

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO



**SIMULACIONES NUMÉRICAS DEL
COMPORTAMIENTO AEROELÁSTICO DE
VEHÍCULOS AÉREOS NO TRIPULADOS CON ALAS QUE
CAMBIAN DE FORMA**

por

Marcos Leonardo Verstraete

Tesis presentada para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERÍA

Marzo de 2016

**SIMULACIONES NUMÉRICAS DEL
COMPORTAMIENTO AEROELÁSTICO DE
VEHÍCULOS AÉREOS NO TRIPULADOS CON ALAS QUE
CAMBIAN DE FORMA**

por

Marcos Leonardo Verstraete

Dr. Sergio Preidikman
Director

Dr. Bruno A. Roccia
Co-Director

APROBADA POR:

Dr. José E. Stuardi
Jurado

Dr. Livio S. Maglione
Jurado

Dr. Walter B. Castelló
Jurado

Mg. Mercedes Carnero
Secretaria de Posgrado de la Facultad de Ingeniería

Dra. Gabriela Maldonado
Secretaria de Posgrado y Cooperación Internacional de la UNRC

Marzo de 2016

Dedicado a mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo agradecer especialmente a Sergio Preidikman, por contribuir a mi formación profesional, por despertar mi interés en la investigación y por lograr que este trabajo haya sido posible, pero sobre todo por brindarme su amistad. Luego quiero agradecer al codirector de esta tesis, Bruno Rocchia, quien me ha brindado, además de sus conocimientos y consejos, su amistad desde el primer momento. Quiero agradecer especialmente al profesor Julio Massa por su apoyo incondicional, paciencia, y por sus numerosos e importante consejos. A Luis Ceballos por su amistad, por contribuir a mi formación profesional, y por sus aportes a este trabajo de tesis. Un profundo agradecimiento al profesor Dean Mook por su dedicación y aporte a este trabajo.

Un agradecimiento más que especial a un amigo con quien he compartido mucho tiempo dentro de esta universidad, Ronald O'Brien; sus consejos han sido muy importantes para la realización de este trabajo. A personas de bien que conocido en la Universidad Nacional de Córdoba; especialmente a mis compañeros de la cátedra de Cálculo Estructural: Mauro Maza, Raúl Ritta, Alejandro Brewer, Leonardo Cocco y Walter Castelló.

Quiero agradecer a los miembros del jurado por el tiempo dedicado a la lectura de esta tesis. Al CONICET por su apoyo económico para la realización de este trabajo. A los docentes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Río Cuarto; especialmente a los profesores Guillermo Bossio, Guillermo García y Fernando Magnago. Al Departamento de Estructuras de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas, y Naturales de la UNC, por su apoyo económico para que pueda realizar las actividades de investigación relacionadas con este trabajo.

Agradezco sinceramente a Daniela, la persona que me ha acompañado durante el desarrollo de este trabajo y ha estado presente desde el primer momento; su apoyo incondicional y palabras de aliento en los momentos más difíciles han sido más que importantes para que este esfuerzo haya sido posible.

Agradecer hoy y siempre a mis padres, Raúl y Teresa, quienes me han brindado todo el apoyo en cada una de mis decisiones; *gracias por haberme brindado la oportunidad de estudiar y por permitirme alcanzar mis sueños.*

RESUMEN

Una nueva tecnología, conocida como *morphing wings*, promete una generación de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) que reconfiguran sus alas durante el vuelo del mismo modo que lo hacen las aves. Estas aeronaves se utilizarán en operaciones civiles, científicas y comerciales. Sin embargo, todavía existen barreras técnicas que deben ser superadas. Dos aspectos que resultan importantes en el vuelo de UAVs con alas reconfigurables, y aún no son completamente entendidos, son los aspectos aerodinámicos y aeroelásticos.

El objetivo general de este trabajo de tesis de Doctorado es investigar, mediante simulaciones numéricas, los aspectos aerodinámicos y aeroelásticos asociados a UAVs con alas reconfigurables. Para llevar a cabo las simulaciones se ha desarrollado una herramienta numérica que incorpora: (i) un modelo computacional para estudiar la aerodinámica no estacionaria durante el proceso de reconfiguración de las alas, el cual resulta del acoplamiento entre un modelo cinemático y un modelo aerodinámico; y por otro lado, (ii) un modelo aeroelástico para estudiar el comportamiento aeroelástico asociado a cada una de las configuraciones que pueden adquirir las alas. Este último modelo está compuesto por el modelo aerodinámico antes mencionado, un modelo estructural y una estrategia para combinar ambos modelos.

El modelo cinemático permite describir el proceso de los grandes cambios de forma que experimenta el ala reconfigurable considerada en este trabajo.

El modelo aerodinámico utilizado es una extensión de la versión 3D del método de red de vórtices inestacionario, el cual permite predecir las características aerodinámicas en el dominio del tiempo, y además, contempla las interacciones aerodinámicas entre las distintas partes que constituyen el ala reconfigurable y las estelas.

En el modelo estructural las alas son modeladas mediante un conjunto de vigas interconectadas. El método de los elementos finitos es utilizado para discretizar espacialmente las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica estructural. La solución es expresada en términos de los modos de vibrar de la estructura y las coordenadas modales son utilizadas como coordenadas generalizadas para describir la dinámica del sistema.

El modelo aeroelástico considera la estructura del ala y el fluido como elementos de un único sistema dinámico. La transferencia de información entre el modelo estructural y el modelo aerodinámico (desplazamientos, velocidades y fuerzas) se lleva a cabo por medio de un esquema de interacción basado en funciones de base radial. La integración de todas las ecuaciones gobernantes se realiza en forma numérica, simultánea e interactiva en el dominio del tiempo mediante el método predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming.

Los resultados numéricos relacionados a los aspectos aerodinámicos muestran una fuerte dependencia entre las cargas aerodinámicas y las cinemáticas prescritas sobre las alas reconfigurables. Las simulaciones aeroelásticas permiten comprender la respuesta del ala antes, durante y después que comience el fenómeno de *flutter*. Los resultados revelan una relación no-lineal entre los parámetros usados para reconfigurar las alas (ángulos de diedro) y la velocidad de *flutter*.

ABSTRACT

A new technology, called morphing wings, promises a generation of Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) capable of reconfiguring its wings during flight as the birds do. These aircrafts will be used in civil, commercial and scientific operations. However, there are still technical barriers that must be overcome. The aerodynamic and aeroelastic aspects are very important in the flight of UAVs with morphing wings, and still they are not fully understood.

The general goal of this Doctoral thesis is to investigate, by numerical simulations, the aerodynamic and aeroelastic aspects associated to UAVs with morphing wings. To carry out the simulations, a numerical tool was developed which includes: (i) a computational model to study the unsteady aerodynamics during the morphing process, which is obtained by coupling a kinematical model and an aerodynamic model, and (ii) an aeroelastic model to study the aeroelastic behavior associated to each configuration of the morphing wing. The last model is composed by the aforementioned aerodynamic model, a structural model and a strategy to combine them.

The kinematical model allows describing the process of large shape changes for the morphing wing considered in this work.

The aerodynamic model is an extended version of the 3D unsteady vortex-lattice method, which allows predicting the aerodynamic behavior in the time domain; it also considers the interactions among the morphing wing components and the wakes.

In the structural model the wings are modeled by a set of interconnected beams. The equations of motion that govern the dynamics of the structure are spatially discretized by using the finite element method. The solution is expressed as an expansion in terms of the free-vibrations modes, and the modal coordinates are used as generalized coordinates to describe the dynamics of the system.

The aeroelastic model considers the structure and the fluid as elements of a single dynamic system. The exchange of information among aerodynamic and structural models (displacements, velocities and forces) is achieved by means of an interaction scheme based on radial basis functions. Integration of all governing equations is performed numerically, simultaneously and interactively in the time domain using the Hamming's fourth order predictor-corrector method.

The numerical results related to aerodynamic aspects show a strong dependence among the aerodynamic loads and the prescribed kinematics on the morphing wings. The aeroelastic

simulations allow understanding the wing's response before, during and after the onset of flutter. The results show a non-linear relation among the parameters used to morph the wings (dihedral angles) and the flutter speed.

Índice General

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 1: INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. Revisión bibliográfica | 8 |
| 1.2.1. El concepto <i>Morphing wings</i> | 8 |
| 1.2.2. Modelos aerodinámicos | 12 |
| 1.2.3. El problema de interacción fluido-estructura y modelos aeroelásticos | 15 |
| 1.4. Objetivos | 22 |
| 1.5. Aspectos originales de este trabajo | 23 |
| 1.6. Organización de la tesis | 24 |
| Capítulo 2: MODELO CINEMÁTICO | 25 |
| 2.1. Generalidades | 25 |
| 2.2. Geometría del ala inspirada en la biología | 26 |
| 2.3. Cinemática del concepto <i>folding wing</i> | 28 |
| 2.3.1. Sistemas de referencias y transformación de coordenadas | 30 |
| 2.3.2. Posición y velocidad de un punto arbitrario sobre el ala | 33 |
| Capítulo 3: MODELO AERODINÁMICO | 37 |
| 3.1. Generalidades | 37 |
| 3.2. El problema matemático | 38 |
| 3.3. Ley de Biot-Savart | 41 |
| 3.4. Método de red de vórtices no-lineal e inestacionario | 43 |
| 3.4.1. Discretización de las sábanas vorticosas | 43 |
| 3.4.2. Arranque impulsivo | 47 |
| 3.5. Variables adimensionales | 52 |
| 3.6. Cálculo de las cargas aerodinámicas | 53 |

| | |
|--|-----------|
| Capítulo 4: MODELO ESTRUCTURAL | 57 |
| 4.1. Generalidades | 57 |
| 4.2. Descripción del modelo | 58 |
| 4.3. Formulación mediante elementos finitos | 59 |
| 4.3.1. Aspectos generales | 59 |
| 4.3.2. Interpolación del campo de desplazamientos | 61 |
| 4.3.3. Interpolación del campo de deformaciones | 65 |
| 4.3.4. Ecuaciones de movimiento de un elemento | 66 |
| 4.3.5. Ecuaciones de movimiento de la estructura del ala | 68 |
| 4.4. Reducción de dimensión de las ecuaciones de movimiento | 69 |
| | |
| Capítulo 5: MODELO AEROELÁSTICO | 73 |
| 5.1. Generalidades | 73 |
| 5.2. Métodos para la transferencia de información entre modelos | 74 |
| 5.2.1. Introducción | 74 |
| 5.2.2. Concepto básico del acoplamiento fluido-estructura | 74 |
| 5.2.3. Primer método de transferencia (PMT) | 78 |
| 5.2.4. Segundo método de transferencia (SMT) | 84 |
| 5.3. Acoplamiento de las ecuaciones de movimiento | 91 |
| 5.4. Integración temporal de las ecuaciones de movimiento | 93 |
| 5.5. Integración del modelo aerodinámico dentro del esquema numérico | 97 |
| | |
| Capítulo 6: RESULTADOS NUMÉRICOS | 99 |
| 6.1. Introducción | 99 |
| 6.2. Validación de la herramienta computacional | 101 |
| 6.2.1. Cálculo de modos y frecuencias para una viga en voladizo | 101 |
| 6.2.2. Cálculo de sustentación para el caso de un ala batiente | 105 |
| 6.2.3. Respuesta aeroelástica de un puente colgante | 108 |
| 6.2.3.1 Modelo 1 | 108 |
| 6.2.3.2 Modelo 2 | 117 |
| 6.3. Simulaciones del comportamiento aerodinámico | 120 |
| 6.3.1. Análisis de sensibilidad de la malla aerodinámica | 120 |

| | |
|---|------------|
| 6.3.2. Comportamiento aerodinámico del concepto <i>folding wing</i> | 123 |
| 6.4. Simulaciones del comportamiento aeroelástico | 126 |
| 6.4.1. Influencia del número de modos y de la longitud de estela | 127 |
| 6.4.2. Variación del ángulo de diedro del ala interna | 131 |
| 6.4.2.1 Configuración definida por $\theta_B = 0^\circ$ y $\theta_C = 0^\circ$ | 136 |
| 6.4.2.2 Configuración definida por $\theta_B = 20^\circ$ y $\theta_C = 0^\circ$ | 143 |
| 6.4.3. Variación simultánea de los ángulos de diedro del ala interna y del ala externa | 150 |
| Capítulo 7: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS | 155 |
| 7.1. Conclusiones | 155 |
| 7.2. Trabajos futuros | 159 |
| ANEXO A: PUBLICACIONES DEL AUTOR | |
| RELACIONADAS CON EL TEMA DE LA TESIS | 161 |
| REFERENCIAS | 165 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Concepto <i>Morphing Airplane</i> – NASA. | 2 |
| 1.2 | Halcón peregrino en dos configuraciones de vuelo. | 5 |
| 1.3 | Diferentes configuraciones de las alas de gaviotas. | 6 |
| 1.4 | Avión Bell X-5. | 10 |
| 1.5 | Concepto <i>foldwing wing</i> desarrollado por Lockheed Martin. | 11 |
| 1.6 | Concepto <i>sliding wing</i> desarrollado por Next-Gen Aeronautics. | 11 |
| 1.7 | Configuraciones de un UAV con alas flexibles inspirado en las gaviotas. | 12 |
| | | |
| 2.1 | a) Ala de una gaviota real. b) Geometría del ala bioinspirada. | 27 |
| 2.2 | Línea de curvatura media en la raíz del ala. | 28 |
| 2.3 | Ala derecha del modelo <i>foldwing wing</i> - Ángulos de diedro. | 29 |
| 2.4 | Variación temporal de los ángulos θ_B , θ_C y θ_{BC} . | 30 |
| 2.5 | Sistemas de referencias. | 31 |
| 2.6 | Descripción del mecanismo <i>foldwing wing</i> - Ángulos de diedro. | 33 |
| | | |
| 3.1 | Sábanas vorticosas. | 39 |
| 3.2 | Interpretación de la Ley de Biot-Savart. | 42 |
| 3.3 | Panel típico y sábanas discretizadas. | 44 |
| 3.4 | Relación entre circulaciones de segmentos vorticosos y circulaciones de anillo vorticosos. | 45 |
| 3.5 | Punto de control, vectores diagonales, versor normal y nodos aerodinámicos. | 45 |
| 3.6 | Circulaciones de la sábana adherida en el instante $t = 0$. | 47 |
| 3.7 | Convección de un segmento vorticoso. | 48 |
| 3.8 | Proceso de convección, primera generación de paneles en la estela. | 49 |
| 3.9 | Convección de dos segmentos vorticosos. | 51 |
| 3.10 | Proceso de convección, segunda generación de paneles en la estela. | 51 |
| | | |
| 4.1 | Estructura del ala y parámetros de configuración. | 58 |
| 4.2 | Diferentes geometrías de la estructura del ala. | 59 |
| 4.3 | Malla de elementos finitos. Dos Configuraciones típicas: a) $\theta_B = -30^\circ$ $\theta_C = 30^\circ$ y b) $\theta_B = 0^\circ$ y $\theta_C = 30^\circ$. | 60 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| 4.4 | Elemento típico de la discretización y grados de libertad de los nodos. | 62 |
| 5.1 | Malla Aerodinámica y Malla estructural. | 75 |
| 5.2 | Interpretación geométrica del primer método de transferencia. | 80 |
| 5.3 | Relación entre puntos de control y nodos aerodinámicos. | 82 |
| 5.4 | Figura 5-4: <i>a)</i> 2do modo para un pequeño valor de p_k . | |
| | <i>b)</i> 4to modo para un pequeño valor de p_k . | |
| | <i>c)</i> 2do modo para un adecuado valor de p_k . | |
| | <i>d)</i> 4to modo para un adecuado valor de p_k . | |
| | <i>e)</i> 2do modo para un elevado valor de p_k . | |
| | <i>f)</i> 4to modo para un elevado valor de p_k . | 90 |
| 6.1 | Estructura de la herramienta computacional. | 100 |
| 6.2 | Diferencia porcentual entre las frecuencias: Resultados numéricos y analíticos. | 103 |
| 6.3 | Comparación entre modos: Resultados numéricos y analíticos. | 104 |
| 6.4 | Comparación de la sustentación con la referencia Neef y Hummel. | 106 |
| 6.5 | Evolución del ala batiente y de la estela en diferentes instantes de tiempo de simulación. | 107 |
| 6.6 | Modelo 1 del puente colgante. | 109 |
| 6.7 | Modelo 1 del puente colgante - Modos. | 109 |
| 6.8 | Respuesta para una velocidad inferior a la velocidad de <i>flutter</i> ($V_\infty = 120 \text{ ft/seg}$). | 112 |
| 6.9 | Respuesta para una velocidad próxima a la velocidad de <i>flutter</i> ($V_\infty = 161.3 \text{ ft/seg}$). | 113 |
| 6.10 | Respuesta para una velocidad superior a la velocidad de <i>flutter</i> ($V_\infty = 175 \text{ ft/seg}$). | 114 |
| 6.11 | Respuesta temporal y en frecuencia de q_1 y q_2 para los casos subcrítico, crítico y supercrítico. | 115 |
| 6.12 | Puente y estela en diferentes instantes de tiempo para $V_\infty = 161.3 \text{ ft/seg}$. | 116 |
| 6.13 | Modelo 2 del puente colgante para el PMT. | 117 |
| 6.14 | Modelo 2 del puente colgante para el SMT. | 118 |
| 6.15 | Comparación entre el PMT y SMT. | 119 |
| 6.16 | Coeficiente de sustentación en función del tiempo. | 121 |
| 6.17 | <i>a)</i> diferencia porcentual. <i>b)</i> tiempo de simulación. | 122 |
| 6.18 | Coeficiente de sustentación en función del tiempo. | 123 |

| | |
|--|-----|
| 6.19 Coeficiente de resistencia inducida en función del tiempo. | 124 |
| 6.20 Distribución de ΔC_p para el caso II. | 125 |
| 6.21 ΔC_p a lo largo de la cuerda para el caso II en las secciones <i>E</i> , <i>F</i> y <i>H</i> . | 126 |
| 6.22 Estructura utilizada en el modelo. | 127 |
| 6.23 Desplazamiento u_{11}^z en función del tiempo – Influencia del número de modos. | 128 |
| 6.24 Amplitud de u_{11}^z en función del número de modos considerados. | 129 |
| 6.25 Desplazamiento u_{11}^z en función del tiempo – Influencia de la longitud de la estela. | 130 |
| 6.26 Amplitud de u_{11}^z en función de le/c_m . | 131 |
| 6.27 Primeros 4 modos para $\theta_B = 0^\circ$ y $\theta_B = 20^\circ$. | 132 |
| 6.28 Primeras 4 frecuencias naturales en función de θ_B . | 133 |
| 6.29 Velocidad de <i>flutter</i> en función de θ_B - regiones estables e inestables. | 135 |
| 6.30 Frecuencia de <i>flutter</i> en función de θ_B | 135 |
| 6.31 Respuesta de los primeros 6 modos para un velocidad subcrítica ($V_\infty = 18$ m/seg). | 137 |
| 6.32 Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 18$ m/seg). | 138 |
| 6.33 Transformada Rápida de Fourier para los primeros 6 modos – velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 18$ m/seg). | 138 |
| 6.34 Respuesta temporal 5 modos -velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 29.66$ m/seg). | 139 |
| 6.35 Transformada Rápida de Fourier de 5 modos – velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 29.66$ m/seg). | 140 |
| 6.36 Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 29.66$ m/seg). | 140 |
| 6.37 Desarrollo de la estela en diferentes pasos de cálculo -velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 29.66$ m/seg) | 141 |
| 6.38 Respuesta temporal de 4 modos – velocidad superior a V_F ($V_\infty = 29.8$ m/seg). | 142 |
| 6.39 Transformada Rápida de Fourier de 4 modos – velocidad superior a V_F ($V_\infty = 29.8$ m/seg). | 143 |
| 6.40 Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 29.8$ m/seg). | 143 |
| 6.41 Respuesta temporal de los 3 primeros modos – velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 21$ m/seg). | 144 |
| 6.42 FFT para los 3 primeros modos – velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 21$ m/seg). | 145 |

| | |
|---|-----|
| 6.43 Proyección en el espacio de estado de los 2 primeros modos - velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 21 \text{ m/seg}$). | 145 |
| 6.44 Respuesta temporal de los 3 primeros modos – velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$). | 146 |
| 6.45 FFT para los 3 primeros modos – velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$). | 147 |
| 6.46 Proyección en el espacio de estado de los 2 primeros modos - velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$). | 147 |
| 6.47 Desarrollo de la estela en diferentes pasos de cálculo -velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$). | 148 |
| 6.48 Respuesta temporal de los 3 primeros modos – velocidad superior a V_F ($V_\infty = 24.5 \text{ m/seg}$). | 149 |
| 6.49 Proyección en el espacio de estado de los 2 primeros modos - velocidad superior a V_F ($V_\infty = 24.5 \text{ m/seg}$). | 149 |
| 6.50 Primeras 4 frecuencias naturales en función de β . | 150 |
| 6.51 Velocidad de <i>flutter</i> en función de β - regiones estable e inestable. | 152 |
| 6.52 Frecuencia de <i>flutter</i> en función de β . | 152 |
| 6.53 Desarrollo de la estela durante el <i>flutter</i> – vista en perspectiva ($V_\infty = 16.6 \text{ m/seg}$). | 153 |
| 6.54 Posición de la estela durante el <i>flutter</i> – vista lateral ($V_\infty = 16.6 \text{ m/seg}$) | 147 |

Índice de Tablas

| | | |
|------------|---|-----|
| 1-1 | Funciones de Base Radial. | 18 |
| 2-1 | Datos utilizados en el modelo. | 26 |
| 6-1 | Propiedades mecánicas y geométricas de la viga. | 101 |
| 6-2 | Coefficientes para la solución analítica. | 102 |
| 6-3 | Frecuencias naturales – Diferencias respecto a la solución analítica. | 103 |
| 6-4 | Velocidad de <i>flutter</i> del PMT y SMT para las mallas consideradas. | 118 |
| 6-5 | Mallas utilizadas en el análisis. | 121 |
| 6-6 | Datos de las simulaciones. | 123 |

Capítulo 1

Introducción y revisión bibliográfica

1.1. Introducción

Una tecnología denominada *morphing wings* promete una nueva generación de vehículos aéreos no tripulados o *Unmanned Aerial Vehicles* (UAVs) que reconfiguran sus alas durante el vuelo del mismo modo que lo hacen las aves, con los objetivos de: *i*) adaptarse a las diferentes etapas de una misión; *ii*) reducir el consumo de energía; *iii*) incrementar el rendimiento aerodinámico; y *iv*) lograr mayor agilidad de vuelo; entre otros. Este tipo de aeronaves no-tripuladas, que ha acaparado la atención de muchos investigadores, han sido denominadas como *morphing aircraft*, *morphing plane* o también *morphing airframe*. En este trabajo de tesis se denomina a estas avanzadas aeronaves como UAVs con alas que mutan, UAVs con alas que cambian de forma o UAVs con alas reconfigurables.

En estos últimos años, los vehículos aéreos no-tripulados han sido un tópico de investigación muy importante en el campo de la ingeniería aeronáutica debido a sus potenciales aplicaciones civiles, científicas y comerciales (Sarris, 2001; Cox *et al.*, 2004). Las investigaciones en las diferentes disciplinas que abarca la tecnología asociada a los UAVs fueron dando lugar a diseños de aeronaves no-tripuladas cada vez más eficientes convirtiéndolas en una herramienta muy valiosa debido a su flexibilidad, seguridad, facilidad de uso y costo relativamente bajo para su funcionamiento, lo que

favoreció su utilización en diferentes situaciones; como por ejemplo el gran número de pequeños y livianos UAVs que fueron utilizados en operaciones humanitarias tras el terremoto en Haití (2012) y después del Tifón Haiyan ocurrido en Filipinas (2013), entre otros desastres naturales (Meier, 2014).

Las operaciones que se asignan a estas aeronaves autónomas o pilotadas de manera remota resultan cada vez más exigentes y requieren niveles de prestaciones cada vez más elevados. Esta necesidad de mejorar la funcionalidad de los UAVs inspiró la generación de una nueva clase de aeronaves no-tripuladas que utilizarán la tecnología *morphing wing*; tecnología cuya idea fundamental consiste en un ala que sea capaz de cambiar radicalmente y de manera dinámica su forma geométrica, durante el vuelo, utilizando mecanismos no tradicionales (Figura 1-1).

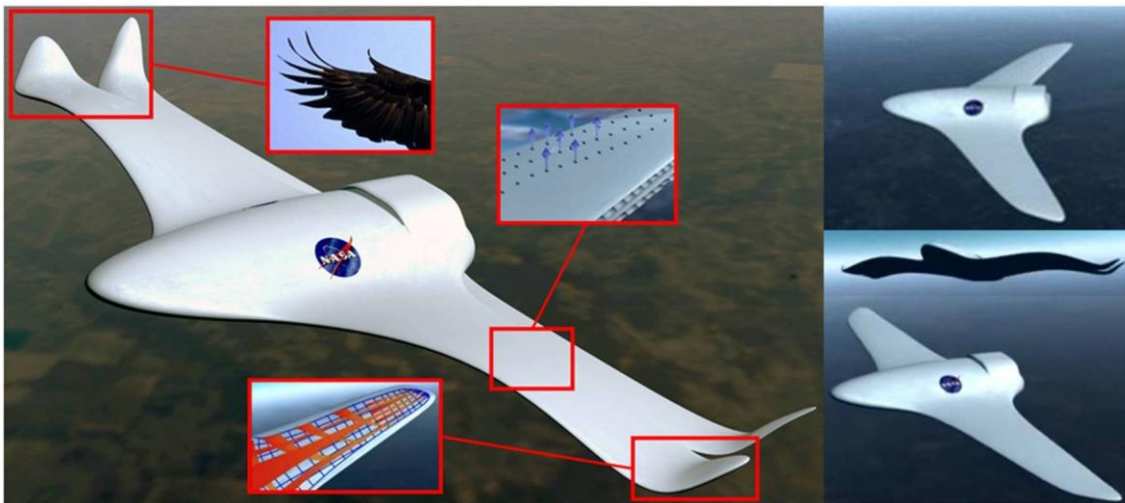


Figura 1-1: Concepto *morphing Airplane* – NASA (Ashley Dove-Jay, 2014).

Las alas estarán constituidas de materiales inteligentes lo cual permitirá una evolución sustancial en los mecanismos utilizados para deformarlas; asemejándose cada vez más a como lo hace un ave. Se flexionarán y torsionarán como el ala de un pájaro, lo que les permitirá gran versatilidad para volar muy rápido o muy lento, e incluso desempeñarse exitosamente en espacios reducidos. Estos aviones podrán volar en “bandadas”, disponiendo de una flota que podrán llevar a cabo un amplio rango de operaciones tales como: *i*) volar entre los apretados recovecos de una ciudad con la finalidad de lograr un monitoreo continuo en ambientes urbanos; *ii*) misiones de búsqueda y rescate; *iii*) exploración en plantas nucleares durante alguna pérdida de radiación; *iv*) monitoreo de escapes químicos y bacteriológicos; *v*) misiones de reconocimiento y vigilancia; y *vi*) exploración en atmósferas no terráneas.

Aunque algunos prototipos de alas *morphing* han sido construidos y probados mostrando las ventajas y beneficios que tiene asociada esta nueva tecnología, todavía existen barreras técnicas que deben ser superadas (Vasista *et al.*, 2012) sobre todo en las áreas de generación de energía, almacenaje, navegación, aerodinámica, aeroelasticidad, propulsión, comunicación y control.

En las grandes aeronaves tradicionales la aerodinámica, generalmente, es tratada por medio de teorías clásicas y estacionarias. Sin embargo, estos avanzados UAVs están caracterizados por cambios en la geometría que ocurren dinámicamente; lo que pone de manifiesto la enorme necesidad de contar con modelos aerodinámicos no estacionarios para captar adecuadamente los fenómenos que ocurren en el vuelo de estos UAVs.

El concepto de UAV reconfigurable ha sido concebido como plataformas espaciales flexibles y móviles, y por ende existen importantes problemas de estabilidad al cambiar de forma durante el vuelo, que aún no son bien entendidos y pueden tener una influencia muy significativa en el desempeño de la aeronave considerada. Las inestabilidades de origen aeroelástico que ocurren en el vuelo de aeronaves, son producidas por el acoplamiento entre la deformación de la estructura alar y las fuerzas aerodinámicas actuando sobre ella. Estas inestabilidades, la divergencia y el *flutter* entre las más conocidas, han sido estudiadas profundamente permitiendo incrementar la seguridad en el vuelo de las aeronaves actuales. Particularmente, la predicción del fenómeno de *flutter* en UAVs reconfigurables ha recibido gran atención debido a que los cambios radiales en la forma de la planta alar alteran la dinámica de la estructura, y esto puede traer aparejado cambios en el comportamiento de esta inestabilidad. Por ello, la habilidad para estimar márgenes confiables para las inestabilidades de origen aeroelástico es de mucha importancia para un diseñador de un *morphing aircraft*.

