | X | | | |

El texto continúa con lo siguiente:

### 8.3.- Funciones cuadráticas

Sea **A** = **A**(**V**) un espacio afín sobre un cuerpo **K**, que por comodidad como el espacio afín construido a partir de un **K** – espacio vectorial **V** (ver II. 6.2 b)); indicamos con O al origen de **V** (así que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_o$).

Supongamos que F: **V** → **K** es una aplicación tal que

$$F(\mathbf{X}) = Q(\mathbf{X}) + 2\,\varphi(\mathbf{X}) + c \qquad (1)$$

Donde Q: **V** → **K** es una forma cuadrática, φ: **V** → **K** es una forma lineal y c ∈ **K**. Como de costumbre, llamamos Φ: **V** x **V** → **K** a la forma bilineal simétrica asociada a Q.

Si tomamos otro origen **A** ≠ O, Q: $\mathbf{V}_A$ → **K** no es más una forma cuadrática ya que por ejemplo:

$$Q(\alpha\,.\,\overrightarrow{AX}) = Q(\alpha\,.\,\mathbf{X} + (1-\alpha)\mathbf{A}) = \alpha^2\,Q(\mathbf{X}) +$$

$$+ (1 - \alpha)^2 Q(\mathbf{A}) + 2\alpha(1 - \alpha)\Phi(\mathbf{A}, \mathbf{X}),$$

visiblemente distinto de $\alpha^2 Q(\overrightarrow{AX}) = \alpha^2 Q(\mathbf{X})$.

Análogamente $\varphi$: $\mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$ no es más una forma lineal.

A pesar de esto es posible definir una forma cuadrática $Q_A$: $\mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$, una forma lineal $\varphi_A$: $\mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$ y un escalar $c_A$ tal que F: $\mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$ se escribe:

$$F(\mathbf{X}) = Q_A(\overrightarrow{AX}) + 2\varphi_A(\overrightarrow{AX}) + c_A \qquad (2)$$

Para ello ponemos:

$$\Phi_A(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}) = \Phi(X - A, Y - A) \qquad (3)$$

$$Q_A(\overrightarrow{AX})\ Q(X - A) \qquad (4)$$

$$\varphi_A(\overrightarrow{AX}) = \varphi(X - A) + \Phi(X - A, A) \qquad (5)$$

$$c_A = Q(A) + 2\varphi(A) + c = F(A). \qquad (6)$$

<u>2.1.- Lema</u>

Con las notaciones anteriores, se tiene:

a) $Q_A$: $\mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$ es una forma cuadrática (cuya forma bilineal asociada es $\Phi_A$).

b) $\varphi_A$: $\mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$ es una forma lineal.

c) La fórmula (2) es válida.

*Demostración*

a) Ante todo, $\Phi_A$: $\mathbf{V_A} \times \mathbf{V_A} \to \mathbf{K}$ es bilineal, pues $\Phi_A(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AZ}) = \Phi_A(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AV}) = \Phi(X - A, V - A) = \Phi(X - A, Y + Z - A - A) = \Phi(X - A, Y - A + Z - A) = \Phi(X - A, Y - A) + \Phi(X - A, Z - A) = \Phi_A(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}) + \Phi_A(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AZ})$, y también, $\Phi_A(\overrightarrow{AX}, \alpha.\overrightarrow{AY}) = \Phi_A(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AV}) = \Phi(X - A, V - A) = \Phi(X - A, \alpha Y + (1 - \alpha)A - A) = \Phi(X - A, \alpha Y - \alpha A) = \alpha.\Phi(X - A, Y - A) = \alpha.\Phi(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY})$.

Siendo $\Phi$ simétrica resulta $\Phi_A$ simétrica. Entonces a) se obtiene poniendo X = Y en (3).

b) Completamente análogo a a), queda a cargo del lector.

c) Como $Q_A(\overrightarrow{AX}) + 2\varphi_A(\overrightarrow{AX}) + c_A = Q(X - A) + 2[\varphi(X - A) + \Phi(X - A, A)] + Q(A) + 2\varphi(A) + c = Q(\mathbf{X}) + Q(A) - 2\,\Phi(\mathbf{X}, A) + 2\,\varphi(\mathbf{X}) - 2\,\varphi(A) + 2\,\Phi(\mathbf{X}, A) - 2\,Q(A) + Q(A) + 2\,\varphi(A) + c = Q(\mathbf{X}) + 2\,\varphi(\mathbf{X}) + c = F(\mathbf{X})$.

Todo esto significa que si una aplicación F: A $\rightarrow$ **K** se escribe (con un origen O) como suma de una forma cuadrática, una forma lineal y una constante, lo mismo ocurrirá si se la refiere a otro origen, en otros términos aunque cambien Q, $\varphi$ y c, el aspecto de F es el mismo. Entonces:

Como se observa, inicia el tema estableciendo las condiciones en las cuales se trabaja, define la aplicación F: **V** $\rightarrow$ **K** tal que $F(\mathbf{X}) = Q(\mathbf{X}) + 2\,\varphi(\mathbf{X}) + c$, aclara los símbolos empleados y advierte además de demostrar, que un cambio de las condiciones, esto es, tomando otro origen de referencia ($A \neq 0$), se pierde la forma cuadrática y la forma lineal involucrada, pero es posible definir una forma cuadrática $Q_A$: $\mathbf{V}_A \rightarrow \mathbf{K}$, una forma lineal involucrada $\varphi_A$: $\mathbf{V}_A \rightarrow \mathbf{K}$ y un escalar $c_A$ tal que F: $\mathbf{V}_A \rightarrow \mathbf{K}$ se escriba como

$$F(\mathbf{X}) = Q_A(\overrightarrow{AX}) + 2\,\varphi_A(\overrightarrow{AX}) + c_A \qquad (7)$$

Aclara además que: $\Phi(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}) = \Phi(X - A, Y - A)$, etc, lo que le permite introducir el Lema 2.1. En la demostración, podemos visualizar el fluido empleo del lenguaje simbólico. Además, el hecho de dejar a cargo al lector la proposición b) ya que la metodología de trabajo coincide con la empleada en el punto a). De esta manera está presente la tendencia a rutinizar metodologías empleadas en ciertos tipos de demostraciones.

Culmina el párrafo sintetizando lo antes desarrollado, a manera de conclusión o cierre de la exposición, para poder presentar la definición de una *función cuadrática*

En el ítem siguiente se encuentra:

## 2.3.- Observaciones

a) Las consideraciones precedentes (con el lema 2.1) dicen que si (7) es válida para un origen entonces valen para todo origen A. Es decir el *para cada A* de la definición puede sustituirse por *para algún A*.

b) La forma cuadrática $Q_A$, la forma lineal $\varphi_A$ y el escalar $c_A$ son únicos (para una F dada).

No se queda en este punto con el mero enunciado, sino que presenta la demostración y aclara el caso particular:

Si t = 0 obtenemos $\varphi_A(\vec{AX}) = \varphi'_A(\vec{AX})$ y por lo tanto debe ser $t(Q_A(\vec{AX}) - Q'_A(\vec{AX})) = 0$ para todo $t \in \mathbf{K}$ y esto da $Q_A(\vec{AX}) = Q'_A(\vec{AX})$.

El ítem siguiente es:

## 2.4.- Nota. Expresión en coordenadas

Sea F: $\mathbf{A} \to \mathbf{K}$ una función cuadrática y sea $S = \{O, V_1, \ldots, V_n\}$ un sistema de coordenadas en **A**, con $\vec{OV}_i$ $(1 \le i \le n)$ base de $\mathbf{V} = \mathbf{V}_o$. Si $\mathbf{g} = (g_{ij})$ es la matriz de $\Phi = \Phi_0$ en esta base, es decir, si

$g_{ij} = \Phi(\vec{OV}_i, \vec{OV}_j)$,

y si $p_1, \ldots, p_n$ son las componentes de $\varphi = \varphi_0$ en la base dual, o sea si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} p_i \gamma_i$ (entonces $p_i = \varphi(\vec{OV}_i)$) tendremos:

$$F(\mathbf{X}) = Q(\vec{OX}) + 2\varphi(\vec{OX}) + c_o =$$

$$= Q(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{OV}) + 2\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{OV}) + c_o =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_ix_j + 2 \sum_{i=1}^{n} p_ix_i + c_o , \qquad (9)$$

polinomio (no homogéneo) de segundo grado en $x_1, \ldots, x_n$.

Introduciendo la matriz columna (nx1) (que llamamos p), formada por los $p_i$ y llamando x a la análoga, formada con las componentes de $\vec{OX}$, lo anterior se escribe:

$$F(\mathbf{X}) = (x_1, \ldots, x_n)\,[g_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + 2\,(p_1, \ldots, p_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + c_o =$$

$$\mathbf{X}^t \,.\, \mathbf{g} \,.\, x + 2\, p^t \,.\, x + c_o. \qquad (10)$$

Si ahora introducimos la matriz (n+1)x(n+1) siguiente:

$$\mathbf{m}_F = \begin{bmatrix} & & | & p_1 \\ & g_{ij} & | & . \\ \_ & \_ & / & p_n \\ p_1 & . & p_n & c_0 \end{bmatrix}$$

podemos escribir (10) así:

$$F(\mathbf{X}) = [x_1, \ldots, x_n, 1].\, \mathbf{m}_F \,.\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Supongamos que tenemos otro sistema de coordenadas, S' = {A, $W_1$, ..., $W_n$}; tendremos como en (10):

$$F(\mathbf{X}) = y^t \,.\, \mathbf{g} \,.\, y + 2\, p^t \,.\, y + c_A, \qquad (12)$$

Siendo **g** la matriz de $\Phi_A$ en la base $\vec{AW_i}$ $(1 \le i \le n)$ de $\mathbf{V}_A$ y p = ($p_1$, ..., $p_n$) se forma con las componentes de $\varphi_A$ en la base de $\mathbf{V}^*_A$, dual de la base $\vec{AW_i}$ (esto es: $p_i = \varphi_A(\vec{AW_i})$).

Para explicitar la relación entre las expresiones (10) y (12) precisamos los datos:

$$\vec{OA} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{OV_i} \qquad \vec{OW_i} = \vec{OA} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \vec{OV_j} \qquad (13)$$

Si ahora :

$$\vec{OX} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{OV_i} \quad \text{y} \quad \vec{AX} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{AW_i},$$

de (13) se deduce que **X** = $\sum_{i=1}^{n} y_i \vec{AW_i} + (1 - \sum_{i=1}^{n} y_i)\vec{OA} = \sum_{i=1}^{n} y_i (\vec{OA} + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \vec{OV_j})$

$+ (1 - \sum_{i=1}^{n} y_i)\vec{OA}$ ,esto es:

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \sum_{j}\left(\sum_{i} y_i s_{ij}\right)\vec{OV} \qquad (14)$$

Llamando **a** a la matriz columna nx1 formada con las componentes de $\vec{OA}$, y $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in \mathbf{K}^{nxn}$, (14) se escribe:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{s}^t \mathbf{y} \qquad (15)$$

Reemplazando esto en (10) sale:

$$F(\mathbf{X}) = x^t.\mathbf{g}.x + 2p^t.x + c_0 = y^t.\mathbf{g}'.y + 2\, p'^t \,.\, y + c_A =$$
$$= (y^t(sgs^t)y + 2\,(p^t + a^t g)s^t.y + a^t.\mathbf{g}.a + 2p^t\,.a + c_0\,,$$

de donde:

$$\mathbf{s}.\mathbf{g}.\mathbf{s}^t = \mathbf{g}' \qquad (\mathbf{p}^t + \mathbf{a}^t\,\mathbf{g})\,\mathbf{s}^t = \mathbf{p}'^t\,. \qquad (16)$$

que da la relación buscada.

Aquí se observa, nuevamente, la tendencia de usar el lenguaje simbólico. En el marco analítico - simbólico empleado, la selección de los símbolos (letras griegas, letras cursivas, símbolo de sumatoria, etc.) no son los representativos del lenguaje usado en esta época, pues confiere a la escritura una sensación de densidad y complejidad que se elimina utilizando la notación compactada por medio de índices.

En el item 2.5 .- Ejemplos, el ejemplo a) presenta la función cuadrática expresada en base a un sistema de referencia, al caso particular de un espacio unidimensional. En el ejemplo b) se presenta la afirmación:

b) Toda forma cuadrática Q: **V** $\rightarrow$ **K** define automáticamente una función cuadrática.

Concluye el item indicando que el próximo resultado va a permitir construir infinitos ejemplos de funciones cuadráticas a partir de una dada. Luego presenta una proposición.

## 2.6.- Proposición

Sean **A'**, **A** espacios afines, u: **A'** $\rightarrow$ **A** una aplicación afín y F: **A** $\rightarrow$ **K** una función cuadrática. Entonces Fu: **A'** $\rightarrow$ **K** es una función cuadrática.

*Demostración*

Sea O' $\in$ **A'** y O = u(O'); llamemos **V'** y **V** a los respectivos espacios vectoriales con orígenes O' y O. De esta manera u: **V'** $\rightarrow$ **V** es lineal. Como F(**X**) = Q(**X**) + 2$\varphi$(**X**) + c con Q: **V** $\rightarrow$ **K** forma cuadrática y $\varphi$: **V** $\rightarrow$ **K** lineal, tendremos F' = Fu: **V'** $\rightarrow$ **K** como F'(Y) = Q(u(Y)) + 2$\varphi$u(Y) +c. Siendo evidente que Y $\rightarrow$ Qu(Y) es una forma cuadrática y que Y $\rightarrow$ $\varphi$u(Y) es una forma lineal, sigue que F' es una función cuadrática.

## 2.7.- Ejemplo

Supongamos u: **A** $\rightarrow$ **A** afín y que F: **V** $\rightarrow$ **K** es una función cuadrática. Si fijamos un origen O $\in$ **A** y llamamos **V** al espacio vectorial con origen O, u se escribe:

u(**X**) = L(**X**) + **V**,

con **V** = u(O) y L $\in$ End(**V**). Como F'(**X**) = Q'(**X**) + 2$\varphi$'(**X**) + c' = Q(u(**X**)) + 2$\varphi$(u(**X**)) + c (= F(u(**X**))), obtenemos:

$Q'(\mathbf{X}) = Q(L(\mathbf{X}))$,   $\varphi'(\mathbf{X}) = \varphi L(\mathbf{X}) + \Phi(L(\mathbf{X}), \mathbf{V})$,   $c' = F(\mathbf{V})$.

Si consideramos una base $\overrightarrow{OV_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ de **V** en la que F se escribe como en (10); si $\alpha = (\alpha_{ij})$ es la matriz de L en esa base, y $\overrightarrow{OV} = \sum_{i=1}^{n} v_i \overrightarrow{OV_i}$, tendremos:

$u(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{OV_i}$,   para   $\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{OV_i}$,   con $y = v + \alpha.x$ (todas matrices columnas). Entonces si:

$$F(\mathbf{X}) = x^t . \mathbf{g} .x + 2p^t . x + c, \qquad (18)$$

Será $F'(\mathbf{X}) = F(u(\mathbf{X})) = (v + \alpha.x)^t.\mathbf{g}. (v + \alpha.x) + 2p^t. (v + \alpha.x) + c = x^t(\alpha^t g\alpha) + 2(v^t g + p^t)\alpha.x + v^t.\mathbf{g}.v + 2p^t.v + c.$ (19)

Luego:

$$g' = \alpha^t g\alpha; \qquad p' = \alpha^t(p + gv), \qquad c' = F(v). \qquad (20)$$

En la proposición, cuando es demostrada el autor pone en evidencia la necesidad de poseer entre los conocimientos previos, el manejo con fluidez de la composición de aplicaciones, de las características de una aplicación afín, de una transformación o aplicación lineal, entre otros. Con el ejemplo partiendo de la suposición u: **A** → **A** afín y además F: **V** → **K** es una función cuadrática, logra expresiones equivalentes al efectuarse una composición de aplicaciones que las explicita en (20). En toda esta sección considerada, el lenguaje analítico simbólico con la abstracción que lo caracteriza, está presente.

El subtítulo siguiente trata de la ejercitación que propone el autor.

## 2.8.- Ejercicios

1.- Dadas las funciones cuadráticas F: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ :

a) $F(X) = x_1^2 + x_2^{\,2} - x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1$;

b) $F(X) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$;

c) $F(X) = x_1^2 - 2x_2 + 5$;

expresar F en el sistema de coordenadas $\{A, W_1, W_2, W_3\}$ siendo:

$A = (0, 1, 0)$, $W_1 = (1, 0, 0)$, $W_2 = (-1, 0, 0)$, $W_3 = (0, 1, 1)$.

2.- Si $F$: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ es una función cuadrática y $\varphi_A = 0$ para todo $A \in \mathbf{V}$ (notación como en (2.1)), entonces F es constante.

3.- Dadas las funciones cuadráticas $F$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

a) $F(X) = -2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1$;

b) $F(X) = x_1^2 + x_2^2 - 4$;

hallar $F' = Fu$ siendo $u \in GA(\mathbf{R}^2)$ dada por $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1, 2x_1 - x_2 + 2)$.

4.- Hallar todas las aplicaciones afines $u$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tales que $Fu = F$, cuando F es la función cuadrática:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$;

b) $x_1x_2 + x_3^2 + 2$.

5.- Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial real y $F$: $\mathbf{V} \to \mathbf{R}$ una aplicación cuadrática; sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{V}$ tales que $F(A) < 0$ y $F(B) > 0$. Probar que $F(X_o) = 0$ para un $X_o$ en el segmento AB. Ejemplificar (haga un dibujo) con $A = (0, 0)$ y $B = (2, 1)$ en el ejercicio 3b).

6.- Verificar que el conjunto de todas las aplicaciones cuadráticas F: : $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ forma un espacio vectorial (subespacio de $\mathbf{K}^{\mathbf{V}}$). ¿Cuál es su dimensión?

7.- Si $P \in \mathbf{K}[T]$ es un polinomio de grado $\leq 2$, $P = 0$ si y solo si P tiene tres raíces distintas (para una versión más general, ver I.8.30 ejercicio 11). Utilizando esto probar que si $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}_2$ y $P(t) = 0$ para todo $t \in \mathbf{K}$, entonces $P = 0$.

Probar (usando este hecho) que si $F$: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ es una función cuadrática tal que $F(X) = 0$ para todo $X \in \mathbf{V}$, entonces $F = 0$ (si $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}_2$) (*Sugerencia:* reemplazar X por t.X).

Aquí puede observarse que el autor presenta 7 ejercicios, de los cuales 3 de ellos son de carácter rutinario (2.8-1; 2.8-3 y 2.8-4) y 4 de carácter problemático (2.8-2; 2.8-5; 2.8-6 y 2.8-7).

En el primer ejercicio, el autor da las funciones cuadráticas y solicita su expresión según un nuevo sistema de referencia. Aquí hay una necesidad de que el alumno reproduzca en este caso particular, desde la generalización de conceptos a la creación de un modelo o algoritmo que le permita trabajar con casos particulares. Está puesto en juego el desarrollo de las capacidades de realizar algoritmo, y de transformar elementos de un problema de una modalidad a otra.

En el tercer ejercicio, las capacidades a desarrollar son similares al primero. Lo mismo ocurre con el ejercicio cuarto.

Los restantes ejercicios propuestos se refieren a casos particulares de funciones cuadráticas. Con estos ejercicios, se puede inferir que el autor, además de pretender continuar con el uso de la terminología y de conceptos previos, hay un énfasis en la aplicación de los resultados teóricos a ejemplos matemáticos concretos (acá el término concreto no se refiere a la aplicación en un modelo físico). Continúa en este apartado con la solicitud de desarrollo de demostraciones, de las cuales se puede rescatar como resultado del cumplimiento de condiciones especiales. Estas demostraciones solicitadas, contienen en algunos casos sugerencias. Estas sugerencias se pueden interpretar como actitud del autor hacia una actividad que requiere mayor especificidad para encontrar el camino hacia la demostración en un tiempo prudencial, ya que de no hacerlo así, se llevaría a solicitar una construcción del conocimiento, lo que no necesariamente va a conducir hacia una respuesta por parte del que la realice. Con la sugerencia, abre las puertas hacia una reconstrucción del conocimiento.

En el ítems Complemento. Discriminante rescata la relación entre $m_F$ y la matriz análoga que se obtiene cambiando el sistema de referencia, a los efectos de presentar una forma de escritura cómoda, que permita introducir el concepto de discriminante y su característica según el espacio en el cual se trabaje.

Por último, se encuentra en el texto el ítem siguiente.

2.10.- Ejercicio

Calcular el discriminante de (17), interpretando el hecho de que sea positivo cuando **K** = **R**.

Las capacidades a desarrollarse se encuentran especificadas en el Cuadro 2. En el mismo están también las capacidades que pueden desarrollar los ejercicios propuestos en el ítem anterior.

**Cuadro 2**

| FUNCIONES CUADRATICAS | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 2.8-1 | **R** | X | X | X | X | | X | X | | X | X | | | | | X | | | | |
| 2.8-2 | **P** | | X | | X | X | X | | | | | X | | | X | | X | | | |
| 2.8-3 | **R** | X | X | X | | X | X | | | | | X | X | X | | | | | | |
| 2.8-4 | **R** | X | X | | X | | X | | | | X | | X | X | | | | | | |
| 2.8-5 | **P** | X | X | | X | X | X | X | | | | X | | | X | X | X | | | |
| 2.8-6 | **P** | X | X | | X | X | X | | X | X | | X | | X | X | X | X | | | |
| 2.8-7 | **P** | | X | | X | X | X | | | | | | X | X | X | X | X | | | |
| 2.10-1 | **R** | X | X | X | X | | X | | | | X | X | | | | X | | | | |

**8.4.- Cónicas y cuádricas**

En esta sección, el autor comienza rescatando la definición de función cuadrática cualquiera sea el punto que actúe como origen de referencia, y a partir de ella, la condición de cumplirse $Q_A = 0$ si y solo si $Q = 0$, por lo cual F deviene de una aplicación afín.

Rescata el hecho de que una función cuadrática que no sea afín, ello es independiente del origen y continúa definiendo una cuádrica y presentando:

<u>3.2.- Observaciones</u>

a) Si dim(**V**) = 2, las cuádricas se llaman *cónicas* (la razón de esta nomenclatura se verá en 8.11).

b) Si F: **V** → **K** es una función cuadrática no afín, el conjunto C(F) resulta una cuádrica si es *no vacío*; Si C(F) es una cuádrica, diremos que F(**X**) = 0 es una "ecuación de la cuádrica", o que F *define a la cuádrica*. Es evidente que entonces λF (con λ ≠ 0) también define a la misma cuádrica que F, de modo que – en principio – una cuádrica puede ser definida por diferentes ecuaciones. Veremos luego que bajo ciertas condiciones hay esencialmente *una* ecuación (todas las demás se deducen de ella multiplicando por λ ≠ 0) (teorema 3.25).

En este punto, el autor aclara para dim(**V**) = 2, que la cuádrica recibe el nombre de cónica, en qué condiciones se habla de función cuadrática y la posibilidad de que una cuádrica pueda ser definida por diferentes ecuaciones. Al finalizar indica:

Veamos ahora algunos ejemplos de cuádricas en $\mathbf{K}^n$:

3.3.- Ejemplo

Caso n = 1. Basta tomar un polinomio F de la forma F(**X**) = $gx^2 + 2px + c$ (g ≠ 0) (5) tal que C(F) = {x: F(x) = 0} ≠ Φ. En otros términos, F tiene que tener alguna raíz.

Observando que podemos escribir:

$$F(X) = g\left(X+\frac{p}{g}\right)^2 - \frac{p^2-cg}{g} = g\left[\left(X+\frac{p}{g}\right)^2 - \frac{p^2-cg}{g^2}\right],$$

vemos que F(X) tiene raíces si y solo si $p^2 - cg$ es un cuadrado en **K**, y bajo esta condición será F(r) = 0 si

$$r = \frac{-p+\sqrt{p^2-cg}}{g} \quad \text{o si} \quad r = \frac{-p-\sqrt{p^2-cg}}{g}.$$

Entonces la cuádrica consiste en un par de puntos, o bien uno solo si cg = $p^2$. Resumiendo: la cuádrica definida por (5) consiste en las raíces de (5).

Recíprocamente, si $r_1$ y $r_2$ son dos puntos de **K** (no necesariamente distintos) C = {$r_1$, $r_2$} es una cuádrica ya que $(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2$ es una función cuadrática que define a C.

Es muy fácil ver que toda otra función cuadrática (no afín) que define a C = $\{r_1, r_2\}$ es un múltiplo de ésta. Formalmente:

3.4.- Lema

Sean $r_1$ $r_2$ en **K** y sea F: **K** $\to$ **K** una función cuadrática no afín tal que C(F) = $\{r_1, r_2\}$. Entonces $F(X) = \lambda(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2)$ para algún $\lambda \neq 0$.

*Demostración*

Por división de polinomios resulta $F(X) = \lambda(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2) + S(X)$ con S polinomio de grado 1, $S(X) = \alpha x + \beta$. Como $S(r_1) = S(r_2) = 0$ sigue que S = 0.

3.5.- Ejemplo. Cónicas (caso n = 2)

a) $F(X) = x_1^2 - x_2^2$; la cónica es el cono isótropo de la forma cuadrática $x_1^2 - x_2^2$ (ejemplo 1.8b), figura IV.1), o sea un par de rectas por O.

b) $F(X) = x_1^2 + x_2^2$, otro cono isótropo; aquí la cónica se reduce a {0} si **K** = **R** o **Q** (o cualquier cuerpo donde $\alpha^2 \neq -1$ para todo $\alpha$). Pero si **K** = **C**, al escribir $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$ vemos que la cónica es la unión de las rectas (por O):

$$x_1 + ix_2 = 0 \qquad x_1 - ix_2 = 0,$$

En otros términos $x_1^2 + x_2^2$ es irreducible en **R**, pero reducible en **C**.

c) $F(X) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. La cónica es una *circunferencia* o *elipse* como generalización del caso **K** = **R** y la circunferencia $\|X\| = 1$) (fig. IV.4)

d) $F(X) = x_1^2 - x_2^2 - 1$, la cónica se llama hipérbola (fig. IV.5) en el caso **K** = **R**).

e) $F(X) = x_1^2 - 2x_2$ una parábola (fig. IV.6).

f) $F(X) = x_1^2 - 1$, factoreando esto resulta $F(X) = (x_1 + 1)(x_1 - 1)$ de modo que se trata de dos rectas ($x_1 = 1$ y $x_1 = -1$) paralelas.

g) $F(X) = x_1^2$, la cónica es una recta "doble" ($x_1 = 0$).

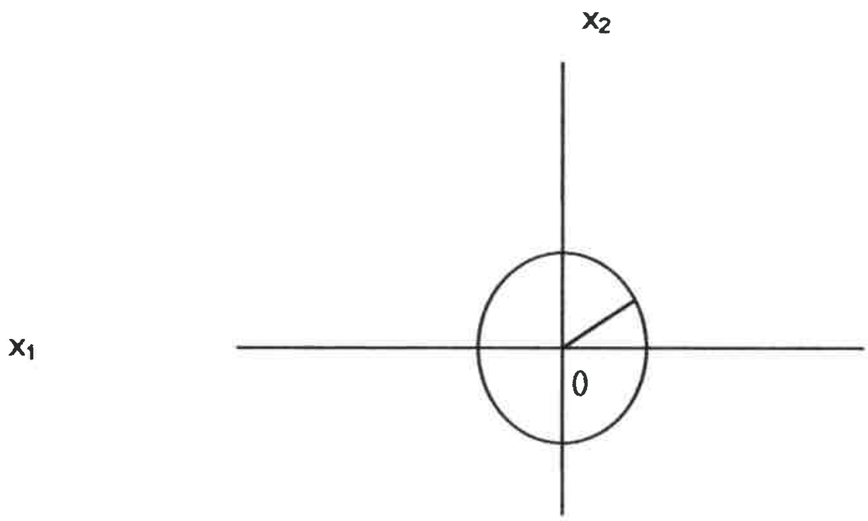



Fig. IV. 4

h) Si $F(X) = x_1^2 + x_2^2 + 1$, F puede no definir ninguna cónica (por ejemplo si **K** = **R**) o bien definir la misma cónica que en el ejemplo c) (por ejemplo si **K** = **C** cambiando $x_k$ por $ix_k$, k = 1, 2) o bien otra cosa diferente (ver ejercicio 10).
i) Análogamente $F(X) = x_1^2 + 1$ no define una cónica si **K** = **R**; pero si **K** = **C**, reemplazando $x_1$ por $ix_1$ caemos en lo visto en el ejemplo f), par de rectas paralelas.

En el ítem siguiente veremos que los siete (eventualmente nueve) ejemplos anteriores agotan esencialmente todos los casos posibles de cónicas.

Veamos ahora ejemplos para n = 3:

3.6.- Ejemplo. Cuádricas (n = 3)

a) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, la cuádrica es el *cono isótropo* de la forma cuadrática $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (fig. IV.2).
b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; la cuádrica se reduce al punto {0} si **K** = **R**; si **K** = **C** cambiando $x_3$ por $ix_3$ caemos en el ejemplo anterior. Otros casos son posibles, dependiendo de **K** (ver ejercicio 10).

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ da la *esfera* o *elipsoide* (generalización de la esfera $S^2$ de $\mathbf{R}^3$ definida por $\|X\| = 1$) (fig. IV.7).

d) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$, la cuádrica se denomina *hiperboloide de una hoja* (las intersecciones con planos paralelos al $x_3 = 0$ son circunferencias, en tanto que las intersecciones con planos paralelos al plano $x_1 = 0$ resultan ser hipérbolas) (fig. IV.8).

e) $x_1^2 - x_2^1 - x_3^2 - 1$, *hiperboloide de dos hojas* (las intersecciones con planos paralelos al $x_2 = 0$ ó al $x_3 = 0$ son hipérbolas, en tanto que las intersecciones con planos $x_1 = \alpha$ (y $|\alpha| \geq 1$) son circunferencias) (fig. IV. 9).

f) $x_1^2 + x_2^2 - 1$; al no haber condición sobre $x_3$, el ejemplo 3.5c) nos dice que se trata de un *cilindro elíptico* (fig. IV.10)

g) Análogamente, $x_1^2 - x_2^2 - 1$ y $x_1^2 - 2x_2$ representan respectivamente un *cilindro hiperbólico* y un *cilindro parabólico* (fig. IV. 11).

h) $x_1^2 - x_2^2$ define el *par de planos* $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, ambos por 0.

i) $x_1^2 - 1$ da análogamente el *par de planos paralelos* $x_1 = 1$, $x_1 = -1$.

j) $x_1^2$, un plano *doble*.

k) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3$, *paraboloide elíptico* (las secciones con los planos $x_1 = 0$ ó $x_2 = 0$ dan parábolas en tanto que las intersecciones con planos $x_3 = \alpha > 0$ dan elipses) (fig. IV.12).

l) $x_1^2 - x_2^2 - 2x_3$ *paraboloide hiperbólico* (también llamado "silla de montar") las intersecciones con los planos paralelos al plano $x_2 = 0$ son parábolas mientras que las intersecciones con planos paralelos al plano $x_3 = 0$ dan siempre hipérbolas, excepto el caso $x_3 = 0$ en que da el par de rectas $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$ y $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$ (fig. IV. 13).

m) $x_1^2 + x_2^2$ define si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ la *recta* $x_1 = x_2 = 0$; en cambio si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ tenemos $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$ y resulta un par de planos como en h).

n) Finalmente, funciones cuadráticas como $x_1^2 + x_2^2 + 1$, $x_1^2 + 1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$ no definen cuádricas cuando $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, aunque si cuando $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ (en que devienen en los ejemplos f), i) y c)) o en otros casos.

En el items siguiente veremos que estos ejemplos agotan las cuádricas para n = 3. Vamos ahora a empezar a imponer un poco de orden, estableciendo algunos criterios que permitan una primera clasificación de las cuádricas.

Por de pronto si F es una función cuadrática que define una cuádrica *C*, que se escribe

$$F(X) = Q_A(\overrightarrow{AX}) + 2\varphi_A(\overrightarrow{AX}) + c_A \qquad (6)$$

y resulta $c_A = 0$ y $\varphi_A = 0 \in \mathbf{V}^*$, entonces $A \in C$ y $F(X) = Q_A(\overrightarrow{AX})$: *C* no es otra cosa que el cono isótropo de $Q_A$ (en $\mathbf{V}_A$).

Estos puntos A resultan entonces interesantes ya que (si existen) permiten reducir el estudio de la cuádrica al de la forma cuadrática $Q_A$.

Para el caso n = 1, presenta la función cuadrática y deduce en que condiciones se cumple que la F(X) = 0, obteniendo de esta manera un par de puntos o bien un solo punto. Así llega a deducir que las cuádricas definida en (5) consisten en las raíces de (5). A partir de éste ejemplo, formaliza el resultado con el lema (3.4) para continuar trabajando en el caso n = 2.

Los ejemplos de cónicas presentados son los casos de rectas que pasan por el origen; cónicas que se reducen a un punto cuando **K** = **R** o **Q**, o dos rectas para **K** = **C**; una hipérbola cuando **K** = **R**; una parábola; rectas paralelas; recta doble y casos en que F no define una cónica si **K** = **R** y puede definirla si **K** = **C**. Lo trascendente en este ítem es que el autor trabaja todos los casos posibles de cónicas, acompañando el tratamiento analítico – simbólico en un marco algebraico, para el caso de las cónicas no degeneradas, con un juego de marco geométrico. En los últimos ejemplos es conveniente destacar la importancia que adquiere **K** para determinar F. Concluido el tratamiento de las distintas cónicas, acompañadas en cada caso por la representación gráfica de las mismas, pasa a tratar el caso de cuádricas cuando n = 3.

En este ítem se encuentran los casos: cono isótropo o cono, un punto si **K** = **R** o algo distinto si **K** = **C**, la esfera o elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas, el cilindro elíptico, el cilindro hiperbólico, el cilindro parabólico, par de planos que pasan ambos por el origen, par de planos paralelos, plano doble, paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, rectas si **K** = **R** o par de planos si **K** = **C** y casos de funciones

cuadráticas si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ pero pueden definirlas si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. En casi todos los casos el autor trabaja con un juego de marcos analítico ↔ algebraico ↔ geométrico a través de los cuales otorga representaciones a ciertas expresiones simbólicas e indirectamente fundamenta los nombres asignados.

No se intenta realizar la construcción de funciones cuadráticas o la construcción de la representación de $\mathcal{C}(F)$ a través de intersecciones. Trabaja siempre, sin advertirlo, con el sistema de coordenadas cartesianas. En los modelos representativos de cada cuádrica, los coeficientes que el autor utiliza son la unidad, si el término es cuadrático y dos (2) si es lineal. No varía los coeficientes de un mismo tipo de cuádrica.

Luego de advertir que se han tratado todos los casos de cuádrica para $n = 3$, comienza a establecer criterios que permitan clasificarla.

Partiendo de la función cuadrática que define una cuádrica, y considerando el caso $c_A = 0$ y $\varphi_A = 0 \in \mathbf{V}^*$, advierte que $A \in \mathcal{C}$ y $F(X) = Q_A(\overrightarrow{AX})$: $C$ no es otra cosa que el cono *isótropo* de $Q_A$ (en $\mathbf{V}_A$).

Se preocupa en hacer notar que estos puntos A, de existir, son interesantes, pues permiten reducir el estudio de la cuádrica al de la forma cuadrática. Entonces, los define como puntos singulares y para determinarlos presenta:

### 3.8.- Lema

Sea F: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ una función cuadrática que se escribe (para un origen O):

$$F(X) = Q(X) + 2\varphi(X) + c$$

Entonces

a) Un punto P es singlar para F si y solo si:

$$\Phi(P, X) + \varphi(X) = 0 \quad \text{para todo } X, \text{ y} \quad \varphi(P) + c = 0.$$

b) El conjunto de puntos singulares de F es la intersección de las variedades lineales:

$$L_\Phi^{-1}(-\varphi) \cap \{P: \varphi(P) + c = 0\}$$

Por lo tanto si no es vacío es una variedad lineal (II. 3. 11).

c) Si $C = \{X: F(X) = 0\}$, el conjunto de puntos singulares de F es:

$$C \cap L_\Phi^{-1}(-\varphi).$$

El lema, además del enunciado ya trascripto, cuenta con la correspondiente demostración, siguiendo los mismos lineamientos que en demostraciones anteriores. Luego de demostrar el lema, el autor presenta:

3.9.- Ejemplo

Determinemos los puntos singulares de F: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3 =$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2(-1/2, 1/2, -1/2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Debemos buscar los $Y = (y_1, y_2, y_3)$ tales que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad (-1/2, 1/2, -1/2)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

O sea:

$$\begin{cases} y_1 + 1/2y_3 = 1/2 \\ -y_2 + 1/2y_3 = -1/2 \\ 1/2y_1 + 1/2y_2 = 1/2 \\ -1/2y_1 + 1/2y_2 - 1/2y_3 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones forman la recta L de ecuación (0, 0, 1) + t(1, 0, -1).

En el ejemplo, el lector tiene la oportunidad de rescatar un modelos de algoritmo para ser utilizado cuando se desee determinar puntos críticos. Además de ello, podrá rutinizar operaciones entre matrices, construcción de sistemas de ecuaciones, aplicar algoritmo para resolver estos sistemas, hallar ecuaciones representativas de la solución, etc.

Culminada la solución del ejemplo presentado por el autor, éste solicita al lector la verificación de la inclusión de L en la cuádrica definida por F y aclara que para continuar necesita:

3.10.- Lema

Si Q: **V** $\rightarrow$ **K** es una forma cuadrática $\neq 0$ y **S** es un subespacio de **V** distinto de **V**, entonces C(Q) $\cup$ **S** $\neq$ **V**. ....

3.11.- Proposición

Sea F una función cuadrática y sea $C \neq \Phi$ la cuádrica definida por F. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

a) *C* es el conjunto de puntos singulares de F

b) Todo punto de *C* es un punto singular de F.

c) *C* es una variedad lineal.

3.12.- Proposición

Si F y F` son funciones cuadráticas que definen la misma cuádrica *C*, necesariamente F y F` tienen los mismos puntos singulares.