El desarrollo de simulaciones numéricas constituye una alternativa que resulta económica y eficiente para comprender el comportamiento aeroelástico y aerodinámico de vehículos aéreos no-tripulados con alas que mutan. Actualmente, la mayoría de las herramientas numéricas disponibles implementan métodos tradicionales que se usan para el estudio aerodinámico de aeronaves convencionales (Landahl y Ashley, 1985; Anderson, 2001), y métodos clásicos para la predicción del fenómeno de *flutter* (los

métodos p , los k , los $p-k$ y otros, Hodges y Pierce, 2002); lo que puede resultar inadecuado para investigar a estos avanzados UAVs. Teniendo esto en cuenta, resulta necesario mejorar y calibrar las herramientas numéricas existentes, y desarrollar nuevas herramientas numéricas para la predicción de fenómenos aeroelásticos complejos, incluyendo aquellos debido a no linealidades aerodinámicas y estructurales, y hacerlo con un alto grado de precisión.

Inspiración en la biología

Por muchos años, científicos e ingenieros se han inspirado en la naturaleza con el fin de lograr la simplicidad, elegancia y eficiencia que caracteriza a las especies animales, y que se han desarrollado durante miles de años de evolución biológica. Recientes descubrimientos en la mecánica del vuelo natural y nuevas ideas en bioinspiración condujo a muchos investigadores a reconsiderar a las aves como modelos para *morphing aircraft* (Valasek, 2012).

La NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) cree que los aviones del futuro podrán imitar el vuelo de las aves, logrando mayor eficiencia y seguridad. La Figura 1-1 muestra el diseño de una aeronave del futuro de acuerdo a observaciones realizadas por NASA sobre el vuelo de las águilas. Al igual que estas aves usan diferentes plumas en sus alas para controlar ciertos aspectos de su vuelo, las alas de un avión pueden ser diseñadas para cambiar y adaptarse constantemente a distintas condiciones de vuelo. Además, estas aeronaves podrían imitar el modo en que un ave aterriza, disminuyendo considerablemente la cantidad de combustible y el espacio de pista requerido (Rugg, 2007).

Observaciones realizadas por biólogos muestran que algunas aves, tales como los halcones, utilizan una configuración con alta relación de aspecto para merodear por medio de un uso eficiente de las corrientes de aires. Cuando una presa es detectada, estas aves reconfiguran la forma de sus alas para abatirse sobre la presa a gran velocidad. El halcón peregrino, por ejemplo, cuando recoge sus alas contra el cuerpo (Figura 1-2b) puede “picar” a una velocidad de 300 km/h y es capaz de completar tres rolidos de 360 grados en un segundo.

Por otro lado, los murciélagos constituyen otra fuente de inspiración biológica que ha atraído la atención de un gran número de investigadores con el objetivo de desarrollar aplicaciones basadas en el paradigma *morphing*. Estos mamíferos voladores exhiben extraordinarias capacidades de vuelo que surgen en virtud de una variedad de características mecánicas únicas. Ellos han desarrollado músculos potentes que les permiten plegar y extender sus alas membranales durante el vuelo. Las alas de murciélagos están compuestas por huesos suficientemente flexibles que poseen uniones que se controlan independientemente, lo cual genera grandes dificultades en la etapa de modelado. Combinando movimientos de batimiento y diferentes adaptaciones geométricas de las alas ellos pueden lograr asombrosos niveles de maniobrabilidad (Colorado *et al.*, 2011).

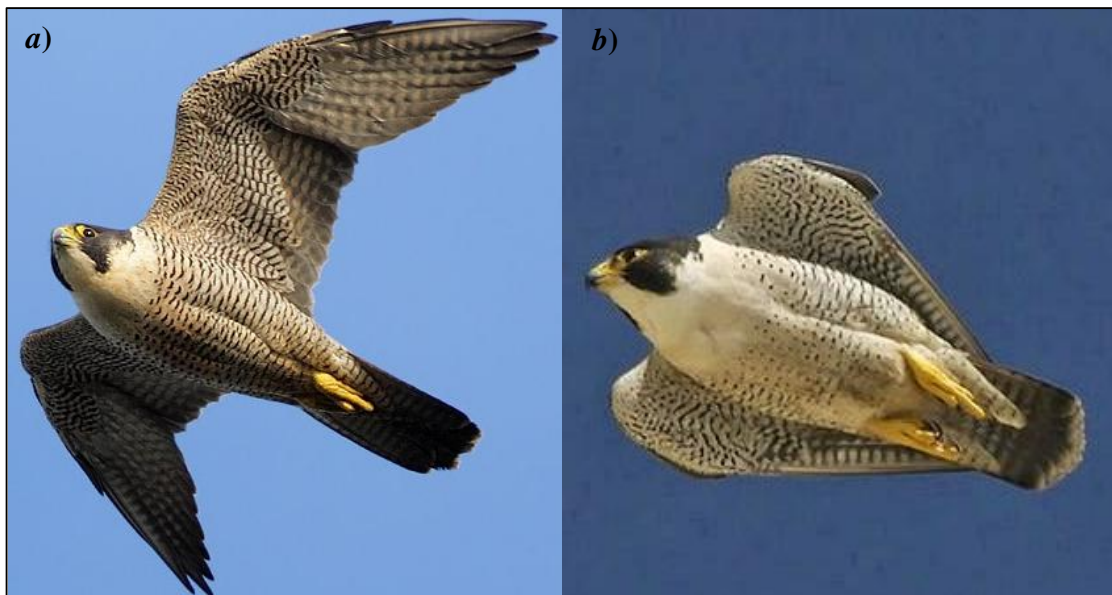


Figura 1-2: Halcón peregrino en dos configuraciones de vuelo (Atkinson, 2004).

Finalmente, las gaviotas constituyen la fuente de inspiración casi por excelencia. Esto se debe principalmente a que algunas de sus características de vuelo, dimensiones y condiciones de operación (Abdulrahim y Lind, 2006) coinciden con los requerimientos de diseño deseados para UAVs de pequeña escala. Entre las características se puede mencionar los vuelos lentos a bajas alturas, descensos rápidos, planeo en altitudes relativamente altas y rápidos despegues (Subbarao *et al.*, 2009). Las gaviotas usan una gran variedad de técnicas *morphing* para lograr estabilización y alta maniobrabilidad. Una de estas técnicas inspiró el concepto *folding wings*, el cual puede observarse en la Figura 1-3 que muestra una gaviota en diferentes configuraciones de vuelo.

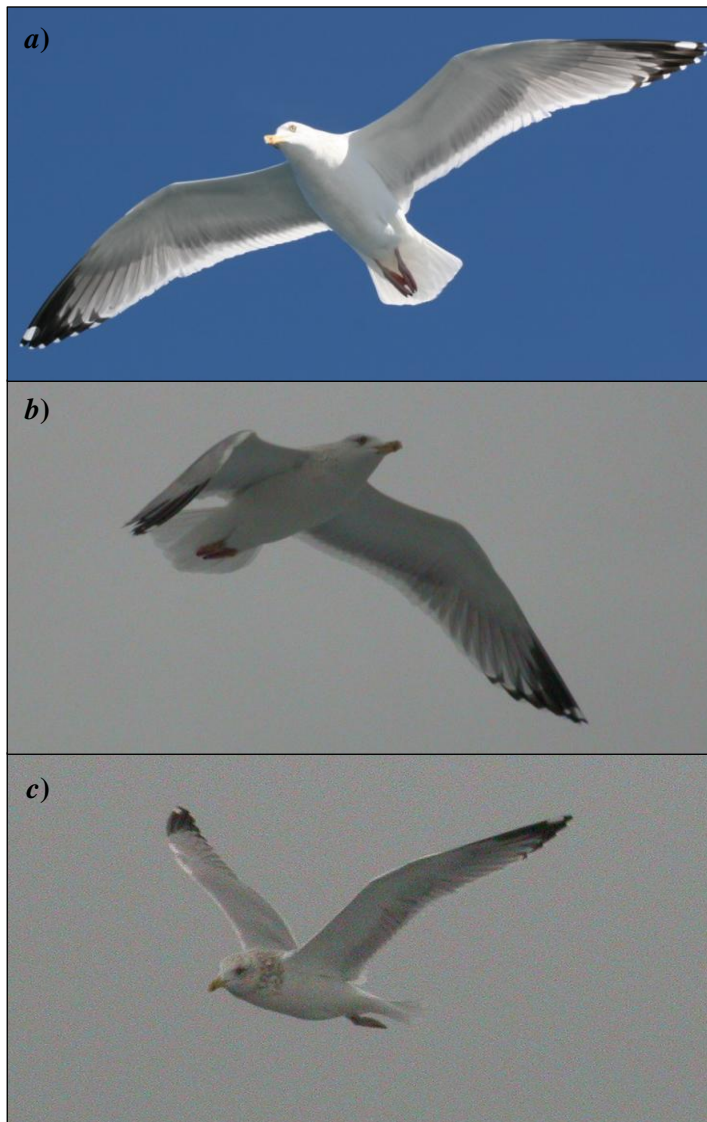


Figura 1-3: Diferentes configuraciones de las alas de gaviotas (Pippen, 2006).

El fenómeno de flutter

La “aeroelasticidad” es un término utilizado para definir el campo de estudio relacionado con la interacción entre la deformación de una estructura elástica inmersa en una corriente de aire y las cargas aerodinámicas que se desarrollan sobre la misma (Hodges y Pierce, 2002).

Uno de los principales problemas de la aeroelasticidad consiste en la determinación, análisis y comprensión de inestabilidades que puede experimentar una estructura elástica sumergida en un flujo de aire. Una aeronave en vuelo se puede ver afectada por un gran número fenómenos aeroelásticos que merecen, sin duda, ser estudiados profundamente. Sin embargo, este trabajo de tesis se concentra únicamente en el estudio de una de ellas denominada “flutter”.

El fenómeno de *flutter* es una inestabilidad dinámica que surge como consecuencia de la interacción entre las fuerzas aerodinámicas, las fuerzas de inercia y las fuerzas elásticas. Esta inestabilidad puede resultar extremadamente violenta de tal manera de llevar a una aeronave a una falla estructural catastrófica.

Para describir el fenómeno, considérese un ala flexible que se encuentra dentro de un túnel de viento, con un ángulo de ataque relativamente bajo. Cuando no hay flujo cualquier perturbación sobre el ala produce una oscilación que decae en el tiempo debido al amortiguamiento estructural. Luego, si la velocidad del flujo dentro del túnel crece gradualmente, cualquier perturbación también provocará una oscilación que decaerá en el tiempo, pero esta vez con otra relación de amortiguamiento debido a la presencia del amortiguamiento aerodinámico externo. Si se continúa incrementando la velocidad del flujo se alcanzará un punto (velocidad crítica) en el que cualquier perturbación inducirá una oscilación que tendrá un movimiento periódico estable con una determinada amplitud. En esta velocidad crítica (velocidad de *flutter*) el movimiento del ala y las cargas aerodinámicas actuantes son tales que: “la energía extraída del medio fluido es igual a la energía disipada por el amortiguamiento interno de la estructura por cada ciclo de oscilación”. Por debajo de la velocidad de *flutter* la respuesta es amortiguada por cualquiera de los medios de disipación (estructural o aerodinámico), y por encima de la velocidad de *flutter* cualquier perturbación es amplificada.

El término “*classical flutter*” es usado para denotar una inestabilidad que surge debido al acoplamiento, producido por las cargas aerodinámicas, entre dos o más modos naturales de una estructura. Este acoplamiento permite la extracción de energía desde la corriente de aire produciendo un movimiento oscilatorio con una amplitud creciente.

La amplitud de la respuesta de la estructura se mantendrá acotada mientras la energía extraída sea disipada por el amortiguamiento estructural y/o por el amortiguamiento aerodinámico. Por encima de la velocidad de *flutter* la energía extraída del fluido excede la cantidad de energía que puede ser disipada por la estructura, produciendo desplazamientos que podrían llevar a una falla estructural.

1.2. Revisión bibliográfica

1.2.1. El concepto *morphing wings*

Un gran número de agencias gubernamentales y universidades en todo el mundo están invirtiendo recursos en proyectos de investigación para el desarrollo de tecnologías que revolucionarán los costos de construcción y operación de aviones en un futuro cercano (Rodríguez, 2007). Una variedad de frases son utilizadas en medios de comunicación y trabajos técnicos para describir a estas tecnologías: el arte de imitar a las aves, geometría variable, la capacidad para realizar deformaciones suaves y continuas, estructuras adaptivas, y la habilidad para adaptarse a las condiciones de vuelo, entre otras. Científicos e ingenieros han adoptado dos palabras para resumir el significado de todas esas frases – *morphing wings*.

Aunque en la literatura existe una multitud de conceptos de alas reconfigurables, todavía no existe una definición formal para expresar el concepto *morphing wings* (Vasista *et al.*, 2012; Barbarino *et al.*, 2011). Sin embargo existe un acuerdo general que establece que los mecanismos utilizados en aeronaves convencionales (flaps, slats o alerones), que en cierto modo representan una manera simplificada de la aspiración general de *morphing*, quedan fuera de la idea que se persigue con esta nueva tecnología (Sofla *et al.*, 2010).

El concepto *morphing wings* es un término relativamente novedoso en el campo de la aeronáutica. Sin embargo la idea de cambiar la forma geométrica de las alas tiene sus orígenes en el primer vuelo oficial llevado a cabo por los hermanos Wright (1903). Ellos desarrollaron una aeronave con alas flexibles que poseía un sistema mecánico compuesto por poleas y cables, el cual permitía torsionar las puntas de las alas con el objetivo de alterar las cargas aerodinámicas para controlar el vuelo (Lilienthal, 2001; Weisshaar, 2006). Este concepto, conocido como *warping wings*, fue inspirado en las observaciones realizadas por Wilbur Wright en el vuelo de buitres.

La literatura ofrece diferentes métodos o técnicas para cambiar las formas de las alas que se basan en la variación o modificación de ciertos parámetros que caracterizan su geometría. Algunos autores (Sofla *et al.*, 2010; Barbarino *et al.*, 2011) proponen clasificar a estos parámetros geométricos en dos grupos. En el primer grupo, el cual está asociado a cambios geométricos de la planta alar (*planform alteration*) o cambios

geométricos en el plano (*in-plane*), se encuentran: la flecha, la cuerda y la envergadura del ala. En el segundo grupo, el cual está asociado a transformaciones o cambios geométricos fuera del plano (*out-of-plane*), se encuentran: la combadura, el espesor del perfil, la torsión y el diedro del ala. Otros autores proponen adicionar un tercer grupo (Gomez *et al.*, 2011; Vasista *et al.*, 2012) que está referido únicamente a los cambios geométricos del perfil alar (*airfoil adjustment*) el cual incluye la combadura y el espesor del perfil.

Para modificar la combadura del ala se utilizan perfiles adaptivos (Johnston *et al.*, 2003) que cambian su curvatura con el fin de obtener la sustentación deseada sin la necesidad de incorporar superficies de control móviles convencionales. En el caso de mutación vía torsión variable, el ala se configura de tal manera que el ángulo de torsión optimice la relación baja-resistencia vs. alta-sustentación. Cambios en la flecha y en la envergadura se utilizan para cambiar la configuración de las alas de vehículos aéreos diseñados para múltiples condiciones de vuelo.

Una de las primeras aplicaciones de alas reconfigurables, o de geometría variable, fue el avión Bell X-5 (Figura 1-4), desarrollado por la compañía *Bell Aircraft Corporation* en 1951, que permitía variar el ángulo de flecha del ala (*swing wing*) durante el vuelo (Seigler, 2005). Este avión fue inspirado en la aeronave P-1101 diseñada por la compañía alemana Messerschmitt, que solo podía cambiar la flecha en tierra. El Bell X-5 tenía algunos problemas de estabilidad para ciertas posiciones de las alas. Sin embargo a pesar de estos, los que se lograron solucionar, la tecnología *swing wing* fue utilizada con éxito en modelos F-111 Aardvark de General Dynamics y F-14 Tomcat de Grumman, entre otras aeronaves (Barbarino *et al.*, 2011).

Desde 1979 varios programas de investigación sobre el concepto *morphing* fueron llevados a cabo. Uno de ellos fue el programa *Mission Adaptive Wing* (MAW) dirigido por el Laboratorio de Investigación de la Fuerza Aérea (AFRL) de Estados Unidos cuyo objetivo fue estudiar alas que cambian su combadura durante el vuelo (Thill *et al.*, 2008; Powers *et al.*, 1992). Las pruebas de vuelo fueron llevadas a cabo por la NASA. Otros dos programas de investigación relacionados con el concepto *morphing* fueron: i) el *Active Flexible Wing* (AFW) llevado a cabo por la NASA y por la compañía Rockwell International (Miller, 1988; Perry *et al.*, 1992); y ii) el programa *Active Aeroelastic Wing* (AAW) desarrollado por el AFRL y la NASA (Thill *et al.*, 2008).

Aunque esos dos programas no tuvieron como objetivo específico el estudio de la tecnología *morphing*, mostraron que la flexibilidad del ala podría proveer importantes incrementos en la performance aerodinámica.



Figura 1-4: Avión Bell X-5.
(commons.wikimedia.org/wiki/File:Bell-X5-Multiple.jpg).

Entre 1995 y 2001 se llevó a cabo el programa *Smart Wing Programme* (SWP) sustentado por DARPA (*Defense Advanced Research Projects Agency*) junto con la NASA y el AFRL. El objetivo de este programa fue desarrollar superficies de control utilizando materiales inteligentes que permitieran incrementar los beneficios aerodinámicos y aeroelásticos en aviones militares (Kudva, 2004).

En el año 2003, con la idea de explotar la tecnología *morphing* y como una extensión del SWP, DARPA comenzó con un nuevo programa denominado *Morphing Aircraft Structure* (MAS) cuyo objetivo era diseñar y construir estructuras de alas capaces de cambiar su forma sustancialmente durante el vuelo (Weisshaar, 2006; Black, 2006).

Como resultado de las investigaciones realizadas durante las primeras etapas del MAS, dos diseños conceptuales fueron considerados: *i*) el concepto de alas plegables (*folding wing*), propuesto por la compañía Lockheed-Martin (LM) (Bye y McClure, 2007; Love *et al.*, 2004; Ivanco *et al.*, 2007; Love *et al.*, 2007), y *ii*) el concepto de cuerda y flecha variable (*bat wing* o *sliding wing*) propuesto por la compañía NextGen Aeronautics (Bowman *et al.*, 2007).

El concepto *folding wing* propuesto por LM consiste de una aeronave cuyas alas están constituidas por plataformas que se pliegan y despliegan, lo que les permite modificar la envergadura y el área efectiva del ala, y consecuentemente, reducir o incrementar la relación sustentación/resistencia. Esto permite a la aeronave realizar misiones que incluyan vuelos de planeo (Figura 1-5a), misiones que requieran vuelos a altas velocidades (Figura 1-5d) y misiones donde son necesarias configuraciones intermedias como las mostradas en la Figura 1-5b y 1-5c. El concepto *sliding wing* consiste de la variación del ángulo de flecha y la cuerda del ala, lo que permite a la aeronave pasar de una configuración de vuelo rápido (Figura 1-6a) a una configuración de vuelo lento y gran autonomía (Figura 1-6d), con la posibilidad de adoptar configuraciones intermedias como en las Figura 1-6b y 1-6c.

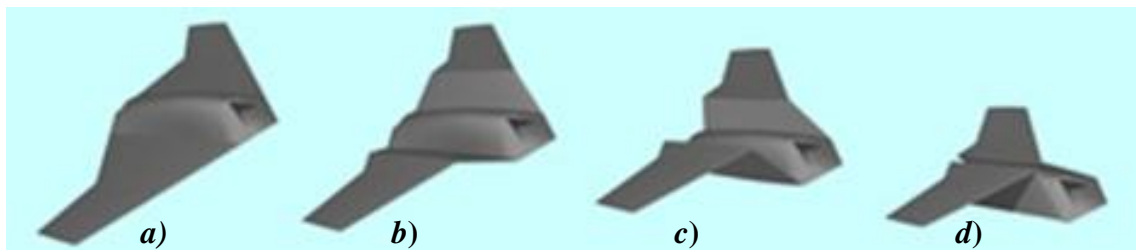


Figura 1-5: Concepto *folding wing* desarrollado por Lockheed Martin. (http://dnc.tamu.edu/projects/flowcontrol/Morphing/public_html/darpa.html).

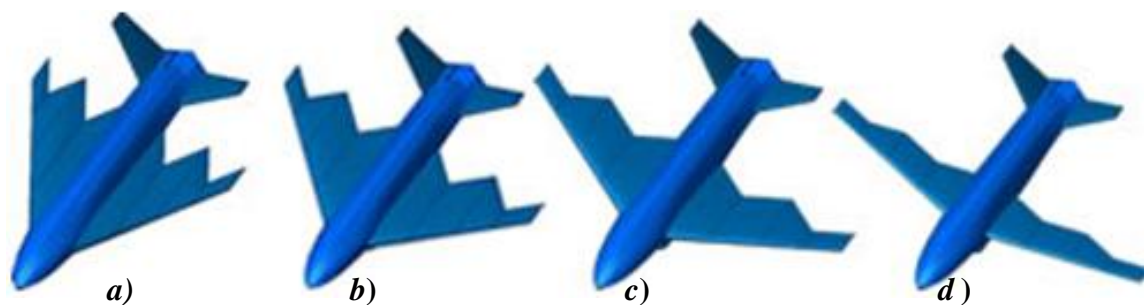


Figura 1-6: Concepto *sliding wing* desarrollado por Next-Gen Aeronautics. (http://dnc.tamu.edu/projects/flowcontrol/Morphing/public_html/darpa.html).

En la Universidad de Florida, Estados Unidos, se han desarrollado diferentes investigaciones sobre una versión pequeña de UAVs (micro vehículos aéreos MAVs no tripulados), Figura 1-7, inspirados en el vuelo de las aves (Grant, 2009; Abdulrahim y Lind, 2005). El objetivo general de estas investigaciones se centró en tópicos relacionados con la dinámica y el control de vuelo de sistemas *morphing*.



Figura 1-7: Configuraciones de un UAV con alas flexibles inspirado en las gaviotas (Abdulrahim y Lind, 2005).

1.2.2. Modelos aerodinámicos

Los diferentes modelos que se encuentran en la bibliografía para la determinación de cargas aerodinámicas inestacionarias que actúan sobre cuerpos sumergidos en un flujo de aire, pueden ser clasificados en tres grupos: *i*) Modelos analíticos, *ii*) Modelos basados en las ecuaciones de Euler/Navier-Stokes, y *iii*) Modelos basados en singularidades.

Entre los modelos analíticos se pueden citar los modelos basados en: *i*) coeficientes de influencia (Scanlan y Rosenbaum, 1962; Fung, 1955), *ii*) funciones de Wagner, Theodorsen y Küsnier (Fung, 1955) y *iii*) teorías de faja (*strip theory*) (Milne-Thomson, 1973; Fung, 1955). Todos estos métodos se caracterizan por su simplicidad en lo que respecta a su implementación computacional, pero tienen muchas limitaciones ya que solo pueden ser utilizados en problemas lineales y para cuerpos de geometría simple.

Los modelos basados en las ecuaciones de Euler/Navier-Stokes están orientados al desarrollo de algoritmos numéricos que permitan resolver las ecuaciones diferenciales no-lineales que gobiernan la dinámica de fluido (Anderson, 1994). Sin embargo, la utilización de estos métodos implica discretizar todo el dominio espacial donde se define el problema, lo que genera modelos numéricos con un enorme número de grados de libertad (Romanowski y Dowell, 1995; Dowell, 1995) y por lo tanto, para su implementación se necesitan grandes recursos computacionales. Otra desventaja es su difícil implementación y estabilidad numérica para fronteras en movimiento (Masud, 2006), como es el caso del problema tratado en esta tesis. Estas desventajas limitan los análisis que resultan trascendentales para comprender los fenómenos aeroelásticos más relevantes asociados a estas nuevas aeronaves.

Los modelos basados en la distribución de singularidades se fundamentan en la idea de reemplazar las superficies de los cuerpos inmersos en el fluido por una distribución de singularidades, y calcular la intensidad de dicha distribución mediante la solución de una ecuación integral (Katz y Plotkin, 1991). Aunque no poseen la misma fidelidad que los algoritmos basados en las ecuaciones de Navier-Stokes, las grandes ventajas de estos métodos son su generalidad, su relativa simplicidad para ser implementados computacionalmente y su bajo requerimiento de recursos computacionales. Algunos de ellos, cuentan con el beneficio adicional de captar fenómenos aerodinámicos no lineales y no estacionarios (Konstadinopoulos, 1981).

La predicción de las cargas aerodinámicas resulta necesaria para llevar a cabo diferentes tipos de análisis; tales como evaluar los requerimientos de energía para cambiar las formas de las alas (Namgoong *et al.*, 2007), explorar la dinámica del vuelo de alas que cambian rápidamente de forma (Obradovic *et al.*, 2011), analizar el estado de tensiones en la estructura alar (Wang Q. *et al.*, 2012b), y predecir la respuesta aeroelástica (Wang I. *et al.*, 2012a), entre otras.

Para calcular las cargas aerodinámicas sobre alas reconfigurables se han implementado técnicas tradicionales como el método de la línea sustentadora de Prandtl (De Breuker *et al.*, 2007; Wickenheiser y Garcia, 2007), el clásico método de los paneles (Niksch, 2008), el método de red de vórtices (VLM) para flujos estacionarios (Johnston, *et al.*, 2003).

Además, se han utilizado herramientas computacionales tales como el software XFOIL (Namgoong, 2007) y el software Athenas Vortex Lattice (Stanford, 2006; Abdulrahim y Lind, 2006). Desde el punto de vista de CFD, se han utilizado herramientas comerciales tales como FLUENT para estudiar casos estacionarios (Wang, *et al.*, 2012), como así también casos inestacionarios (Selitrennik *et al.*, 2009).

Las desventajas que presentan los enfoques basados en CFD resultan muy importantes, y necesariamente deben tenerse presentes al momento de desarrollar una herramienta de análisis preliminar. Estos tipos de herramientas buscan soluciones que permitan considerar fenómenos aerodinámicos relevantes, pero al mismo tiempo realizar las operaciones de cálculo con bajo esfuerzo computacional. Sobre esta base, un enfoque que se sitúa en el punto medio entre un relativo costo computacional y alta precisión es el Método de Red de Vórtices Inestacionario o UVLM (*unsteady vortex lattice method*), el cual es una versión extendida del conocido VLM.

EL UVLM tiene sus orígenes en un trabajo de Belotserkovskii (1966) quién aproximó las sábanas de vorticidad (que modelan a la capa límite y a la estela) como una red discreta de filamentos vorticosos, desarrollando un método numérico para el cálculo de flujos estacionarios para alas delgadas moviéndose en medios ideales incompresibles. Esta versión del método no determinaba la geometría de la estela y estaba limitado a pequeños ángulos de ataque. Ermolenko (1966) fue el primero en modelar los vórtices provenientes de las puntas de alas, pero no tuvo en cuenta la estela desprendida desde el borde de fuga. Belotserkovskii y Nisht (1974) desarrollaron un modelo no lineal para flujos inestacionarios que incluía la estela vorticosa desprendida desde las puntas de alas y desde el borde de fuga, pero no consideraba la separación que se produce en el borde de ataque cuando el ángulo de ataque es relativamente grande. Posteriormente, Mook y Maddox (1974) modificaron el modelo de Belotserkovskii para incluir efectos de separación de flujo en el borde de ataque. En el trabajo de Konstadinopoulos y otros (1981) se presenta un método general para flujos tridimensionales, no viscosos, incompresibles e inestacionarios. El método presentado puede aplicarse a cualquier configuración de ala realizando maniobras arbitrarias. Este método fue utilizado por Preidikman (1998) y Preidikman y Mook (2000) para realizar una descripción unificada

de la dinámica estructural, la aerodinámica y los sistemas de control con el fin de desarrollar simulaciones aeroservoelásticas.

Obradovic y Subbarao (2011) desarrollaron una metodología de simulación basada en una versión del VLM con el fin de investigar la dinámica del vuelo de aeronaves *morphing*. Esta metodología permite computar las cargas aerodinámicas en el dominio del tiempo; sin embargo no contempla un modelo inestacionario de la estela. Esto se ve fundamentado por el hecho que la velocidad de cambio de forma del ala es muy baja comparada con la velocidad de vuelo de la aeronave, y las perturbaciones que puede inducir el cambio de forma del ala sobre la estela no influyen significativamente sobre el comportamiento de las fuerzas aerodinámicas.

Jung y Kim (2011) implementaron un modelo inestacionario con el fin de estudiar el comportamiento aerodinámico del concepto *folding-wing* desarrollado por Lockheed Martin. Este modelo incorpora los efectos inestacionarios de la estela sin considerar el desprendimiento del flujo proveniente desde las puntas de las alas. Sus resultados numéricos mostraron que el efecto de las grandes velocidades angulares de reconfiguración es un factor importante que no puede ser ignorado.