Tanto el lema como las proposiciones, cuentan con sus respectivas demostraciones. Estas muestran la validación del enunciado utilizando el lenguaje simbólico y a través del análisis deductivo de los datos, con gran prolijidad, trabajando en un marco analítico simbólico, alcanza los resultados. Culminada las demostraciones respectivas, el autor hace hincapié en la importancia de la última proposición, ya que ella es la que permite hablar de *punto singular de una cuádrica*, independientemente de la función cuadrática utilizada para definirla. También puede ahora definir los restantes puntos singulares, *regulares* o *simple*.

En los ítem Ejemplo. Cónicas con puntos singulares y Ejemplo. Cuádricas reducibles el autor muestra la metodología de trabajo o algoritmo que va a permitir determinar cuales son las cónicas que tienen puntos singulares o cuales son las cuádricas reducibles. Esto lo logra haciendo el estudio de expresiones generales tanto de la función cuadrática que

define la cónica, como de las aplicaciones afines cuyo producto da una cuádrica reducible. Culminando el análisis de los resultados obtenidos en ambos ejemplos, el autor presenta un listado de ejercicios a resolver.

## 3.15.- Ejercicios

1.- Determinar los puntos singulares (si existen) de las cuádricas en $\mathbf{R}^n$ definidas por:

a) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 1 \quad (n = 3)$

b) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + 4x_4 \quad (n = 4)$

c) $x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \quad (n = 4)$

d) $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 \quad (n = 5)$.

e) $x_2^2 - 2x_1 + 1 \quad (n = 2)$.

2.- Si $Q$: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ es una forma cuadrática y $c \neq 0$, la cuádrica definida por $F(X) = Q(X) - c$ no tiene puntos singulares. ¿Qué pasa si $c = 0$?

3.- Si L es una recta y $C$ es una cuádrica, $L \cap C$ es vacío, un punto, dos puntos o L.

4.- Hallar $L \cap C$ (todo en $\mathbf{R}^2$) siendo L la recta y $C$ la cónica definidas respectivamente por:

a) $x_1 - x_2 + 2 = 0; \quad x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 - x_2 + 2 = 0.$

b) $4x_1 + 2x_2 = 1; \quad 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 4 = 0.$

5.- Si $C$ es una cuádrica con un hiperplano H de puntos singulares entonces $C = H$ (*Sugerencia:* desarrollar $F(X + tV)$ con $X \in H$, $V \notin H$).

6.- Si $n > 1$ y $C$ es una cuádrica en $\mathbf{R}^n$ con más de un punto, probar que $C$ es un conjunto infinito (*Sugerencia:* escribir la ecuación de $C$ como ecuación de grado 2 en una de las variables y estudiar el discriminante).

7.- Hallar todos los puntos de la cónica $C$ en $\mathbf{K}^2$, definida por $x_1^2 + x_2^2 + 1$, cuando $\mathbf{K} = Z_3$ y $\mathbf{K} = Z_5$.

8.- Idem para la cónica $C$ definida por $x_1^2 + x_1x_2 + x_2$, cuando $\mathbf{K} = Z_3$. ¿Cuáles son los puntos singulares de $C$?

Los siguientes ejercicios conciernen a cuádricas en cuerpos finitos.

9.- Sea $\mathbf{K} = Z_p$, sea $\mathbf{K}_* = \{x \in Z_p: x \neq 0\}$, $p > 2$.

a) Si q: $\mathbf{K}_* \to \mathbf{K}_*$ es $q(\lambda) = \lambda_2$, q es un homomorfismo de grupo (para la operación . ) y $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$ si y solo si $\lambda_1 = \pm\lambda_2$.

b) Si $S = q(\mathbf{K}_*)$, entonces $S \cup (-S) = \mathbf{K}_*$ (*Sugerencia:* estudiar la factorización de q usando los resultados del capítulo 0, ítem 7.9).

Entonces si $x \neq 0$ no es un cuadrado, -x lo es.

c) Deducir de b) que S tiene $p^{-1/2}$ elementos.

d) Probar que si $S + S \subset \mathbf{S}$ es imposible (usar c) y el hecho de que $1 \in S$).

e) Deducir usando d), que en $Z_p$ ($p > 2$) hay elementos $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$ no todos nulos tales que $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 0$.

10.- Usando el ejercicio anterior (y el hecho de que si $0 \neq \alpha \notin S$ entonces $-\alpha \in S$) probar que para toda forma cuadrática Q: $\mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = Z_p$, $p > 2$) el cono isótropo tiene por lo menos p elementos.

**Cuadro 3**

| CÓNICAS Y CUADRATICAS | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 3.15-1 | **R** | X | X | X | X | X | | | | | X | X | | | | | | | | |
| 3.15-2 | **P** | | X | | X | | X | | X | | | | X | | X | X | X | | | |
| 3.15-3 | **p** | | X | | X | | X | | X | | X | | | | X | | X | | | |
| 3.15-4 | **R** | X | X | X | X | | X | X | | | X | X | X | | | | | | | |
| 3.15-5 | **P** | | X | | X | X | X | | X | | | X | | | X | | X | X | | |
| 3.15-6 | **P** | | X | | X | X | X | | | | | | X | | X | | X | X | | |
| 3.15-7 | **P** | X | X | | X | | X | | | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 3.15-8 | **P** | X | X | | X | | X | | | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 3.15-9 | **P** | | X | | | X | X | | X | | | X | | X | X | X | X | | | |
| 3.15-10 | **P** | | X | | X | X | X | | | X | | | X | X | X | X | X | | | |

La ejercitación propuesta está integrada por un ejercicio del tipo rutinario, el cual tiene por función la determinación de puntos singulares de cuádricas en $\mathbf{R}^n$, ejercicios de análisis de casos en que los elementos que intervienen en la determinación de puntos singulares cumplan o no ciertas condiciones, o ejercicios rutinarios en los cuales debe ponerse en juego conceptos previos tales como hiperplano, intersección de ellos y búsqueda de puntos singulares. Además están los casos en los cuales se solicita, básicamente, que se realicen demostraciones.

En esta ejercitación propuesta, también pueden determinarse las capacidades más sobresalientes. Estas están indicadas en el Cuadro 3.

Luego de la ejercitación propuesta, el autor presenta a partir del ítem siguiente, un conjunto de lemas, proposición y corolarios.

## 3.16.- Complemento. Teorema de unicidad

Veremos aquí cómo una cuádrica $C$ determina su ecuación (bajo restricciones razonables), de modo que la correspondencia "función cuadrática" $\rightarrow$ "cuádrica" es esencialmente biunívoca: si F y F\` definen la misma cuádrica $C$

entonces $F` = \lambda F$ con $\lambda \neq 0$ (exactamente como si $C$ fuera un hiperplano y F, F\` formas afínes que definen $C$; ver ejercicio 13 de II. 5.20).

Iniciaremos la discusión con las cuádricas irreducibles.

## 3.17.- Lema

Si $u_1$, $u_2$ son aplicaciones afines de **V** en **K**, y si $u_1(X).u_2(X) = 0$ para todo $X \in$ **V**, entonces $u_1 = 0$ ó $u_2 = 0$ (es decir: **V** no puede ser nunca unión de dos variedades lineales hiperplanos). ...

3.18.- Lema

Sean $u_1$, $u_2$, $v_1$ y $v_2$ aplicaciones afines no nulas de **V** en **K** y sean F, F` las funciones cuadráticas:

$$F(X) = u_1(X) \,.\, u_2(X); \qquad F`(X) = v_1(X) \,.\, v_2(X).$$

Entonces, si F y F` definen la misma cuádrica (reducible) existe un $\lambda \neq 0$ tal que F` = $\lambda$ F.

3.19.- Proposición

Sea F: **V** $\rightarrow$ **K** una función cuadrática no afín que define una cuádrica C. Se supone que $C \supset$ **H**, donde **H** es un hiperplano, definido por una aplicación afín $\psi$: **V** $\rightarrow$ **K**. Entonces:

a) F = $\psi \,.\, \psi_1$ donde $\psi_1$ : **V** $\rightarrow$ **K** es una aplicación afín.

b) $C$ = **H** $\cup$ **H**$_1$ donde **H**$_1$ es un hiperplano en **V** (que puede coincidir con **H**).

c) Si F` es otra función cuadrática no afín que define $C$, F`= $\lambda$ F para un $\lambda \neq 0$. ...

El teorema de unicidad resulta así probado para cuádricas reducibles. En lo que sigue, supondremos que es válida la hipótesis:

3.20.- Hipótesis

El cuerpo de escalares **K** es infinito.

Aunque esta hipótesis no es esencial para probar el teorema de unicidad, permite simplificar la demostración; para una versión general, ver ejercicios 3 a 10.

3.21.- Lema

Si **V** es un **K**-espacio vectorial de dimensión $\geq 2$, Q: **V** $\rightarrow$ **K** es una forma cuadrática no nula y **T** es un subespacio de **V** (distinto de **V**), hay infinitos hiperplanos **H** (subespacios de **V**) tales que:

(I) $\mathbf{H} \neq \mathbf{T}$

(II) $\mathbf{H}$ no está contenido en C(Q) (o sea $Q/\mathbf{H} \neq 0$) ...

3.22.- Corolario

Si $C \subset \mathbf{K}^2$ es una cónica que no se reduce a un punto, $C$ tiene infinitos puntos. ...

3.23.- Corolario

Si Q: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ es una función cuadrática no nula y $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ son subespacios de $\mathbf{V}$ distintos de $\mathbf{V}$, entonces $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \cup C(Q) \neq \mathbf{V}$. ...

3.24.- Corolario

Si $C$ es una cuádrica en $\mathbf{V}$ contenida en una variedad lineal $\mathbf{M} \neq \mathbf{V}$, entonces $C$ es una variedad lineal. ...

Como en las demás proposiciones o lemas o corolarios, el autor no solo presenta el enunciado, sino también la demostración. En éstas, sigue trabajando en un marco analítico simbólico, respetando el lenguaje simbólico que usualmente se emplea en esta disciplina. Con ello llega a enunciar y demostrar lo siguiente:

3.25.- Teorema (teorema de unicidad)

Sea $C$ una cuádrica en un $\mathbf{K}$-espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión n, definida por dos funciones cuadráticas F: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$, F`: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$.

Entonces si $C$ no está contenida en una variedad lineal de dimensión $n - 2$, existe un $\lambda \neq 0$ tal que F` = $\lambda$ F.

*Demostración*

Veamos primero que ocurre cuando $n = 2$. nuestra hipótesis dice entonces que *C* no se reduce a un punto.

Si *C* está contenida en una recta, resulta ser una recta (3.24), luego *C* es reducible y la hipótesis es cierta gracias a 3.19.

Análogamente, si *C* contiene una recta (de nuevo por 3.19); por lo tanto supondremos que: *C* no contiene ninguna recta, ni está contenida en una recta. Por lo tanto hay (por lo menos) cinco puntos A, B, C, D, E en *C* (3.22) de los cuales no hay tres alineados.

Considerando la recta **L** que pasa por A y B, entonces $C \cap \mathbf{L} = \{A, B\}$ (ya si $A \neq X \neq B$ y $X \in \mathbf{L} \cap C$, entonces sería $\mathbf{L} \subset C$, lo cual hemos descartado) (ejercicio 3 de 3.15).

Las funciones cuadráticas F, F` restringidas a **L** definen entonces una "cuádrica" $\{A, B\} = C \cap \mathbf{L}$ en **L** (como $A \neq B$, podemos asegurar que $F/\mathbf{L}: \mathbf{L} \to \mathbf{K}$ y $F`/\mathbf{L}: \mathbf{L} \to \mathbf{K}$ son funciones cuadráticas no afines) y por 3.4 resulta que hay un $\lambda \neq 0$ en **K** tal que $F`/\mathbf{L} = \lambda\, F/\mathbf{L}$.

Sea $G: \mathbf{V} \to \mathbf{K}$ la función cuadrática $G = F` - \lambda\, F$; si $F(X) = Q(X) + 2\varphi(X) + c$ y $F`(X) = Q`(X) + 2\varphi`(X) + c`$, entonces:

$$G(X) = Q`(X) - \lambda Q(X) + 2[\varphi`(X) - \lambda\varphi(X)] + c` - \lambda c,$$

y sea $M = \{X: G(X) = 0\}$. Notemos que si $X \in \mathbf{L}$ es $G(X) = F`(X) - \lambda F(X) = \lambda F(X) -$

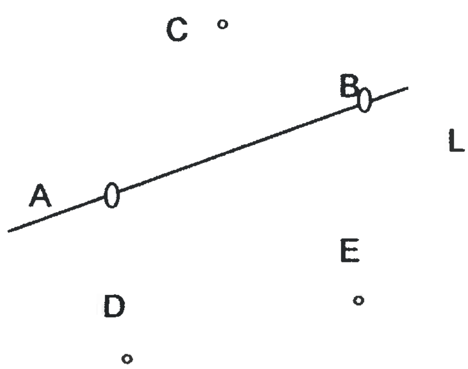



Fig. IV – 14

$\lambda F(X) = 0$, luego $\mathbf{L} \subset M$. Asimismo, si $X \in C$ es $F`(X) = F(X) = 0$, luego $G(X) = 0$, de donde $C \subset M$ (fig. IV. 14). Por lo tanto:

$$\mathbf{L} \cup C \subset M$$

y se nos presentan los casos:

(I) $Q` - \lambda Q \neq 0$. Entonces G define una cónica **M** que por contener a **L** es reducible (3.19), de modo que $M = \mathbf{L} \cup \mathbf{L}`$, donde **L`** es una recta. Pero como C, D, E están en *C* y no están en **L**, forzosamente ten que estar en **L`** contra la hipótesis de que no están alineados. Este caso es entonces imposible.

(II) $Q` = \lambda Q$, $\varphi` - \lambda\varphi \neq 0$. En este caso G es afín y por lo tanto *M* es una recta, lo que es incompatible con el hecho $C \subset M$. Este caso también es imposible.

(III) $Q` = \lambda Q$, $\varphi` = \lambda\varphi$. Ahora $G(X) = c` - \lambda c$ (constante) y si fuera $c` \neq \lambda c$ sería $M = \phi$, absurdo pues $C \subset M$. Entonces $c` = \lambda c$.

Suponemos ahora $\dim(\mathbf{V}) \geq 2$; la hipótesis sobre *C* nos dice que: o bien *C* no es una variedad lineal, o si lo es se reduce a un hiperplano. En este caso ya sabemos que la tesis es cierta por 3.19.

Por lo tanto supondremos que *C* no es una variedad lineal. Por lo tanto hay un punto no singular en *C* que por comodidad de notación supondremos que es el O (si es A –diferente de O- trabajamos en $\mathbf{V}_A$ en vez de **V**, complicando la escritura). Así que $F(X) = Q(X) + 2\varphi(X)$, y $F`(X) = Q`(X) + 2\varphi`(X)$ (pues $c = F(O) = 0 = F`(O) = c`$), y $\varphi \neq 0 \neq \varphi`$ por 3.12.

Llamemos **T** al hiperplano definido por $\varphi(X) = 0$; como $C \subset \mathbf{T}$ no es posible (por 3.24) hay un $V \in C$ con $\varphi(V) \neq 0$.

Sea $X \in \mathbf{T}$ cualquiera y sea **P**(X) el plano generado por los vectores **X** y **V**; como $0 \in C \cap \mathbf{P}(X)$ y $V \in C \cap \mathbf{P}(X)$, $C \cap \mathbf{P}(X)$ es una cónica que no se reduce a un punto, definida por $F/\mathbf{P}(X)$ y $F`/\mathbf{P}(X)$.

Para comparar ambas funciones cuadráticas sobre **P**(X), observamos que $\xi X + \eta V \in \mathbf{P}(X)$ es

$F`(\xi X + \eta V) = Q`(X)\,\xi^2 + Q`(V)\,\eta^2 + 2\Phi(V, X)\xi\eta + 2\varphi`(X)\xi + 2\varphi`(V)\eta$; (!7)

$$F(\xi X + \eta V) = Q(X)\,\xi^2 + Q(V)\,\eta^2 + 2\Phi(V, X)\xi\eta + 2\varphi(V)\eta. \qquad (18)$$

Por lo probado antes para cónicas, mirando (17) y (18) deducimos que $\varphi`(X) = 0$. Como X es cualquiera en **T** sigue que $\mathbf{N}(\varphi`) = \mathbf{T}$, luego $\varphi` = r\varphi$ para un r $\neq 0$ (ya que $\{\varphi\}$ es base de $\mathbf{T}^0$ y $\varphi` \in \mathbf{T}^0$).

Volviendo a (17) y (18) deducimos además que (para cada $X \in T$) hay un $\lambda_x \neq 0$ tal que:

$$Q`(X) = \lambda_x\, Q(X); \qquad \Phi`(V, X) = = \lambda_x\, \Phi(V, X). \qquad (19)$$

$$Q`(V) = \lambda_x\, Q(V); \qquad \varphi`(V) = \lambda_x\, \varphi(V). \qquad (20)$$

Como ya vimos que $\varphi`(V) = r\,\varphi(V)$, de (20) deducimos que $\lambda_x = r$ (cualquiera sea $X \in T$).Ahora si $Y \in \mathbf{V}$, tendremos $Y = X + t\mathbf{V}$ (con $X \in \mathbf{V}$) y entonces por (19) y (20) resulta: $F`(Y) = Q`(X + tV) + 2\varphi`(X + tV) = Q`(X) + t^2\, Q`(V) + 2t\Phi(V) + 2t\varphi(V) = rQ(X) + t^2 r\, Q(V) + 2t\, r\Phi(X, V) + 2t\, r\varphi(V) = r\, F(Y)$, esto es: $F`= r\, F$ y el teorema queda probado.

3.26.- Observación

En general el teorema de unicidad no es válido sin la hipótesis sobre *C*; por ejemplo $x_1^2 + x_2^2$ y $2x_1^2 + 3x_2^2$ definen la misma cónica en $\mathbf{R}^2$ (o $\mathbf{Q}^2$) – que se reduce a {0} – y es claro que no verifica la conclusión de unicidad.

En la demostración del teorema de unicidad puede rescatarse el hecho de mantener la escritura simbólica, trabajar en un marco analítico – simbólico y muy superficialmente expresa ciertas condiciones en un marco geométrico. Utiliza muchos conocimientos previamente tratados en esta sección 3, además de resultados logrados en el ejercicio propuesto 3.15 – 3). Otra característica notoria, es el uso de letras griegas como símbolos de escalares, además de letras del abecedario para representar parámetros escalares, lo que confiere a la demostración una complejidad mayor que la que realmente tiene.

La observación indica las condiciones de validez del teorema presentando un contraejemplo para el caso en que no se cumple la condición.

Continuando, el autor representa una selección de ejercicios propuestos

## 3.27.- Ejercicios

1) Hallar todas las cónicas $C \subset \mathbf{R}^2$ que pasan por los puntos A = (0, 0), B = (1, 1), C = (2,2), D = (1, 0).

2) Si **K** es un cuerpo infinito, probar que $\mathbf{K}^n$ no puede ser reunión de un número finito de cuádricas (razonar como en 3.21).

3) Sea **K** un cuerpo finito, de características p (ver capítulo 0). Probar que **K** tiene $p^r$ elementos (*Sugerencia:* **K** es un $\mathbf{Z}_p$-espacio vectorial).

4) Sea **K** un cuerpo finito, con m elementos. Probar que en $\mathbf{K}^2$ hay m + 1 subespacios unidimensionales distintos (*Sugerencia:* para cada V en la recta $x_1 + x_2 = 1$ considerar el subespacio generado por V). Deducir que si **V** es un **K**-espacio vectorial de dimensión $n \geq 2$, hay por lo menos m + 1 subespacios hiperplanos en **V** (usar anuladores.

5) Si **K** es un cuerpo finito, con m elementos, **V** un **K**-espacio vectorial y **S** es un subespacio de **V**, Q: $\mathbf{V} \to \mathbf{K}$ una forma cuadrática no nula entonces hay (por lo menos) m – 2 hiperplanos $\mathbf{H} \neq \mathbf{S}$ tales que $Q/\mathbf{H} \neq 0$ (razonar como en 3.21).

6) Si $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}_3$, valen 3.23 y 3.24 (razonar como allí, usando los ejercicios 3 y 5).

7) Si $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}_3$ y $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}_5$, toda cónica $C \subset \mathbf{K}^2$ con más de un punto tiene por lo menos 5 puntos (mismo método que en 3.22).

8) Probar el teorema de unicidad 3.25 para **K** diferente de $\mathbf{Z}_3$ y $\mathbf{Z}_5$ (razonar de la misma forma usando el ejercicio anterior).

9) Demostrar el teorema de unicidad 3.25 para cónicas sobre $\mathbf{Z}_5$

*Sugerencias:*

(I) Usando el ejercicio 5 probar que si $C$ tiene más de un punto, tiene por lo menos cuatro.

(II) Si $C$ tiene cinco (o más) puntos, usar el método de 3.25.

(III) Si $C$ tiene cuatro puntos, y $F(X) = Q(X) + 2\varphi(X) + c$ define $C$, usando la construcción del ejercicio 5 probar que C(Q) es un par de rectas distintas, luego Q es reducible de rango 2. Eligiendo como origen un A con $\mathbf{L}_{\Phi}(A) = -\varphi$ y un

adecuado sistema de coordenadas, llevar la ecuación a la forma $x_1` . x_2` = 1$ y probar entonces la unicidad.

10) El teorema 3.25 no vale si $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_3$ (considerar las funciones cuadráticas $x_1^2 + x_1x_2 + x_2$ y $x_2^2 + x_1x_2 + x_1$).

11) Si F, F` son funciones cuadráticas no afines de $\mathbf{C}^n$ en $\mathbf{C}$ que definen la misma cuádrica entonces $F` = \lambda F$ para un $\lambda \neq 0$ (combinar 3.25 con 1.13, 3.24 y 3.11).

12) Sea $C \subset \mathbf{R}^2$ una cónica no contenida en una recta y $A \notin C$. Probar que hay una recta $\mathbf{L}$ tal que $A \in \mathbf{L}$ y $\mathbf{L} \cap C$ = dos puntos (*Sugerencia:* estudiar las rectas que pasan por A y cortan a $C$ en un punto solamente; si $F(X) = Q_A(X) + 2\varphi_A(X) + c_A$ define $C$, estas rectas están contenidas en $C(Q_A)$ o en el cono $\varphi^2{}_A - c_AQ_A$. Contar cuantas hay).

13) Si $C \subset \mathbf{R}^2$ es una cónica no contenida en una recta y $A \notin C$, no existe ninguna cónica $C`$ tal que $A \in C$ y $C \subset C`$ (usar el ejercicio anterior: $C`$ debe contener una recta, luego es reducible, y resulta enseguida que $A \in C$).

14) Si $C \subset \mathbf{R}^n$ es una cuádrica no contenida en un hiperplano y $A \notin C$, no existe ninguna cuádrica $C`$ tal que $A \in C`$ y $C \subset C`$ (usar el ejercicio anterior e inducción sobre n).

De este listado de ejercicios puede comprobarse el predominio de los ejercicios de tipo problemático. El ejercicio que puede considerarse rutinario es el 3.27.-1).

Con estos ejercicios propuestos, es obvio que la capacidad de construir demostraciones o seguir una línea de razonamiento, son las más importantes. Hay algunos ejercicios donde **no** está dicho lo que se requiere. Por ejemplo: 5), 6), 7), 10), 13) y 14). Se supone que se solicita la demostración, pero ello no está escrito en forma explícita. Esta característica del autor se observa en los matemáticos puros, para los cuales la lectura de una afirmación implica, sin necesidad de explicitarse, que ella debe ser demostrada. También pueden desarrollarse otras capacidades, las que en cada caso se indican en el cuadro 4.

## Cuadro 4

| CÓNICAS Y CUADRATICAS | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 3.27-1 | **R** | | X | X | X | | X | | | | X | | | | | | | | | |
| 3.27-2 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-3 | **p** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-4 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-5 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-6 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-7 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-8 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-9 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-10 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-11 | **P** | | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-12 | **P** | X | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-13 | **P** | X | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |
| 3.27-14 | **P** | X | X | | X | | | | X | | | | | | | | X | | | |

### 8.5.- Centro y tangente

Bajo este título el autor comienza rescatando la forma de la función cuadrática que define una cuádrica y pasa a definir el centro de la misma, aclarando luego:

4.2.- Observaciones

a) Todo punto singular de *C* es un centro (lema 3.8).

b) Puede no haber centro; pero si hay, forman una variedad lineal ya que A es centro de *C* si y solo si A $\in L_{\varphi}^{-1}(-\varphi)$ (I. 5.6).

En todo caso si $\Phi$ es *no degenerada*, $L_\Phi$: $V \to V^*$ es isomorfismo y en este caso *hay un único centro.*

c) Veamos por que razón se da el nombre de " centro" a un A que verifica la condición (1). Si tomamos como origen A, tendremos:

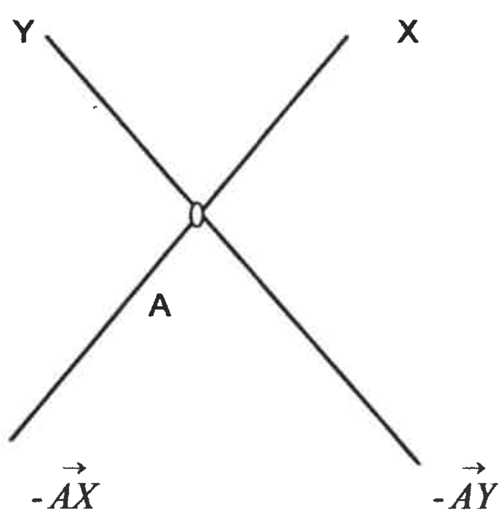
$$F(X) = Q_A(\overrightarrow{AX}) + 2\varphi_A(\overrightarrow{AX}) + c_A, \qquad (2)$$

y siendo $\varphi_A(\overrightarrow{AX}) = \varphi(X - A) + \Phi(A, X - A) = \varphi(X) + \Phi(A, X) - \varphi(A) - Q(A)$, la condición (1) obliga a que $\varphi_A(\overrightarrow{AX}) = 0$ para todo $X \in V$. De esta forma, si A es centro, será:

$$F(X) = Q_A(\overrightarrow{AX}) + c_A. \qquad (3)$$

Ahora de (3) se deduce que: si $\overrightarrow{AX} \in C$ entonces $-\overrightarrow{AX} \in C$, en otros términos la figura *C* es simétrica respecto de A (fig. IV.15).

d) Si A es centro de *C* y A $\in$ *C* entonces *C* no es otra cosa que el cono isótropo $C(Q_A)$, según se deduce de (3).




Como puede observarse, se encuentran las aclaraciones tales como: Todo punto singular de C es un centro; puede no haber centro, pero si lo hay, forman una variedad lineal, se justifica el nombre de centro; hace referencia al caso particular del punto que es

centro y además pertenece a la cuádrica para destacar que este caso no es otra cosa que el cono isótropo.

Indica que el cálculo de centro es más sencillo que el de los puntos singulares, no obstante presenta ejemplos numéricos. En estos ejemplo, el autor trabaja en $\mathbf{R}^2$ y presenta un caso en que hay centro único, otro en que la soluciones forman una recta y el último en el cual no existe centro. Esto lo lleva a la subdivisión de las cuádricas en ***cuádricas con centro*** y ***cuádricas sin centro***. No hay representación gráfica. La otra noción que el autor reconoce como importante es la de tangente.

Luego de definirla el hiperplano tangente a una cuádrica en un punto no singular, aclara que toda recta que pase por dicho punto y esté contenida en el hiperplano tangente se denomina recta tangente a la cuádrica en ese punto.

En el texto se continúa con observaciones explicitando las características de un hiperplano para pasar a tratar la interpretación geométrica del mismo para el caso de una cónica y de una cuádrica. Estos ejemplos son trabajados utilizando tanto el marco analítico como el geométrico. Es obvio que las pretensiones del autor, es que los ejemplos cumplan la función de fijar ideas, es decir, rutinización.

El tratamiento del tema lo lleva a advertir la importancia de la determinación de los puntos no singulares y enunciar la definición de hiperplano polar de un punto A que no es centro de la cuádrica. En observaciones, aclara que si el punto $A \in \mathcal{C}$, el hiperplano polar es el hiperplano tangente.

## 4.8.- Lema

Sea C una cuádrica en **V**, sea $P \in C$ y sea $A \in \mathbf{V}$. Se supone que P es no singular y que A no es un centro de *C*. Entonces $A \in \mathbf{T_p}$ si y solo si $P \in \mathbf{P_A}$. ...

El lema cuyo enunciado se ha transcripto, es demostrado utilizando el lenguaje simbólico que caracteriza la escritura del autor, todo ello en un marco analítico – simbólico.

Presenta un ejemplo que le permite a lo largo de su desarrollo, un juego de marcos analítico ↔ simbólico ↔ geométrico ↔ algebraico. Con él, además de ejemplificar

conceptos, otros previamente aprendidos (operaciones con matrices, ecuaciones de rectas, ecuaciones y sistema de ecuaciones, análisis de soluciones de un sistema de ecuación, etc.). Con el marco analítico y geométrico de la cónica, presenta la ecuación de la recta polar que pasa por A, da la condición que debe cumplir este punto, y presenta el sistema que permite encontrar las intersecciones de la recta y la cónica. Advierte además la posibilidad de resolver el sistema por dos caminos. Uno de ellos, a través de la eliminación de una variable y el otro, escribiendo la ecuación de la recta polar en forma paramétrica.

Las Notas están presentes para aclarar en un caso que, aunque A no sea centro de $\mathcal{C}$ puede ocurrir que $\mathbf{P}_A \cap \mathcal{C}$ esté formado solo por puntos singulares a $\mathcal{C}$ y en el otro, la noción generalizada, en cierta forma, de hiperplano tangente.

Siguiendo la lectura del texto, encontramos un lema con su demostración en la cual puede observarse la continuidad en el uso del lenguaje matemático, manteniendo los símbolos en todo el transcurso del desarrollo del tema. También presenta un ejemplo rescatando una función ya trabajada anteriormente, para en este caso, encontrar el cono de tangente, a través de un juego de marcos analítico $\leftrightarrow$ simbólico $\leftrightarrow$ algebraico $\leftrightarrow$ geométrico.

## 4.14.- Ejercicios

1.- Determinar los centros para las siguientes cónicas y cuádricas en $\mathbf{R}^n$, definidas por la correspondiente función cuadrática:

a) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 3$

b) $x_1x_2 + x_1 + x_2$

c) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1$

d) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3 + 1$

e) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2$

f) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 1$

2.- Hallar la ecuación de las rectas tangentes a las siguientes cónicas en los puntos indicados:

a) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$ en $P = (1, 0)$

b) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 - 10 = 0$ en $P = (-2,0)$

3.- Idem que el ejercicio anterior para las cuádricas en $\mathbf{R}^3$:

a) $3x_1^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$ en $P = (0, 0, 0)$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ en $P = (0, 0, 1)$

4.- Dada la cónica *C* en $\mathbf{R}^2$ de ecuación $3x_2^2 - 4x_1 + 2x_3 + 3 = 0$:

a) Hallar el cono de tangente de *C* desde A = (1, 1)

b) Hallar las rectas tangentes a *C* que pasan por A.

5.- Sabiendo que el cono de tangentes a *C* desde A es *C*`, siendo:

*C*: $x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1 + 6x_2 + 4 = 0$

*C*`: $5x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_1x_2 - x_1 - 10x_2 - 4 = 0$

Hallar: a) el punto A; b) los puntos de tangencia; c) la recta polar de A.

6.- Hallar todos los puntos $P \in \mathbf{R}^2$ por los cuales pasan dos tangentes a la cónica $x_1x_2 - 1 = 0$.

7.- Hallar los puntos P de la cónica $C \subset \mathbf{R}^2$ de ecuación $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ tales que la tangente en P es paralela a $x_1 + x_2 = 3$.

8.- Si $C \subset \mathbf{R}^2$ es la cónica de ecuación $x_1^2 + x_2^2 - 10x_2 + 21 = 0$, hallar una cónica *C*` reducible con centro C = (0, 0) y tal que las rectas tangentes a *C* que pasan por C estén contenidas en *C*`.

9.- Hallar la ecuación de los conos de tangentes de las siguientes cuádricas en $\mathbf{R}^3$, indicando en que casos es reducible:

a) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1 - 1 = 0$ A = (0, 0, 0)

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 3 = 0$ A = (2, 0, 0)

10.- Hallar todos los puntos $A \in \mathbf{R}^3$ tales que el cono ce tangentes a *C* desde A contiene a la recta $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, siendo $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ la ecuación de *C*.

11.- Hallar los planos tangentes a la cuádrica $C \subset \mathbf{R}^3$ que contiene a la recta L, siendo:

*C* $\{ 6x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 4 = 0$ L $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \end{cases}$

12.- Hallar los planos tangentes a la cuádrica $C \subset \mathbf{R}^3$ que son paralelos al plano P, siendo:

*C* $\{ x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_3^2 - 12 = 0$ P $\{ 3x_1 + 6x_3 = 1$

13.- Dada la cuádrica $C \subset \mathbf{R}^3$ de ecuación:

$$\alpha x_1^2 - 2\beta x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2\alpha x_2 - 6x_3 + \beta = 0,$$

determinar $\alpha$, $\beta$ de modo que el cono de tangentes desde O corte $C$ sobre el plano $2x_2 + 8x_3 = 1$.

14.- Si $C$ es la cuádrica reducible en $\mathbf{R}^3$ de ecuación $x_1x_2 = 0$, determinar todos los A $\in \mathbf{R}^3$ tales que por A pasa un plano tangente a $C$. ¿Si A $\notin C$, que es $P_A \cap C$?

15.- Sea $C$ una cuádrica en $\mathbf{V}$, definida por una función cuadrática $F(X) = Q(X) + 2\varphi(X) + c$. En el espacio vectorial $\mathbf{V}` = \mathbf{V} \times \mathbf{K}$ se define una forma cuadrática $Q^*$ (y por lo tanto una forma bilineal $\psi$) poniendo $Q^*(X, t) = Q(X) + 2t\varphi(X) + ct^2$; llamamos $\mathbf{V}_1$ a la variedad lineal formada por los $(X, 1)$ en $\mathbf{V}`$.

a) $C(Q^*) \cap \mathbf{V}_1$ se identifica a $C$ vía la aplicación afín $X \xrightarrow{\tau} (X, 1)$.

b) Relacionar esta construcción con la matriz $\mathbf{m}_F$ de (11); caso particular en que $\mathbf{V} = \mathbf{K}^n$, $\mathbf{V}`$ se identifica a $\mathbf{K}^{n+1}$ ( si se considera la base canónica, $\mathbf{m}_F = G_B(\psi)$).

c) Si llamamos $\mathbf{V}_0$ al subespacio de $\mathbf{V}`$ formado por los $(X, 0)$, probar que $C$ no tiene puntos singulares si y solo si $Ker(\psi) \subset \mathbf{V}_0$. Por lo tanto si $\psi$ es no degenerada entonces $C$ no tiene puntos singulares.

Deducir que $D(\mathbf{m}_F) \neq 0$ es condición suficiente para que $C$ no tenga puntos singulares.

16.- Con las notaciones del ejercicio anterior, si A $\in \mathbf{V}$ no es un centro de $C$ y $\mathbf{H}_A$ es el ortogonal a (A,1) (respecto de $\psi$), entonces $\mathbf{H}_A \cap \mathbf{V}_1$ se identifica con el hiperplano polar $P_A$ vía $\tau$.

En la ejercitación propuesta, se destaca el carácter rutinario de la misma. Con ella cubre todas las posibilidades que pueden presentarse en la determinación de los centros de las cuádricas en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, además de los restantes elementos tales como ecuación de recta tangente, cono de tangentes y plano tangente. La realización de esta actividad puede permitir desarrollar estrategias con un juego de marco algebraico $\leftrightarrow$ simbólico $\leftrightarrow$ geométrico. Los dos últimos ejercicios presentados, permitirán fundamentalmente desarrollar las capacidades de raciocinio elaborando demostraciones. Un detalle

simplificado de las capacidades a desarrollar en cada ejercicio propuesto, se encuentra en el cuadro 5.

**Cuadro 5**

| CENTRO Y TANGENTE | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 4.14-1 | **R** | X | X | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 4.14-2 | **R** | X | X | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 4.14-3 | **R** | X | X | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 4.14-4 | **R** | X | X | | X | X | | X | X | | X | X | | | | | | | | |
| 4.14-5 | **R** | | X | | X | X | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-6 | **R** | | X | | X | X | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-7 | **R** | | X | | X | | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-8 | **R** | | X | | X | | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-9 | **R** | | X | | X | | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-10 | **R** | | X | | X | | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-11 | **R** | | X | | X | | | X | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-12 | **R** | | X | | X | | | | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-13 | **R** | | X | | X | | | | X | | | X | | | | | | | | |
| 4.14-14 | **P** | | X | | X | X | X | | X | | | X | | | X | X | | | | |
| 4.14-15 | **P** | | X | | X | X | X | | | | | | | | X | | X | | | |
| 4.14-16 | **P** | | X | | X | X | X | | | | | | | | X | | X | | | |

## 8. 6.- Forma normal

Bajo este subtítulo, el autor comienza advirtiendo la posibilidad de lograr escribir la ecuación de cualquier cuádrica en forma canónica con solo elegir un sistema de coordenadas adecuado a tal fin.

Partiendo de una cuádrica en V, definida por una función cuadrática $F(X) = Q(X) + 2\,\varphi(X) + c$, considera en primera instancia el caso de cuádricas con centro. En los distintos

pasos de su demostración, va haciendo referencia a los conocimientos previos puestos en juego y llega a obtener la ecuación

$$\mathrm{F(X)} = \sum_{i=1}^{n} Q(U_i)x_i^2 + \mathrm{F(A)} \qquad (8)$$

que denomina ***forma normal*** de la ecuación de una cuádrica con centro.

En Observaciones considera los casos particulares tales como: " a)Es F(A) = 0 si y solo si A $\in \mathcal{C}$ en cuyo caso la ecuación formal define un cono de vértice A", entre otros. Continúa indicando el interés que tiene en profundizar los casos en los cuales el cuerpo de escalares permite dar ***formas diagonales canónicas*** y en particular, trata los casos en que **K = C** y **K = R**. Allí puede observarse para el caso **K = C**, la advertencia de poder modificar ligeramente los $U_i$ de modo que siempre sea $Q(U_i) = 1$ o 0 y obtener de esta manera la forma normal sobre C.