Wang y Zhang (2013), también utilizaron el UVLM para estudiar la aerodinámica inestacionaria sobre un concepto *morphing wings* que cambia su ángulo de diedro a una velocidad angular constante. Este trabajo muestra que el método es capaz de predecir adecuadamente muchas de las características involucradas en el vuelo complejo de los *morphing aircraft*.

1.2.3. El problema de interacción fluido-estructura y modelos aeroelásticos

La tarea fundamental dentro del campo de la aeroelasticidad computacional es la simulación numérica de problemas de interacción fluido-estructura. La principal dificultad en estos problemas radica en la fuerte dependencia que existe entre las cargas aerodinámicas que actúan sobre un cuerpo flexible inmerso en una corriente de fluido, y la forma geométrica, velocidad, y aceleración del cuerpo (Bazilevs *et al.*, 2013). El modelado y tratamiento numérico para abordar este acoplamiento físico no resulta una tarea sencilla.

Los procedimientos numéricos para resolver un problema de interacción fluido estructura pueden ser ampliamente clasificados en dos enfoques principales: *enfoque monolítico* y *enfoque particionado* (Hou *et al.*, 2012; Heil *et al.*, 2008), mas recientemente llamado *co-simulación* (Kalmar-Nagy y Stanciulescu, 2014).

En el *enfoque monolítico*, la dinámica de la estructura y del fluido se tratan en una misma formulación matemática dando lugar en un único sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para el problema entero, el cual es resuelto simultáneamente por un algoritmo numérico unificado. Las condiciones de fronteras establecidas entre los dominios físicos se encuentran implícitas en el procedimiento de solución (Michler *et al.*, 2004; Ryzhakov *et al.*, 2010). En el *enfoque particionado*, la estructura y el fluido son considerados dos campos computacionales que pueden ser resueltos separadamente con su respectiva discretización y algoritmo numérico. Las condiciones de fronteras establecidas entre los dominios físicos son usadas explícitamente para pasar la información entre los algoritmos.

La principal motivación en la utilización del último enfoque es la ventaja de implementar códigos existentes ya validados, o quizás el desarrollo de nuevos códigos pero basados en métodos altamente especializados en cada área física. Para cada una de las disciplinas se puede usar la estrategia de solución que mejor se adapte. La estructura modular, inherente de los enfoques particionados, permite reemplazar los módulos individuales sin la necesidad de modificar la estructura general. Los diferentes modos de sincronizar la información en cada paso de tiempo entre los dos algoritmos numéricos junto con la forma de intercambio de información entre ellos, lleva a diferentes procedimientos para resolver el problema de interacción fluido-estructura.

Los códigos basados en un enfoque particionado habitualmente trabajan con diferentes discretizaciones (malla estructural, malla aerodinámica, etc) que son, en general, topológicamente distintas. Esto lleva a la necesidad de buscar una alternativa para el intercambio de información entre las diferentes mallas que componen el modelo discretizado.

Con respecto a problemas de interacción-fluido estructura, en la literatura se encuentran disponibles diversas técnicas para la transferencia de información entre la malla aerodinámica (*MA*) y la malla estructural (*ME*) (Brown, 1997; Cebal y Löhner, 1997; Farhat *et al.* 1998). Algunas de las técnicas que resulta interesante mencionar son los

métodos de elementos de contorno (Chen y Jadic, 1998), donde se utiliza un criterio físico para transferir la información, y las técnicas de interpolación basadas en Funciones de Base Radial o *RBFs* conocidas por su nombre en inglés; *Radial Basis Functions* (Beckert y Wendland, 2001; Rendall y Allen, 2007).

En general suele requerirse que el acoplamiento fluido-estructura (esto es la transferencia de información entre la *MA* y la *ME*) se establezca a través de relaciones lineales. La razón radica en que las relaciones no lineales introducen una mayor complejidad al problema multifísico, que la mayoría de las veces, resulta no lineal por naturaleza. Si bien existen técnicas de interpolación basadas en relaciones no lineales (Goura *et al.*, 2003), éstas poseen un gran número de inconvenientes no deseados desde un punto de vista computacional. Una detallada descripción de métodos para el intercambio de información entre mallas puede encontrarse en el trabajo de Maza (2013).

A continuación se realiza una breve descripción y revisión bibliográfica sobre funciones de base radial que son utilizadas para desarrollar la técnica de comunicación entre los modelos aerodinámico y estructural que componen el modelo aeroelástico que se presenta en este trabajo. Luego se realiza una revisión sobre los modelos aeroelásticos encontrados en la literatura para estudiar estos aspectos en *morphing wings*.

Interpolación mediante funciones de base radial

Las funciones de base radial (*RBFs*) se han convertido en una herramienta muy conocida para la interpolación de múltiples variables, tanto para datos estructurados como para no estructurados. La teoría general de *RBFs* puede encontrarse en los libros de Buhmann (2004) y Wendland (2005).

Una función radial $\phi(r)$ es una función continua, de una variable escalar, con un comportamiento radial respecto a un punto denominado centro, siendo r la distancia desde el centro hasta el punto donde se evalúa la función ϕ .

Un problema de interpolación multivariable general consiste en encontrar una función $s(\mathbf{x})$ a partir de valores conocidos de s en ciertos puntos (centros) \mathbf{x}_i para $i=1, \dots, N$.

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(r) + p(\mathbf{x}) \quad \text{siendo} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \quad (1.1)$$

donde N es el número de centros, ϕ es la forma de la función adoptada, \mathbf{x} es la posición de los puntos en el espacio tridimensional, \mathbf{x}_i son las posiciones de los centros, α_i son coeficientes cuyos valores deben ser determinados, y $p(\mathbf{x})$ es un polinomio donde su utilización es opcional (ver Rendall y Allen, 2007).

El problema se centra encontrar los coeficientes α_i que se determinan imponiendo que la función interpolante devuelva los valores conocidos $s(\mathbf{x}_i) = s_i$.

En la literatura existe una gran variedad de funciones de base radial que pueden utilizarse, y algunas de ellas se listan en la Tabla 1-1.

Tabla 1-1: Funciones de Base Radial.

| Nombre | Funciones Bases $\phi(r)$ |
|--------------------------------------|---|
| <i>Gaussian</i> | $e^{-\alpha r^2}$ |
| <i>Thin plate spline</i> | $r^2 \ln(r)$ |
| <i>Hardy's multiquadrics</i> | $(p_k^2 + r^2)^{1/2}$ |
| <i>Hardy's inverse multiquadrics</i> | $(p_k^2 + r^2)^{-1/2}$ |
| <i>Wendland's C⁰</i> | $(1-r)^2$ |
| <i>Wendland's C²</i> | $(1-r)^4 (4r+1)$ |
| <i>Euclid's Hat</i> | $\pi \left(\frac{r^3}{12} - r_s^2 r + \frac{4}{3} r_s^3 \right)$ |

Algunas funciones de base radial clásicas, las cuales han mostrado proveer buen comportamiento y que han sido ampliamente utilizadas para problemas en ingeniería son las funciones de Duchon (1977) o también llamadas *Thin-Plate Splines* y las funciones de Hardy (1971) denominadas *multiquadrics*. Estas son funciones de base creciente, lo que implica que aumentan su valor junto con la distancia al centro r . Esto hace que los valores de los centros \mathbf{x}_i más alejados del punto \mathbf{x} tengan más influencia sobre la función $s(\mathbf{x})$. Por otro lado se encuentran las funciones de base decreciente, las

cuales tienen un comportamiento inverso a las funciones de base creciente, es decir que disminuyen su valor a medida que r crece; los centros \mathbf{x}_i en las cercanías del punto \mathbf{x} tienen más influencias sobre la función $s(\mathbf{x})$ que aquellos que se encuentran lejos de \mathbf{x} . La función conocida como *inverse multiquadric* (Beckert y Wendland, 2001) y la función de *Gauss* son funciones del tipo de base decreciente.

Con respecto al problema de interacción fluido-estructura, muy poco se conoce sobre los criterios que permitan seleccionar una *RBF* apropiada para este tipo de problema. No obstante se sugiere utilizar funciones de base decreciente en lugar de funciones de base creciente. La razón se debe a que las funciones de base decreciente permiten una transferencia de fuerza en un sentido local, lo que se corresponde mejor con la física del problema (Rendall y Allen, 2007).

La utilización de funciones de soporte compacto permite reducir aún más la influencia de fuerzas de puntos lejanos, localizando mejor la interpolación y reduciendo el número de elementos no nulos en las matrices de interpolación. Dentro de este grupo podemos citar la función *Euclid's Hat* y el conjunto de funciones de soporte compacto introducidas por Wendland (1996, 1995) para el caso bi- o tridimensional, requiriendo continuidad C^0 y C^2 .

Modelos aeroelásticos en morphing wings

El modelado de alas *morphing* ha despertado gran interés, y actualmente presenta grandes desafíos para los investigadores e ingenieros que intentan predecir de manera confiable el comportamiento aeroelástico de estos avanzados UAVs.

Los principales problemas que se han abordado sobre el aspecto aeroelástico están orientados al estudio del comportamiento de inestabilidades estáticas (Bae *et al.*, 2004; Thwapiah y Campanile, 2010) y dinámicas (Liska y Dowell, 2009; Wang *et al.*, 2012a) que se presentan en cada una de las configuraciones que puede adquirir el ala, y por otro lado la respuesta aeroelástica del ala durante el proceso de cambio de forma (Matsuzaki y Torii, 2012). Cada una de las estrategias de reconfiguración alar debe ser estudiada en detalle con el fin de lograr una comprensión cabal de los fenómenos aeroelásticos asociados.

Bae *et al.* (2005) desarrollaron un modelo para estudiar las inestabilidades estáticas (divergencia) de un concepto de envergadura variable. Implementaron un método de dobletes híbrido (Bae *et al.*, 2002) para computar las cargas aerodinámicas y desarrollaron un modelo estructural en MSC/NASTRAN. Por medio de un análisis aerodinámico concluyeron que el incremento en la envergadura reduce considerablemente la resistencia inducida y la distribución de sustentación a lo largo del ala. Por otro lado, desde un punto de vista aeroelástico, el equipo de Bae mostró que el incremento en la envergadura aumenta la flexibilidad del ala favoreciendo la producción de grandes deformaciones; hecho que pone de manifiesto la importancia de considerar los fenómenos aeroelásticos a la hora de diseñar aeronaves basadas en el concepto *morphing*.

De Breuker *et al.* (2007), presentaron el desarrollo de un código de análisis aeroelástico para la predicción de divergencia, y llevaron a cabo estudios sobre un modelo *morphing wings* que incluye los actuadores que modifican la forma del ala. El código integra un modelo de viga corotacional (3D) con un modelo aerodinámico basado en la teoría de la línea sustentadora de Prandtl. Los actuadores se tienen en cuenta al aplicar momentos en los nodos de las vigas. El modelo estructural y el modelo aerodinámico utilizan la misma discretización espacial, y por lo tanto no se requiere de ningún método de transferencia de información; las fuerzas y desplazamientos se transfieren directamente.

Otro concepto que ha recibido gran atención por parte de la comunidad científica es el concepto *folding-wing* (Yue *et al.*, 2009).

Liska y Dowell (2009) desarrollaron un modelo aeroelástico y una metodología de solución analítica para identificar inestabilidades aeroelásticas (divergencia y *flutter*) asociadas al concepto *folding wings*. El ala es modelada mediante dos segmentos, y se utiliza la teoría de fajas (*strip theory*) para predecir las fuerzas aerodinámicas considerando tres modelos lineales subsónicos: estacionario, cuasi-estacionario y completamente inestacionario. La comparación de la velocidad y modos de *flutter* entre los modelos mostró la sensibilidad del comportamiento aeroelástico a los efectos inestacionarios.

Wang y Dowell (2011), en una primera etapa, desarrollaron un modelo para describir la dinámica estructural de un concepto *folded wings* donde el ala es modelada mediante un número arbitrario de segmentos. Las ecuaciones de movimiento fueron desarrolladas a través de las ecuaciones de Lagrange (incluyendo multiplicadores de Lagrange) y realizaron una reducción de orden del sistema dinámico expandiendo la solución en la base modal (modos de la estructura). En una segunda etapa (Wang *et al.*, 2012), utilizaron el modelo estructural antes mencionado para desarrollar un modelo aeroelástico que implementa la teoría de fajas al igual que Liska y Dowell (2009). El modelo fue validado con datos experimentales y, además de mostrar que puede captar la física esencial del problema, permitió comprender el comportamiento aeroelástico en términos de los ángulos que describen la reconfiguración del ala (*fold angle*).

En una siguiente etapa Wang *et al.* (2013) utilizaron una versión del VLM en combinación con un paquete de elementos finitos disponible en el software ANSYS, para desarrollar un modelo aeroelástico y con ello predecir la aparición de *flutter* en el concepto *folded wings*. Los resultados fueron comparados con aquellos obtenidos previamente por Wang (Wang *et al.*, 2012) demostrando la mejora en la predicción al utilizar el VLM. Sin embargo, la tendencia en el comportamiento aeroelástico se predice con un error aceptable utilizando la teoría de fajas.

Zhao y Hu (2012) desarrollaron un modelo aeroelástico parametrizado para el concepto *folded wing* en el cual los ángulos de plegado (ángulos de diedro) y la rigidez de las visagras son consideradas como parámetros variables. En este modelo las matrices asociadas a las subestructuras del ala (cada una de las partes que constituye el ala) son computadas una sola vez. La estructura se modeló como una placa discretizada mediante elementos finitos de cuatro nodos CQUAD4 en el programa NASTRAN, y las cargas aerodinámicas se computaron por medio del método de dobletes o DLM (Doublet Lattice Method). Zhao y Hu (2013), desarrollaron las ecuaciones que gobiernan la dinámica el proceso de cambio de forma del mismo modelo *folded wing*, para investigar la respuesta estructural en procesos de mutación lentos y rápidos. El modelo resulta adecuado para integrarlo a códigos de CFD con el fin de desarrollar simulaciones aeroelásticas del proceso de reconfiguración alar.

Shrestha *et al.* (2013) condujeron un estudio sobre el concepto *folding wing* para examinar los efectos en el cambio del ángulo de plegado sobre la velocidad y frecuencia de *flutter*. Utilizaron el DLM para modelar las cargas aerodinámicas y el método *p-k* para predecir el comportamiento de *flutter*. Sus resultados mostraron que el fenómeno de *flutter* está fuertemente influenciado por los cambios en los ángulos de plegado.

1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis de Doctorado es investigar el comportamiento aerodinámico y aeroelástico asociado a vehículos aéreos no tripulados con alas que cambian de forma. Este objetivo, que es verdaderamente general, se materializa a través del desarrollo y posterior utilización de herramientas computacionales robustas y altamente confiables, con las cuales se pueden llevar a cabo simulaciones numéricas. Es evidente que el desarrollo de los métodos requeridos para modelar y controlar un vehículo de esta clase, promueven un mejor entendimiento de los fenómenos dinámicos inestacionarios y no lineales involucrados, y proveen los fundamentos necesarios para el diseño de futuras generaciones de aeronaves basadas en el paradigma de diseño *morphing*.

Los objetivos específicos más importantes son:

- modificar un modelo aerodinámico ya existente basado en el método de red de vórtices no lineal e inestacionario para predecir las cargas aerodinámicas que actúan sobre alas *morphing* inspiradas en la biología durante el proceso de reconfiguración alar.
- desarrollar un modelo aeroelástico, para alas reconfigurables, que permita predecir las inestabilidades dinámicas (*flutter*) que surgen de la interacción entre la estructura elástica de las alas *morphing* y el fluido que las rodea.
- llevar a cabo estudios de aerodinámica y aeroelasticidad computacional sobre un modelo de ala reconfigurable con el fin de comprender el comportamiento aeroelástico y aerodinámico del concepto en estudio.

1.4. Aspectos originales de este trabajo

Los aportes originales que resultaron del desarrollo de este trabajo de tesis se resumen a continuación:

- Un modelo cinemático no-lineal asociado al concepto *folding wing* que permite describir el proceso de los grandes cambios de forma de la planta alar; su generalidad permite tratar diferentes cinemáticas prescritas en las reconfigurables.
- Un modelo aerodinámico no lineal e inestacionario para alas inspiradas en la biología, cuya geometría es generada a través de parámetros morfológicos de alas de gaviotas.
- Un modelo estructural para alas reconfigurables, cuyo “esqueleto estructural” es constituido por las diferentes subestructuras asociadas a las partes del ala plegable (*folding wing*).
- Un modelo aeroelástico no lineal basado en la combinación en los modelos estructural y aerodinámico mencionados anteriormente, apropiado para el estudio del comportamiento aeroelástico de alas reconfigurables.
- Formulación y desarrollo de una técnica de transferencia de información entre el método de red de vórtices inestacionario y el método de los elementos finitos. Esto se consigue a través de técnicas de interpolación basadas en Funciones de Base Radial o RBFs (*Radial Bases Functions*).
- Una herramienta numérica cuyo código fue escrito en el lenguaje Fortran 90. En este código, que tiene una organización modular, se han implementado las formulaciones presentadas en este trabajo de tesis.
- Las simulaciones numéricas aquí desarrolladas predicen: *i*) la aparición de *flutter*, y además la respuesta aeroelástica a velocidades sub-críticas y súper-críticas para las alas reconfigurables, y *ii*) las cargas aerodinámicas inestacionarias durante el proceso de reconfiguración alar. Estos tipos de simulaciones resultan necesarias para los diseñadores de UAVs con alas reconfigurables.

1.5. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se presenta y desarrolla el modelo cinemático asociado al concepto *folding wing*. Este capítulo incluye la geometría del ala bioinspirada y las ecuaciones cinemáticas que serán utilizadas para estudiar el proceso de cambio de forma del modelo de ala reconfigurable. En el Capítulo 3 se describe el modelo aerodinámico adoptado en este trabajo de tesis. En el Capítulo 4 se describe el modelo estructural que es acoplado con el modelo aerodinámico para obtener el modelo aeroelástico. El Capítulo 5 contiene la descripción del esquema de integración numérica y de la estrategia para llevar a cabo el acoplamiento entre los modelos aerodinámico y estructural. En el Capítulo 6 se presentan los resultados de las simulaciones numéricas. En el Capítulo 7 se exponen las conclusiones y las recomendaciones para trabajos futuros. Este trabajo incluye además un anexo (Anexo A) donde se presenta una lista de las publicaciones realizadas por el autor relacionadas con la temática de esta tesis. Finalmente, las referencias son listadas en orden alfabético.

Capítulo 2

Modelo cinemático

2.1. Generalidades

Parte de la investigación propuesta en este trabajo de tesis está dirigida al desarrollo y estudio de un concepto *morphing wing* inspirado en la biología. En este Capítulo se describen los aspectos geométricos y el modelo cinemático asociado al concepto antes mencionado.

La forma geométrica del modelo computacional está inspirada en el ala real de un ave, y por otro lado, la estrategia adoptada para cambiar la forma del ala está basada en un mecanismo que es comúnmente observado en el vuelo de las gaviotas; denominado en la literatura como *foldwing wing*.

Como se mencionó en el Capítulo 1, las técnicas o métodos para cambiar las formas de las alas se fundan en la variación de ciertos parámetros que caracterizan su geometría. En el concepto *foldwing wing* estos parámetros son los ángulos de diedro asociados a cada una de las partes que componen el ala; denominados en este trabajo “parámetros de configuración”. Los parámetros pueden o no depender del tiempo. Si sobre ellos se prescribe una variación temporal, la geometría del ala también experimentará una variación en el tiempo.

Es importante mencionar que en este trabajo de tesis se abordan esencialmente dos estudios diferentes: *i*) un análisis aerodinámico de alas *morphing* durante el proceso de reconfiguración (con parámetros de configuración dependientes del tiempo); y *ii*) un análisis aeroelástico del modelo *folding wing* (con parámetros de configuración no dependientes del tiempo).

Este Capítulo se divide en dos partes. En la Sección 2.2 se define la geometría del ala en estudio, y en la Sección 2.3 se desarrolla el modelo cinemático que permite describir el cambio de forma del ala durante el proceso de reconfiguración.

2.2. Geometría del ala inspirada en la biología

Como se ha mencionado anteriormente, tanto la geometría del ala *morphing* como el mecanismo utilizado para cambiar su forma están inspirados en la biología. La geometría considerada para el modelo *morphing wing* preserva ciertos parámetros morfológicos de las alas de un ave; la gaviota argéntea o *herring gull* (*Larus Argentatus*). Estos datos son extraídos de información documentada en la literatura (Tennekes, 2009) y se resumen en la Tabla 2-1.

Tabla 2-1: datos utilizados en el modelo

| Parámetro | Valor | Fuente |
|-----------------------------|----------------------|---------------------|
| Envergadura (b) | 1.34 m | Tennekes (2009) |
| Area (S) | 0.197 m ² | Tennekes (2009) |
| Cuerda media (c_m) | 0.147 m | Calculada (S/b) |
| Cuerda en la raíz (c_r) | 0.177 m | Tennekes (2009) |

Para definir la geometría del modelo se utiliza un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal (x, y, z). Primero, se obtienen las coordenadas de los puntos discretos (x_{le}, y_{le}) y (x_{te}, y_{te}) que corresponden al borde de ataque y al borde de fuga del ala respectivamente. Esto se realiza a partir de la geometría de un ala real de una gaviota (ver Figura 2-1a y 2-1b). Una vez conocidos estos puntos se utiliza la técnica de interpolación *spline* cúbica con condiciones de borde *not-a-knot* con el fin de obtener expresiones analíticas para las curvas que describen el borde de ataque $x = LE(y)$ y el borde de fuga $x = TE(y)$. Luego, la cuerda del ala, que varía con la coordenada y , se determina a través del conocimiento de $LE(y)$ y de $TE(y)$ de la siguiente manera

$$c(y) = LE(y) - TE(y) \quad (2.1)$$

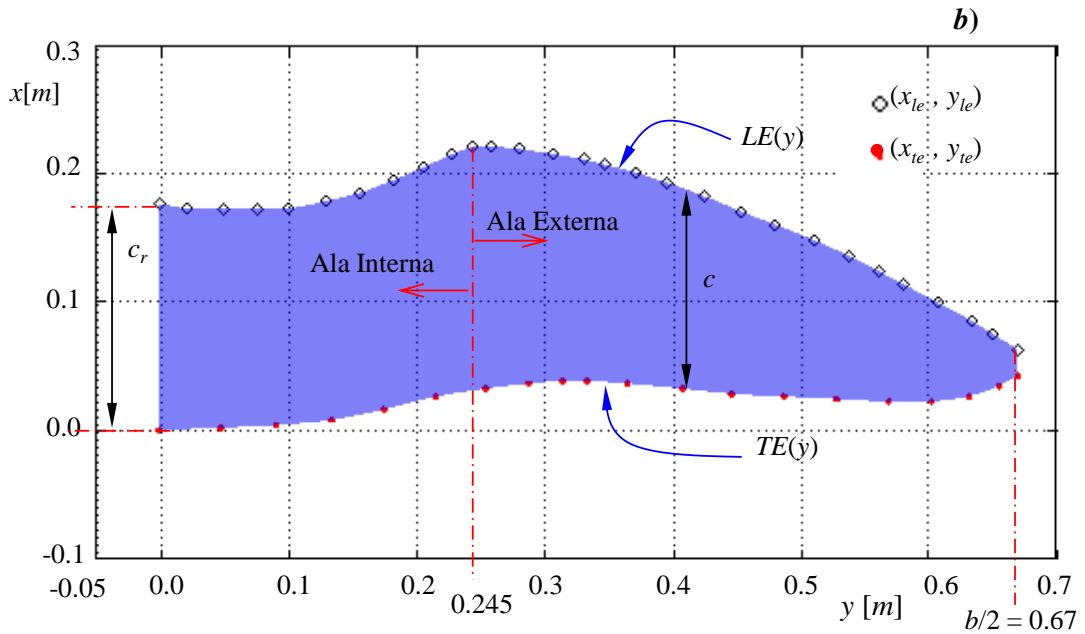


Figura 2-1: a) Ala de una gaviota real (SEANET Blog, 2010). b) Geometría del ala bioinspirada.

El modelo computacional se completa mediante datos experimentales del perfil alar de una gaviota que fueron obtenidos y publicados por Liu *et al.* (2006). Este perfil se genera a través de la combadura del ala y la distribución de espesor. Debido a que el ala es modelada aerodinámicamente como una superficie sin espesor, solo se considera la línea de curvatura media del perfil (Figura 2-2), la cual puede expresarse matemáticamente como:

$$\frac{z}{c} = -\frac{z_m}{c} \lambda (1-\lambda) \sum_{m=1}^3 S_m (1-2\lambda)^{m-1} \quad (2.2)$$

donde los valores de los coeficientes son $S_1=3.874$, $S_2 = -0.807$ and $S_3 = 0.771$, y z_m es la combadura máxima local del perfil que se calcula mediante la expresión:

$$\frac{z_m}{c} = \frac{0.14}{1+1.333\xi^{1.4}} \quad (2.3)$$

Las variables λ and ξ se definen en el rango $0 \leq \lambda, \xi \leq 1$ por medio de,

$$\xi = \frac{2y}{b} \quad \lambda = \frac{x - TE}{c} \quad (2.4)$$

Como se puede observar en la Figura 2-1b, el ala es dividida en dos partes, el Ala Interna (AI) y el Ala Externa (AE).

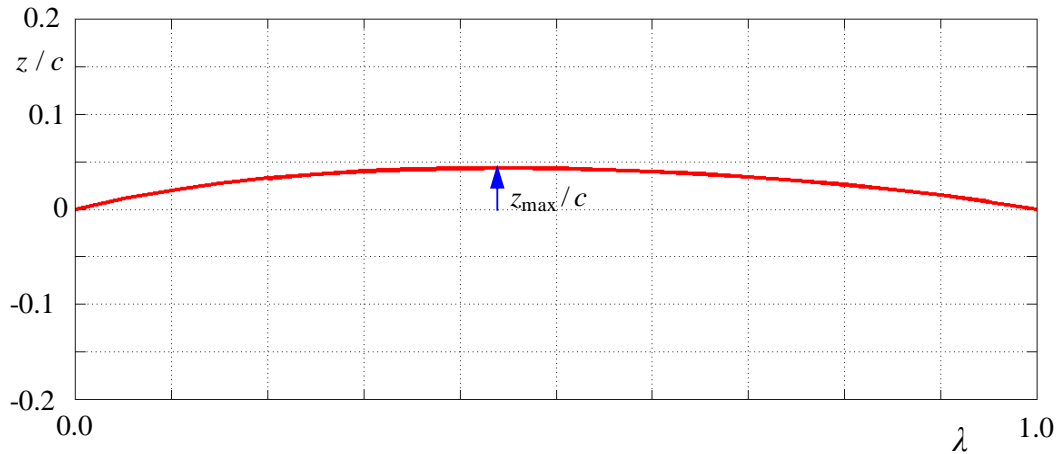


Figura 2-2: Línea de curvatura media en la raíz del ala.

2.3. Cinemática del concepto *folding wing*

En esta sección se desarrollan las ecuaciones que permiten determinar la posición y velocidad de un punto arbitrario sobre el ala. Debido a que el movimiento de reconfiguración alar es simétrico con respecto al plano xz la descripción cinemática solo se realiza para el ala derecha.

Antes de comenzar con el desarrollo de la cinemática es necesario tener en cuenta la línea de curvatura en la raíz del ala que se denomina línea central, y resulta de la intersección entre el ala derecha y el ala izquierda. Esta línea contenida en el plano de simetría xz es importante debido a que en el proceso de reconfiguración permanece fija, y una de las partes de las alas (el Ala Interna) se mueve con respecto a ella.

El Ala Interna y el Ala Externa están conectadas y pueden moverse una respecto de la otra. El movimiento del AI se describe mediante el ángulo de diedro θ_B y el movimiento del AE se describe mediante el ángulo de diedro θ_C (ver Figura 2-3). Para facilitar la descripción matemática del modelo se considera la diferencia entre los ángulos θ_C y θ_B denotada por $\theta_{BC} = \theta_C - \theta_B$.

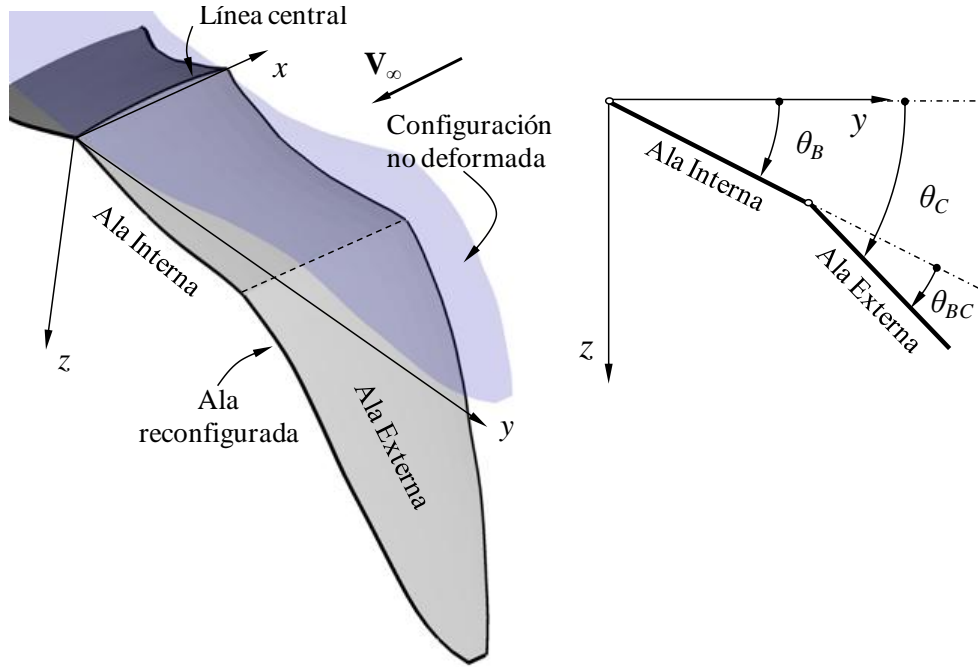


Figura 2-3: Ala derecha del modelo *folding wing* - Ángulos de diedro.

Los parámetros de configuración θ_B y θ_C (o ángulos de diedro) pueden asumir cualquier variación en el tiempo, sin embargo para estudiar el comportamiento aerodinámico durante el proceso de reconfiguración se implementa una variación temporal basada en el trabajo de Zhao y Hu (2011), la cual es utilizada para llevar a cabo estudios sobre el concepto propuesto por Lockheed Martin. Esta variación es descrita mediante las siguientes expresiones

$$\theta_B(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq T_I \\ \theta_B^S \left[\frac{t-T_I}{(T_S-T_I)} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_S-T_I}(t-T_I)\right) \right] & T_I < t \leq T_S \\ \theta_B^S & T_S < t \leq T_F \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\theta_C(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq T_I \\ \theta_C^S \left[\frac{t-T_I}{(T_S-T_I)} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_S-T_I}(t-T_I)\right) \right] & T_I < t \leq T_S \\ \theta_C^S & T_S < t \leq T_F \end{cases}$$

donde T_I es el instante de tiempo en el que el ala comienza a cambiar de forma, T_S es el tiempo en el que el ala finaliza la reconfiguración y T_F es el tiempo final de la simulación. θ_B^S y θ_C^S son respectivamente los parámetros de configuración asociados al Ala Interna y al Ala Externa cuando se ha alcanzado el tiempo T_S .

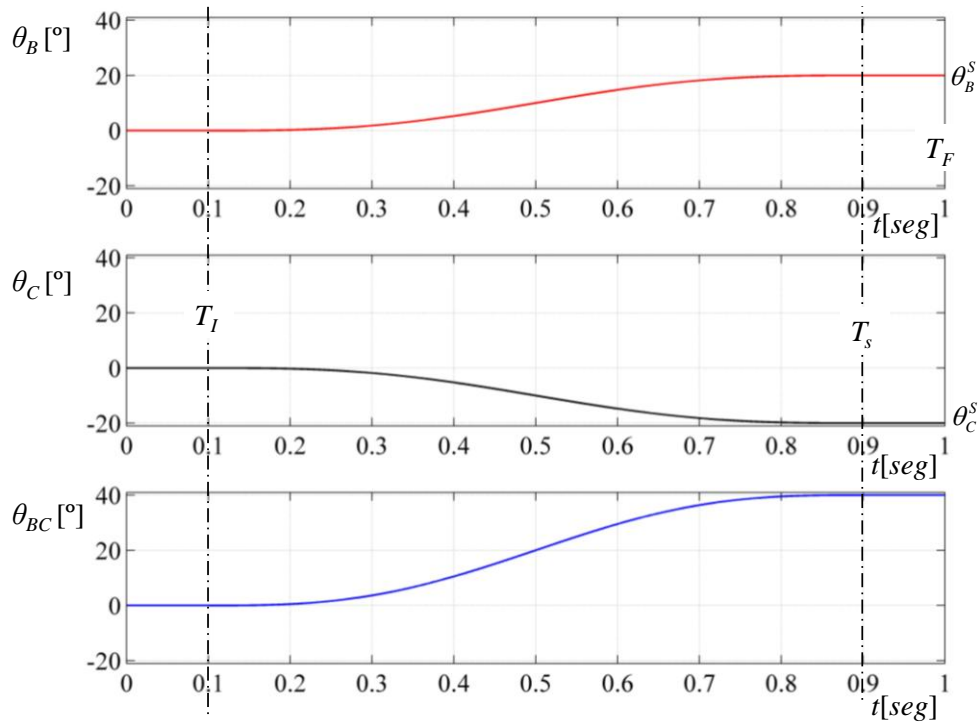


Figura 2-4: Variación temporal de los ángulos θ_B , θ_C y θ_{BC} .

A modo de ejemplo, la variación temporal de los ángulos $\theta_B(t)$ y $\theta_C(t)$ dados por la expresión (2.5) y la diferencia entre ellos, θ_{BC} , se presentan en la Figura 2-4 ($T_I = 0.1$, $T_S = 0.9$ y $T_F = 1$; $\theta_B^S = 20^\circ$ y $\theta_C^S = -20^\circ$). De la Figura 2-4 es claro que el ala se mantiene completamente extendida ($\theta_B = \theta_C = 0^\circ$) hasta alcanzar el tiempo T_I ; punto a partir del cual comienza el proceso de reconfiguración mediante la variación de los ángulos de diedro. Este proceso continúa hasta alcanzar el tiempo T_S donde el ala adquiere la configuración final. A partir de este punto el ala no experimenta ningún cambio de forma hasta el tiempo T_F en que finaliza la simulación.

2.3.1. Sistemas de referencias y transformación de coordenadas

Para desarrollar el modelo cinemático se introducen 4 sistemas de referencia que serán de utilidad para facilitar la descripción matemática y su disposición se muestra en la Figura 2-5.

El sistema de referencia **A** está fijo al plano vertical, contiene la línea central y tiene asociado una base (\mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3). La base correspondiente al sistema **A** tiene asociada, además, el conjunto de coordenadas (x , y , z) definidas previamente para describir la geometría del ala. El segundo marco de referencia, **B**, se encuentra fijo al Ala Interna (AI)

y tiene asociado una base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. El tercer marco, **C**, está fija al Ala Externa (AE) y tiene asociado una base $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$. Por último, el sistema inercial o Newtoniano **N** tiene asociado una terna $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$. Los vectores unitarios \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i , \mathbf{c}_i y \mathbf{n}_i conforman bases ortonormales y dextrógiras (satisfacen la regla de la mano derecha). El origen del sistema **B** está localizado en el plano xz , y el vector \mathbf{b}_1 coincide con el vector \mathbf{a}_1 para todo instante de tiempo. El origen del sistema **C** está ubicado en la intersección entre el AE y el AI, y además el vector \mathbf{c}_1 es paralelo al vector \mathbf{b}_1 . El sistema inercial **N** está ubicado de tal manera que \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 se encuentran en un plano horizontal y \mathbf{n}_1 apunta en la dirección de vuelo (o lo que es lo mismo es coincidente con la dirección de la corriente libre), el vector \mathbf{n}_3 apunta hacia abajo.

La orientación del sistema **A** con respecto al sistema inercial **N** consiste de una rotación del sistema **A** alrededor de \mathbf{n}_2 a través del ángulo de ataque α . La orientación del sistema **B** con respecto al sistema **A** consiste de una rotación del sistema **A** alrededor de \mathbf{a}_1 a través del ángulo θ_B . La orientación del sistema **C** con respecto al sistema **B** consiste de una rotación del sistema **C** con respecto a un eje paralelo a \mathbf{b}_1 a través del ángulo θ_{BC} .

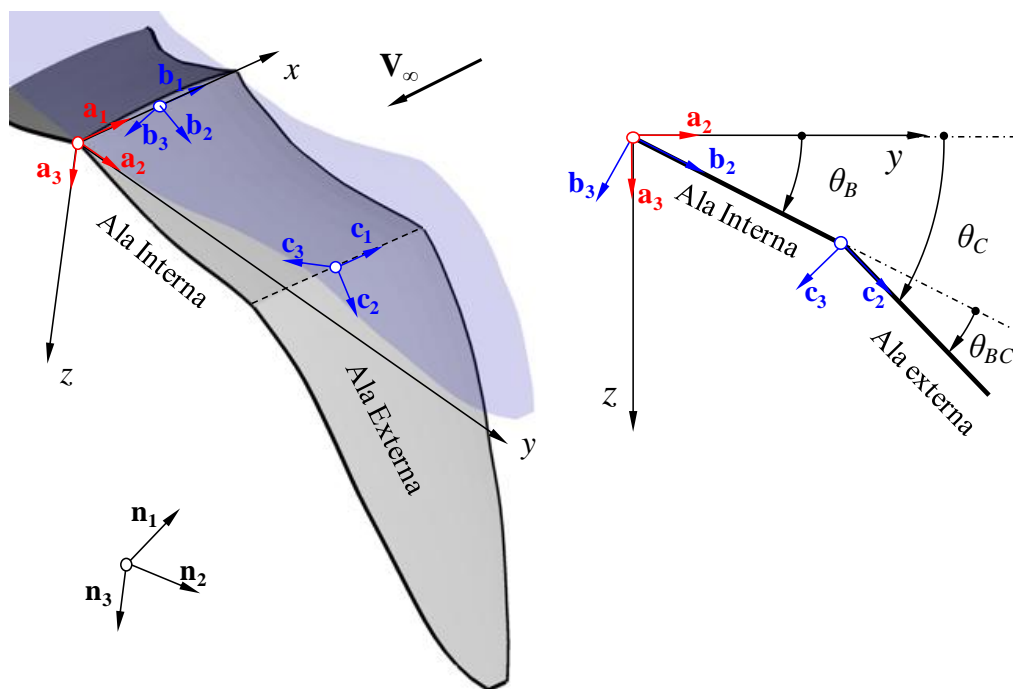


Figura 2-5: Sistemas de referencias.

El procedimiento de orientación de cada sistema de referencia mencionado anteriormente se expresa matemáticamente a través de las siguientes matrices de rotación,

$$[\mathbf{T}_{NA}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[\mathbf{T}_{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_B & -\sin \theta_B \\ 0 & \sin \theta_B & \cos \theta_B \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[\mathbf{T}_{BC}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{BC} & -\sin \theta_{BC} \\ 0 & \sin \theta_{BC} & \cos \theta_{BC} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

donde $[\mathbf{T}_{NA}]$, $[\mathbf{T}_{AB}]$ y $[\mathbf{T}_{BC}]$ son, respectivamente, las matrices de rotación que orientan el sistema **A** con respecto al **N**, el sistema **B** con respecto al **A**, y el sistema **C** con respecto al **B**.

Dadas las componentes de un vector \mathbf{L}_0 en el sistema **A**, se pueden expresar en **N** por medio de la siguiente fórmula de cambio de base,

$$\{\mathbf{L}_0\}_N = [\mathbf{T}_{NA}]\{\mathbf{L}_0\}_A. \quad (2.9)$$

Similarmente, si las componentes del vector \mathbf{L}_0 están dadas en el sistema **B** (**C**), éstas se pueden expresar en **A** (**B**), como,

$$\{\mathbf{L}_0\}_A = [\mathbf{T}_{AB}]\{\mathbf{L}_0\}_B \quad (2.10)$$

$$\{\mathbf{L}_0\}_B = [\mathbf{T}_{BC}]\{\mathbf{L}_0\}_C \quad (2.11)$$

Reemplazando (2.10) en (2.9),

$$\{\mathbf{L}_0\}_N = [\mathbf{T}_{NA}][\mathbf{T}_{AB}]\{\mathbf{L}_0\}_B, \quad (2.12)$$

se encuentra la matriz de rotación del sistema **B** al **N**, $[\mathbf{T}_{NB}]$, la cual se expresa matemáticamente como el siguiente producto matricial

$$[\mathbf{T}_{NB}] = [\mathbf{T}_{NA}][\mathbf{T}_{AB}]. \quad (2.13)$$

Finalmente, reemplazando (2.11) en (2.12) se tiene

$$\{\mathbf{L}_0\}_N = [\mathbf{T}_{NA}][\mathbf{T}_{AB}][\mathbf{T}_{BC}]\{\mathbf{L}_0\}_C, \quad (2.14)$$

donde la matriz de rotación del sistema **C** al **N**, $[\mathbf{T}_{NC}]$, se computa por medio del siguiente producto matricial

$$[\mathbf{T}_{NC}] = [\mathbf{T}_{NA}][\mathbf{T}_{AB}][\mathbf{T}_{BC}] \quad (2.15)$$

2.3.2. Posición y velocidad de un punto arbitrario sobre el ala

El vector posición respecto del sistema inercial **N** de un punto genérico p ubicado sobre la parte externa del ala (Figura 2-6), \mathbf{R}_p , está dado por,

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_{NA} + \mathbf{R}_{AB} + \mathbf{R}_{BC} + \mathbf{r}_p, \quad (2.16)$$

donde \mathbf{R}_{NA} es el vector posición del origen del sistema de referencia **A** respecto del **N**, \mathbf{R}_{AB} es el vector posición del origen del sistema de referencia **B** respecto del **A**, \mathbf{R}_{BC} es el vector posición del origen del sistema de referencia **C** respecto del **B**, y \mathbf{r}_p es el vector posición del punto arbitrario p respecto del sistema **C**, (ver Figura 2-6).

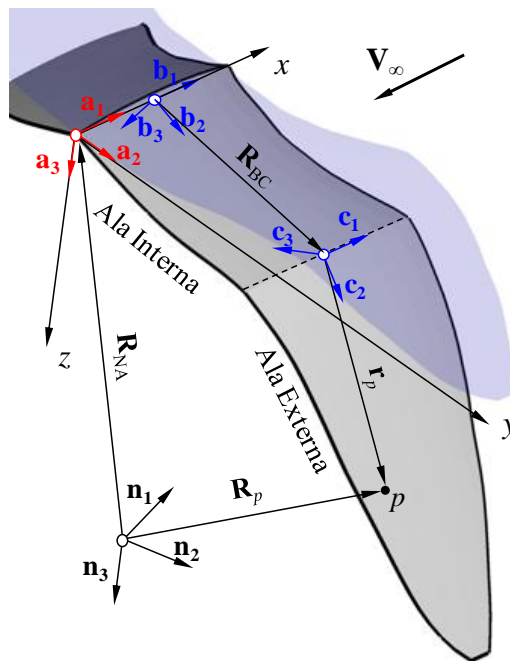


Figura 2-6: Descripción del mecanismo *folding wing* - Ángulos de diedro.

Las componentes del vector \mathbf{R}_p pueden ser expresadas en el sistema **N** como

$$\{\mathbf{R}_p\}_N = \{\mathbf{R}_{NA}\}_N + [\mathbf{T}_{NA}]\{\mathbf{R}_{AB}\}_A + [\mathbf{T}_{NB}]\{\mathbf{R}_{BC}\}_B + [\mathbf{T}_{NC}]\{\mathbf{r}_p\}_C, \quad (2.17)$$

donde los subíndices N, A, B, C denotan la base en la cual se expresan las componentes de un vector.

Por otro lado, el vector velocidad de p referido a \mathbf{N} , ${}^N\mathbf{V}_p$, se obtiene mediante la derivada temporal del vector posición, \mathbf{R}_p , realizada por un observador en \mathbf{N} . Esto es:

$${}^N\mathbf{V}_p = \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{R}_p. \quad (2.18)$$

Aplicando el operador derivada definido en (2.18) a la ecuación (2.16), se tiene

$${}^N\mathbf{V}_p = \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{R}_{NA} + \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{R}_{AB} + \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{R}_{BC} + \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{r}_p. \quad (2.19)$$

Las derivadas temporales del miembro derecho de (2.19) se obtienen utilizando el teorema del transporte (Baruh, 1999), es decir

$$\begin{aligned} \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{R}_{AB} &= \frac{{}^A d}{dt} \mathbf{R}_{AB} + {}^N\boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{R}_{AB} \\ \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{R}_{BC} &= \frac{{}^B d}{dt} \mathbf{R}_{BC} + {}^N\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{R}_{BC} \\ \frac{{}^N d}{dt} \mathbf{r}_p &= \frac{{}^C d}{dt} \mathbf{r}_p + {}^N\boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}_p, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde, los vectores velocidades angulares de los sistemas \mathbf{A} , \mathbf{B} , y \mathbf{C} respecto del marco inercial \mathbf{N} (${}^N\boldsymbol{\omega}^A$, ${}^N\boldsymbol{\omega}^B$, ${}^N\boldsymbol{\omega}^C$) se computan mediante el teorema de adición

$${}^N\boldsymbol{\omega}^B = {}^N\boldsymbol{\omega}^A + {}^A\boldsymbol{\omega}^B \quad {}^N\boldsymbol{\omega}^C = {}^N\boldsymbol{\omega}^A + {}^A\boldsymbol{\omega}^B + {}^B\boldsymbol{\omega}^C. \quad (2.21)$$

Para cada una de las rotaciones involucradas en la orientación del marco de referencia \mathbf{C} respecto del marco \mathbf{N} se puede definir una velocidad angular simple alrededor de los vectores unitarios \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_1 y \mathbf{c}_1 como

$${}^N\boldsymbol{\omega}^A = \dot{\alpha} \mathbf{a}_2; \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^B = \dot{\theta}_B \mathbf{b}_1; \quad {}^B\boldsymbol{\omega}^C = \dot{\theta}_{BC} \mathbf{c}_1 \quad (2.22)$$

donde el punto sobre la variable indica derivada con respecto al tiempo, y $\dot{\alpha}(t)$, $\dot{\theta}_B(t)$ y $\dot{\theta}_{BC}(t)$ son las derivadas temporales de $\alpha(t)$, $\theta_B(t)$, y $\theta_{BC}(t)$. Debido a que los vectores \mathbf{R}_{AB} , \mathbf{R}_{BC} and \mathbf{r}_p están fijos a los sistemas \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} respectivamente, sus derivas temporales con respecto a estos sistemas es cero. Además, si el ángulo de ataque no varía en el tiempo, se tiene que ${}^N\boldsymbol{\omega}^A = \mathbf{0}$. Finalmente, luego de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene la expresión para el vector velocidad del punto p respecto del marco \mathbf{N} ,

$${}^N \mathbf{V}_p = {}^N \mathbf{V}_A + {}^N \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{R}_{BC} + {}^N \boldsymbol{\omega}^C \times \mathbf{r}_p \quad (2.23)$$

donde ${}^N \mathbf{V}_A$ es la velocidad lineal del origen del sistema **A** respecto del sistema **N**. La velocidad del punto p se puede expresar en el sistema **N** como,

$$\left\{ {}^N \mathbf{V}_p \right\}_N = \left\{ {}^N \mathbf{V}_A \right\}_N + [\mathbf{T}_{NB}] \left(\left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}^B \right\}_B \times \left\{ \mathbf{R}_{BC} \right\}_B \right) + [\mathbf{T}_{NC}] \left(\left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}^C \right\}_C \times \left\{ \mathbf{r}_p \right\}_C \right) \quad (2.24)$$

Las ecuaciones cinemáticas se desarrollaron únicamente para el ala externa. La posición y velocidad para un punto ubicado en Ala Interna se obtienen siguiendo el mismo procedimiento.

Capítulo 3

Modelo aerodinámico

3.1. Generalidades

Como se ha fundamentado en el primer Capítulo de este trabajo, con el fin de buscar una solución de compromiso entre fidelidad y bajo costo computacional, se implementa una versión extendida del conocido Método de Red de Vórtices (*Vortex Lattice Method*) ampliamente utilizado en el cálculo de flujos estacionarios. Esta versión denominada Método de Red de Vórtices Inestacionario o UVLM (*Unsteady Vortex Lattice Method*) es una técnica de la dinámica de fluidos que permite predecir, en el dominio del tiempo, las cargas aerodinámicas que actúan sobre superficies sustentadoras.

El UVLM puede ser aplicado tanto a flujos bidimensionales como tridimensionales alrededor de cuerpos sustentadores o no-sustentadores, y además no tiene limitaciones en cuanto a la forma de las superficies, combadura, alabeo, ángulo de ataque, etc. La superficie del cuerpo puede sufrir cualquier tipo de deformaciones en el tiempo y el cuerpo puede ejecutar cualquier tipo de maniobras (Konstadinopoulos *et al.*, 1981). La única restricción del método es que la separación del flujo ocurre en los bordes afilados y que el desprendimiento vorticoso no se produce sobre la superficie del cuerpo. El fluido es considerado incompresible e irrotacional en todo el dominio fluido excepto en una delgada región adyacente al ala (capa límite) y en las estelas. La idea del UVLM

consiste en representar a la capa límite y a las estelas mediante sábanas vorticosas discretizadas mediante anillos vorticosos.

En la primera parte de este Capítulo se presentan las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del fluido y las condiciones de bordes asociadas al problema aquí tratado. Luego se presenta la ecuación (ley de Biot-Savart) que permite obtener el campo de velocidad asociado al campo de vorticidad, y a continuación, se describe el UVLM, que incluye la discretización de las sábanas vórticosas y el proceso para obtener la solución en el dominio del tiempo (circulaciones alrededor de estas sábanas). Finalmente se presenta la formulación para calcular las cargas aerodinámicas que actúan sobre las alas de los UAVs reconfigurables a través de la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli.

3.2. El problema matemático

Como resultado del movimiento relativo entre el ala de un avión y el aire, se genera vorticidad en una región adyacente al ala, denominada capa límite. Esta vorticidad, se desprende desde los bordes filosos del ala (borde de fuga y puntas de ala), y es transportada por el fluido hacia su seno para formar las estelas. En el modelo aquí utilizado se restringe toda la vorticidad del fluido a la capa límite y a las estelas, y se considera que el flujo es irrotacional fuera de estas regiones. La capa límite y las estelas son modeladas mediante superficies con vorticidad concentrada denominadas sábanas vorticosas (ver Figura 3-1). La capa límite se representa mediante sábanas vorticosas adheridas a la planta alar, S_B . Debido a que el ala se modela utilizando perfiles alares delgados, una única sábana representa a las capas límites que se encuentran sobre el extradós e intradós del perfil. La posición espacial de la sábana vorticiosa adherida está especificada por la posición prescripta del ala, en consecuencia, se produce un salto finito de presiones a través de S_B . Las estelas se representan mediante sábanas vorticosas libres, S_W . Sus posiciones no son especificadas a priori, por lo que pueden deformarse libremente hasta adoptar configuraciones libres de fuerzas. Ningún salto de presiones se produce a través de las sábanas libres.

Las sábanas vorticosas (adheridas y libres) están unidas en los bordes afilados donde ocurre el desprendimiento de vorticidad. En esta unión se impone la condición de Kutta para flujos no estacionarios Preidikman (1998). Para satisfacer esta condición se impone

que la diferencia de presión entre la superficie superior e inferior del ala a lo largo de los bordes filosos donde se depende el flujo sea cero. Esto fuerza al flujo a dejar el borde de fuga y puntas de alas suavemente, pero en general con vorticidad. La condición de Kutta inestacionaria requiere que la vorticidad creada a lo largo de los bordes donde las sábanas vorticosas están unidas sea convectada con el fluido, y de esta manera la diferencia de presión desaparezca en esos bordes. Entonces los segmentos vorticosos a lo largo del borde de fuga y puntas de alas son convectados con la velocidad local del fluido.

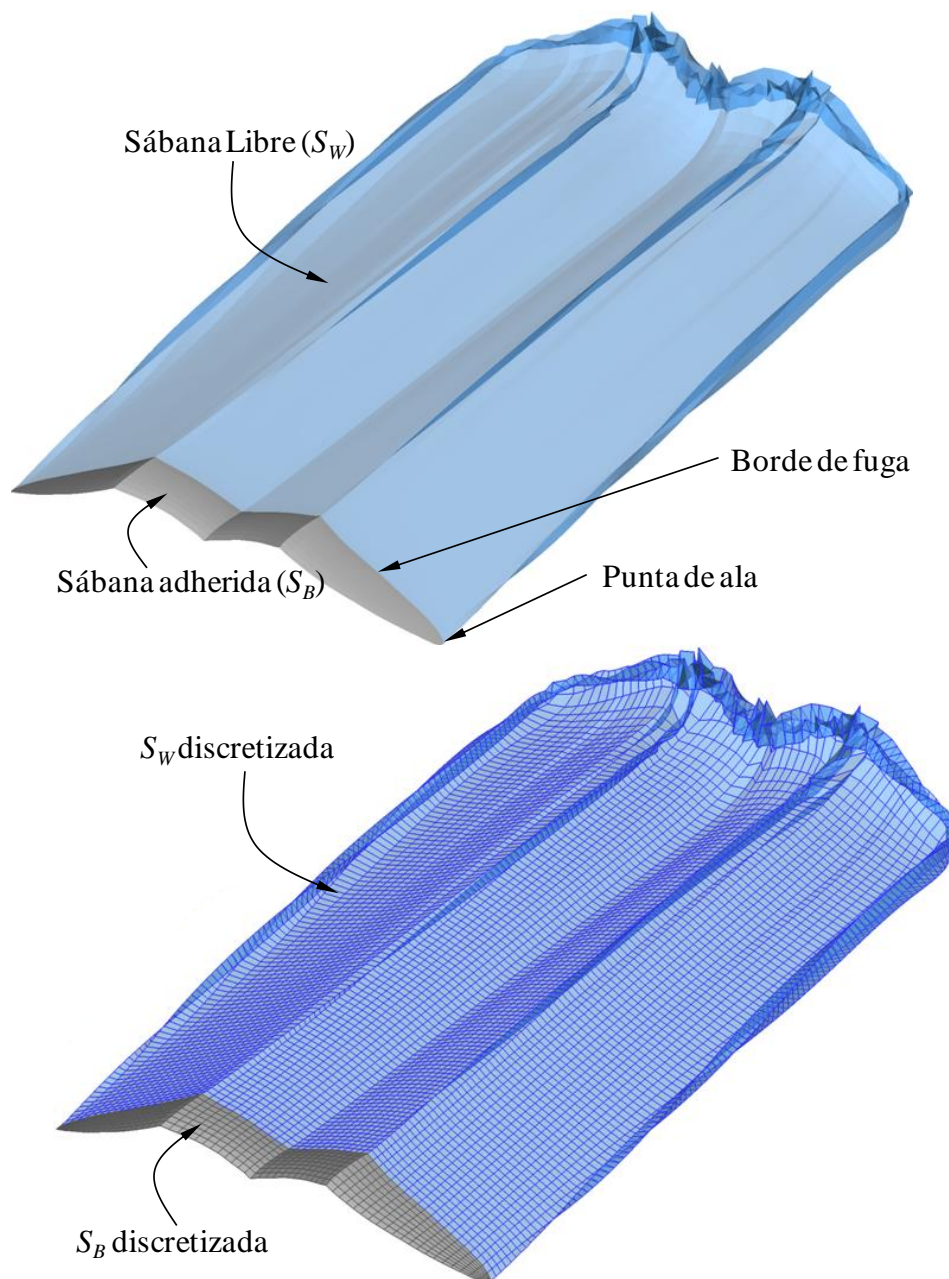


Figura 3-1: Sábanas vorticosas.

En este trabajo se modela el flujo de un fluido incompresible caracterizado por un número de Reynolds relativamente alto. Se denota mediante $\mathbf{V}(\mathbf{R};t)$ a la velocidad absoluta de una partícula de fluido que ocupa, en el tiempo t , la posición dada por el vector \mathbf{R} en el dominio fluido. La ecuación de continuidad para este problema es

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{R};t) = 0 \quad (3.1)$$

∇ es un operador diferencial cuya representación en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales tridimensional es

$$\nabla = \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.2)$$

siendo \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_3 los vectores unitarios asociados al sistema de coordenadas.

Por otro lado, el campo de vorticidad del fluido, $\mathbf{\Omega}$, se define mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (3.3)$$

Debido a que el fluido es considerado irrotacional fuera de la capa límite y de las estelas vorticosas, el campo de velocidad puede ser expresado como el gradiente del potencial total de la velocidad $\Phi(\mathbf{R};t)$,

$$\mathbf{V}(\mathbf{R};t) = \nabla \Phi(\mathbf{R};t) \quad (3.4)$$

Reemplazando (3.4) en (3.1) se obtiene la ecuación que gobierna la evolución espacial y temporal del potencial total de velocidad para flujos incompresibles,

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{R};t) = 0 \quad (3.5)$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

la cual es conocida como ecuación de Laplace que expresa la continuidad para un fluido irrotacional e incompresible.