Para el caso **K = R**, indica que se puede elegir los $U_i$ de modo que $Q(U_i) = 1, -1$ o 0. A continuación considera primero el caso dim(**V**) = 2 y luego dim(**V**) = 3. Analiza todas las situaciones que pueden presentarse trabajando en un marco simbólico, y otorga a los resultados obtenidos, los nombres que reciben. Culmina el análisis anterior, presentando un ejemplo numérico en el cual da la ecuación de una cuádrica en $\mathbf{R}^3$ (un hiperboloide de una hoja con eje no ortogonal a un plano coordenado), determinando el centro y partiendo de conocimientos previos (diagonalización de una matriz), logra tener una base en la cual la matriz de $\Phi$ es una matriz diagonal, en consecuencia, fácilmente puede reconocerse la cuádrica.

Luego de hacer referencia a las cuádricas sin centro, resume la información a utilizar, en un Lema. En este lema, tanto en el enunciado como en la demostración, el autor mantiene en su escritura el lenguaje simbólico propio de la ciencia matemática. Advierte que, al igual que en las cuádricas con centro, en las sin centro interesa muy especialmente la forma normal cuando **K** = **R** o **C**. Continúa trabajando para el caso **K** = **R** en un marco analítico $\leftrightarrow$ simbólico hasta obtener todas las cuádricas sin centro cuando dim(**V**) = 2 o 3.

En cada caso presenta las ecuaciones de las cuádricas sin centro y su nombre.

Con la presentación de un método práctico para encontrar el punto A necesario para llegar a la forma más compacta de F(X), y un ejemplo numérico en el cual aplica dicho método, da por finalizado la sección, con la presentación de una selección de ejercicios.

## 5.9.- Ejercicios

1.- Determinar la ecuación normal de las siguientes cónicas en $\mathbf{R}^2$, indicando en cada caso el sistema de coordenadas utilizado:

a) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$

b) $3x_1^2 - 24x_1x_2 + 32x_1 + 40 = 0$

c) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 + x_2 - 2 = 0$

d) $3x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 + 16x_1 + 16x_2 - 12 = 0$

e) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$

f) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 6 = 0$

g) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - x_2 + 1 = 0$

h) $x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0$

2.- Análogo al ejercicio 1, con las cuádricas en $\mathbf{R}^3$:

a) $2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 + x_3 = 0$

b) $x_1^2 + 25x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3 = 0$

c) $3x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_1 + 20x_2 + 8x_3 - 17 = 0$

d) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2\,x_3 + 9x_3 - 3x_1 + 1 = 0$

e) $5x_1^2 + 10x_2^2 + 12x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_1 + 8x_3 + 16 = 0$

f) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 3x_1 - 2x_2 + 8 = 0$

g) $5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$

h) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 1 = 0$

i) $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 10x_2 = 0$

j) $8x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$

k) $x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - 2x_2 = 0$

3.- Sea *C* una cuádrica con centro en un **R**-espacio vectorial **V**. Probar que hay un sistema de coordenadas en el cual la ecuación normal es:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 - 1 = 0,$$

con $\varepsilon_i$ = +1, -1 ó 0 (*Sugerencia:* distinguir en (10) según sea F(A) = 0 ó no).

4.- Determinar para que valores de ***a*** es la siguiente cuádrica en $\mathbf{R}^3$:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_3 - 5 = 0$$

(I) un hiperboloide de dos hojas

(II) un par de planos paralelos

(III) un cilindro parabólico.

En la ejercitación propuesta se encuentra ejercicios rutinarios para la determinación de las ecuaciones normales de las cónicas en $\mathbf{R}^2$ y las cuádricas en $\mathbf{R}^3$ pero también presenta un ejercicio que permite desarrollar capacidades de raciocinio. En detalle, ver Cuadro 6.

**Cuadro 6**

| FORMA NORMAL | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 5.9-1 | **R** | X | X | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 5.9-2 | **R** | X | X | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 5.9-3 | **p** | | X | | X | | X | | | | | | | | X | | X | | | |
| 5.9-4 | **R** | X | X | X | X | | | | X | | X | X | | | | | | | | |

## 8.7.- Cuádricas en el espacio euclídeo

Con este subtítulo, el autor parte del espacio vectorial real **V** con producto interno, y el espacio euclídeo deducido de **V**, partiendo de la función cuadrática logra, haciendo referencia a conocimientos previos dados en el capítulo anterior, presentar la expresión de la función cuadrática utilizando el producto interno. Con ello, continúa presentando la

ecuación del hiperplano tangente $T_A$ en base al producto interno y con el subespacio paralelo rescata el complemento ortogonal, que es una recta. Continúa con la presentación de la definición de recta normal para posteriormente en "observaciones" deducir la ecuación paramétrica de ella.

Presenta un ejemplo en el cual da la ecuación de una cónica en particular y todos los datos necesarios para obtener la ecuación de la recta normal.

Una primera aproximación a la justificación de la inclusión del ejemplo por parte del autor, puede ser que el mismo actúa como "traductor" de lo expuesto en lenguaje científico a través de una aproximación al lenguaje que posee el lector o alumno fundamentalmente.

En los tópicos referidos a cuádricas con centro y cuádricas sin centro el autor pone en evidencia, en el primer caso, la dualidad que da lugar la forma bilineal $\Phi$ cuando asocia a cada subespacio S su ortogonal respecto de $\Phi$. También hace referencia al isomorfismo de f si Q es no degenerada, definiendo subespacios conjugados, cono asintótico, asíntotas y ejes principales. En el otro caso, se define el vértice el cual le permite enunciar:

6.6.- Proposición

En las condiciones anteriores, existe un vértice de *C*. Más aún, el conjunto de vértices de *C* constituye una variedad lineal de dimensión n – r – 1, donde r = rango (f) (= rango ($\Phi$)). ...

Como es de esperar, esta proposición también es demostrada en el lenguaje que el autor utiliza en todo el texto. El ítem siguiente es un ejemplo numérico que tiene por función mostrar la técnica a seguir para determinar vértices y ejes principales. Luego de resolver analíticamente el ejemplo, el autor presenta una secuencia de ejercicios.

6.8.- Ejercicios

1.- Hallar la forma normal euclídea y ejes principales para las siguientes cuádricas (con centro) en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

a) $2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0$

b) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 - 5 = 0$

c) $7x_1^2 - 8x_2^2 - 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 2x_2x_3 - 16x_1 + 14x_2 - 14x_3 - 5 = 0$

d) $18x_1^2 + 9x_2^2 + 14x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 - 14x_3 + 6 = 0$

e) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

f) $x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - 2x_2 = 0$

g) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 - 8x_1x_3 + 2x_1x_2 = 0$

h) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 3x_1 + 9x_3 + 1 = 0$

2.- Idem para las cuádricas sin centro:

a) $9x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 8x_1 + 2x_2 - 11 = 0$

b) $9x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_1 + 8x_2 - 5 = 0$

c) $9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 10x_1 - 5x_2 - x_3 + 2 = 0$

3.- Hallar $\alpha$ de modo que

$$3x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 + 2 + \alpha(x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2) = 0$$

sea una hipérbola. Hallar las asíntotas.

4.- Hallar el eje, el vértice y la forma normal euclídea de la parábola

$$4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2 + 18 = 0$$

5.- Hallar el cono asintótico de la cuádrica

$$2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 36x_1 - 36x_2 - 1 = 0$$

6.- Determinar el eje del paraboloide en $\mathbf{E}^3$

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 3x_1 - 2x_2 + 8 = 0$$

7.- Sea $C$ una cuádrica con centro A y sin puntos singulares, sea $P \in C$. Probar que la normal a $C$ en P pasa por A si y solo si la recta $L_{AP}$ es un eje principal.

8.- Sea $C$ una cuádrica con centro A, sin puntos singulares. Si $X_0 \in C$ y $X_1 \in C$, el segmento $X_0X_1$ se denomina una *cuerda* de $C$. Probar que los puntos medios de una familia de cuerdas paralelas están contenidos en un hiperplano diametral, conjugado de la dirección de las mismas.

9.- Sea $C$ una cónica con centro y sea $P \notin C$. ¿Cuáles normales a $C$ pasan por P?

10.- Sea $C$ una cuádrica en un espacio euclídeo $\mathbf{E}$; dos puntos X, Y de $\mathbf{E}$ se dicen *recíprocos* respecto de $C$ si cada uno está en el hiperplano polar del otro.

Sea *C* una cuádrica con centro y sean A, B en *C* tales que la recta L que pasa por A y B no está contenida en *C*.

Si L` es la recta L sin el punto medio de AB, estudiar la correspondencia $h_L$: L $\rightarrow$ L` definida por $h_L(X)$ = recíproco de X que está en L. Probar que $h_L = h_L^{-1}$. ¿Cuándo es $h_L(X) = X$? (Se llama a $h_L$ la *involución* sobre L determinada por *C*).

11.- Sea *C* una cuádrica con centro O en $\mathbf{E}^n$ que en la forma (5) tiene h = n ("hiperelipsoide"); para cada X $\neq$ 0 sea $L_X$ la recta generada por X, y sea $\mathbf{E}_*^n = \mathbf{E}^n - \{0\}$. Si se pone p: $\mathbf{E}_*^n \rightarrow \mathbf{E}_*^n$ por $p(X) = h_{L_X}(X)$ (ejercicio 10), probar que $p(X) = \dfrac{X}{Q(X)}$ ("inversión de centro O respecto de *C*").

La ejercitación propuesta es en un 60% de carácter rutinario, pues pide hallar en algunos casos, la forma normal euclídea y ejes principales para cuádricas con o sin centro en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. En otros, se solicita hallar asíntotas, vértices o cono asintótico. Los restantes ejercicios solicitan "probar" algo.

**<u>Cuadro 7</u>**

| CUADRICAS EN EL ESPACIO EUCLIDEO | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 6.8-1 | **R** | X | X | X | X | | | | | | X | | | | | | | | | |
| 6.8-2 | **R** | X | X | X | X | | | | | | X | | | | | | | | | |
| 6.8-3 | **R** | | X | X | X | | | | | | X | | | | | | | | | |
| 6.8-4 | **R** | | X | X | X | | | | | | X | | | | | | | | | |
| 6.8-5 | **R** | | X | X | X | | | | | | X | | | | | | | | | |
| 6.8-6 | **R** | | X | X | | X | | | | | X | | | | | | | | | |
| 6.8-7 | **P** | | X | | | X | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 6.8-8 | **P** | | | | | X | | | | X | | | | | X | | X | | | |
| 6.8-9 | **P** | | | | | X | | | | X | | | | | X | | X | | | |
| 6.8-10 | **P** | | | | | X | | | | X | | | | | X | | X | | | |
| 6.8-11 | **P** | | | | | X | | | | X | | X | | | X | | X | | | |

El autor mantiene la idea de desarrollar las capacidades de razonar y producir nuevos objetos de conocimiento. No solicita se obtengan visualizaciones gráficas. Otras capacidades puestas en juego, están indicadas en el Cuadro 7.

Como complemento el autor presenta a las cónicas y cuádricas como lugares geométricos y a continuación trabaja con ejemplos que le permiten encontrar las ecuaciones de la elipse, la hipérbola y la parábola. Aquí el autor utiliza un juego de marcos entre simbólico ↔ analítico ↔ geométrico ↔ algebraico, lo que permite con claridad entender el procedimiento empleado y los resultados alcanzados en cada caso.

## 6.13.- Ejercicios

1.- Probar que la tangente y la normal a una elipse en un punto P son las bisectrices de los ángulos formados por las rectas que pasan por P y cada uno de los focos.

2.- Si $C$ es una elipse y se proyecta ortogonalmente un foco sobre cada tangente, se obtiene una circunferencia.

3.- Sean $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ dos rectas ortogonales en un plano, con $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = A$ y sean $X_1$, X y $X_2$ tres puntos alineados tal que $[X_1, X, X_2] = r$ fijo con $0 < r < 1$. Probar que al variar $X_1 \in \mathbf{L}_1$ y $X_2 \in \mathbf{L}_2$, sujetos a la condición $d(X_1, X_2) =$ constante, X describe una elipse de centro A.

4.- Sean $C_1$, $C_2$ circunferencias con centro $O = (0, 0)$ en $\mathbf{E}^2$, de radio a y b respectivamente, sea $\mathbf{L}$ una semirrecta de origen O y sean $P_1 = \mathbf{L} \cap C_1$, $P_2 = \mathbf{L} \cap C_2$. Si se trazan por $P_1$ y $P_2$ rectas paralelas a los ejes coordenados, las intersecciones de estas rectas están en la elipse de ecuación (13) (esto sirve para construir una elipse "*por puntos*").

5.- Sea $C$ una hipérbola, $X_o \in C$ tal que la tangente T en $X_o$ corta a las asíntotas en puntos $A_1$, $A_2$. Probar que $X_o$ es el punto medio de $A_1A_2$, y que el producto $d(O, A_1) \,.\, d(O, A_2)$ es independiente de $X_o$ (O = centro de $C$).

6.- Sea $\mathbf{L}$ una recta que corta a una hipérbola en puntos $P_1$, $P_2$ y a las asíntotas en $A_1$ y $A_2$. Probar que $d(A_1, P_1) = d(A_2, P_2)$.

7.- Si $C$ es una hipérbola y $\varepsilon > 0$ probar que existe un $P \in C$ y un A en una asíntota tal que $d(A, P) < \varepsilon$.

8.- Probar que la tangente y la normal a una parábola en un punto P, son las bisectrices de los ángulos formados por las rectas que pasan por P, el foco y la paralela al eje por P.

9.- Si **T** es una recta tangente a una parábola $C$ y se trazan las rectas que pasan por el foco y $\mathbf{T} \cap \mathbf{D}$ y por el foco y $\mathbf{T} \cap C$, estas rectas son ortogonales.

10.- Sea $C$ una cónica del tipo elipse, hipérbola o parábola, sea F foco de $C$. Se llama *directriz* de $C$ (correspondiente a F) a la recta polar de F.

Con las notaciones de 6.10 y 6.11, la *excentricidad* es $e = c/a$ (para la parábola es $e = 1$ por definición); $C$ es elipse si y solo si $e < 1$.

(I) Probar que si $C$ es una parábola, la directriz tal como se ha definido recién coincide con la recta **D** de 6.12.

(II) Si $C$ es una hipérbola y $\alpha$ es el ángulo entre las asíntotas, es $\cos\alpha = \frac{1}{e}$

(III) En las tres cónicas, si F es un foco y **D** la correspondiente directriz, vale $\frac{d(X,F)}{d(X,D)} = e$ para todo $X \in C$.

(IV) Si F es un punto del plano y **D** una recta que no pasa por F y $e > 0$, el lugar geométrico de los puntos del plano tales que $\frac{d(X,F)}{d(X,D)} = e$ es una cónica de la cual F es foco y **D** es la correspondiente directriz. El tipo de cónica está determinado por $e > 1$ (elipse), $e < 1$ (hipérbola) o $e = 1$ (parábola).

11.- Sea $C$ una cónica del tipo elipse, hipérbola o parábola, sea F un foco y **L** la recta focal (o el eje, para la parábola). Si $(\rho, \theta)$ son las coordenadas polares en $\mathbf{V}_F$, donde $\theta$ es el ángulo entre $\overrightarrow{FX}$ y **L**, probar que la ecuación de $C$ se escribe:

$$\rho = \frac{k}{1 - e\cos\theta} \qquad (15)$$

(aquí e es la excentricidad y k es el parámetro si *C* es una parábola; en otro caso es $k = b^2/a$ con a y b los semidiámetros). La ecuación (15) es la *ecuación polar* de *C* y tiene interés en problemas de astronomía, ya que regula el movimiento de un cuerpo bajo un campo gravitatorio central.

12.- Dado en $E^3$ el plano **P**: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$, probar que los centros de todas las esferas C que pasan por (0, 0, 0) y son tangentes a **P** forman una cuádrica (paraboloide elíptico).

13.- Dado un punto $A \in E^3$, un plano **P** que no lo contiene y un $\alpha > 0$, probar que el lugar geométrico de los puntos de $E^3$ tales que $\dfrac{d(X,A)}{d(X,P)} = \alpha$ es:

a) Un hiperboloide de una hoja si $\alpha > 1$

b) Un paraboloide elíptico si $\alpha = 1$

c) Un elipsoide si $\alpha < 1$

14.- Hallar el lugar geométrico de los centros de la familia de cuádricas en $E^3$: $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2\mu x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0$. (*Resp.*: una esfera).

Observando los ejercicios propuestos se pone de manifiesto la tendencia a desarrollar las capacidades de raciocinio y obtener a partir de demostraciones, nuevos objetos de conocimiento. Continúa además presentando como ejercitación, afirmaciones, sin que se solicite realizar nada en cada caso. En el cuadro 8 se detallan las capacidades más notorias.

### 8.8.- Clasificación de las cuádricas

En este parágrafo, el autor comienza definiendo las cuádricas afinmente equivalentes y G - equivalentes para intentar posteriormente efectuar la clasificación, es decir, individualizar cada clase de equivalencia por medio de ciertas propiedades características (comunes a toda una clase), de modo de poder saber, dada una cuádrica *C*, a que clase pertenece.

## Cuadro 8

| CUADRICAS EN EL ESPACIO EUCLIDEO | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 6.13-1 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-2 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-3 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-4 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-5 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-6 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-7 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-8 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-9 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | X | |
| 6.13-10 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | X | |
| 6.13-11 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | | X | X | X | X | | |
| 6.13-12 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | X | X | X | X | X | | |
| 6.13-13 | P | | X | | X | X | | | X | | | X | X | X | X | X | X | X | X | |
| 6.13-14 | P | | X | | X | X | | | X | | | | X | X | X | X | X | X | | |

Partiendo de:

### 7.4.- Lema

Sea F: **V** → **K** una función cuadrática que define una cuádrica *C*, F(X) = Q(X) + 2φ(X) + c. Sea u: **V** → **V** un isomorfismo afín. Entonces:

a) u(*C*) es una cuádrica.

b) La función cuadrática $Fu^{-1}$: **V** → **K** define u(*C*) .

Este lema cuenta con su demostración, y permite observar la facilidad de calcular $F'(X) = Q'(X) + 2\varphi'(X) + c'$ ($F' = Fu^{-1}$).

El ejemplo tiene la facultad de mostrar la metodología de trabajo a seguir para encontrar F`(X) conocida F y u.

La proposición que habla de la función u: **V** $\to$ **V** que representa un isomorfismo afín; los corolarios que se refieren a cuádricas G equivalentes; el lema que se refiere a todas las cuádricas C(h,r) que son no equivalentes afinmente entre sí y el teorema que establece la equivalencia de una cuádrica con centro, sin puntos singulares C(h, r), todo ello con su respectiva demostración, conducen al ejemplo seleccionado por el autor, en el cual dada la ecuación de una cónica, determinando el centro y efectuando una traslación adecuada, es posible determinar una equivalente. Todo ello se presenta trabajado en un juego de marcos analítico $\leftrightarrow$ algebraico $\leftrightarrow$ simbólico $\leftrightarrow$ geométrico.

Idéntico tratamiento reciben las cuádricas sin centro.

Para el caso de los cono $C_0$(h, r), en un Lema advierte que no son afinmente equivalentes, y en un teorema demuestra la correspondencia unívoca afinmente equivalente entre un cono de **V** y los conos $C_0$(h, r).

El teorema que continúa en orden de presentación, tiene por función mostrar la correspondencia unívoca métricamente equivalente entre una cuádrica que no es cono y una de las cuádricas con o sin centro presentada en la clasificación. Deja para el final la clasificación métrica de los conos por las particularidades que ofrece.