Para complementar la ecuación (3.5) deben considerarse las condiciones de borde (BCs) del problema. La primera condición de borde requiere que la componente normal

de la velocidad del fluido relativa a la superficie del sólido debe ser nula. Esta condición de borde, es comúnmente denominada como condición de no-penetración, y puede ser expresada como:

$$(\nabla\Phi - \mathbf{V}_s) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.7)$$

donde \mathbf{V}_s es la velocidad de la superficie del sólido, y \mathbf{n} es el versor normal a dicha superficie. En general, tanto \mathbf{V}_s como \mathbf{n} varían de manera espacial y temporal.

La segunda condición, conocida como regularidad en el infinito, requiere que las perturbaciones producidas en el fluido, por el movimiento del cuerpo (o cuerpos) inmerso en su seno, se atenúen hacia el infinito. Condición que se expresa matemáticamente como,

$$\lim_{|\mathbf{R}| \rightarrow \infty} |\mathbf{V}(\mathbf{R}; t)| = \lim_{|\mathbf{R}| \rightarrow \infty} |\nabla\Phi(\mathbf{R}; t)| = |\mathbf{V}_\infty| \quad (3.8)$$

donde \mathbf{V}_∞ es la velocidad de corriente libre o corriente sin perturbar.

En un flujo incompresible e irrotacional el campo de velocidades puede ser obtenido independientemente de la presión resolviendo la ecuación de continuidad. Esta ecuación no incluye directamente términos dependientes del tiempo, y la dependencia explícita del tiempo es introducida a través de las condiciones de contorno (Katz y Plotkin, 1991). Una vez obtenida la velocidad, la presión en función del tiempo es calculada a través de la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli.

Adicionalmente a las BCs, es necesario utilizar el teorema de Kelvin-Helmoltz y la condición de Kutta inestacionaria para determinar la distribución de vorticidad y la posición de la sábana libre (Konstadinopoulos *et al.*, 1981).

3.3. Ley de Biot-Savart

La ecuación de continuidad para un flujo incompresible dada por la expresión (3.1) y la definición de vorticidad dada por la expresión (3.3) representan un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que definen la relación cinemática entre el campo de vorticidad, $\mathbf{\Omega}$, y el campo de velocidad, \mathbf{V} . Este sistema de ecuaciones diferenciales puede ser “invertido” con el fin de obtener el campo de velocidades en función del campo de vorticidad (Batchelor, 1967). Esto puede expresarse de manera general de la siguiente forma,

$$\mathbf{V}(\mathbf{R};t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R},t) \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|^3} dV_0 \quad (3.9)$$

donde \mathbf{R}_0 es el vector posición que define los puntos de la región del dominio fluido y V_0 es una región del dominio fluido. Es importante notar que el integrando de la ecuación (3.9) es nulo cuando $\boldsymbol{\Omega}$ es cero. Por lo tanto la región donde el flujo es irrotacional ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$) no contribuye al campo de velocidad. En consecuencia, la evaluación de \mathbf{V} en cualquier punto del espacio puede ser confinada únicamente a la región donde el campo de velocidad es rotacional.

Para problemas de flujo externo, las condiciones de bordes impuestas en el infinito se satisfacen automáticamente al utilizar la expresión (3.9).

Es posible demostrar que para un segmento vorticoso de longitud finita, L , y circulación espacial constante $\Gamma(t)$, la evaluación de \mathbf{V} puede obtenerse mediante la siguiente versión discreta,

$$\mathbf{V}(\mathbf{R};t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1|^2} [\mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] \quad (3.10)$$

donde la vorticidad ha sido considerada a través de la circulación y la longitud del segmento. Las variables intervinientes en la ley de Biot-Savart en su versión discreta, expresión (3.10), están esquematizadas en la Figura 3-2.

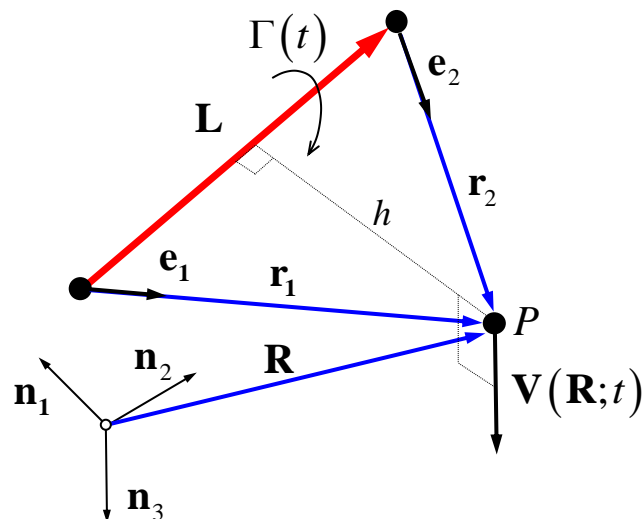


Figura 3-2: Interpretación de la Ley de Biot-Savart.

Cuando el punto P está contenido en una recta coincidente con el segmento vorticoso, la evaluación de la velocidad mediante la ecuación (3.10) presenta una singularidad.

Incluso cuando el punto se encuentra cerca del segmento, los valores de velocidades pueden resultar muy altos y diferentes de la realidad lo que trae aparejado problemas desde el punto de vista numérico. El modo más común de sortear este último inconveniente consiste en utilizar la expresión (3.11) para determinar la velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{R};t)$.

$$\mathbf{V}(\mathbf{R};t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1|^2 + (\delta|\mathbf{L}|)^2} [\mathbf{L} \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] \quad (3.11)$$

donde el parámetro δ es comúnmente conocido como radio de *cut-off*, y se puede notar que cuando tiende a cero se recupera la ecuación (3.10). El valor del radio de *cut-off*, desconocido a priori, se determina a partir de comparaciones entre simulaciones realizadas mediante el uso de la ecuación (3.11) y soluciones conocidas que fueron obtenidas mediante el uso de otras técnicas, no habiendo bases teóricas para su justificación.

3.4. Método de red de vórtices no-lineal e inestacionario

En la presente formulación se considera que una corriente de aire con velocidad \mathbf{V}_∞ circula a través del ala reconfigurable, y además se asume que la misma no tiene movimiento de traslación, no obstante puede cambiar su forma geométrica de manera dinámica. En esta Sección se utiliza el sistema de referencia \mathbf{A} que se utilizó en capítulos anteriores, el cual está fijo a la línea central del modelo de ala reconfigurable (ver Capítulo 2). La posición del origen y la orientación de este sistema con respecto del sistema inercial \mathbf{N} son constantes en el tiempo.

3.4.1. Discretización de las sábanas vorticosas

En el UVLM la sábana adherida, S_b , es reemplazada por una red de segmentos vorticosos de longitud finita, \mathbf{L} , y circulación espacial constante, $\Gamma(t)$. Estos segmentos conforman un número finito, NP , de cuadriláteros denominados paneles. Los vértices de cada uno de estos paneles son denominados nodos aerodinámicos. La sábana libre, S_w , también es discretizada mediante segmentos vorticosos de longitud finita.

En la Figura 3-3, además de las sábanas vorticosas discretizadas, se muestran cuatro segmentos vorticosos \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{L}_3 y \mathbf{L}_4 , que encierran un panel típico y tienen asociadas las circulaciones $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$, $\Gamma_3(t)$, y $\Gamma_4(t)$, respectivamente.

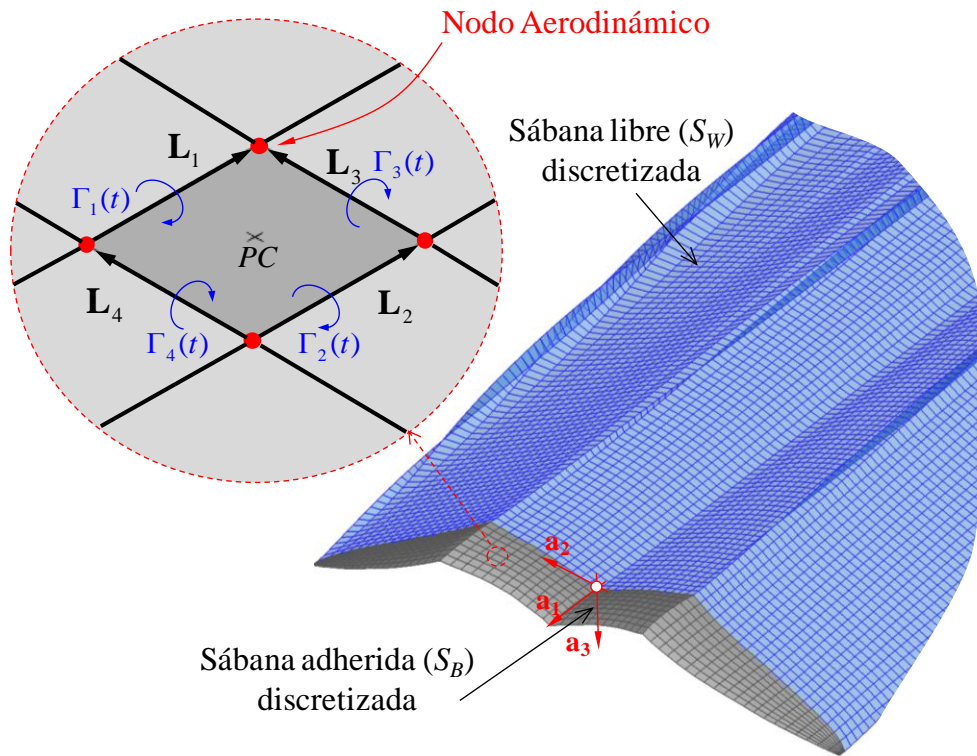


Figura 3-3: Panel típico y sábanas discretizadas.

Las circulaciones de cada uno de los segmentos vorticosos que conforman la red son desconocidas, y para determinarlas se utilizan ecuaciones que provienen de la condición de no-penetración en cada panel y de la especificación de la conservación de vorticidad (Preidikman, 1998).

La dimensión del problema puede ser reducida considerando que cada panel está encerrado por un anillo vorticoso de circulación, $G_j(t)$, espacialmente constante, donde el subíndice j hace referencia al j -ésimo panel ($j = 1, \dots, NP$). De esta manera se satisface automáticamente la conservación de vorticidad, y las nuevas incógnitas del problema son las circulaciones de los anillos vorticosos. Posteriormente, la circulación, $\Gamma(t)$, asociada a un segmento vorticoso de longitud finita, \mathbf{L} , se puede determinar a través del conocimiento de las circulación de los anillos vorticosos, $G_j(t)$, adyacentes.

A modo de ejemplo se considera la sábana adherida de la Figura 3-4 que está discretizada en 6 paneles. Las circulaciones $\Gamma_8(t)$ y $\Gamma_9(t)$ asociadas a los segmentos \mathbf{L}_8 y \mathbf{L}_9 , pueden obtenerse de la ecuación (3.12) (ver Figura 3-4).

$$\begin{aligned}\Gamma_8(t) &= G_3(t) \\ \Gamma_9(t) &= G_4(t) - G_3(t)\end{aligned}\tag{3.12}$$

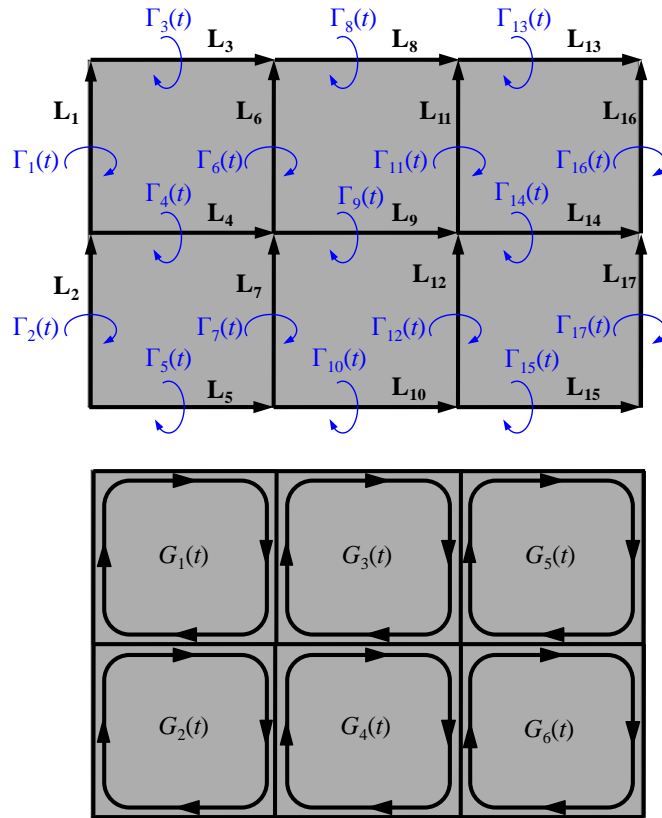


Figura 3-4: Relación entre circulaciones de segmentos vorticosos y circulaciones de anillo vorticosos.

Al introducir las circulaciones de los anillos, el problema queda reformulado a encontrar las circulaciones $G_j(t)$ de tal modo que se satisfaga la condición de no-penetración en todo instante de tiempo. Idealmente sería preferible satisfacer la condición (3.7) en todos los puntos de la superficie sustentadora. Pero debido a que se ha discretizado la superficie en un número NP de paneles, sólo es posible imponer la condición de “no-penetración” en un número (NP) finito de puntos, llamados puntos de control (PC).

La técnica consiste en considerar un punto de control en cada panel, ubicado en el centroide de sus nodos aerodinámicos. Para aproximar el versor normal \mathbf{n} a cada panel en el PC se utiliza el producto vectorial de sus dos vectores diagonales (Figura 3-5).

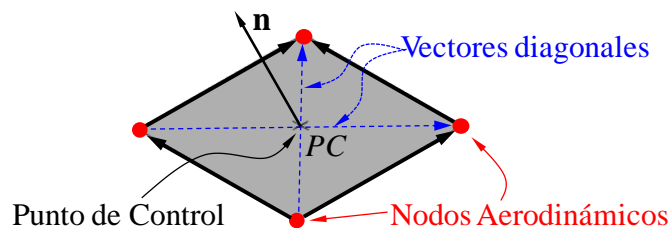


Figura 3-5: Punto de control, vectores diagonales, versor normal y nodos aerodinámicos.

La versión discreta de la condición de no-penetración es,

$$\left\{ \mathbf{V}_B(\mathbf{r}_i^{PC};t) + \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i^{PC};t) + \mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i^{PC};t) \right\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC};t) = 0 \quad i=1,\dots, NP \quad (3.13)$$

donde \mathbf{r}_i^{PC} es el vector posición del punto de control asociado al panel i con respecto al sistema de referencia \mathbf{A} . \mathbf{V}_B es la velocidad en el punto de control i asociada a la vorticidad de la sábana adherida. \mathbf{V}_W es la velocidad sobre el punto de control i asociada a la vorticidad de la sábana libre, y \mathbf{V}_∞ es la velocidad de la corriente libre. \mathbf{V}_S es la velocidad del ala debido a la reconfiguración en el punto de control i . Es importante mencionar que en la versión discreta de la condición de no penetración dada por la expresión anterior, se ha sustituido a $\nabla\Phi$ (ver ecuación (3.7)) por la suma vectorial de \mathbf{V}_B , \mathbf{V}_W y \mathbf{V}_∞ . Reacomodando la expresión (3.13) se tiene,

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{r}_i^{PC};t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC};t) = - \left\{ \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i^{PC};t) + \mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i^{PC};t) \right\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC};t) \quad i=1,\dots, NP \quad (3.14)$$

El miembro izquierdo de la ecuación (3.14) representa la velocidad normal de una partícula de fluido ubicada en el punto de control i que está asociada a la sábana adherida. Esta velocidad se puede escribir en términos de la circulaciones de los anillos vorticosos como

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{r}_i^{PC};t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC};t) = \sum_{j=1}^{NP} A_{ij}(t) G_j(t) \quad i=1,\dots, NP \quad (3.15)$$

donde $A_{ij}(t)$ representa la velocidad normal en el punto de control i asociada al anillo vorticoso del panel j con circulación unitaria $G_j(t) = 1$. $[A_{ij}](t)$ se denomina matriz de influencia aerodinámica, y se ha indicado explícitamente como una función del tiempo ya que debe actualizarse acorde a la variación temporal de la geometría del ala.

Reemplazando (3.15) en (3.14) se tiene

$$\sum_{j=1}^{NP} A_{ij}(t) G_j(t) = - \left(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i^{PC};t) - \mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i^{PC};t) \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC};t) \quad i=1,\dots, NP. \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) debe resolverse en cada paso de tiempo a fin de encontrar las circulaciones de los anillos vorticosos en el dominio del tiempo.

3.4.2. Arranque impulsivo

Considérese el ala rectangular de la Figura 3-4, sometida a una corriente de aire repentina \mathbf{V}_∞ . Como anteriormente se mencionó, en la presente formulación se asume que el ala está sin movimiento de traslación, sin embargo puede cambiar su forma geométrica en el tiempo, y por lo tanto la matriz de influencia aerodinámica $[A_{ij}]$ y el versor \mathbf{n} asociado a cada panel deben actualizarse en cada paso de tiempo.

Antes que comience el movimiento del fluido se asigna valor cero a todas las circulaciones ($t < 0$). En $t = 0$ comienza el movimiento del fluido y las circulaciones cambian instantáneamente. En este momento se crea un vórtice en los bordes filosos del ala, representativo de lo que Prandtl (1957) describió como vórtice de arranque y que puede encontrarse en diferentes observaciones experimentales. La existencia de este vórtice es consecuencia del requerimiento de la conservación espacial de circulación.

La circulación en el instante inicial se obtiene haciendo $t = 0$ en la ecuación (3.16), esto es,

$$\sum_{j=1}^{NP} A_{ij}(0) G_j(0) = -(\mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i^{PC}; 0)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC}; 0) \quad i = 1, \dots, NP. \quad (3.17)$$

En el lado derecho de (3.17) sólo aparecen aportes de la corriente libre y la velocidad del ala, ya que en $t = 0$ aún no se comenzó a desarrollar la estela. Debido a que el ala no posee velocidad de traslación, \mathbf{V}_S proviene del proceso de reconfiguración o de la deformación elástica de la estructura. Tanto la matriz de influencia aerodinámica como el versor normal \mathbf{n} son evaluados en la configuración del ala en el instante $t = 0$. Resolviendo (3.17) se determinan las circulaciones de la sábana adherida que se indican en la Figura 3-6.

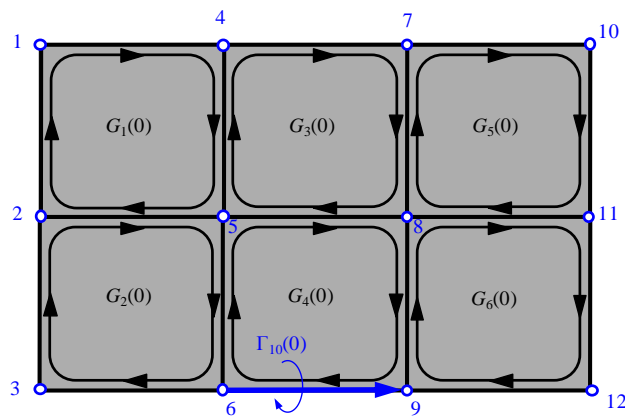


Figura 3-6: Circulaciones de la sábana adherida en el instante $t = 0$.

Una vez obtenidas las circulaciones, el siguiente paso consiste en convectar los segmentos vorticosos que van a formar la versión discretizada de la estela.

Una partícula de fluido cuya posición respecto del sistema de referencia \mathbf{A} es \mathbf{r}_i , se convecta con la velocidad local del fluido, que en este instante es igual a la suma vectorial de la velocidad de la corriente libre y la velocidad asociada a la vorticidad de la sábana adherida.

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_i;0) = \mathbf{V}_B(\mathbf{r}_i;0) + \mathbf{V}_\infty \quad (3.18)$$

Es importante mencionar que la velocidad asociada a la sábana adherida se obtiene utilizando la circulación previamente calculada, esto es, $G_j(0)$. El desplazamiento que experimenta la partícula de fluido es aproximado mediante la siguiente expresión,

$$\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i;0) \Delta t \quad (3.19)$$

siendo Δt el paso de tiempo utilizado.

En la Figura 3-6 se ha resaltado, a modo de ejemplo, el segmento vorticoso que se localiza en el borde de fuga delimitado por los nodos aerodinámicos 6 y 9, y es representado por un vector desde el punto P_6 al punto P_9 , con una circulación $\Gamma_{10}(0)$. Este segmento se convecta a la nueva posición denotada por P_{16} y P_{17} (Figura 3-7). La circulación $\Gamma_{10}(0)$ se mantiene con el fin de satisfacer la conservación temporal de circulación. Simultáneamente, un nuevo vórtice es formado entre los puntos P_6 y P_9 cuya circulación será $\Gamma_{10}(\Delta t)$. Con el fin de satisfacer la conservación espacial de vorticidad se unen los dos segmentos vorticosos en los puntos nodales con los conectores que se muestran en la Figura 3-7.

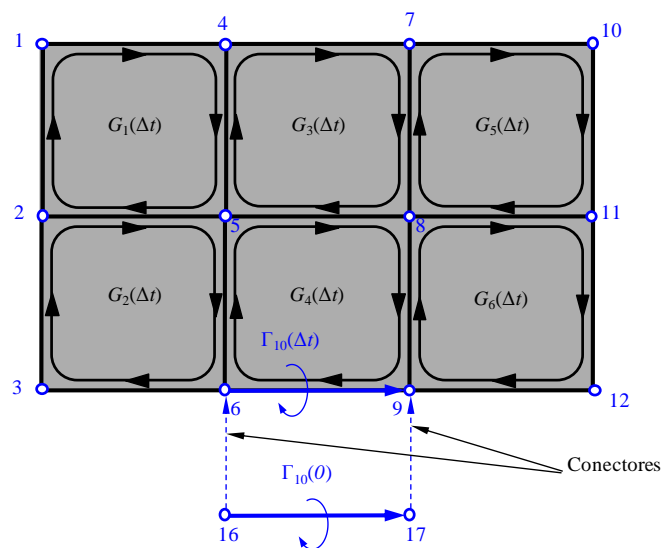


Figura 3-7: Convección de un segmento vorticoso.

La longitud de los conectores se determina mediante la ecuación (3.19), de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \left(\overline{P_6 P_{16}} \right) &= \mathbf{r}_{16} - \mathbf{r}_6 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_6; 0) \Delta t \\ \left(\overline{P_9 P_{17}} \right) &= \mathbf{r}_{17} - \mathbf{r}_9 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_9; 0) \Delta t \end{aligned} \quad (3.20)$$

Este procedimiento se realiza para todos los segmentos que se encuentran sobre los bordes filosos del ala (borde de fuga y puntas de alas) generando la primera fila de paneles en la estela. Las circulaciones de estos paneles, de acuerdo a la conservación espacial y temporal de la circulación, son las circulaciones asociadas a los paneles adyacentes de la sábana adherida (ver Figura 3-8).

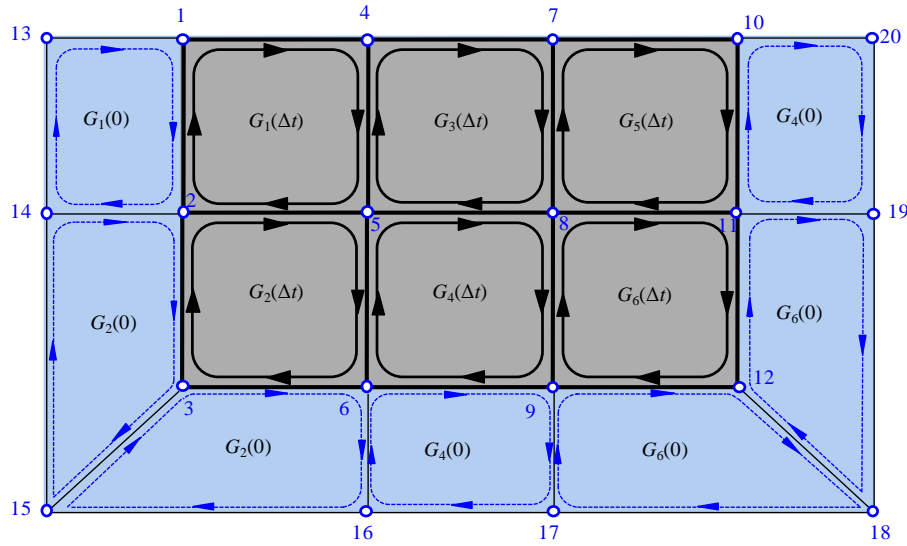


Figura 3-8: Proceso de convección, primera generación de paneles en la estela.

Comenzando con el segundo paso de cálculo, en el instante $t = \Delta t$, se obtienen las nuevas circulaciones de los anillos vorticosos del ala, pero esta vez, considerando la estela recientemente formada.

$$\sum_{j=1}^{NP} A_{ij}(\Delta t) G_j(\Delta t) = - \left(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i^{PC}, \Delta t) - \mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i^{PC}, \Delta t) \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i^{PC}, \Delta t) \quad i = 1, \dots, NP. \quad (3.21)$$

donde \mathbf{V}_W es la velocidad de una partícula de fluido ubicada en el punto de control i asociada a la sábana vorticiosa libre. Esta velocidad se determina considerando la contribución de todas las circulaciones de los anillos vorticosos correspondientes a la estela. La matriz de influencia aerodinámica y cada uno de los versores normales asociados a los paneles de la sábana adherida deben actualizarse acorde a la configuración geométrica del ala en el instante $t = \Delta t$.

Una vez obtenidas las circulaciones $G_j(\Delta t)$ de la sábana adherida se continúa con la convección de los segmentos vorticosos. En el proceso de convección, a diferencia de la ecuación (3.18), deberá considerarse la velocidad asociada a la vorticidad de la sábana libre, es decir

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_i; \Delta t) = \mathbf{V}_B(\mathbf{r}_i; \Delta t) + \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i; \Delta t) + \mathbf{V}_\infty. \quad (3.22)$$

En la Figura 3-9 se explica el proceso de convección en este segundo paso de cálculo. El segmento delimitado por los nodos aerodinámicos 6 y 9, es convectado a la nueva posición definida por los puntos P_{16} y P_{17} con circulación $\Gamma_{10}(\Delta t)$ para satisfacer la conservación temporal de la circulación. Al mismo tiempo, otro vórtice es generado entre los puntos P_6 y P_9 de circulación $\Gamma_{10}(2\Delta t)$. Con el fin de satisfacer la conservación espacial de la circulación, se unen los vórtices utilizando los conectores $\overline{P_6 P_{16}}$ y $\overline{P_9 P_{17}}$ que se computan de la misma manera que en el paso de tiempo anterior,

$$\begin{aligned} \left(\overline{P_6 P_{16}}\right) &= \mathbf{r}_{16} - \mathbf{r}_6 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_6; \Delta t) \Delta t \\ \left(\overline{P_9 P_{17}}\right) &= \mathbf{r}_{17} - \mathbf{r}_9 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_9; \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es importante notar que la longitud de los conectores en este instante de tiempo son, en general, diferentes a lo calculado mediante la ecuación (3.20) debido a que la velocidad local del fluido ahora toma otro valor.

Por otro lado, el segmento definido por los puntos P_{16} y P_{17} con circulación $\Gamma_{10}(0)$ (Figura 3-7), que fue convectado en el primer paso de tiempo desde la posición definida por P_6 y P_9 , también debe ser convectado a la nueva posición denotada por P_{24} y P_{25} , como se indica en la Figura 3-9. Nuevamente, la circulación $\Gamma_{10}(0)$ es mantenida con el fin de satisfacer la conservación temporal de la circulación. Los conectores $\overline{P_{16} P_{24}}$ y $\overline{P_{17} P_{25}}$ se calculan mediante la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \left(\overline{P_{16} P_{24}}\right) &= \mathbf{r}_{24} - \mathbf{r}_{16} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_{16}; \Delta t) \Delta t \\ \left(\overline{P_{17} P_{25}}\right) &= \mathbf{r}_{25} - \mathbf{r}_{17} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_{17}; \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde \mathbf{r}_{16} y \mathbf{r}_{17} son los vectores posición de los puntos P_{16} y P_{17} que definen el vórtice convectado en el primer paso de cálculo.

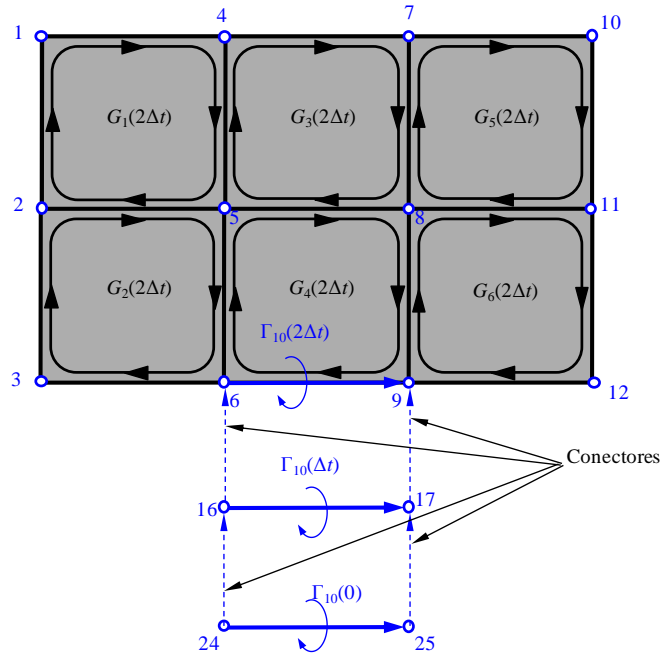


Figura 3-9: Convección de dos segmentos vorticosos.