## 7.25.- Ejercicios

1.- Siendo *C* cualquiera de las cónicas del ejercicio 1) de 6.8, hacer la clasificación, indicando en cada caso el o los isomorfismos afines que llevan *C* sobre la cónica tipo correspondiente.

*Nota*

Por clasificación se entiende ambas clasificaciones (afín y métrica).

2.- Análogo para las cuádricas en $E^3$ de los ejercicios 1) y 2) de 6.8.

3.-Idem para las cuádricas en $E^3$.

(I) $2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2 = 0$

(II) $4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3 - 1 = 0$

(III) $x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 16x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 - 9 = 0$

(IV) $3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3 = 0$

4.- Sea $C$ una cuádrica en **E** y sea u: **E** → **E** un automorfismo afín.

a) Si P ∈ $C$ no es singular, u(P) ∈ u(C) no es singular.

b) Si **H** es el hiperplano tangente a $C$ en P, u(**H**) es el hiperplano tangente a u($C$) en u(P).

5.- Si $C \subset \mathbf{E}^2$ la parábola $x_1^2 + 2x_2 = 0$, hallar todos los automorfismos afines u que verifican u($C$) = $C$.

6.- Demostrar que el área del interior de una elipse de centro O y diámetros 2ª y 2b en $\mathbf{E}^2$ es $\pi ab$ (*Sugerencia*: transformar la elipse en la circunferencia de radio 1 y usar (13) de III. 5.10).

7.- Si $C \subset \mathbf{E}^2$ es una cónica que no se reduce a un punto y $r_\theta(C) = C$ para toda rotación $r_\theta$ (cf.III. 6.10), entonces $C$ es una circunferencia de centro O (*Sugerencia*: Usar 7.4 y el teorema de unicidad 3.25, probando que si $C$ se escribe con (2) [ítem 6] entonces f tiene autovalor doble).

8.- Hacer la clasificación afín de las cuádricas en el espacio complejo $\mathbf{C}^n$ (*Sugerencia*: Aquí el índice es irrelevante) ¿cuántas cuádricas tipo hay?

**Cuadro 9**

| CLASIFICACION DE LAS CUADRICAS | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 7.25-1 | **P** | | X | | | | | X | | | | X | | X | X | | | | | |
| 7.25-2 | **P** | | X | | | | | X | | | | X | | X | X | | | | | |
| 7.25-3 | **P** | | X | | | | | X | | | | X | | X | X | | | | | |
| 7.25-4 | **P** | | X | | X | | X | | | | X | | | | | | X | | | |
| 7.25-5 | **P** | | X | | X | | X | | | | X | | | | | | X | | | |
| 7.25-6 | **P** | | X | | X | | X | | | | | | X | | X | | X | | | |
| 7.25-7 | **P** | | X | | X | | X | | | | X | | | | | | X | | | |
| 7.25-8 | **P** | | X | | X | | X | | | | X | | X | | | | X | | | |

Los ejercicios propuestos se refieren en algunos casos a hacer la clasificación de cuádricas de ejercicios anteriores, tanto afín como métrica y en otros, se solicita demostraciones mediante las cuales se obtiene una nueva información. Se mantiene el caso de las afirmaciones en las cuales no se indica que se solicita. En detalle, las capacidades a desarrollar se encuentran indicadas en el cuadro 9.

En el ítem ' Complemento. Discriminante` resume los principales pasos de la clasificación métrica de las cuádricas. Esta sección presenta otra selección de ejercicios en los cuales se solicita probar ciertas características de las cuádricas. Continúa, el autor, atendiendo prioritariamente el desarrollo de la capacidad de construir una demostración, sin cambiar la posición antes advertida, esto es, enunciar una afirmación y no explicitar lo que se quiere hacer con ella..

### 8.9.- Cuádricas en $E^3$

Bajo este subtítulo, el autor trata problemas y hechos clásicos relativos al estudio de las cuádricas en $E^3$, partiendo de considerar una cuádrica definida por una función cuadrática:

$$F(x) = \langle f(x), x\rangle + 2\langle B, x\rangle + c$$

que conducirá a las cuádricas irreducibles

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1 \qquad \textit{elipsoide}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1 \qquad \textit{hiperboloide de una hoja}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1 \qquad \textit{hiperboloide de dos hojas}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0 \qquad \textit{cono irreducible}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + 2x_3 = 0 \qquad \textit{paraboloide elíptico}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} + 2x_3 = 0 \qquad \textit{paraboloide hiperbólico}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{cilindro elíptico}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{cilindro hiperbólico}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + 2x_3 = 0 \qquad \textit{cilindro parabólico}$$

En el caso en que $C$ es una cuádrica irreducible que no es una variedad lineal, existe un sistema de coordenadas cartesianas en el cual la ecuación de $C$ es una de las anteriores, o bien, existe una isometría u: $\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ que transforma $C$ en una de las cuádricas tipo del listado anterior. No se acompañan representaciones gráficas para cada caso.

En ´ Observaciones` se advierte el caso particular del cono que es la única cuádrica irreducible que no es una variedad lineal en $\mathbf{E}^3$ que tiene puntos singulares y es único (vértice).

En la proposición:

## 8.2.- Proposición

Sea $C \subset \mathbf{E}^3$ una cuádrica irreducible, distinta de una variedad lineal, y supongamos que $C$ contiene una recta **L**. Entonces:

(I) Si $C$ no es un cono irreducible, **L** es tangente a $C$ en todo punto A $\in$ **L**.

(II) Si $C$ es un cono irreducible, **L** pasa por el vértice P de $C$ y **L** es tangente a $C$ en todo A $\in$ **L**, A $\neq$ P.

Su demostración es desarrollada en un juego de marcos analítico ↔ simbólico ↔ geométrico, con predominio del marco analítico.

Aclarando el autor en una ´ Nota` que a partir de lo ya tratado, cuando se hable de cuádrica, se referirá siempre a una que sea irreducible, comienza la búsqueda de las rectas contenidas en una cuádrica, en un plano tangente, para arribar a reconocer la existencia de tres tipos de cono de dimensión dos, los cuales son: un punto, un par de rectas, o una recta doble. Luego de dar los nombres asignados en cada caso, efectúa observaciones sobre particularidades que presentan.

En la Proposición, corolarios y Notas son tratados los casos de la recta única contenida en una cuádrica que pasa por un punto de ella y los casos de pares de rectas que pasen por un punto de la cuádrica y están contenidas en la misma. Esto es trabajado también con un juego de marcos analítico ↔ simbólico ↔ geométrico.

Se define una cuádrica reglada para posteriormente trabajar con el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico con el objeto de encontrar las denominadas generatrices rectilíneas. Además trata las secciones planas, es decir, la intersección de la cuádrica con un plano en los casos $C \cap P \neq \emptyset$ y proporciona ejemplos que conducen luego al estudio de las secciones planas que son circunferencia, llamando al plano en cuestión, *plano cíclico*. Esto le permite hacer referencia a las superficies de revolución y la condición para que una cuádrica $C$ sea de revolución.

## 8.16.- Ejercicios

1.- Hallar las rectas contenidas en las cuádricas:

a) $x_1x_2 - x_1x_3 - x_3 = 0$

b) $x_1x_2 - x_2^2 - x_1x_3 - x_3 = 0$

c) $x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1 + 12x_2 + 4 = 0$

2.- Si $C$ es un hiperboloide de una hoja, sus generatrices rectilíneas son paralelas a generatrices rectilíneas de su cono asintótico.

3.- El paraboloide hiperbólico no contiene generatrices paralelas.

4.- Si $C$ es un hiperboloide de una hoja, $C$ contiene pares de generatrices rectilíneas paralelas.

5.- Si $C$ es una cuádrica en $\mathbf{E}^3$, irreducible y que contiene tres rectas distintas paralelas, $C$ es un cilindro.

6.- Si $C$ es un elipsoide y P un plano, $C \cap P$ es vacío, una elipse o un punto (en cuyo caso P es tangente a $C$),

7.- Demostrar que el paraboloide hiperbólico no tiene secciones cilíndricas.

8.- Hallar los planos cíclicos de las cuádricas:

a) $3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 7x_1 - 2x_2 - 1 = 0$

b) $3x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2 + 2 = 0$

9.- Sea $C$ un elipsoide o un hiperboloide, y sean $\mathbf{T}_i$ (i = 1, 2, 3) tres planos tangentes cuyas normales son ortogonales entre sí. Si A es el centro de $C$, probar que $\sum_{i=1}^{3} d(A,T_i)^2$ es constante.

10.- Demostrar que las siguientes cuádricas son de revolución:

a) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 - 2x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$

b) $9x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 5x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 1 = 0$

Hallar en cada caso el eje.

11.- Determinar $\alpha$ de modo que:

$$5x_1^2 + \alpha\, x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 - 6x_1 + 2x_2 - 10\, x_3 - 1 = 0$$

sea una cuádrica de revolución. Hallar el eje.

12.- Si $C$ es una esfera y A es exterior a $C$, el cono de tangentes $C_A(C)$ es de revolución.

13.- Sea $C$ un cono irreducible, de ecuación (1). Probar que son equivalente las afirmaciones:

a) La traza de f es 0

b) $C$ contiene tres rectas ortogonales.

(*Sugerencia:* usar la invariancia del polinomio característico, expresando f en una base ortonormal de vectores de $C$).

Un cono irreducible que verifica b) se dice *equilátero*.

14.- Determinar $\alpha$, $\beta$ de modo que:

$$x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1 + 4\alpha x_2 + 4 = 0$$

sea un cono irreducible equilátero (cf. ejercicio anterior).

15.- Sea f: **V** $\rightarrow$ **V** una aplicación autoadjunta, siendo **V** un EVPI y $f \neq 0$

a) Se supone dim(**V**) = 2 y que para cada $\alpha \in SO(\mathbf{V})$ hay un $\lambda_\alpha \neq 0$ tal que $\alpha f \alpha^{-1} = \lambda_\alpha . f$. Probar que 1º) $\lambda_\alpha = 1$ para todo $\alpha$ y 2º) $f(X) = \mu X$ para todo $X \in \mathbf{V}$.

b) Si dim(**V**) = 3 y para cada rotación $r_\theta$ en torno a un eje fijo **V** hay un $\lambda_\theta \neq 0$ tal que $r_\theta f\, r_\theta^{-1} = \lambda_\theta f$. Probar que f tiene un autovalor doble, cuyo subespacio de vectores es ortogonal al eje (reducirlo al caso anterior).

## Cuadro 10

| CUADRICAS EN E 3 | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| 8.16-1 | **R** | | | X | X | | | X | | | X | | | | | X | | | | |
| 8.16-2 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-3 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-4 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-5 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-6 | **P** | | X | | X | | | | | | | X | | | X | | X | | | |
| 8.16-7 | **P** | | X | | X | | | | | | | X | | | X | | X | | | |
| 8.16-8 | **P** | | | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 8.16-9 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-10 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-11 | **R** | | | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 8.16-12 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-13 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |
| 8.16-14 | **R** | | | X | X | | | X | | | X | | | | | | | | | |
| 8.16-15 | **P** | | X | | X | | | | | | | | | | X | | X | | | |

En los ejercicios puede observarse la misma tendencia que en los otros tópicos tratados. Se encuentran tres ejercicios del tipo rutinario (hallar rectas contenidas en las

cuádricas ..., hallar ejes de las cuádricas de revolución,...), no se solicita se realicen representaciones gráficas y 12 en los cuales se solicita se demuestre " algo", sin dejar de hacer notar que también hay enunciados que son solo afirmaciones. Ver cuadro 10.

## 9.- Origen del texto

En la sección Introducción del texto en cuestión, el autor comienza expresando: *Este texto es una consecuencia del curso de Geometría I que se dicta en la facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Buenos Aires; su existencia se produce con la suma de notas, apuntes, prácticas, etc.,utilizadas en nuestro dictado del mismo, ampliadas y complementadas con algunos temas que la permanente escasez de tiempo obliga a mencionar escuetamente, sin poder entrar en detalle.*

De la lectura de este párrafo se infiere que el curso de Geometría I está dirigido a futuros matemáticos, además, el autor es docente y debió chocar con las limitaciones que surgen de la no coincidencia entre los tiempos didácticos y los tiempos de aprendizaje. Esto confirma lo expresado por Robert y Robinet (1989) *Hay una dialéctica muy estrecha entre los educadores ( y los autores lo son en general) y lo que está representado en los manuales.*

La intención que da origen al texto se rescata del párrafo *La idea es no solo responder a las necesidades evidentes del estudiante, sino también proporcionar una guía al docente al facilitarle los temas y un orden lógico – creemos – para seguirlos.*

Esto da idea de la necesidad de presentar cada tema con un tratamiento exhaustivo del mismo. Por ello, puede considerarse que es un texto para matemáticos (alumnos y docentes).

Cuando indica *El lenguaje utilizado constantemente es el "vectorial"; hay ventajas claras en el uso de métodos y técnicas de espacios vectoriales sobre los métodos clásicos, ... los métodos vectoriales refuerzan y generalizan los métodos clásicos haciéndolos más claros, sistemáticos y potentes, al despojarlos de todo lo que no es esencial.*; explicita los

fundamentos que permitieron inclinarse por una de las dos vías de tratamiento del tema Cónicas y cuádricas.

De la lectura del texto en el capítulo de interés, surge como una aproximación a la representación del autor respecto al conocimiento matemático, lo siguiente:

- ✓ Presenta como núcleo central, una matemática normativa en la cual se nos indica como proceder en el tratamiento de los objetos de conocimiento.
- ✓ Pone en evidencia como deben desarrollarse los procesos, esto es, las reglas de juego aceptadas por la comunidad científica.
- ✓ Concibe una práctica matemática que comprende además del nivel tecnológico del lenguaje, un conjunto de cuestiones que son consideradas como importantes, tales como la idea de cómo debe procederse para hacer matemática.
- ✓ Este conocimiento matemático debe transferirse de tal modo a los sucesores, que provoque en ellos la modalidad o método de trabajo aceptada por la comunidad científica.

Al hacer matemática, el autor transforma expresiones de una forma a otra. El proceso de generación de enunciados matemáticos, más que una operación mecánica o una correspondencia con la intuición, hace referencia a la actividad social de "obedecer una regla" cuya función es asegurar la transmisión de la verdad desde axiomas indudables, por medio de procedimientos deductivos hasta lograr enunciados seguros.

Admitiendo que existe una comunidad científica constituida por especialistas en el campo de la matemática, sosteniendo la metodología de investigación, es notorio que el autor respeta y comparte esa metodología de trabajo. Prueba de ello es que se observa en su trabajo una exposición minuciosa de los teoremas, adjuntando sus demostraciones como condición necesaria de validación, o utilizando para lo contrario, los contraejemplos, metodología característica que se usa en el desarrollo del conocimiento matemático para invalidar una supuesta propiedad.

En la ejercitación propuesta, si bien hay ejercicios rutinarios, la rutina prioritaria está orientada hacia la producción de objetos de conocimientos de la práctica constante en la construcción de demostraciones.

# 10.- Consideraciones y alternativas didácticas

## 10.1.- Consideraciones

El texto analizado puede ser adoptado total o parcialmente, por un docente, como bibliografía base o complementaria del curso Álgebra Lineal. Pero, aún considerando que sea seleccionado para desarrollar los temas según el espíritu propuesto por el autor, puede ocurrir que existan otros objetos de conocimiento que es necesario enseñar. Por ejemplo, se considera el caso del Teorema del Cociente de Rayleigh, este teorema (Hammerlin, H. 1991) se enuncia así:

Sea A una matriz Hermitiana; por ej. $A = \bar{A}^{T}$. En esta sección veremos como los autovalores de A pueden ser caracterizados por la propiedad extremal del cociente de Rayleigh $\dfrac{x^{\bar{T}}Ax}{\|x\|_2^2}$

Para cada matriz $A \in \mathbf{C}^n$, la ecuación $Ax^{\mu} = \lambda_{\mu}x^{\mu}$ para un autovalor $\lambda_{\mu}$ y un autovector asociado $x^{\mu}$, $\|x^{\mu}\|_2 = 1$ implica que $\lambda_{\mu} = \left(\bar{x}^{\mu}\right)^{T} Ax^{\mu}$.

Ahora si A es Hermitiana, entonces la forma cuadrática $\bar{x}^{T}Ax$ es siempre un número real, $\bar{x}^{T}Ax = \bar{x}^{T}\bar{A}^{T}x = x^{T}\overline{Ax} = \overline{\bar{x}^{T}Ax}$ para todo $x \in \mathbf{C}^n$.

Supongamos $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ son los autovalores y que $\{x^1, \ldots, x^n\}$ es el sistema ortonormal asociado de autovectores de la matriz Hermitiana A. Entonces el vector normalizado $x \in \mathbf{C}^n$ puede ser escrito en la forma

$$X = \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_n x^n \quad \text{con} \quad |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 = 1$$

Y así

$\overline{x}^T Ax = \overline{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x^\nu\right)}^T \left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \lambda_\nu x^\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^2 \lambda_\nu \leq \lambda_1$, traemos la propiedad extremal del cociente de Rayleigh.

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|_2 = 1} \overline{x}^T Ax$$

Análogamente $\quad \lambda_n = \min_{\|x\|_2 = 1} \overline{x}^T Ax$

Los otros autovalores de una matriz Hermitiana son también valores extremos del cociente de Rayleigh. En particular, se muestra que para $1 \leq k \leq n-2$

$$\lambda_{k+1} = \max_{\|x\|_2 = 1} \overline{x}^T Ax$$

bajo la condición de $\overline{x}^T x^\nu = 0$ para $1 \leq \nu \leq k$

La prueba puede ser realizada usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

En esta posición, un docente que debe incorporar un objeto de conocimiento comunicado por otro autor, independiente del anterior, se encontrará con lo siguiente:

- ✓ Un enunciado
- ✓ Una demostración

Si se detiene en el enunciado, el mismo hace referencia a:

- ✓ Una matriz Hermitiana
- ✓ Autovalores de la matriz
- ✓ Propiedad extremal del cociente de Rayleigh
- ✓ Interpretación geométrica del autovalor.

Referirse a una matriz hermitiana, implica que previamente el docente debe enseñar vectores y matrices cuyos elementos son números complejos. Además, distinguir distintos tipos de matrices y sus características. Entre los distintos tipos a considerar, están la matriz conjugada, la traspuesta, la hermitiana. Por otra parte, es necesario conocer operaciones entre vectores, tales como producto escalar, norma de un vector, propiedades de las aplicaciones entre vectores y matrices, y autovalores. Otro conocimiento que debe estar presente es la propiedad extremal del cociente de Rayleigh.

Con estos conocimientos previos, el enunciado del teorema presenta una apariencia clara y sencilla. La notación simbólica es clara y precisa.

En la demostración, una vez presentado los elementos, trabaja con un juego de marcos algebraico ↔ simbólico, partiendo de una ecuación que involucra autovalores y autovectores de la transformación operada por A, logrando la expresión del autovalor en el caso particular de una matriz hermitiana en forma absoluta y relativa según un sistema de referencia ortonormal de autovectores. Por último, hace uso de la propiedad extremal del cociente de Rayleigh para completar la demostración.

La metodología de trabajo del autor, no difiere de la utilizada por el autor del texto antes analizado.

Lo que merece ser atendido, es el hecho que se presenta cuando los objetos de conocimiento son seleccionados de textos distintos. Cada objeto de conocimiento requiere de otros previos, en consecuencia, cuando se selecciona más de un texto, es necesario efectuar un análisis de los requerimientos y adicionar lo necesario además de unificar el lenguaje para lograr, en última instancia, un texto acorde a los requerimientos de la asignatura.

**10.2.- Aportes didácticos referentes a algunos conceptos teóricos tomados del texto analizado.**

Las situaciones de enseñanza (Azcarate Goded, P. 1998) que se desarrollan en el aula para el tratamiento de los objetos matemáticos, están actualmente sometidas a revisión. El aprender matemática está plenamente justificado, pero existen dos vías generadas en función de los objetivos propuestos. Una, aprender la ciencia para continuar generando conocimientos nuevos dentro de dicha ciencia. Otro, aprender la ciencia como herramienta útil para aprender y desarrollar otras ciencias. Esta última posición no implica que los objetos de conocimiento matemático sean simples, limitados y básicos. Esto conduce a realidades en la cual la gran cantidad de objetos de conocimiento a aprender, en un programa de contenidos mínimos, no permita distinguir un camino del otro. Lo que sí es evidente, es la diferencia abismal de tiempo de aprendizaje destinado en cada caso. Esto es lo que obliga a un docente (Chevallard, Y. y col. 1997) a tratar de crear situaciones en las cuales los alumnos se apropien de la mayor cantidad de conocimientos posibles, para ser utilizados inmediatamente en el aprendizaje de otras ciencias.

Por ejemplo, en carreras de ingeniería, un objeto de conocimiento a enseñar es el de formas cuadráticas. Si procedemos como el autor, es decir, comunicar el conocimiento lo cual equivale a hablar de ***clase magistral***, ya es reconocido que esto no tiene validez funcional, por ello, en función de lo que pretenda el docente, será la tarea (T) propuesta para una situación de enseñanza.

Considerando el ítem inicial del capítulo IV el docente puede utilizar ese objeto de conocimiento para que se reconozca la terminología usada (espacio vectorial, forma bilineal simétrica, aplicaciones); manipule las operaciones definidas en un espacio vectorial (suma de vectores y producto por un escalar). Esto implica que el alumno deberá poseer entre sus conocimientos previos el concepto de espacio vectorial, transformación de elementos de un espacio vectorial, transformaciones lineales y bilineales, operar con los elementos que intervienen en la actividad, lo que lleva a la necesidad de conocer la estructura con la cual trabaja, transformar los elementos del problema hasta conseguir formular una relación e interpretar la misma o advertir su utilidad, de ser esto último posible.

Lograr estos objetivos, depende de las tareas planificadas para la situación que se desee crear.

- ✓ Presentarle al alumno el texto (tal como se muestra en esta tesis), puede servir como actividad rutinaria en la cual el docente hace analizar a los alumnos la terminología usada, el significado de cada símbolo, la función de cada uno en el texto, los conceptos matemáticos y la estructura involucrada, crear ejemplos particulares del tipo de funciones implicadas en el texto y otras, verificar cuales cumplen la propiedad y cuales no, etc. Ello permitirá al finalizar la tarea, rescatar por parte del alumno y / o con la guía del docente en el momento de la institucionalización, la definición de forma cuadrática.
- ✓ Presentar funciones particulares definidas sobre un conjunto **V** x **V** que entreguen escalares, los cuales pueden ser los reales y solicitar que sean aplicadas a vectores dados, ambos distintos, ambos coincidentes o uno múltiplo escalar del otro. La función puede ser $\Phi = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ u otra. A través de la revisión de las operaciones involucradas, pueden rescatar la propiedad y plantearse el interrogante si es posible una generalización o no. Del manejo de la situación por parte del docente, es posible que los alumnos propongan una forma de trabajo que les permita generalizar las características puestas de manifiesto en la ejercitación propuesta, o el docente deba orientar hacia la necesidad de trabajar con expresiones generalizadas.

Evitando el acto de presentar el objeto de conocimiento, la situación áulica puede adoptar como característica una o más de las variadas representaciones que el docente puede querer que los alumnos interpreten de dicha situación.

La selección de casos concretos, con el objeto de efectuar actividades rutinarias (revisión del concepto de formas bilineales), con verificación de propiedades ya estudiadas para reconocer en que casos se está trabajando con una forma bilineal simétrica, dará como resultado la idea en los alumnos de encontrarse con actividades de revisión de conocimientos y tal vez de integración de varios temas ya tratados.

Si entre las actividades propuestas se solicita la distinción entre formas bilineales simétricas o no, y / o además se solicita verificación de la posibilidad de cumplirse una

supuesta propiedad (la cual es el objeto de conocimiento) rescatando los casos en los cuales se verifica la misma, un análisis de los resultados alcanzados permitirá a los alumnos inferir que las formas bilineales simétricas cumplen con la aludida propiedad.

El paso a la generalización los llevará a trabajar con expresiones simbólicas para determinar si es factible que lo postulado sea una verdad generalizada o no. Este paso a la generalización puede ser propuesto por los alumnos si en sus historias previas están habituados a buscar generalizaciones o no. Si no aconteciera ello, el docente puede establecer de alguna manera la inquietud para comenzar a desarrollar en los alumnos esta capacidad.

Entre las distintas tareas programadas seguramente se presenta en forma implícita la idea de que la lectura de las actividades lleve al alumno a reconocer el significado de símbolos, expresiones con sus operaciones involucradas, etc. Es imposible que se ponga de manifiesto en la realidad el hecho de esperar que en el intento de contextualizar un objeto de conocimiento, se observe que la situación no requiera de la intervención de los conocimientos previos.

Los objetivos del docente son los que actúan de guía en la elaboración de las distintas situaciones a crear, además de las informaciones extraídas de los análisis a posteriori de aquellas situaciones creadas con anterioridad en el aula.

Continuando con los objetos de conocimiento presentado por el autor del texto analizado, encontramos que luego de definir la forma cuadrática y las observaciones, presenta el ejemplo de una forma bilineal simétrica referida a un espacio vectorial con una base determinada, lo cual le permite expresar

$$Q(x) = x^t . a . x$$

Transformar este concepto en una actividad para los alumnos tiene, entre otros, los siguientes beneficios:

- ✓ Retornar al conocimiento previo por el cual dada una base del espacio vectorial, cualquier vector del espacio es representado en términos de los vectores de la base prefijada.
- ✓ Reconocer la terminología de conceptos definidos en término de abstracciones o generalidades.

- ✓ Recordar conceptos tales como: cuando un conjunto de vectores constituyen una base, o con que estructura matemática se está trabajando.
- ✓ Retornar al conocimiento previo relativo a la representación matricial de una forma bilineal.

Todo ello llevará al alumno a realizar una lectura e interpretación de la información que posee, la cual puede estar dada en forma explícita en el enunciado de la actividad o dejar librado al alumno que recuerde la información pertinente. Cualquiera sea la vía de acceso que el docente planifique para sus alumnos, deberá decidir cual es la capacidad que desea desarrollar, esto es:

- ✓ Capacidad de descubrir relaciones tales como la representación de una forma cuadrática en términos de una representación matricial;
- ✓ Capacidad para construir demostraciones, planteando la tarea como solicitud de una demostración a desarrollar por el alumno;
- ✓ Capacidad para criticar una demostración cuando la misma es presentada por un miembro del grupo;
- ✓ Capacidad de formular y validar generalizaciones;

La actitud del docente que debe prevalecer es la siguiente: ***Si bien el autor presenta el conocimiento, su función no es esa. Este es el punto en cual debe plantearse no solo su postura epistemológica, sino también su orientación didáctica enmarcada en una teoría y los efectos que se logra o se cree haber logrado con ella***

## 10.3.- Análisis de algunos aportes didácticos presentados por el autor del texto

El ejemplo que presenta el autor en el ítem 1.4 es atractivo y merecedor de ser seleccionado por un docente ya que admite distintas representaciones por parte del alumno, todas ellas motivadas por los conocimientos previos involucrados y la relación vinculante de ellos con los nuevos conocimientos que va adquiriendo. Mantener las representaciones anteriores o modificarlas si el docente considera que son erróneas, determinará la inclusión como actividad del alumno o solo como ejemplo concreto presentado por el docente. Una de las ventajas de la inclusión como ejemplo presentado por el docente, radica en la necesidad de ir rescatando conceptos aprendidos que aparentan inicialmente no tener conexión con otros conceptos estudiados y esto dificulta la posterior aplicación en la resolución de problemas no rutinarios y / o la capacidad de reconocer modelos o ejemplos de ellos.

En el caso de transformar el ejemplo en una tarea del alumno, debe admitirse que la construcción de la misma requiere fundamentalmente del conocimiento de los objetivos propuestos por el docente, el conocimiento de las capacidades e intereses de los alumnos, y un cuidadoso análisis de los aspectos que se pretenden desarrollar en las capacidades de estos últimos. La formulación de la actividad le puede permitir al alumno reproducir unidades de conocimiento (operaciones entre vectores, producto escalar, norma de un vector, magnitudes escalares, magnitudes vectoriales, dependencia entre magnitudes escalares y vectoriales, etc.), incluyendo un juego de marcos que puede variar entre el simbólico, el algebraico, el analítico y el geométrico. Además poner de manifiesto su conocimiento de la terminología utilizada en el enunciado de la actividad, de los conceptos, efectuar una traducción del enunciado dado de una manera coloquial a otra (por ejemplo, simbólica), desarrollar su capacidad de interpretar un problema, realizar comparaciones, analizar datos, iniciarse o continuar desarrollando su capacidad de resolver problemas no rutinarios, descubriendo relaciones o construyendo demostraciones o validaciones de su respuesta.

El ejemplo 1.6 puede ser seleccionado por dos razones prácticamente extremas. Una de ellas es que el docente lo comente como ejemplo del cual él deducirá en que

condiciones una forma cuadrática es reducible (modo no recomendable como situación áulica). La otra es que sea transformado en actividad para el alumno, en cuyo caso, en función de los objetivos que priorice el docente, serán las capacidades de los alumnos que podrá desarrollar. Entre ellas puede advertirse que es posible lograr que:

- ✓ El alumno reproduzca o reconozca el material presentado como una copia de lo desarrollado durante el curso, es decir, la actividad a desarrollar es rutinaria. Por ejemplo:
  - ➢ Verificar que si $\varphi$ y $\psi$ son formas lineales sobre **V**, la aplicación $Q(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ es una forma cuadrática.
  - ➢ Si $\varphi$ y $\psi$ son formas lineales sobre **V**, dada la aplicación $Q(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ encontrar la forma bilineal asociada.
  - ➢ Etc.

  Lo que involucra:
    - el conocimiento de la terminología (formas lineales, espacios vectoriales, aplicaciones, etc.),
    - realizar algoritmos (por ejemplo, aplicación de Q al producto de un escalar por un vector y / o a la suma de dos vectores)
    - trabajar con conceptos abstractos,
    - conocer la estructura matemática con la que se opera.
- ✓ El alumno desarrolle la capacidad de descubrir relaciones a través de la tarea, por ejemplo:
  - ➢ Si $\varphi$ y $\psi$ son formas lineales sobre **V**, dada la aplicación $Q(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ encontrar la forma bilineal asociada, en términos de $\varphi$ y $\psi$.
  - ➢ Si $\varphi$ y $\psi$ son formas lineales sobre **V**, dada la aplicación $Q(x) = \varphi(x) . \psi(x)$, analizar la forma bilineal en los casos $\varphi \neq \psi$ y $\varphi = \psi$. Extraer conclusiones.

  Lo que involucra:
    - Conocimiento de la terminología,
    - Conocimiento de los conceptos involucrados,
    - Conocimiento de la estructura sobre la que se trabaja,
    - Interpretación del enunciado,

- Realizar comparaciones en función de los datos,
- Desarrollar la capacidad de resolver problemas no rutinarios
- Formular hipótesis,
- Validar dichas hipótesis.

Si ahora nos referimos a la definición de cono isótropo presentada por el autor, la cual es complementada con ejemplos, seleccionar como tarea para el alumno el 1.8.b) permitirá, según un análisis previo, desarrollar diversas capacidades, tales como:

- ✓ Fijar un concepto (cono isótropo): tarea rutinaria.
- ✓ Reconocer terminología (por ejemplo, $\mathbf{K}^2$)
- ✓ Analizar los datos (por ejemplo, en $\mathbf{K}^2$ un vector tiene dos coordenadas).

  Con la ***técnica*** puesta en juego, el alumno descubra relaciones tales como
  - ➢ Si $x_1^2 - x_2^2 = 0$ entonces $x_1^2 = x_2^2$ y por lo tanto, al representar con $x_i$ (i = 1, 2), diversos valores, tanto positivos como negativos, resulta $|x_1| = |x_2|$, es decir, $x_1 = \pm x_2$.
  - ➢ Si $x_1^2 - x_2^2 = 0$, como la expresión es una diferencia de cuadrados, esta se puede escribir así: $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$. Si el producto de dos factores numéricos es nulo, entonces algunos de ellos debe ser necesariamente nulo, esto es, $(x_1 + x_2) = 0$ ó $(x_1 - x_2) = 0$. Por ello, $x_1 = - x_2$ ó $x_1 = x_2$ .
  - ➢ Si $x_1^2 - x_2^2 = 0$, entonces $x_1^2 = x_2^2$ se decir $x_1 = x_2$
  - ➢ Si $x_1^2 - x_2^2 = 0$, entonces $(x_1 - x_2)^2 = 0$, lo que significa $x_1 - x_2 = 0$ por lo que resulta $x_1 = x_2$ .

Los caminos que sigan los alumnos para solucionar el problema presentado, le permitirá al docente conocer:

- ✓ los conocimientos previos que poseen los alumnos,
- ✓ su capacidad de reproducirlos,
- ✓ en que nivel de la enseñanza (secundaria o universitaria) se efectuó el aprendizaje
- ✓ el concepto utilizado fue correctamente aprendido?

Esto último se puede poner de manifiesto a través de los errores de los alumnos. También podrá el docente advertir a través de los resultados logrados por los alumnos, sean estos correctos o no, son reinterpretados por ellos en un nivel de abstracción acorde al momento. Por ejemplo, se advertiría si existe una ***tecnología*** que justifica la técnica que utiliza el alumno y además la ***teoría*** que justifica dicha tecnología, como las que se muestran a continuación:

- ✓ El cono isótropo está constituido por el conjunto de vectores cuyas coordenadas cumplen la condición $x_1 = x_2$ ó $x_1 = - x_2$.
- ✓ Si llamamos $L_1$ al conjunto que cumple la condición $x_1 + x_2 = 0$ y $L_2$ la que cumple la condición $x_1 - x_2 = 0$, el conjunto solución es $C(Q) = L_1 \cup L_2$
- ✓ Las condiciones $x_1 = \pm x_2$ representan gráficamente el conjunto de puntos del plano cuya gráfica en cada caso es una recta.
- ✓ Etc.

En el punto 1.8 –c) en el cual se pretende encontrar el cono isótropo, cabe un análisis similar al efectuado en el ejemplo anterior. Se advierte en este ejemplo, que su importancia radica, entre otras cosas, en que es el caso particular que asigna su nombre a todos los conjuntos con similares características, esto es, $Q(X) = 0$.

La bondad del ejemplo también se observa en el hecho de referirse a un espacio tridimensional, en el cual las representaciones de los alumnos generalmente llevan al docente a postular que no resulta fácil advertir posiciones (puntos) aisladas y mucho menos si es un conjunto de posiciones vinculadas a través de una relación, cuando se trabaja en esta dimensión.

En el ejemplo 1.8-d), éste es posible adaptarlo para lograr ciertos objetivos, los que se desarrollarán en función del enunciado del problema o tarea propuesta. Por ejemplo, si la tarea es: *Si $Q$: $\boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{K}$ es reductible, demostrar que $Q(X) = 0$ equivale a $\varphi(X) = 0$ ó $\psi(X) = 0$.*

La misma exige:

- ✓ Conocimiento de la terminología empleada (por ejemplo, reductible)
- ✓ Conocimientos de conceptos (por ejemplo, transformación, forma cuadrática, forma cuadrática reductible)
- ✓ Capacidad de analizar los datos.
- ✓ Transferir o utilizar los conceptos o conocimientos previos necesarios.
- ✓ Descubrir las relaciones que vinculan ciertos conocimientos previos con la tarea propuesta.
- ✓ Construir la demostración solicitada.
- ✓ Seguir una línea de razonamiento generada por él o sus compañeros.
- ✓ Criticar una demostración.

Este tipo de ejercitación es capaz de mostrar actitudes e intereses generalizados en grupos particulares de alumnos (alumnos de ciencias exactas, alumnos de carreras de ingeniería, etc.), en consecuencia le brinda al docente un aspecto importante de los intereses y motivaciones de los alumnos que le permitirá seleccionar adecuadamente los ejercicios y problemas propuestos.

Si la actividad es planteada como sigue:

*Dada la afirmación: Si $Q: V \rightarrow K$ es reductible, ...*

- ➢ *Opción 1.- Probar que la misma se cumple en los siguientes casos particulares: ...*
- ➢ *Opción 2.- Reconocer geométricamente $C(Q)$.*
- ➢ *Opción 3.- Construya dos formas lineales del espacio ... y a partir de ellas encuentre la forma cuadrática reductible. Usando la forma cuadrática obtenida, confirme la afirmación dada anteriormente.*

Existen otras opciones, pero se analizarán brevemente la dadas. En la actividad o tarea, juega un papel importante la afirmación. En ciertos grupos de alumnos, la actitud de credibilidad en las palabras del docente, suele estar muy arraigado. Crear la duda, lleva a pensar en lo que se dijo y esto si bien es importante en el desarrollo mental de los alumnos, insume mucho tiempo, factor desencadenante de la conducta de muchos docente que los lleva a hace creer a los alumnos en la verdad absoluta de la matemática y conseguir de esta manera optimizar el tiempo didáctico, aunque posteriormente confirmen que los tiempos del aprendizaje pueden ampliarse con esta metodología de enseñanza.

Hay veces que se trabaja con grupos de alumnos que han logrado de alguna manera, construir algunas demostraciones. Para ellos, aceptar una afirmación no conduce a ampliar los tiempos del aprendizaje, sino a reforzar algunas capacidades tales como:

- ✓ Reconocimiento de la terminología
- ✓ Reconocimiento de símbolos particulares.
- ✓ Realizar algunos algoritmos rutinarios
- ✓ Analizar datos para:
  - o Descubrir relaciones entre ellos y los conocimientos previos
  - o Reorganizar los elementos del problema de manera tal que pueda arribar a una solución que posteriormente deberá someter a una validación.

Las actividades rutinarias involucradas en cada opción, permiten que situaciones problemáticas dejen de serlo y se pueda fijar los conceptos involucrados en ellas para posteriormente aplicar con fluidez los mismos en otras situaciones problemáticas.

No se presenta como ejemplo de actividad, el desarrollo propuesto por el autor. No obstante, crear una actividad que lleve a los alumnos a utilizar como conocimientos previos los conceptos de núcleo de una transformación e hiperplano, además rescatar el caso particular cuando C(Q) es un hiperplano, lleva a lograr vincular conocimientos previamente adquiridos, asimilar terminología con significado propio en la ciencia matemática y tal vez con representaciones distintas en la terminología cotidiana o en el de otras ciencias.