Luego de la convección de todos los segmentos que se encuentran sobre los bordes filosos del ala y los correspondientes a la estela, se genera una nueva fila de paneles cuyas circulaciones se muestra en la Figura 3-10.

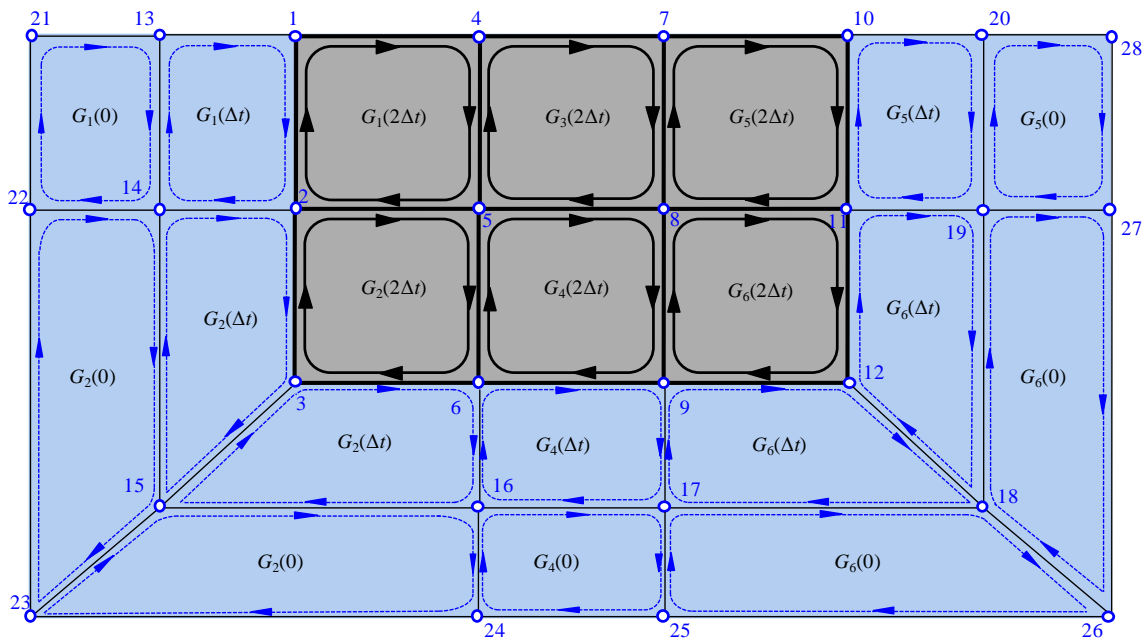


Figura 3-10: Proceso de convección, segunda generación de paneles en la estela.

Las circulaciones de los segmentos vorticosos, en los que nos hemos concentrado para explicar el proceso de convección, se relacionan con las circulaciones de los anillos vorticosos adyacentes de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}(2\Delta t) &= G_4(2\Delta t) - G_4(\Delta t) \\
\Gamma_{10}(\Delta t) &= G_4(\Delta t) - G_4(0) \\
\Gamma_{10}(0) &= G_4(0)
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

El próximo paso consiste en calcular las circulaciones correspondientes al instante $t = 2\Delta t$ y realizar el mismo proceso de convección. Este procedimiento se repite hasta llegar al número de pasos deseados. Para más detalles sobre el método el lector puede consultar la referencia Preidikman (1998).

3.5. Variables adimensionales

Para resolver el problema numéricamente resulta conveniente trabajar con cantidades adimensionales. En este trabajo las variables adimensionales son diferenciadas de las variables físicas utilizando el símbolo $\hat{\cdot}$ sobre la variable física \cdot .

Para llevar a cabo la adimensionalización se utilizan las siguientes magnitudes características,

L_C = longitud que resulta del cociente entre la cuerda media del ala y la cantidad de paneles a lo largo de la cuerda ($NPCH$) de la sábana vorticosa adherida,

$V_C = V_\infty$ velocidad de la corriente libre,

$T_C = L_C/V_C$ tiempo característico, y

$\rho_C = \rho_\infty$ densidad de la corriente libre,

La selección de la longitud (L_C) y velocidad (V_C) característica, junto con la definición del tiempo característico (T_C) permiten crear elementos de la estela aproximadamente de la mismas dimensiones que los elementos usados en la discretización de la sábana adherida si se selecciona un paso de tiempo adimensional igual a uno, es decir,

$$\hat{\Delta t} = \frac{\Delta t}{T_C} = 1
\tag{3.26}$$

Esto permite obtener una uniformidad en la red de vórtices, lo cual es deseable en este método.

El modelo desarrollado en el Capítulo 2 y el procedimiento explicado en las secciones anteriores para obtener las circulaciones pueden ser fácilmente adimensionalizados utilizando las variables características antes definidas.

3.6. Cálculo de las cargas aerodinámicas

Las cargas aerodinámicas deben ser evaluadas en cada paso de tiempo. Para obtener la fuerza actuante sobre cada elemento, se debe hallar primero el salto de presiones en el punto de control, y luego multiplicarlo por el área y por el vector unitario normal asociado a cada elemento. Para calcular el salto de presiones a través de la superficie de las alas se usa la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho} = H(t) \quad (3.27)$$

donde, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ es la función potencial de velocidad, $p(\mathbf{r}, t)$ es la presión, ρ es la densidad del aire (considerada constante), y $H(t)$ es la energía total por unidad de masa, que sólo depende del tiempo y tiene un valor uniforme para todos los puntos del fluido.

Utilizando las variables características es posible adimensionalizar la ecuación (3.27) y determinar el salto de presión adimensional, ΔC_p , a través de cada uno de los elementos que conforman la sábana adherida,

$$\Delta C_p = \hat{\mathbf{V}}_U \cdot \hat{\mathbf{V}}_U - \hat{\mathbf{V}}_L \cdot \hat{\mathbf{V}}_L + 2 \left[\left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}} \right|_{\hat{\mathbf{r}}_U} - \left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}} \right|_{\hat{\mathbf{r}}_L} \right] \quad (3.28)$$

donde $\hat{\mathbf{V}}_U$ y $\hat{\mathbf{V}}_L$ son las velocidades (adimensionales) de las partículas de fluido ubicadas inmediatamente por encima y por debajo del punto de control del elemento considerado, respectivamente. Para adimensionalizar la ecuación (3.28) a partir de la (3.26) se han considerado las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} t &= T_c \hat{t} \\ \mathbf{r} &= L_c \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{V}(\mathbf{r}; t) &= V_c \hat{\mathbf{V}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{t}) \\ \Phi(\mathbf{r}; t) &= L_c V_c \hat{\Phi}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{t}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Otra relación que resulta de utilidad es,

$$G_j(t) = L_c V_c \hat{G}_j(\hat{t}) \quad (3.30)$$

El último término de la expresión (3.28) puede escribirse como,

$$\left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}} \right|_{\hat{r}_U} - \left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}} \right|_{\hat{r}_L} = \frac{\mathfrak{D} \hat{G}_i(\hat{t})}{\mathfrak{D} \hat{t}} - \Delta \hat{\mathbf{V}}_i \cdot \hat{\mathbf{V}}_s(\hat{\mathbf{r}}_i; \hat{t}) \quad (3.31)$$

donde $\Delta \hat{\mathbf{V}}_i$ es la diferencia entre $\hat{\mathbf{V}}_U$ y $\hat{\mathbf{V}}_L$ en el punto de control ‘i’. $\mathfrak{D} \hat{G}_i(\hat{t}) / \mathfrak{D} \hat{t}$ es una ‘especie de derivada sustancial’, ya que no sigue una partícula de fluido sino que sigue a un punto material del ala, en este caso un punto de control. Utilizando una aproximación por diferencias finitas hacia atrás de primer orden, esta derivada se puede aproximar como,

$$\frac{\mathfrak{D} \hat{G}_i(\hat{t})}{\mathfrak{D} \hat{t}} \approx \frac{\hat{G}_i(\hat{t}) - \hat{G}_i(\hat{t} - \Delta \hat{t})}{\Delta \hat{t}} \quad (3.32)$$

Conocido el salto de presión sobre cada elemento, es posible obtener la carga aerodinámica actuante en cada panel, y consecuentemente, la carga aerodinámica total actuando sobre el ala.

Por otro lado se define el coeficiente adimensional de sustentación, C_L , como la magnitud de la proyección de la carga aerodinámica total, \mathbf{L} , en la dirección perpendicular a la velocidad de la corriente libre dividida por la presión dinámica.

$$C_L = \frac{|\mathbf{L}|}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{V}_\infty|^2 S_{LS}} \quad (3.33)$$

donde S_{LS} es la superficie del ala. De manera similar se obtiene el coeficiente adimensional de resistencia inducida, C_{Di} , dividiendo la magnitud de la proyección de la carga total en la dirección de la corriente libre, \mathbf{D} , por la presión dinámica.

$$C_{Di} = \frac{|\mathbf{D}_i|}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{V}_\infty|^2 S_{LS}} \quad (3.34)$$

La implementación de la versión inestacionaria de la Ecuación de Bernoulli permite obtener la evolución temporal de los coeficientes aerodinámicos (C_L , C_{Di}).

Es importante aclarar que aunque el área del ala S_{LS} (*planform area*) es variable debido al cambio de geometría del ala, para calcular los coeficientes aerodinámicos adimensionales se toma una superficie de referencia cuyo valor es el que se presenta en la Tabla 2.1 y corresponde a la configuración de ala completamente extendida ($S_{LS} = S$). De esta manera la sustentación (L) y la resistencia inducida (D_i) son directamente proporcional al coeficiente de sustentación (C_L) y al coeficiente de resistencia inducida (C_{Di}) respectivamente.

Capítulo 4

Modelo estructural

4.1. Generalidades

En este Capítulo se presenta el desarrollo de un modelo que describe la dinámica estructural de las alas flexibles del concepto *foldwing wing*.

La idea detrás del modelo de estructura propuesto para este concepto está lejos de representar fielmente el esqueleto que posee un ave en sus alas. Se aspira a una topología de estructura que sea capaz de reproducir, con cierto detalle, algunos movimientos que experimentan las aves en sus alas para controlar las características aerodinámicas durante el vuelo.

En este Capítulo se derivan las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica de la estructura alar por medio de una formulación energética basada en las ecuaciones de Lagrange. El conjunto de ecuaciones resultantes son diferenciales en derivadas parciales, las cuales son discretizadas espacialmente por medio del Método de los Elementos Finitos o FEM (*Finite Element Method*). La solución se expande en términos de los modos de vibrar de la estructura; de esta manera la dinámica es descrita a través de las coordenadas (modales) generalizadas asociadas a cada uno de los modos. Finalmente, las ecuaciones resultantes son adimensionalizadas utilizando las variables características definidas en el Capítulo 3.

4.2. Descripción del modelo

La estructura propuesta para el modelo *morphing* está constituida por un conjunto de vigas que se conectan entre ellas para formar un “esqueleto estructural” del ala como se muestra en Figura 4-1a.

Para describir la geometría se considera, nuevamente, el sistema de coordenadas (x, y, z) asociado al sistema de referencia **A** que se introdujo en el Capítulo 2. Debido a la simetría que posee la estructura con respecto al plano xz , el modelo sólo se desarrolla para el ala derecha.

La estructura del ala es dividida en dos partes: la Estructura del Ala Interna (EAI) y la Estructura del Ala Externa (EAE).

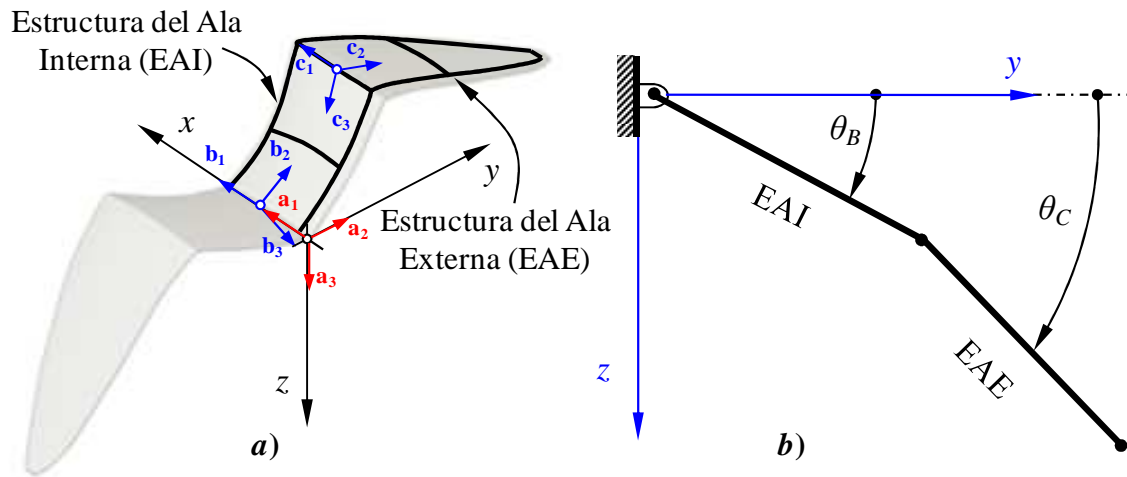


Figura 4-1: Estructura del ala y parámetros de configuración.

Para definir la geometría de la estructura alar, en una primera etapa se generan las geometrías de la EAI y de la EAE en los sistemas **B** y **C** que se introdujeron en el Capítulo 2. Luego, ambas partes son orientadas con respecto al sistema **A** a través de los parámetros de configuración con el fin de obtener la configuración geométrica final de la estructura. La EAI es orientada a través del parámetro de configuración θ_B (ángulo de diedro asociado al Ala Interna) y la EAE es orientada a través del parámetro de configuración θ_C (ángulo de diedro asociado al Ala Externa). Este proceso de orientación se puede describir matemáticamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \{\mathbf{r}_{EAI}\}_A &= [\mathbf{T}_{AB}] \{\mathbf{r}_{EAI}\}_B \\ \{\mathbf{r}_{EAE}\}_A &= [\mathbf{T}_{AB}] \{\mathbf{R}_{AB}\}_B + [\mathbf{T}_{AB}] [\mathbf{T}_{BC}] \{\mathbf{r}_{EAE}\}_C \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $\{\mathbf{r}_{EAI}\}_A$ y $\{\mathbf{r}_{EAI}\}_B$ es el vector posición de un punto de la EAI expresado en los sistemas **A** y **B** respectivamente. $\{\mathbf{r}_{EAE}\}_A$ y $\{\mathbf{r}_{EAE}\}_B$ es el vector posición de un punto de la EAE expresado en los sistemas **A** y **C** respectivamente. $\{\mathbf{R}_{AB}\}_B$ es el vector posición del origen del sistema **B** con respecto del sistema **A** que se encuentra resuelto en **B** y $[\mathbf{T}_{AB}]$ y $[\mathbf{T}_{BC}]$ son las matrices de rotación definidas en el Capítulo 2.

En la Figura 4-1b se muestra una representación esquemática de la estructura del ala derecha en el plano yz con el fin de facilitar la comprensión de la orientación de la EAI y de la EAE.

Resulta importante mencionar que la implementación computacional del modelo presentado en este capítulo (módulo estructural) cuenta con un alto grado de generalidad, lo cual brinda la posibilidad de tratar diferentes geometrías para la estructura de las alas.

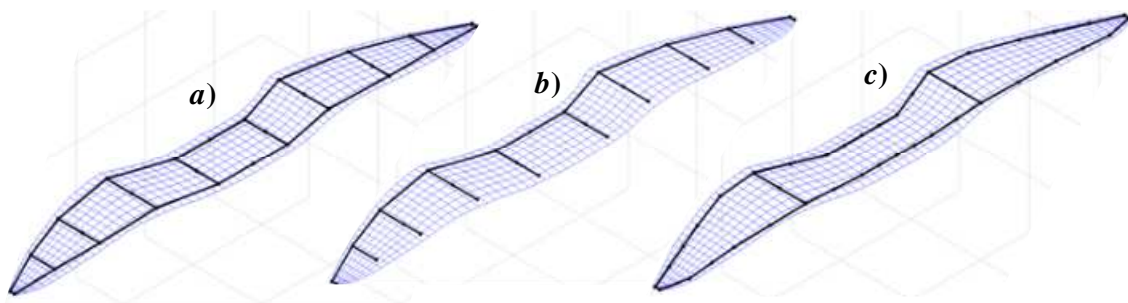


Figura 4-2: Diferentes geometrías de la estructura del ala.

En la Figura 4-2 se muestran tres topologías diferentes de la estructura alar para la configuración completamente extendida ($\theta_B = \theta_C = 0^\circ$). Se debe notar, además, que en las tres configuraciones se ha superpuesto la superficie aerodinámica en su versión discretizada.

4.3. Formulación mediante elementos finitos

4.3.1. Aspectos generales

La deformación elástica de un medio continuo es un problema gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En este trabajo para tratar la deformación de la estructura del ala se utiliza un método que permite discretizar

espacialmente el conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y así obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo. Este método, el Método de los Elementos Finitos, permite incluir las cargas aerodinámicas computadas por el UVLM dentro de las ecuaciones que gobiernan la dinámica estructural de las alas de una manera relativamente sencilla.

Cada una de las vigas, que constituye la estructura alar considerada en este trabajo, se divide espacialmente en un número finito de elementos que están conectados en puntos llamados nodos estructurales. Los elementos y los nodos constituyen la malla de la estructura o la malla de elementos finitos. Las propiedades de las vigas se asumen constantes a lo largo de cada elemento. El sistema de coordenadas cartesiano ortogonal definido anteriormente (x, y, z) se considera como un sistema global y, adicionalmente, se introduce un nuevo sistema de coordenadas ξ, η, ζ (sistema local) fijo a la configuración no-deformada de cada elemento.

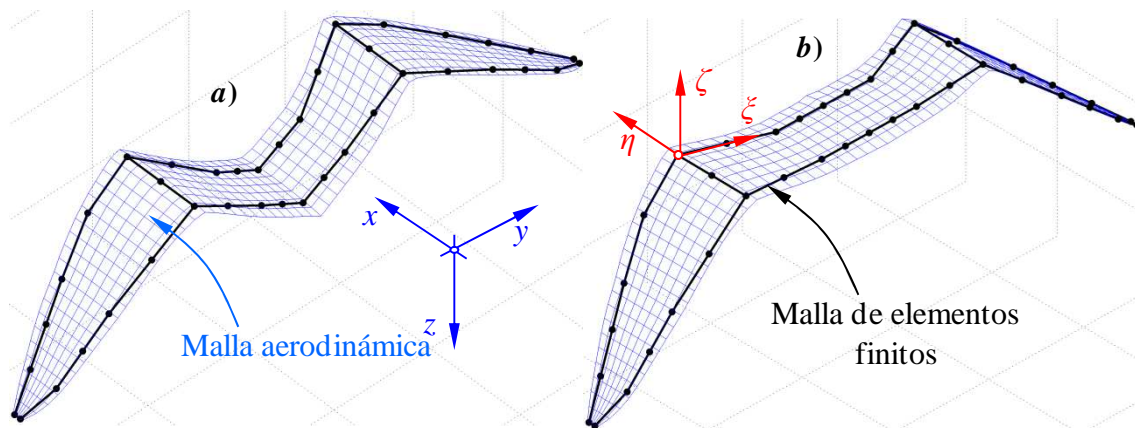


Figura 4-3: Malla de elementos finitos. Dos Configuraciones típicas: a) $\theta_B = -30^\circ$ $\theta_C = 30^\circ$ y b) $\theta_B = 0^\circ$ y $\theta_C = 30^\circ$.

En la Figura 4-3 se muestra una discretización típica de la estructura (malla de elementos finitos) superpuesta con la discretización de la superficie sustentadora (malla aerodinámica). En la misma se pueden observar dos configuraciones de la estructura obtenidas por medio de diferentes valores de los parámetros de configuración.

Las ecuaciones de movimiento se desarrollan para cada uno de los elementos de la estructura en el sistema local. Luego, tales ecuaciones se reescriben en el sistema global para obtener las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica de toda la estructura alar.

4.3.2. Interpolación del campo de desplazamientos

Las componentes del campo de desplazamiento de un elemento de viga tridimensional asociado a un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal (ξ, η, ζ) se puede escribir como,

$$\bar{\mathbf{u}} = \left\{ \bar{u}^\xi(\xi, \eta, \zeta; t) \quad \bar{u}^\eta(\xi, \eta, \zeta; t) \quad \bar{u}^\zeta(\xi, \eta, \zeta; t) \right\}^T \quad (4.2)$$

donde \bar{u}^ξ representa el desplazamiento longitudinal, \bar{u}^η y \bar{u}^ζ representan los desplazamientos transversales.

El campo de desplazamientos adoptado en este trabajo se basa en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, cuyas dos hipótesis cinemáticas fundamentales establecen que: *i*) la sección transversal de la viga no se deforma, y *ii*) las secciones transversales permanecen ortogonales al eje neutro (Han *et al.*, 1999). La primera hipótesis permite expresar el campo de desplazamientos en función de los desplazamientos incrementales del eje elástico de la viga. Asumiendo giros pequeños e ignorando la contribución del alabeo de las secciones (Géradin and Rixen, 2015) se puede escribir el campo de desplazamientos como,

$$\begin{aligned} \bar{u}^\xi(\xi, \eta, \zeta; t) &= \bar{u}_o^\xi(\xi; t) - \eta \theta_\zeta(\xi; t) + \zeta \theta_\eta(\xi; t) \\ \bar{u}^\eta(\xi, \eta, \zeta; t) &= \bar{u}_o^\eta(\xi; t) - \zeta \theta_\xi(\xi; t) \\ \bar{u}^\zeta(\xi, \eta, \zeta; t) &= \bar{u}_o^\zeta(\xi; t) + \eta \theta_\xi(\xi; t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\bar{u}_o^\xi(\xi; t)$, $\bar{u}_o^\eta(\xi; t)$ y $\bar{u}_o^\zeta(\xi; t)$ son los desplazamientos en la dirección ξ , η y ζ , respectivamente, de un punto arbitrario sobre el eje elástico. Es oportuno mencionar que el eje ξ es coincidente con el eje elástico de la viga. $\theta_\xi(\xi; t)$, $\theta_\eta(\xi; t)$, $\theta_\zeta(\xi; t)$ son los giros de la sección transversal (que contiene el punto sobre eje elástico antes citado) alrededor de los ejes ζ , η y ξ , respectivamente.

De acuerdo a las hipótesis establecidas por la teoría de Euler-Bernoulli, la relación entre los giros por flexión y los desplazamientos transversales del eje elástico está dada por,

$$\theta_\eta(\xi; t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \bar{u}_o^\zeta(\xi; t) \quad \theta_\zeta(\xi; t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{u}_o^\eta(\xi; t) \quad (4.4)$$

En el método de los elementos finitos, el campo de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ se aproxima usualmente como el producto entre una matriz de interpolación $[\mathbf{S}]$ que contiene un conjunto de funciones dependientes de ξ , η y ζ , y un arreglo \mathbf{u}_e que contiene los grados de libertad asociados a los nodos del elemento, conocido como vector de coordenadas nodales (Zienkiewicz, 1980; Bucalem y Bahte, 2011).

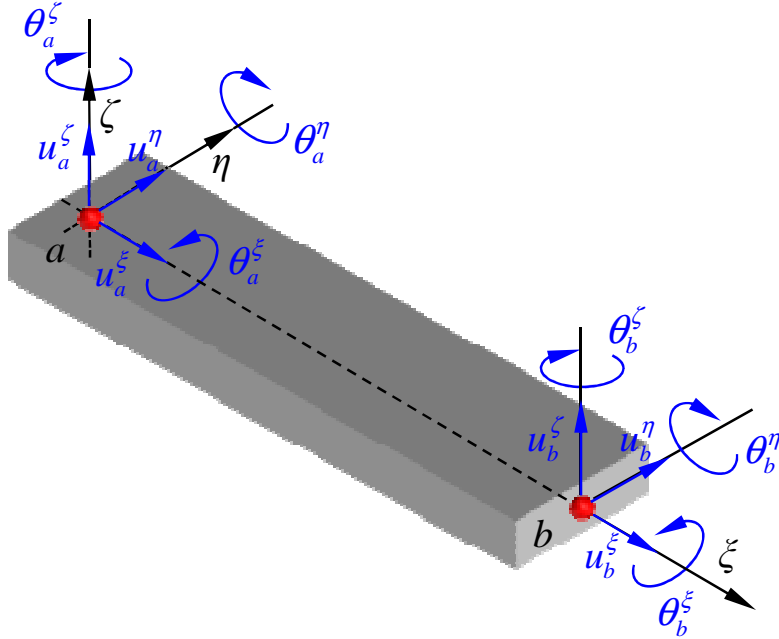


Figura 4-4: Elemento típico usado en la discretización y grados de libertad de los nodos.

El elemento utilizado en este trabajo posee dos nodos; y cada uno de ellos tiene asociado 6 grados de libertad, correspondientes a 3 desplazamientos y a 3 giros. En la Figura 4-4 se muestra un elemento típico y los grados de libertad asociados a los nodos ‘a’ y ‘b’ que determinan el inicio y el fin del elemento, respectivamente. Para el elemento aquí considerado los grados de libertad se expresan como,

$$\mathbf{u}_e = \{ u_a^\xi \quad u_a^\eta \quad u_a^\zeta \quad \theta_a^\xi \quad \theta_a^\eta \quad \theta_a^\zeta \quad u_b^\xi \quad u_b^\eta \quad u_b^\zeta \quad \theta_b^\xi \quad \theta_b^\eta \quad \theta_b^\zeta \}^T \quad (4.5)$$

donde el subíndice e hace referencia al elemento. Los subíndice a y b indican los grados de libertad asociados a los nodo a y b respectivamente.

A continuación se describe brevemente el procedimiento para construir la matriz de interpolación $[\mathbf{S}]$.

Primero, se seleccionan las funciones de forma (polinomios) acorde al número de grados de libertad por nodo del elemento. Posteriormente, estos polinomios se utilizan para interpolar los desplazamientos y giros del eje elástico del elemento de viga.

Debido a las relaciones cinemáticas entre desplazamientos transversales y giros (4.4), las funciones de forma elegidas para interpolar los desplazamientos transversales del eje elástico son polinomios cúbicos (polinomios de *Hermite*). El desplazamiento transversal $\bar{u}_o^\eta(\xi;t)$ incorpora como variables nodales a los desplazamientos transversales u_a^η, u_b^η y sus derivadas $\theta_a^\eta, \theta_b^\eta$. El desplazamiento transversal $\bar{u}_o^\zeta(\xi;t)$ se interpola de la misma manera considerando las variables nodales u_a^ζ, u_b^ζ y $\theta_a^\zeta, \theta_b^\zeta$. Los giros $\theta_\eta(\xi;t)$ y $\theta_\zeta(\xi;t)$ se obtienen desde la ecuación (4.4) una vez definidas las expresiones de $\bar{u}_o^\eta(\xi;t)$ y $\bar{u}_o^\zeta(\xi;t)$.

El desplazamiento longitudinal del eje elástico, $\bar{u}_o^\xi(\xi;t)$, se interpola mediante un polinomio de primer grado utilizando las variables nodales u_a^ξ, u_b^ξ . De la misma manera, el giro por torsión $\theta_\xi(\xi;t)$ se interpola, también, a través de un polinomio de primer grado, cuyas variables nodales son $\theta_a^\xi, \theta_b^\xi$.

En una segunda etapa, cuando las expresiones que interpolan a los desplazamientos y giros del eje elástico son conocidas, éstas se introducen dentro del campo de desplazamiento dado por la ecuación (4.2). Finalmente, es posible escribir al campo de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ como el producto entre una matriz, $[\mathbf{S}]$, y un vector columna que contiene las coordenadas nodales adoptadas (grados de libertad) \mathbf{u}_e .

$$\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{S}] \mathbf{u}_e \quad (4.6)$$

Es importante remarcar que tanto los grados de libertad \mathbf{u}_e , que representan los desplazamientos y giros del eje elástico en los nodos a y b , como el campo de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ están expresados en el sistema local (ξ, η, ζ) .