El desarrollo presentado por el autor, es propio del manejo que posee de los conocimientos previos. Sirve para el lector, pues encuentra vínculos entre diversos conceptos definidos previamente. Para el caso particular en que el lector es un alumno, probablemente éste carece del manejo fluido de estos temas, por ello es posible que no logre una prueba acabada de la afirmación, sino una lectura rápida de una demostración que le recuerda varios conceptos no necesariamente elementales ni fáciles de comprender o aprender debido al nivel de abstracción de los mismos.

### 10.4.- Aporte didáctico personal

Tarea

A la NASA llegó el rumor de lo mucho que Uds. saben de cónica. Como tienen que atender varios problemas, han pensado en la conveniencia de contratarlos, si dan muestra de interés y capacidad. Por eso les hace llegar uno de los problemas que tienen. Además, reconociendo que el lenguaje que ellos utilizan posiblemente no resulte familiar, o falte alguna información, es posible efectuar consultas. Estas deben ser expresada de manera clara y breve.

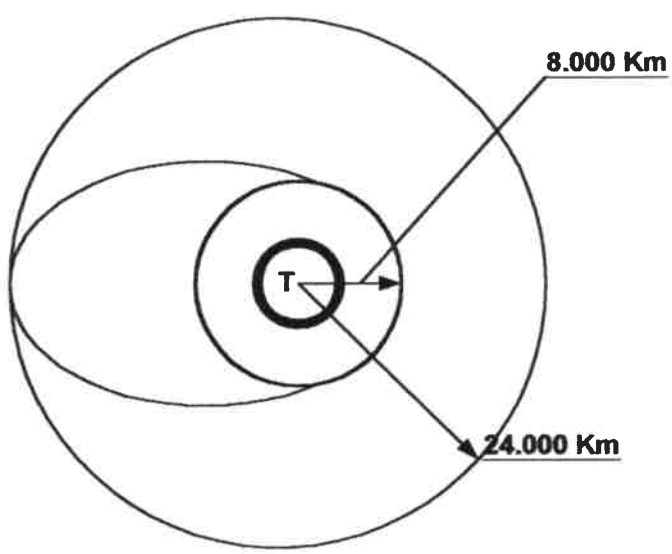
La NASA informa que tiene un cohete remolcador espacial que usa para colocar satélites de comunicaciones en una órbita geosincrónica (Beer, F. y col. 1997).

Inicialmente el cohete se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de 8000 Km de radio. Determinar:

a. El incremento de rapidez necesario para sacar el cohete de la posición A en la trayectoria circular y colocarlo en una órbita elíptica de transferencia.
b. El aumento de rapidez requerido en la posición B de la órbita elíptica para colocar el cohete con su satélite en la nueva órbita geosincrónica de 24000 Km de radio.

Sugerencia:

Considere la trayectoria elíptica con los ápsides sobre dichas circunferencias.



Técnicas

Análisis de datos que producen interrogantes:

1. Terminología utilizada:
   - ✓ ¿ Geosincrónica ?
   - ✓ ¿ Ápsides ?
2. Trayectorias utilizadas: circular y elíptica.
   - ✓ ¿ Porqué ?
3. Datos: radios de las trayectorias.

   Incógnitas: cambios de velocidades.
   - ✓ ¿Qué relación existe entre los datos y las incognitas ?
   - ✓ ¿Qué relación existe entre las velocidades y las trayectorias ?
   - ✓ ¿Qué elementos tienen las cónicas utilizadas ?
   - ✓ ¿Qué tipo de velocidad es conveniente utilizar; angular?, lineal?, radial?, transversal?
   - ✓ Si la velocidad es la radial, ¿cómo se vincula con la ecuación de la cónica?
   - ✓ Que sistema de referencia es más útil que el de coordenadas cartesianas, para estos casos?
   - ✓ ¿Qué ecuación tienen las cónicas en coordenadas polares?
   - ✓ Los elementos de las cónicas que intervienen en la ecuación, ¿cómo se vinculan con las velocidades?

El docente determinará si a los requerimientos de los alumnos les entregará o no un anexo al enunciado del problema, en el cual encuentre aproximadamente la siguiente información.

---

Orbita geosincrónica es una órbita circular en la cual el móvil completa una revolución en un día sideral (23 h 56 min.), y por consiguiente, con respecto a la tierra parece estacionario.

Ápsides: Puntos extremos del eje mayor de la elipse.

Las trayectorias utilizadas en navegación espacial depende de las necesidades. Pueden ser circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas. En función de la distancia al centro de la Tierra a la que se encuentra el navegador, y la necesidad de que desplace a

velocidad constante o no, en trayectorias cerradas o no, distancia al centro constante o no, se realiza la selección de la curva.

La velocidad del navegador en una órbita circular, es constante; en una órbita elíptica es variable, cumpliendo con las leyes de Keppler.

Para que el navegador espacial se mantenga en una órbita circular con centro en el centro de la tierra, debe imprimirse una velocidad $V_c = (GM/r_o)^{1/2}$. Para que el navegador espacial describa una órbita elíptica envolvente de la circular, es necesario que su velocidad $V_e$ se encuentre dentro del rango $V_c < V_e < 2^{1/2}\ V_c$ . Para que el navegador espacial se desplace sobre una órbita parabólica debe imprimirse una velocidad $V_p = 2^{1/2}\ V_c$ . Para que el navegador espacial se desplace sobre una órbita hiperbólica, su velocidad $V_h > 2^{1/2}\ V_c$.

Las velocidades con las que se opera son la radial y la transversal.

Las ecuaciones de las cónicas en coordenadas cartesianas vinculan los semiejes y el centro. Las ecuaciones paramétricas de las cónicas, vinculan la posición en función del tiempo (también los semiejes y el centro). El tiempo es una variable muy difícil de medir en navegación espacial, no así el ángulo.

En el sistema de coordenadas polares, las ecuaciones de las cónicas vinculan la distancia a un punto fijo con la excentricidad y el ángulo. $\varepsilon = \dfrac{\rho_{\min}.V_A^2}{GM} - 1$ .

La ecuacion es: $\rho = \dfrac{p}{\varepsilon\cos\theta + 1}$.

Para $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \rho_{min}\,(1 + \varepsilon)$ ; Para $\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad p = \rho_{max}\,(1 - \varepsilon)$.

### 10.5.- Análisis del aporte didáctico

En el enunciado del problema se incluye una introducción que tiene por objetivo atraer la atención de los alumnos. Dicha introducción se propone como comunicación verbal para permitir a los alumnos efectuar comentarios que permitan crear un ambiente agradable para comenzar a trabajar en el tema.

En el enunciado se destaca inmediatamente la utilidad del tema aprendido. En ese enunciado, el lenguaje es importante pues remite al lector a concebir distintas formas de expresión utilizadas en distintas comunidades.

Intentar resolver el problema, permitirá observar el juego de marcos que utiliza el alumno para vivenciar la situación problemática. Se espera que el enunciado del problema dado en lenguaje natural, lo lleve a un marco geométrico y / o analítico simbólico.

Del análisis de los datos, se espera que el alumno realice una revisión de los conceptos aprendidos referentes a cónicas, los que seguramente han sido tratados utilizando como referencia el sistema de coordenadas cartesianas y se han obtenido sus ecuaciones en forma canónica y las ecuaciones paramétricas de las mismas.

Si la situación es que los alumnos han estudiado las cónicas en el sistema de coordenadas polares, entonces deberá realizar comparaciones para seleccionar el sistema que más se adecue al problema.

Si la situación no es la anterior, surge la necesidad de aprender a trabajar el objeto de conocimiento en el marco de un sistema de referencia más adecuado a la situación problemática presentada. Para esto, una opción del docente es proporcionar al alumno la bibliografía adecuada, en la cual deberá seguir el razonamiento del autor en una demostración.

La importancia de la inclusión del problema propuesto, en una situación de aprendizaje, no está en lograr alcanzar el resultado final, sino en la necesidad de aprender matemática debido a la utilidad que presta la misma. Si el alumno se interesa en encontrar la solución, se podrá observar los juegos de marcos que realiza al pasar del marco geométrico al simbólico y de este al algebraico.

La lectura de bibliografía recomendada permitirá al alumno asociar conceptos matemáticos tales como derivada primera y segunda con velocidad y aceleración, además de encontrar ecuaciones que vinculan derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales.

El Cuadro 11 sintetiza las capacidades a desarrollar con el problema propuesto.

**Cuadro 11**

| PROPUESTA DIDACTICA | | CAPACIDADES A DESARROLLAR | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A.0 | | | B.0 | | | | | | C.0 | | | | D.0 | | | | | E |
| Ejerc. | Tipo | A1 | A2 | A3 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | C1 | C2 | C3 | C4 | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | E |
| unico | P | | X | X | X | | | X | X | | | X | X | | X | X | X | | | X |

# 11.- Conclusiones

Del análisis del texto seleccionado, se puede inferir:

***Dimensión epistemológica***

Las representaciones del autor respecto al conocimiento matemático:

- ✓ Presenta como núcleo central, una matemática normativa que tiene por intención indicar como proceder en el tratamiento de los objetos de conocimiento.
- ✓ Pone en evidencia como deben desarrollarse los procesos, esto es, las reglas de juego aceptadas por la comunidad científica.
- ✓ Concibe una práctica matemática que comprende además del nivel tecnológico del lenguaje, un conjunto de cuestiones que son consideradas como importantes, tales domo la idea de cómo debe procederse para hacer matemática.
- ✓ Este conocimiento matemático debe transferirse de tal modo a los sucesores, que provoque en ellos la modalidad o método de trabajo aceptada por la comunidad científica.

Si nos remitimos a la postura epistemológica de Lakatos, recordemos que él propone que cuando se hable de ciencia, debe hablarse de una epistemología basada en los programas de investigación científica. Para Lakatos, un programa de investigación tiene un Núcleo Duro de Hipótesis, que no se intentan falsar sino que se aceptan como válidas (**núcleo estable**). Este núcleo duro está constituido por ciertas ideas que no son sometidas a falsación, ellas son aceptadas como parte de las reglas de juego. Son hipótesis centrales

protegidas por un cinturón de hipótesis Ad – Hoc, que sí se van a trabajar con el sistema de falsación.

Lakatos postula la existencia de dos tipos de afirmaciones, juicios o enunciados que describen fenómenos o postulan hipótesis.

1) Con significado empírico del enunciado. Todo juicio debe tener un significado empírico.
2) Existen enunciados que no necesitan la confrontación empírica por que son formalmente válidos, que son los enunciados de carácter Matemático, de carácter Lógico que se conocen con el nombre de Tautología. Son enunciados de la razón. Tienen consistencia racional. Son formalmente correctos y con carácter de necesidad (tautológicos).

Por ello, opino que el autor, al respetar el tratamiento de la ciencia tal como lo concibe la comunidad científica, esta postura comparte la postura epistemológica de Lakatos.

***Dimensión social***

En la sección "Introducción" del texto en cuestión, el autor al expresar que el mismo es una consecuencia del curso de Geometría I que se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Buenos Aires, revela la idea de responder a las necesidades tanto del estudiante como del docente. Esto justifica el porqué de presentar cada tema con un tratamiento exhaustivo del mismo. Por ello puede considerarse que es un texto para matemáticos (alumnos y docentes).

Al hacer matemática, el autor transforma expresiones de una forma a otra. El proceso de generación de enunciados matemáticos, más que una operación mecánica o una correspondencia con la intuición, hace referencia a la actividad social de *obedecer una regla* cuya función es asegurar la transmisión de la verdad desde axiomas indudables, por medio de procedimientos deductivos hasta lograr enunciados seguros.

Pero la intención es que el libro de texto sea apto para ser usado en carreras de ingeniería. El docente que seleccione este libro de texto, cuenta con la seguridad de que los objetos de conocimiento están tratados con exactitud y mucha rigurosidad.

## Dimensión cognitiva pedagógica

Teniendo en cuenta que las situaciones de enseñanza que se desarrollan en el aula para el tratamiento de los objetos matemáticos, están actualmente sometidos a revisión; que el aprender matemática está plenamente justificado, pero existen dos vías generadas en función de los objetivos propuestos: una, aprender la ciencia para continuar generando conocimientos nuevos dentro de dicha ciencia, otra, aprender la ciencia como herramienta útil para aprender y desarrollar otras ciencias. Esta última posición no implica que los objetos de conocimiento matemático sean simples, limitados y básicos. Todo lo contrario, por ello un docente debe crear situaciones de aprendizaje en las cuales los alumnos se apropien de la mayor cantidad de conocimientos posibles, para ser utilizados inmediatamente en el aprendizaje de otras ciencias.

Si se observan los ejemplos que presenta el autor, se encontrará que algunos de ellos admiten representaciones distintas, todas ellas motivadas por los conocimientos previos involucrados y la relación vinculante de ellos con los nuevos conocimientos que debe adquirir.

Si se desea transformar ellos en tareas del alumno, debe admitirse que la construcción de la misma requiere fundamentalmente del conocimiento de los objetivos que se propone el docente, el conocimiento de las capacidades e intereses de los alumnos.

En la actividad o tarea juega un papel importante la afirmación. En ciertos grupos de alumnos, la actitud de credibilidad en las palabras del docente, suele estar muy arraigada. Crear la duda, lleva a pensar en lo que se dijo y esto es importante en el desarrollo mental de los alumno. Pero esto también admite una equivalencia con el tiempo (tiempo didáctico) necesario a utilizar.

Lo importante es que el autor con la ejercitación propuesta, da bases para crear situaciones de aprendizaje.

## Aporte didáctico personal

Si el texto no cubre todas las necesidades del docente, por que no se tratan todos los objetos matemáticos o en nuestro caso particular, por que el autor trabaja únicamente en

base al sistema de coordenadas cartesianas, entonces, en el primer caso el docente debe seleccionar más de un texto. Si la situación es la otra, propongo el tratamiento de las cónicas en coordenadas polares o cilíndricas. Esto tiene como misión lograr que los alumnos sientan la necesidad de continuar estudiando temas ya tratados con bastante profundidad, pero solo en lo referente a resolver un problema particular. Esta es una propuesta de estudio por casos.

Dado que un docente que enseña matemática no debe estar divorciado de esta ciencia, es conveniente adoptar como libro base para el cumplimiento de la función docente, un texto de las características del analizado. Esto no implica que el docente debe actuar como un simple comunicador de los objetos de conocimiento, sino crear condiciones para desarrollar capacidades en los alumnos que permitan construir nuevos conocimientos.

En los casos en que la matemática es una ***herramienta básica*** para desarrollar una ciencia aplicada (ejemplo, Ingeniería Electromecánica), no se debe actuar en condiciones extremas (ningún objeto de conocimiento debe demostrarse $\leftrightarrow$ todo objeto de conocimiento a aprender, debe validarse con su demostración). Los tiempos didácticos orientarán al docente para trabajar en una zona de compromiso preseleccionada. Los tiempos de aprendizajes ayudarán a ajustar las condiciones para optimizar los resultados a alcanzar, en base a los objetivos propuestos.

El docente deberá constantemente crear situaciones de aprendizaje que posteriormente deberá evaluar. La innumerable cantidad de situaciones a crear, conducen a la necesidad de compartir resultados con sus pares y de esa manera, a través de la cooperación de y con sus pares, optimizar el encuentro de la zona de máximo aprendizaje y mínimo tiempo de aprendizaje.

En la situación de enseñanza, deben converger una aproximación al tratamiento de la matemática como ciencia, con una transposición didáctica del objeto de conocimiento en la cual , su utilidad sea puesta en evidencia.

## 12.- Bibliografía


Abric, J.- 1987 – *Cooperación, competencia y representaciones sociales* – Ediciones Del Val – Suiza.

Artigue, Michele.- 1990 - *Epistemología y didáctica*- Traducción: Capdevielle, B.

Azcarate, Goded, Pilar.- 1998 – *La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores* – Revista electrónica de Investigación y Evaluación Educativa – Vol 3 N° 2 PRE ISSN 1134-4032.

Bachelard, Gastón.- 1938 – *La formación del espíritu científico.*

Beer, Ferdinand P. y Russel Johnston, E. Jr .- 1977 – *Mecánica vectorial para ingenieros – Dinámica* – Tomo II – Tercera edición – Mc Graw-Hill Latinoamericana.

Boyer, Carl B. –1968 - *Historia de la matemática.*

Brousseau, Guy .- 1993 – *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática* – Universidad de Bordeaux – Francia.

Cantoral, Ricardo y Farfán, Rosa María.- 1999 – *Investigaciones en Didáctica de la Matemática y profesionalización docente: Retos de la educación superior* – Area de educación superior. Departamento de Matemática Educativa – Serie Antología N° 3.

Carretero, M. – 1993 – *Constructivismo y Educación* – Barcelona – Biblioteca Universitaria de Pedagogía – Zaragoza. Edelvives.

Chevallard, Yves.- 1997 – *La transposición didáctica. Del saber sabio, al saber enseñado* – Aiqué. Ed. Buenos Aires.

Chevallard, Yves.- 1996 – *La función profesoral: un esbozo de un modelo didáctico.*

Chevallard, Yves; Basch, Mariana; Gascon, Joseph.- 1997 – *Estudiar matemática .-El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje* – ICE – HORSORI – Barcelona – España.

De Guzmán, Miguel – *El papel del matemático en la educación matemática* – Revista alternativas – Serie: espacio pedagógico – Estudio sobre la enseñanza. Matemática y

estadística; Ciencias naturales – Año IV – Nº 17 – ISSN – 0328-8064 – San Luis – Argentina.

Gutierrez Rodríguez, Angel.- 2000 – *Area de conocimiento. Didáctica de la Matemática* – Matemática: Cultura y aprendizaje – Editorial síntesis – España.

Guyot, Violeta – *La enseñanza de las ciencias* – Revista alternativa – Serie: espacio pedagógico – Estudio sobre la enseñanza. Matemática y estadística; Ciencias naturales – Año IV – Nº 17 – ISSN – 0328-8064 – San Luis – Argentina.

Guyot, Vileta y colaboradores.- 1992 – *Poder, saber, la educación* – Ed. Buenos Aires.

Hammerlin, Hoffmann.- 1991 – *Numerical Mathematics* – GTM – Springer Verlag.

Jiménez Aleixandre, María Pilar.- 1997 – *Libros de textos, un material entre otros* – Revista Alambique – Didáctica de las ciencias experimentales – Nº 11 Año IV – Barcelona – España.

Kitcher, P.- 1988 – *Mathematical Naturalism* – W. Aspray and P. Kitcher (eds).

Lakatos, Imre.-1978 – *A Renaissance of Mathematics* – J. Worrall and O. Currie (eds).

Lakatos, Imre.- 1981 – *Matemática, ciencia y epistemología* – Alianza. Madrid.

Larrotonda, Angel Rafael – *Álgebra lineal y geometría* – EUDEBA – 1973 – Argentina.

Robert, A. y Robinet, J.- 1989 – *Enoncés d' exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels* – Cahier de DIDIREM n° 4, IREM. – Université Paris 7 - Francia.

Saiz, Irma.- 1996 – *8ª Encuentro Nacional Docente de Intercambio y Actualización* – Novedades Educativas – Nº 75.

Wilson, James W.- 1995 – *Evaluación del aprendizaje en la matemática de la escuela secundaria* .