La matriz de interpolación $[\mathbf{S}]$ para el elemento utilizado en este trabajo está dada por la siguiente ecuación (Shabana, 2013),

$$[\mathbf{S}]^T = \begin{bmatrix} 1-\bar{\xi} & 0 & 0 \\ 6(\bar{\xi}-\bar{\xi}^2)\bar{\eta} & 1+2\bar{\xi}^3-3\bar{\xi}^2 & 0 \\ 6(\bar{\xi}-\bar{\xi}^2)\bar{\zeta} & 0 & 1+2\bar{\xi}^3-3\bar{\xi}^2 \\ 0 & (\bar{\xi}-1)\bar{\zeta}l & (1-\bar{\xi})\bar{\eta}l \\ -\bar{\zeta}l(4\bar{\xi}-3\bar{\xi}^2-1) & 0 & -l(\bar{\xi}^3-2\bar{\xi}^2+\bar{\xi}) \\ \bar{\eta}l(4\bar{\xi}-3\bar{\xi}^2-1) & l(\bar{\xi}^3-2\bar{\xi}^2+\bar{\xi}) & 0 \\ \bar{\xi} & 0 & 0 \\ -6(\bar{\xi}-\bar{\xi}^2)\bar{\eta} & 3\bar{\xi}^2-2\bar{\xi}^3 & 0 \\ -6(\bar{\xi}-\bar{\xi}^2)\bar{\zeta} & 0 & 3\bar{\xi}^2-2\bar{\xi}^3 \\ 0 & -\bar{\zeta}l\bar{\xi} & \bar{\eta}l\bar{\xi} \\ -\bar{\zeta}l(2\bar{\xi}-3\bar{\xi}^2) & 0 & -l(\bar{\xi}^3-\bar{\xi}^2) \\ \bar{\eta}l(2\bar{\xi}-3\bar{\xi}^2) & l(\bar{\xi}^3-\bar{\xi}^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde,

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{l} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{l} \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{l} \quad (4.8)$$

siendo l la longitud del elemento.

Es oportuno mencionar que la matriz $[\mathbf{S}]$ queda definida por: *i*) las funciones elegidas para interpolar los desplazamientos del eje elástico de la viga, y *ii*) el campo de desplazamiento propuesto para el elemento de viga tridimensional.

Por otro lado, el procedimiento utilizado para expresar finalmente el campo de desplazamiento (4.6) permite separar $\bar{\mathbf{u}}$ como el producto de una cantidad que depende solamente de las coordenadas espaciales (matriz de interpolación $[\mathbf{S}](\xi, \eta, \zeta)$) y un vector de coordenadas nodales dependiente únicamente de la variable temporal; arreglo $\mathbf{u}_e(t)$. Ésta separación permite calcular en forma sencilla la derivada temporal del campo de desplazamientos como,

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{u}}(\xi, \eta, \zeta; t) = \frac{d}{dt}([\mathbf{S}]\mathbf{u}_e) = [\mathbf{S}]\frac{d}{dt}\mathbf{u}_e = [\mathbf{S}]\dot{\mathbf{u}}_e \quad (4.9)$$

donde el punto sobre la variable \mathbf{u}_e representa la derivada temporal de los grados de libertad asociados al elemento. Como se verá mas adelante, la expresión (4.9) se utiliza para obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento.

4.3.3. Interpolación del campo de deformaciones

La relación cinemática entre el campo de deformaciones y el campo de desplazamientos se puede escribir en términos de la configuración de referencia (Tensor de deformación de Green-Lagrange) o de la configuración actual (Tensor de deformación de Almansi) (Shabana, 2008). La hipótesis de “deformaciones infinitesimales” implica que estos dos tensores son iguales y se pueden expresar como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_d = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (4.10)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformación de Green-Lagrange, $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ es el tensor de deformación de Almansi y $\mathbf{x} = (\zeta, \eta, \zeta)^T$.

De acuerdo a la teoría de viga utilizada, reemplazando en (4.2), y considerando la relación establecida en (4.4), se concluye que las únicas deformaciones no nulas son: la deformación axial en la dirección ζ (ε_{11}), y las deformaciones por corte en el plano $\eta\zeta$ denotadas por ε_{12} y ε_{13} . Estas tres deformaciones se arreglan en un vector \mathbf{e} que, de acuerdo a (4.10) puede escribirse como

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \bar{\mathbf{u}} \quad (4.11)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ es el campo de desplazamiento introducido anteriormente y $[\mathbf{D}]$ es un operador diferencial definido como

$$[\mathbf{D}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Reemplazando la expresión (4.6), que interpola el campo de desplazamientos, en (4.11) se obtiene

$$\mathbf{e} = [\mathbf{D}][\mathbf{S}]\mathbf{u}_e \quad (4.13)$$

Como \mathbf{u}_e no depende de las variables espaciales, el operador $[\mathbf{D}]$ actúa directamente sobre $[\mathbf{S}]$. A continuación se introduce la cantidad $[\mathbf{B}]$, comúnmente denominada matriz de interpolación de deformaciones (Bucalem y Bahte, 2011), definida como el “producto” del operador $[\mathbf{D}]$ y la matriz de interpolación $[\mathbf{S}]$, esto es, $[\mathbf{B}] = [\mathbf{D}][\mathbf{S}]$. Esta matriz permite reescribir la expresión (4.13) como,

$$\mathbf{e} = [\mathbf{B}]\mathbf{u}_e \quad (4.14)$$

Es importante recordar que las componentes del vector \mathbf{e} son aproximaciones de las deformaciones que están escritas en términos del vector de coordenadas nodales \mathbf{u}_e y de la matriz $[\mathbf{B}]$.

4.3.4. Ecuaciones de movimiento de un elemento

En presencia de deformaciones infinitesimales el determinante del tensor gradiente de deformación, $\partial \bar{\mathbf{u}} / \partial \mathbf{x}$, es aproximadamente igual a la unidad y como consecuencia es aceptable no distinguir entre el tensor de tensiones de Cauchy (referido a la configuración actual) y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (referido a la configuración de referencia). Sin embargo, en este trabajo se utiliza el segundo tensor de Piola-Kirchhoff (denotado como σ_{pm}) como tensor de tensiones asociado al tensor de deformación de Green-Lagrange definido anteriormente. Además, se asume que la tensión en cualquier punto del elemento de viga seleccionado varían linealmente con las deformaciones (es decir, la ley de Hooke es válida). Ésta última consideración permite expresar el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en función del tensor de Green-Lagrange como (Shabana, 2013),

$$\sigma_{pm} = \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.15)$$

donde $\bar{\mathbf{C}}$ es el tensor de constantes elásticas.

Teniendo en cuenta las únicas deformaciones no nulas, y utilizando la relación establecida en (4.15) se escribe la energía de deformación del elemento, U_e , como,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (E \varepsilon_{11}^2 + 4G \varepsilon_{12}^2 + 4G \varepsilon_{13}^2) d\Omega_e \quad (4.16)$$

donde Ω_e es el volumen del elemento. E y G son el módulo de elasticidad lineal y el módulo de corte transversal asociados al material de la estructura respectivamente. Estos módulos se relacionan mediante la siguiente ecuación,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.17)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson.

Luego definiendo la matriz $[\mathbf{E}]$ como

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 4G & 0 \\ 0 & 0 & 4G \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

y teniendo en cuenta el vector \mathbf{e} , que contiene las componentes no nulas del tensor de deformación, se puede reescribir la energía de deformación del elemento como

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{e}^T [\mathbf{E}] \mathbf{e} d\Omega_e \quad (4.19)$$

Por otro lado, la energía cinética del elemento, T_e , se escribe como

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho_b \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega_e \quad (4.20)$$

donde ρ_b es la densidad de la viga.

Reemplazando la ecuación (4.14) en (4.19) y por otro lado la ecuación (4.9) en (4.20), es posible expresar a U_e y T_e de la siguiente manera

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \left(\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] d\Omega_e \right) \mathbf{u}_e \quad (4.21)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \left(\int_{\Omega_e} \rho_b [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] d\Omega_e \right) \dot{\mathbf{u}}_e$$

Posteriormente se reemplazan las expresiones derivadas en (4.21), en las ecuaciones de Lagrange dadas por,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{\mathbf{u}}_e} \right) - \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{u}_e} + \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{f}_e \quad (4.22)$$

donde \mathbf{f}_e son las fuerzas generalizadas asociadas al elemento.

Luego de algunas manipulaciones matemáticas sencillas se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que puede expresarse de la siguiente manera

$$\left(\int_{\Omega_e} \rho_b [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] d\Omega_e \right) \ddot{\mathbf{u}}_e + \left(\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] d\Omega_e \right) \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (4.23)$$

donde $\ddot{\mathbf{u}}_e$ representa la derivada segunda de los grados de libertad con respecto al tiempo.

A continuación se definen la matriz de rigidez $[\mathbf{K}_e]$ y la matriz de masa $[\mathbf{M}_e]$ asociadas al elemento e como

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e] &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] d\Omega_e \\ [\mathbf{M}_e] &= \int_{\Omega_e} \rho_b [\mathbf{S}]^T [\mathbf{S}] d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.24)$$

las cuales se pueden utilizar para reescribir las ecuaciones de movimiento del elemento (4.23) como:

$$[\mathbf{M}_e] \ddot{\mathbf{u}}_e + [\mathbf{K}_e] \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (4.25)$$

4.3.5. Ecuaciones de movimiento de la estructura del ala

Las ecuaciones de movimiento de la estructura alar se obtienen mediante un procedimiento que permite ensamblar (Hughes, 2000) las ecuaciones de movimiento asociadas a cada uno de los elementos que componen el sistema estructural. Esto implica ensamblar las matrices de masa y de rigidez, y el vector de cargas nodales de cada elemento. Finalmente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que gobierna la dinámica de la estructura alar,

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_E(t) \quad (4.26)$$

donde \mathbf{u} es el vector que contiene todos los grados de libertad de la estructura, $[\mathbf{M}]$ y $[\mathbf{K}]$ son respectivamente las matrices de masa y de rigidez globales, y \mathbf{F}_E es el vector de carga que representa las fuerzas y momentos aplicados sobre los nodos estructurales. El vector de grados de libertad \mathbf{u} , las matrices de masa $[\mathbf{M}]$ y de rigidez $[\mathbf{K}]$, y el vector de carga \mathbf{F}_E se encuentran expresados en el sistema global (x, y, z) .

4.4. Reducción de dimensión de las ecuaciones de movimiento

Con el fin de reducir el número de ecuaciones del sistema, el vector $\mathbf{u}(t)$ de (4.26) se expande en términos de los modos de vibrar de la estructura. Esto permite considerar la cantidad de modos que son más influyentes en la respuesta de la estructura y consecuentemente reducir el número de ecuaciones a resolver.

Para obtener los modos de vibrar se debe resolver un problema de autovalores generalizado representado por la siguiente ecuación,

$$[\mathbf{K}][\tilde{\Phi}] = [\mathbf{M}][\tilde{\Phi}][\tilde{\Lambda}] \quad (4.27)$$

donde $[\tilde{\Phi}]$ es la matriz modal de dimensión $m \times m$ cuyas columnas son los m modos, de la estructura,

$$[\tilde{\Phi}] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_m] \quad (4.28)$$

$[\tilde{\Lambda}]$ es una matriz diagonal de dimensión $m \times m$ de la forma,

$$[\tilde{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_m^2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

donde ω_k^2 ($k = 1, \dots, m$) son los valores propios del problema de autovalores generalizado, siendo ω_k la frecuencia natural asociada al modo ϕ_k .

La expansión de la función $\mathbf{u}(t)$ en término de los modos de vibrar se representa matemáticamente de la siguiente manera

$$\mathbf{u}(t) \cong \sum_{k=1}^n Q_k(t) \phi_k = [\Phi] \mathbf{Q}(t) \quad (4.30)$$

donde

$$[\Phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (4.31)$$

es una matriz de dimensión $m \times n$ que contiene los primeros n modos de la estructura, y

$$\mathbf{Q}(t) = \{Q_1(t) \quad Q_2(t) \quad \cdots \quad Q_n(t)\}^T \quad (4.32)$$

es un vector columna de dimensión $n \times 1$, que contiene las coordenadas generalizadas del sistema dinámico. Es importante mencionar que $n \leq m$; la igualdad se produce al utilizar todos los modos computados por (4.27) para representar el movimiento de la estructura.

Introduciendo la ecuación (4.30) en (4.26) y pre-multiplicando por $[\Phi]^T$ se llega a

$$[\tilde{\mathbf{m}}] \ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\tilde{\mathbf{k}}] \mathbf{Q}(t) = [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (4.33)$$

donde $[\tilde{\mathbf{m}}]$ y $[\tilde{\mathbf{k}}]$ se obtienen de la siguiente manera,

$$[\tilde{\mathbf{m}}] = [\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] \quad [\tilde{\mathbf{k}}] = [\Phi]^T [\mathbf{K}] [\Phi] \quad (4.34)$$

y tienen la característica de ser matrices diagonales debido a la propiedad de ortogonalidad de los modos con respecto a la matrices de masa, $[\mathbf{M}]$, y de rigidez, $[\mathbf{K}]$.

Luego, pre-multiplicando ambos miembros de (4.33) por la inversa de la matriz $[\tilde{\mathbf{m}}]$ se llega a

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\tilde{\mathbf{k}}] \mathbf{Q}(t) = [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (4.35)$$

Se puede demostrar que,

$$[\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\tilde{\mathbf{k}}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} = [\Lambda] \quad (4.36)$$

donde $[\Lambda]$ es una matriz de $n \times n$ que tiene en su diagonal las primeras n frecuencias naturales elevadas al cuadrado.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir como,

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) + [\Lambda] \mathbf{Q}(t) = [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (4.37)$$

La adimensionalización de las ecuaciones (4.37) se obtiene introduciendo las magnitudes características definidas en el Capítulo 3. El tiempo físico, t , está relacionado con el tiempo adimensional \hat{t} a través del tiempo característico T_C de la siguiente manera,

$$t = T_C \hat{t} \quad (4.38)$$

Se introduce un nuevo conjunto de coordenadas generalizadas \mathbf{q} que son dependientes del tiempo adimensional,

$$\mathbf{q}(\hat{t}) = \mathbf{Q}[t(\hat{t})] = \mathbf{Q} \circ t(\hat{t}) \quad (4.39)$$

cuya derivada temporal se obtiene mediante la regla de la cadena, esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{q}(\hat{t}) &= \frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{Q}[t(\hat{t})] = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) \frac{dt}{d\hat{t}} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) T_C \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) &= \frac{1}{T_C} \frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{q}(\hat{t}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\hat{t}^2} \mathbf{q}(\hat{t}) &= \frac{d}{d\hat{t}} \left[\frac{d}{d\hat{t}} \mathbf{q}(\hat{t}) \right] = \frac{d}{d\hat{t}} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) T_C \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) T_C \right] \frac{dt}{d\hat{t}} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}(t) T_C^2 \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q}(t) &= \frac{1}{T_C^2} \frac{d^2}{d\hat{t}^2} \mathbf{q}(\hat{t}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Reemplazando la ecuación (4.41) y (4.39) en (4.37) se reescribe la ecuación de movimiento como,

$$\frac{1}{T_C^2} \frac{d^2}{d\hat{t}^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\Lambda] \mathbf{q}(\hat{t}) = [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (4.42)$$

Premultiplicando por T_C^2 en todos los términos de (4.42) se obtiene,

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + T_C^2 [\Lambda] \mathbf{q}(\hat{t}) = T_C^2 [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (4.43)$$

Luego el producto entre T_C^2 y $[\Lambda]$ se puede expresar como

$$T_C^2 [\Lambda] = \begin{bmatrix} T_C^2 \omega_1^2 & & & \\ & T_C^2 \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_C^2 \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

recordando la definición del tiempo característico $T_C = L_C / V_C$, se define la nueva matriz

$$[\hat{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{L_C \omega_1}{V_C} \right)^2 & & & \\ & \left(\frac{L_C \omega_2}{V_C} \right)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{L_C \omega_n}{V_C} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

donde $\hat{\omega}_k = \frac{L_C \omega_k}{V_C}$ para $k = 1, \dots, n$ son las frecuencias adimensionales o frecuencias reducidas del sistema.

Finalmente la ecuación de movimiento (4.43) se reescribe como:

$$\frac{d^2}{d\hat{t}^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = T_C^2 [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E(t) \quad (4.46)$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.46) ha sido escrito en una forma adimensional. Sin embargo el lado derecho aún contiene términos dimensionales. Las fuerzas generalizadas $\mathbf{F}_E(t)$ que dependen del tiempo físico provienen de la aerodinámica y se tratarán adecuadamente en el siguiente Capítulo.

Capítulo 5

Modelo aeroelástico

5.1. Generalidades

En este Capítulo se presenta el modelo aeroelástico que resulta de la combinación del modelo aerodinámico y el modelo estructural descritos en los Capítulos 3 y 4 respectivamente.

La metodología empleada para simular el comportamiento aeroelástico asociado a las alas reconfigurables utiliza el Método de Red Vórtices Inestacionario (UVLM) para resolver el problema aerodinámico y el Método de los Elementos Finitos (FEM) para resolver el problema estructural. La transferencia de información entre el módulo aerodinámico y el módulo estructural se realiza por medio de una versión modificada de la técnica desarrollada por Beckert y Wendland (2001), quienes presentaron un método para problemas de interacción fluido estructura cuya formulación es particularmente desarrollada para mallas provenientes de CFD. Esta técnica está basada en el concepto de interpolación multivariable mediante Funciones de Base Radial (*RBFs*).

A los fines de verificar la técnica basada en *RBFs*, adicionalmente, se implementa un método de transferencia de información que ha sido utilizado exitosamente para resolver problemas de aeroelasticidad (Preidikman, 1998; Hall *et al.*, 2001) demostrando su robustez para comunicar adecuadamente el UVLM con formulaciones de FEM. Sin embargo, este último método fue desarrollado específicamente para

modelar una estructura alar por medio de una única viga que se extiende a lo largo de la envergadura del ala, y por lo tanto resulta inadecuado para utilizarlo en estructuras que forman una especie de “red” como el caso tratado en este trabajo de tesis.

En la primera parte de este capítulo, Sección 5.2, se describen los métodos que permiten transferir información entre las dos mallas que componen el modelo aeroelástico. Luego en la Sección 5.3 se presentan las ecuaciones acopladas que describen el sistema dinámico. En la Sección 5.4 se describe el esquema de integración en el dominio del tiempo de las ecuaciones de movimientos acopladas. Finalmente, en la Sección 5.5 se expone como se integra el modelo aerodinámico dentro del esquema numérico general.

5.2. Métodos para la transferencia de información entre modelos

5.2.1. Introducción

La utilización de un esquema particionado o co-simulación para abordar un problema de aeroelasticidad no resulta una tarea trivial. En todos los casos se cuenta con dos algoritmos numéricos que tienen asociadas diferentes discretizaciones; la malla asociada al problema aerodinámico y la malla asociada al problema estructural.

La interacción entre los algoritmos numéricos se realiza transfiriendo información entre la malla aerodinámica (*MA*) y la malla estructural (*ME*). Por un lado resulta necesario transferir el estado de cargas desde la *MA* hacia la *ME*, y por el otro es necesario transferir los desplazamientos, velocidades y aceleraciones desde la *ME* hacia la *MA*.

Habitualmente, en los enfoques particionados, los algoritmos que son utilizados para resolver los dos problemas físicos involucran dos mallas que son topológicamente diferentes. Esto, en general, lleva a la necesidad de buscar alguna técnica para transferir información entre las mallas. Una manera de llevar a cabo la transferencia de información es a través de técnicas de interpolación.

5.2.2. El concepto básico del acoplamiento fluido-estructura

En este trabajo, la interacción entre el fluido y la estructura se expresa como una aproximación lineal mediante la introducción de una matriz de acoplamiento [\mathbf{G}_{AE}], que relaciona al campo de desplazamientos de la malla estructural con el campo de desplazamientos que experimenta la malla aerodinámica.

En la Figura 5-1 se muestra un esquema de la discretización del modelo aeroelástico, donde se observa una malla aerodinámica 2-D superpuesta con una malla estructural 1-D (elementos de viga).

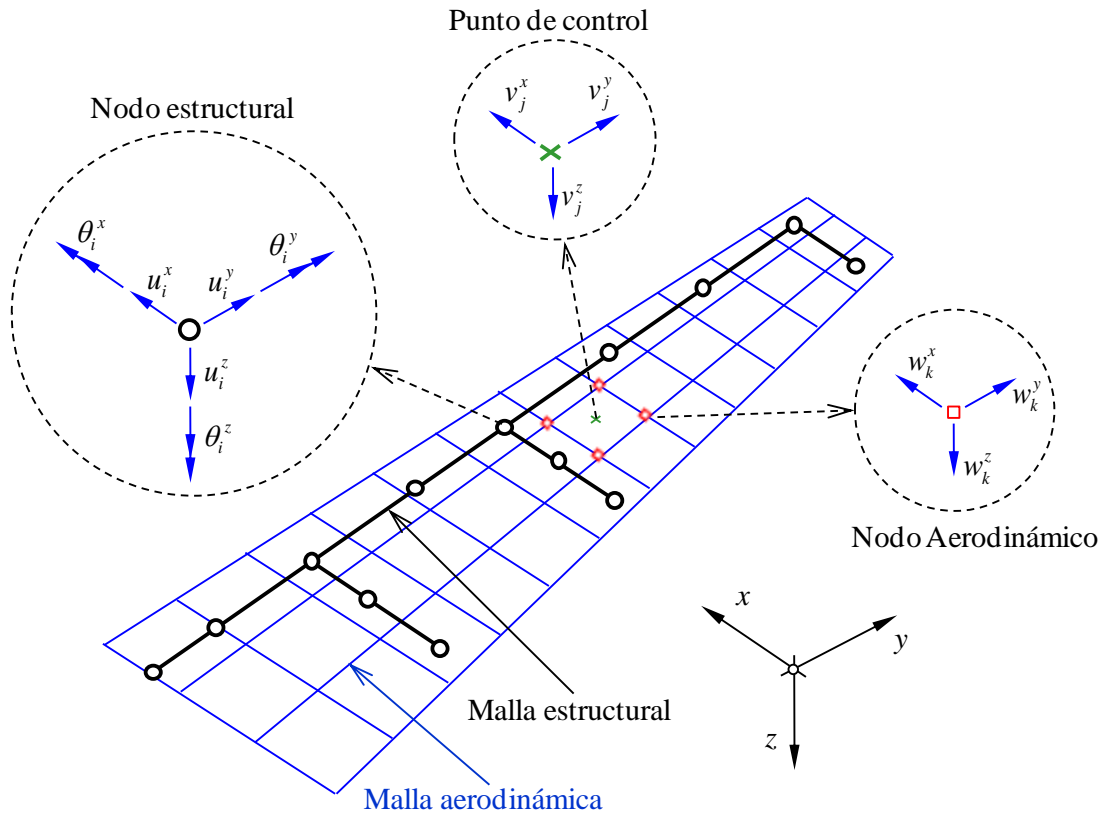


Figura 5-1: Malla Aerodinámica y Malla estructural.

A continuación se definen algunos vectores desplazamientos asociados a los nodos de la *ME* y de la *MA* que serán de utilidad en la formulación, y para ello se considera nuevamente el sistema de coordenadas cartesiano y ortogonal (x, y, z) que se introdujo en el Capítulo 2.

Un nodo estructural i correspondiente a la *ME* tiene asociado 6 grados de libertad que se arreglan en un vector \mathbf{u}_i de la siguiente manera

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^x \quad u_i^y \quad u_i^z \quad \theta_i^x \quad \theta_i^y \quad \theta_i^z\}^T \quad (5.1)$$

donde las primeras 3 componentes representan los desplazamientos en las direcciones de los ejes x, y, z ; de acuerdo a como lo indica el supra índice. Las últimas 3 componentes representan los giros con respecto a los ejes mencionados. El subíndice i hace referencia el nodo estructural i .

Por otro lado, un panel de la malla aerodinámica tiene asociado 4 nodos aerodinámicos y un punto de control (Figura 5-1). El vector desplazamiento para un nodo aerodinámico genérico k se representa por medio de un vector columna \mathbf{w}_k . Similarmente, el vector desplazamiento de un punto de control genérico j se representa por un vector columna \mathbf{v}_j . La forma de estos vectores es:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_k &= \{w_k^x \quad w_k^y \quad w_k^z\}^T \\ \mathbf{v}_j &= \{v_j^x \quad v_j^y \quad v_j^z\}^T\end{aligned}\quad (5.2)$$

donde las componentes de cada vector representan los desplazamientos en las direcciones de los ejes x, y, z según lo indica el supra índice.

Los vectores definidos en las ecuaciones (5.1) y (5.2) se pueden organizar en un vector de mayor dimensión que contenga todos los vectores asociados a cada uno de los nodos de la *MA* y de la *ME*, es decir,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{ne} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{na} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{pc} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

donde ne representa la cantidad de nodos estructurales, na representa la cantidad de nodos aerodinámicos y pc es la cantidad de puntos de control.

Es importante mencionar que las componentes del vector \mathbf{u} están organizadas acorde a las componentes del vector desplazamiento que aparece en la ecuación de movimiento (4.23) derivada en el Capítulo 4.

Una vez definida la organización de los vectores desplazamientos de la *MA* y los desplazamientos generalizados de la *ME*, se establece la siguiente relación entre ellos,

$$\mathbf{w} = [\mathbf{G}_{AE}^{NA}] \mathbf{u} \quad (5.4)$$

donde $[\mathbf{G}_{AE}^{NA}]$ es la matriz de acoplamiento que vincula a los grados de libertad de los nodos estructurales con los desplazamientos de los nodos aerodinámicos. El supra índice *NA* hace referencia a los nodos aerodinámicos.

De la misma manera, los puntos de control se relacionan con los desplazamientos nodales de la estructura como,

$$\mathbf{v} = [\mathbf{G}_{AE}^{PC}] \mathbf{u} \quad (5.5)$$

donde $[\mathbf{G}_{AE}^{PC}]$ es la matriz de acoplamiento que vincula a los grados de libertad de los nodos estructurales con los desplazamientos de los puntos de control. El supra índice *PC* hace referencia a los puntos de control.

Las fuerzas aerodinámicas \mathbf{F}_A aplicadas sobre los puntos de control se pueden transformar a un sistema de fuerzas \mathbf{F}_E aplicadas sobre los nodos estructurales. Para ello se requiere que ambos sistemas de fuerzas sean “estructuralmente equivalentes”, lo cual significa que deben realizar el mismo trabajo para cualquier desplazamiento virtual. Esto se expresa matemáticamente como

$$\delta\bar{W}_A = \delta\bar{W}_E \quad (5.6)$$

donde $\delta\bar{W}_A$ es el trabajo virtual realizado por las fuerzas aerodinámicas y $\delta\bar{W}_E$ es el trabajo virtual realizado por las fuerzas estructurales.

El trabajo virtual $\delta\bar{W}_A$ debido a un desplazamiento virtual de los puntos de control $\delta\mathbf{v}$ está dado por

$$\delta\bar{W}_A = (\delta\mathbf{v})^T \mathbf{F}_A. \quad (5.7)$$

Similarmente, el trabajo virtual realizado por las cargas estructurales, $\delta\bar{W}_E$, a través de un desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}$ es:

$$\delta\bar{W}_E = (\delta\mathbf{u})^T \mathbf{F}_E. \quad (5.8)$$

Por otro lado, la variación de la ecuación (5.5) es

$$\delta\mathbf{v} = [\mathbf{G}_{AE}^{PC}] \delta\mathbf{u}. \quad (5.9)$$

Reemplazando (5.9) en (5.7) se obtiene

$$\delta\bar{W}_A = (\delta\mathbf{u})^T [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A. \quad (5.10)$$

Luego, el requerimiento de equivalencia entre los dos sistemas de fuerza implica que el trabajo virtual realizado por ambos conjuntos de fuerza sea el mismo, esto es

$$\delta\bar{W}_A = \delta\bar{W}_E \Rightarrow (\delta\mathbf{u})^T [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A = (\delta\mathbf{u})^T \mathbf{F}_E, \quad (5.11)$$

o lo que es lo mismo

$$(\delta\mathbf{u})^T \left([\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A - \mathbf{F}_E \right) = 0. \quad (5.12)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación (5.12) se debe satisfacer para todo desplazamiento virtual arbitrario, se concluye que

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A. \quad (5.13)$$

Esta última ecuación permite transferir las fuerzas aerodinámicas que están aplicadas en los puntos de control en la *MA* hacia los nodos de la *ME*.

Diferentes métodos de transferencia de información pueden ser utilizados para determinar las matrices de acoplamiento $[\mathbf{G}_{AE}^{PC}]$ y $[\mathbf{G}_{AE}^{NA}]$.

5.2.3. Primer Método de Transferencia (PMT)

En esta sección se describe brevemente el método de transferencia propuesto por Preidikman (1998) que permite transmitir información entre el modelo estructural y el UVLM. Como se ha mencionado anteriormente, esta técnica fue particularmente desarrollada para modelar una estructura alar mediante una viga que se extiende a lo largo de la envergadura. En este método la matriz de acoplamiento depende de: *i*) la geometría de ambas mallas; *ii*) los puntos seleccionados de la malla aerodinámica; y *iii*) la clase particular de elemento finito utilizado para discretizar la estructura.

Para este primer método, la matriz que relaciona los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales con los desplazamientos de los nodos aerodinámicos se denota como $[\mathbf{G}_{AE}^{NA}]$, y la matriz que relaciona los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales con los desplazamientos de los puntos de control se denota como $[\mathbf{G}_{AE}^{PC}]$.

Determinación de la matriz ${}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}$

La idea básica consiste en conectar rígidamente los nodos aerodinámicos de la *MA* a puntos ubicados sobre el eje elástico de la estructura. Estos puntos son luego interpolados a través de los desplazamientos y giros nodales de la malla de elementos finitos. De esta manera, el desplazamiento de un nodo de la *MA* queda expresado en términos de los desplazamientos nodales de la *ME*.

Para explicar brevemente el procedimiento se considera que el eje y del sistema de referencia es coincidente con el eje elástico de la estructura.

Considérese un nodo k de la *MA* (ver Figura 5-2), cuyas coordenadas asociadas son (x_k, y_k, z_k) , el cual está contenido en un plano Π (normal al eje elástico). El plano Π corta al eje elástico en un punto E , el cual será utilizado como referencia para conectar rígidamente al nodo k con el modelo de elementos finitos.

Cuando la estructura se deforma, el punto E experimenta un desplazamiento \mathbf{u}_E y consecuentemente lo hace el nodo k . El desplazamiento de este nodo, \mathbf{w}_k , puede escribirse en términos de los desplazamientos y giros del punto E de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} w_k^x \\ w_k^y \\ w_k^z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_3 & -r_2 \\ 0 & 1 & 0 & -r_3 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 1 & r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^x \\ u_E^y \\ u_E^z \\ \theta_E^x \\ \theta_E^y \\ \theta_E^z \end{Bmatrix}, \quad (5.14)$$

donde r_1 , r_2 y r_3 son las componentes del vector posición, \mathbf{r} , del nodo k con respecto al punto E definido anteriormente (ver Figura 5-2). Al estar conectados rígidamente la distancia entre los puntos E y k no varía; es decir, el módulo del vector \mathbf{r} es constante.

El punto E se encuentra, en general, en el interior de un elemento finito definido por los nodos a y b . Debido a esto, los desplazamientos y giros correspondientes al punto E se pueden interpolar a través de los desplazamientos nodales asociados al elemento. Esta interpolación se efectúa en el sistema de referencia local (ξ, η, ζ) .

Una vez realizado el procedimiento de interpolación, los desplazamientos y giros del punto E son función de los desplazamientos generalizados de los nodos a y b . Luego, la ecuación (5.14) se puede reescribir en términos de los desplazamientos generalizados de los nodos a y b como sigue

$$\mathbf{w}_k = \left[\begin{array}{c} [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{ka} \\ \vdots \\ [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{kb} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \vdots \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{ka}$ y $[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{kb}$ son sub-matrices de dimensión 3×6 que relacionan a los desplazamientos del nodo aerodinámico k con los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales a y b respectivamente.

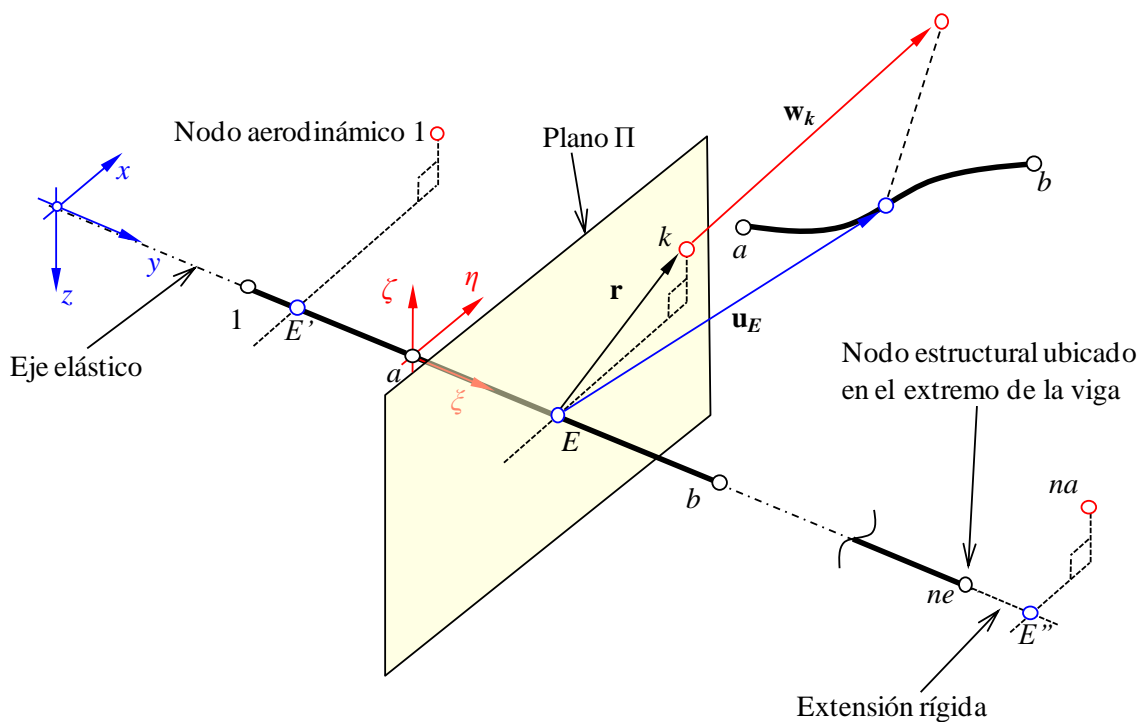


Figura 5-2: Interpretación geométrica del primer método de transferencia.

Es importante notar que el desplazamiento de un nodo aerodinámico siempre está en términos de, a lo sumo, el desplazamiento generalizado de dos nodos estructurales. En la Figura 5-2 se puede observar que el nodo aerodinámico 1 está vinculado a un punto E' del eje elástico que se encuentra en el interior del elemento finito definido por los nodos 1 y a . Por lo tanto los desplazamientos del nodo aerodinámico 1 se relaciona con los desplazamientos generalizados de los nodos 1 y a . Lo mismo sucede para el nodo aerodinámico k el cual está relacionado con los nodos estructurales a y b .

Puede existir el caso en que el plano Π que contiene a un nodo aerodinámico no intercepte al eje elástico (esto sucede en las puntas de las alas); por lo tanto el nodo aerodinámico no puede ser vinculado a un punto interior de un elemento finito. En este caso se realiza una extensión de la viga (extensión rígida), y de esa manera el desplazamiento del nodo aerodinámico queda en términos de los desplazamientos generalizados del nodo estructural ubicado en el extremo de la viga (ver detalles en Preidikman, 1998). En la Figura 5-2 se puede ver que el último nodo aerodinámico na está vinculado a un punto E'' perteneciente a la extensión rígida de la viga, y por lo tanto los desplazamientos de este nodo aerodinámico se relacionan, únicamente, con los desplazamientos generalizados del nodo estructural ne .

Si se realiza el procedimiento para todos los nodos aerodinámicos se puede ensamblar una matriz global y construir una relación entre los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos de la MA y los desplazamientos generalizados de todos los nodos estructurales de la ME .

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{na} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{11} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{1a} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{ka} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{kb} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{nane} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_a \\ \vdots \\ \mathbf{u}_b \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{ne} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz nula de 3×6 .

Finalmente, a partir de la ecuación (5.16) se define la matriz $[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]$ como

$$[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}] = \begin{bmatrix} [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{11} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{1a} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{ka} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{kb} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & [{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA}]_{nane} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Determinación de la matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{G}_{AE}^{PC} \end{bmatrix}$

Los desplazamientos correspondientes a los puntos de control se expresan en término de los desplazamientos generalizados de los nodos de la estructura siguiendo el procedimiento que se describirá a continuación.

Para cualquier panel de la malla aerodinámica la posición de su punto de control es (en el estado inicial y durante el movimiento) el promedio de las posiciones de sus nodos aerodinámicos. Además, el desplazamiento que experimenta el punto de control es igual al promedio de los desplazamientos de los nodos aerodinámicos asociados al panel.

La Figura 5-3 muestra un elemento típico de la malla aerodinámica con sus correspondientes nodos aerodinámicos (m, n, o, p) y su punto de control j .

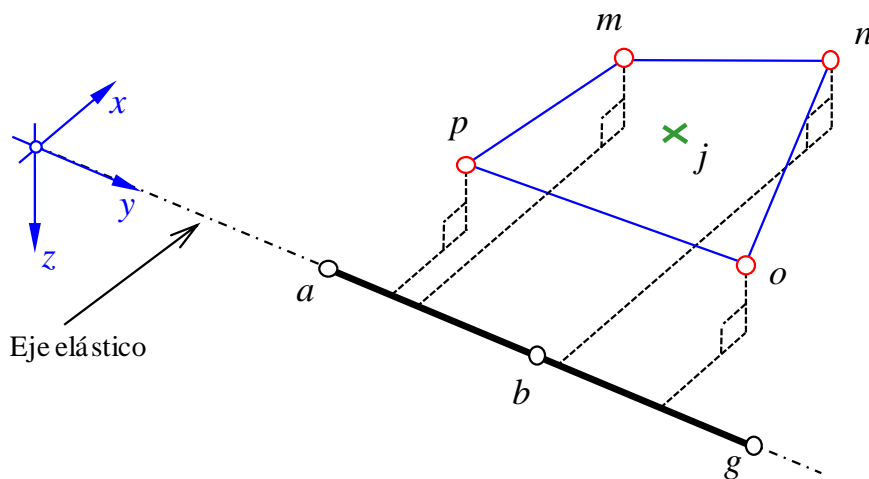


Figura 5-3: Relación entre puntos de control y nodos aerodinámicos.

El desplazamiento \mathbf{v}_j del punto de control j , como anteriormente se mencionó, se determina como el promedio de los desplazamientos de los nodos aerodinámicos m, n, o y p , esto es,

$$\mathbf{v}_j = \frac{1}{4}(\mathbf{w}_m + \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_o + \mathbf{w}_p), \quad (5.18)$$

o lo que es lo mismo

$$\left\{ \begin{array}{c} v_j^x \\ v_j^y \\ v_j^z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_m^x \\ w_m^y \\ w_m^z \\ \dots \\ w_n^x \\ w_n^y \\ w_n^z \\ \dots \\ w_o^x \\ w_o^y \\ w_o^z \\ \dots \\ w_p^x \\ w_p^y \\ w_p^z \end{array} \right\}, \quad (5.19)$$

donde (w_m^x, w_m^y, w_m^z) , (w_n^x, w_n^y, w_n^z) , (w_o^x, w_o^y, w_o^z) y (w_p^x, w_p^y, w_p^z) son las componentes de los desplazamientos de los nodos m , n , o y p , respectivamente.

La expresión (5.19) puede escribirse de una manera más compacta de la siguiente forma

$$\mathbf{v}_j = \left[\bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} \quad \bar{\mathbf{T}} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{w}_m \\ \dots \\ \mathbf{w}_n \\ \dots \\ \mathbf{w}_o \\ \dots \\ \mathbf{w}_p \end{array} \right\}, \quad (5.20)$$

donde

$$[\bar{\mathbf{T}}] = \frac{1}{4} [\mathbf{I}_3], \quad (5.21)$$

y $[\mathbf{I}_3]$ es la matriz identidad de dimensión 3×3 .

El mismo procedimiento se repite para todos los desplazamientos de los puntos de control. Luego se ensambla una matriz global $[\mathbf{T}]$ que permite relacionar los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos con los desplazamientos de todos los puntos de control, es decir

$$\mathbf{v} = [\mathbf{T}] \mathbf{w}. \quad (5.22)$$

Reemplazando (5.16) en (5.22) se obtiene

$$\mathbf{v} = [\mathbf{T}] \left[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA} \right] \mathbf{u} \quad (5.23)$$

que establece la relación entre los desplazamientos de los puntos control con los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales.

De la ecuación (5.23) y teniendo en cuenta a la ecuación (5.5) se concluye que,

$$\left[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{PC} \right] = [\mathbf{T}] \left[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{NA} \right] \quad (5.24)$$

5.2.4. Segundo Método de Transferencia (SMT)

En esta sección se presenta la formulación de una técnica basada en la utilización de *RBFs* que permite transferir información entre una malla de elementos finitos (concretamente una malla de elementos 1-D, o vigas) y una malla aerodinámica 2-D, específica del método de red de vórtices.

Una de las principales diferencias con respecto al primer método de transferencia descrito en la sección anterior, es que esta técnica utiliza como información para la interpolación únicamente los desplazamientos de los nodos de la estructura; es decir los giros correspondientes a estos nodos no son considerados. Sin embargo, la interpolación de un punto de la *MA* mediante *RBFs* es función de absolutamente todos los nodos de la *ME* (o una gran cantidad de ellos dependiendo de la función de base radial seleccionada).

En este método las matrices de acoplamiento ((5.4) y (5.5)) dependen de: *i*) la geometría de ambas mallas, y *ii*) de la función de base radial seleccionada para la interpolación.

El principio básico de la técnica consiste en generar una interpolación que permita escribir los desplazamientos de los puntos pertenecientes a la *MA* como una combinación lineal de todos los desplazamientos asociados a los nodos de la estructura.

Para este segundo método, la matriz que relaciona los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales con los desplazamientos de los nodos aerodinámicos se denota como $\left[{}^2\mathbf{G}_{AE}^{NA} \right]$, y la matriz que relaciona los desplazamientos generalizados de los nodos estructurales con los desplazamientos de los puntos de control se denota como $\left[{}^2\mathbf{G}_{AE}^{PC} \right]$.

Determinación de la matriz ${}^2\mathbf{G}_{AE}^{NA}$

Un problema de interpolación puede expresarse por medio de la utilización de *RBFs* (Wendland, 2005) como,

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{ne} \alpha_i \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^e|) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^e|) + \dots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ne}^e|) \quad (5.25)$$

Aquí s es la función de interpolación que se desea evaluar en el punto espacial $\mathbf{x} = \{x \ y \ z\}$, ϕ es la función de base radial seleccionada para interpolar, $\mathbf{x}_i^e = \{x_i^e \ y_i^e \ z_i^e\}$ es el vector posición del nodo estructural i , y α_i son los coeficientes a determinar. Notar que no se ha utilizado el polinomio opcional que se incluye en la ecuación (1.1) presentada en el Capítulo 1.

Si la función de interpolación s es generada a través de los desplazamientos transversales, en la dirección z , de los nodos de la *ME*, entonces los coeficientes α_i se determinan imponiendo la condición de que la función s devuelva el valor de los desplazamientos en la dirección z cuando s es evaluada en los nodos estructurales, $u_i^z = s(\mathbf{x}_i^e) \ i = 1, 2, \dots, ne$; esto es,

$$\begin{aligned} u_1^z &= s(\mathbf{x}_1^e) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_1^e|) + \dots + \alpha_i \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_i^e|) + \dots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ &\vdots \\ u_i^z &= s(\mathbf{x}_i^e) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_1^e|) + \dots + \alpha_i \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_i^e|) + \dots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ &\vdots \\ u_{ne}^z &= s(\mathbf{x}_{ne}^e) = \alpha_1 \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_1^e|) + \dots + \alpha_i \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_i^e|) + \dots + \alpha_{ne} \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \end{aligned} \quad (5.26)$$

La expresión (5.26) constituye un sistema de ne ecuaciones algebraicas lineales con ne incógnitas que permiten determinar los coeficientes α_i , para $i = 1, \dots, ne$. Este sistema puede escribirse en forma matricial como

$$[\mathbf{A}_{ee}] \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}^z \quad (5.27)$$

donde

$$[\mathbf{A}_{ee}] = \begin{bmatrix} \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{ne}^e - \mathbf{x}_{ne}^e|) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_{ne} \end{Bmatrix}; \mathbf{u}^z = \begin{Bmatrix} u_1^z \\ \vdots \\ u_i^z \\ \vdots \\ u_{ne}^z \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

Notar que el nuevo vector \mathbf{u}^z contiene el desplazamiento en la dirección z de todos los nodos estructurales. La solución para $\boldsymbol{\alpha}$ se puede expresar en forma simbólica como

$$\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{A}_{ee}]^{-1} \mathbf{u}^z \quad (5.29)$$

Una vez resuelto el sistema lineal expresado en (5.27) se reconstruye la función de interpolación s . Luego se evalúa la función s en las coordenadas asociadas a los nodos aerodinámicos, $\mathbf{x}_k^a = \{x_k^a \quad y_k^a \quad z_k^a\}$ $k=1,2,\dots,na$, y se determinan los desplazamientos de tales nodos. Es decir,

$$\mathbf{w}^z = [\mathbf{A}_{ea}] \boldsymbol{\alpha} \quad (5.30)$$

donde

$$[\mathbf{A}_{ae}] = \begin{bmatrix} \phi(|\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_k^a - \mathbf{x}_{ne}^e|) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(|\mathbf{x}_{na}^a - \mathbf{x}_1^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{na}^a - \mathbf{x}_i^e|) & \cdots & \phi(|\mathbf{x}_{na}^a - \mathbf{x}_{ne}^e|) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}^z = \begin{Bmatrix} w_1^z \\ \vdots \\ w_k^z \\ \vdots \\ w_{na}^z \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Luego reemplazando (5.29) en (5.30) se obtiene

$$\mathbf{w}^z = ([\mathbf{A}_{ae}] [\mathbf{A}_{ee}]^{-1}) \mathbf{u}^z \quad (5.32)$$

Con el objetivo de compactar la expresión (5.32) se define la matriz $[\mathbf{H}]$ como

$$[\mathbf{H}] = ([\mathbf{A}_{ae}] [\mathbf{A}_{ee}]^{-1}) \quad (5.33)$$

Con lo cual la ecuación (5.32) se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathbf{w}^z = [\mathbf{H}] \mathbf{u}^z \quad (5.34)$$

La expresión (5.34) permite obtener el desplazamiento de los nodos aerodinámicos “en la dirección z ” mediante los desplazamientos de traslación de los nodos estructurales “en la dirección z ”. Resulta más que importante volver a resaltar que la matriz $[\mathbf{H}]$ depende de las coordenadas de los nodos de la ME , de las coordenadas de los nodos aerodinámicos correspondiente a la MA y de la función de base radial adoptada para llevar a cabo la interpolación. Por otro lado, el procedimiento para interpolar los desplazamientos de los nodos aerodinámicos en las otras direcciones (x e y), conocidos los desplazamientos los nodos de la estructura en la dirección x e y , se materializa por medio de una relación similar a la expresión (5.34) que involucra a la misma matriz $[\mathbf{H}]$; con la condición que se utilice la misma función de base radial. Entonces, es posible escribir el desplazamiento de todos los nodos aerodinámicos de la MA en términos de los desplazamientos de todos los nodos de la estructura como

$$\begin{bmatrix} w_1^x & w_1^y & w_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_k^x & w_k^y & w_k^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{na}^x & w_{na}^y & w_{na}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1i} & \cdots & h_{1ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{ki} & \cdots & h_{kne} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{na1} & \cdots & h_{ni} & \cdots & h_{nne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^x & u_1^y & u_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i^x & u_i^y & u_i^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{ne}^x & u_{ne}^y & u_{ne}^z \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

donde h_{ki} (para $i=1,\dots,ne$ y $k=1,\dots,na$) son los elementos de la matriz $[\mathbf{H}]$.

La ecuación (5.35) permite relacionar los desplazamiento de todos los nodos de la ME con los desplazamientos de todos los nodos de la MA . Sin embargo, es posible observar que la organización de las componentes asociadas a los desplazamientos es diferente a la presentada en la ecuación (5.4).

Utilizando la ecuación (5.35) se puede escribir el desplazamiento del nodo aerodinámico k como

$$\begin{aligned} \left\{ w_k^x \quad w_k^y \quad w_k^z \right\} &= h_{k1} \left\{ u_1^x \quad u_1^y \quad u_1^z \right\} + \cdots + \\ &+ h_{ki} \left\{ u_i^x \quad u_i^y \quad u_i^z \right\} + \cdots + h_{kne} \left\{ u_{ne}^x \quad u_{ne}^y \quad u_{ne}^z \right\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Trasponiendo la ecuación anterior se tiene

$$\begin{Bmatrix} w_k^x \\ w_k^y \\ w_k^z \end{Bmatrix} = h_{k1} \begin{Bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_1^z \end{Bmatrix} + \cdots + h_{ki} \begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{Bmatrix} + \cdots + h_{kne} \begin{Bmatrix} u_{ne}^x \\ u_{ne}^y \\ u_{ne}^z \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_k^x \\ \mathbf{w}_k^y \\ \mathbf{w}_k^z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{ne} h_{ki} \begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

El desplazamiento del nodo aerodinámico k , expresado como combinación lineal de los desplazamientos de los nodos estructurales, se puede escribir incluyendo los giros nodales de la siguiente manera,

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^{ne} [\mathbf{G}^{wu}]_{ki} \mathbf{u}_i \quad (5.39)$$

donde,

$$[\mathbf{G}^{wu}]_{ki} = \begin{bmatrix} h_{ki} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{ki} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{ki} & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \\ \theta_i^x \\ \theta_i^y \\ \theta_i^z \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

$[\mathbf{G}^{wu}]_{ki}$ es una sub matriz que relaciona los desplazamientos generalizados del nodo estructural i con los desplazamientos del nodo aerodinámico k .

Realizando este procedimiento para los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos, se puede ensamblar una matriz global que permite relacionar los desplazamientos generalizados de todos los nodos estructurales con los desplazamientos de todos los nodos aerodinámicos de la siguiente manera,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{na} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_{AE}^{NA}]^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{ne} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

donde,

$$\left[{}^2\mathbf{G}_{AE}^{NA} \right] = \begin{bmatrix} \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{11} & \cdots & \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{1i} & \cdots & \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{1ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{k1} & \cdots & \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{ki} & \cdots & \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{kne} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{na1} & \cdots & \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{nai} & \cdots & \left[\mathbf{G}^{wu} \right]_{nane} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Determinación de la matriz $\left[{}^2\mathbf{G}_{AE}^{PC} \right]$

La matriz que relaciona los desplazamientos de los puntos de control con los desplazamientos generalizados de los nodos de la estructura se obtiene en forma similar que la matriz $\left[{}^1\mathbf{G}_{AE}^{PC} \right]$, derivada para el primer método de transferencia. El procedimiento para obtener tal matriz se desarrolla a partir de la matriz de acoplamiento asociada a los nodos aerodinámicos, y por lo tanto, este procedimiento resulta independiente del método de transferencia utilizado.

$$\left[{}^2\mathbf{G}_{AE}^{PC} \right] = \left[\mathbf{T} \right] \left[{}^2\mathbf{G}_{AE}^{NA} \right] \quad (5.43)$$

Elección de la función de base radial

La elección de la función de base radial para llevar a cabo la interpolación introduce una variable mas a controlar en la resolución del problema de interacción fluido estructura. En este trabajo, para llevar a cabo las simulaciones numéricas se escogió la función *inverse multiquadric* (Beckert y Wendland, 2001) que se presenta en la Tabla 1.1. Esta función está caracterizada por un parámetro p_k que permite ajustar la interpolación, y se seleccionó, principalmente, por su comportamiento decreciente.

La utilización de valores relativamente grandes para p_k pueden provocar distorsiones en la malla aerodinámica como se muestra en las Figura 5-4e y 5-4f. Esta distorsión se debe a que el número de condición de la matriz $\left[\mathbf{A}_{ee} \right]$, ecuación (5.28), aumenta dramáticamente como consecuencia de un valor elevado de p_k , y por lo tanto la solución del sistema lineal asociado presenta serios problemas numéricos (Buhmann, 2004). Si se analiza la expresión asociada a los elementos de $\left[\mathbf{A}_{ee} \right]$, para el caso de una función *inverse multiquadric*, se puede observar que para valores de r despreciables comparados

con p_k , la matriz $[A_{ee}]$ tiende a ser una matriz con todos sus elementos igual a $1/p_k$ y por lo tanto singular.

Valores muy pequeños de p_k concentra demasiado la influencia sobre nodos cercanos y atenúa excesivamente la contribución de nodos alejados provocando que la superficie aerodinámica presente irregularidades y no se deforme de manera continua de acuerdo a como la hace la estructura alar (Figura 5-4a y 5-4b).

Las Figura 5-4c y 5-4d muestran la deformación de la malla estructural y de la malla aerodinámica para un valor adecuado del parámetro p_k . Se puede observar como la malla aerodinámica se deforma de manera suave adaptándose a las curvas que caracterizan a la deformada de la estructura.

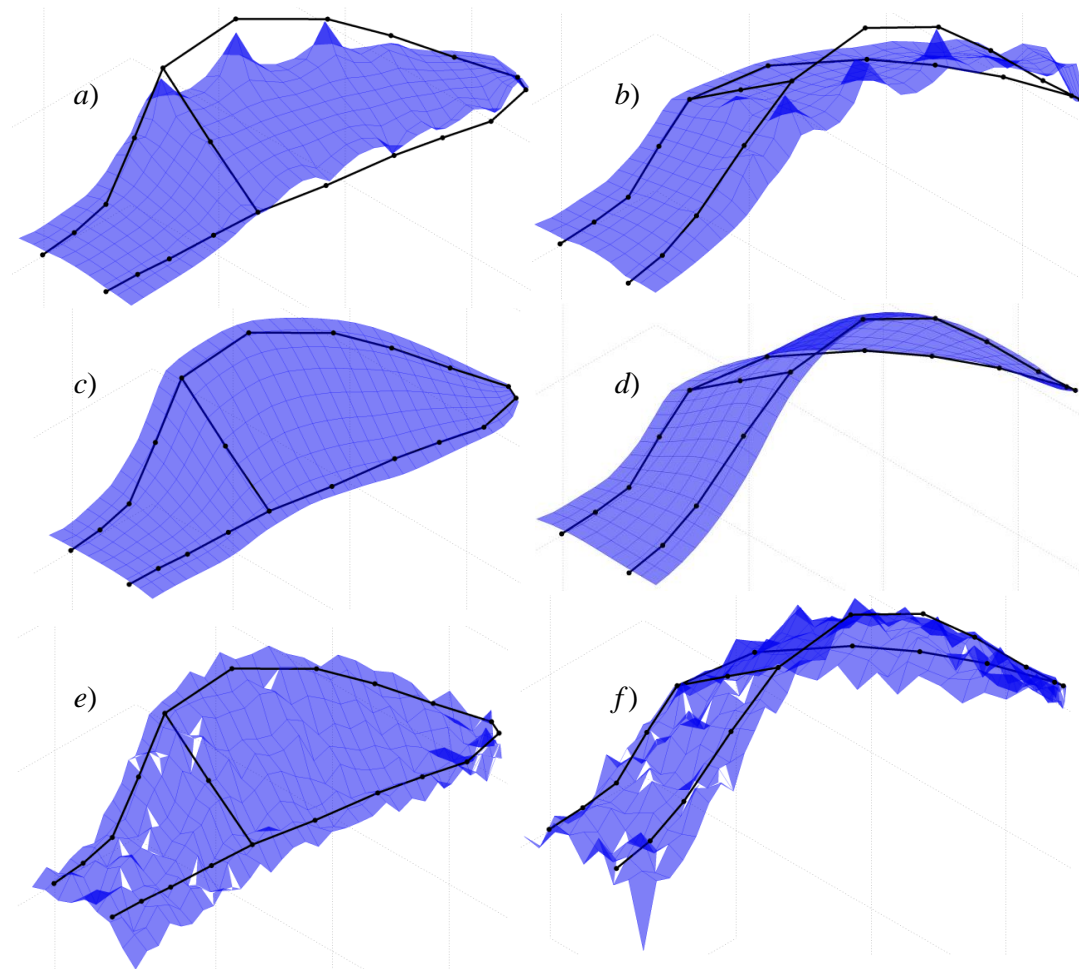


Figura 5-4: a) 2^{do} modo para un pequeño valor de p_k . b) 4^{to} modo para un pequeño valor de p_k . c) 2^{do} modo para un adecuado valor de p_k . d) 4^{to} modo para un adecuado valor de p_k . e) 2^{do} modo para un elevado valor de p_k . f) 4^{to} modo para un elevado valor de p_k .

Algunos comentarios sobre la técnica de transferencia

Es importante destacar la simple expresión de la matriz, ecuación (5.40), que relaciona a los desplazamientos de un nodo aerodinámico con los desplazamientos generalizados de un nodo estructural, la cual se obtiene una vez construida la matriz $[\mathbf{H}]$. El mayor esfuerzo en computar a $[\mathbf{H}]$ está asociado a la determinación de la inversa de la matriz $[\mathbf{A}_{ee}]$ definida en la ecuación (5.33) cuya dimensión es $(ne \times ne)$. El cómputo de $[\mathbf{H}]$, que se realiza una sola vez para toda la simulación, resulta insignificante frente al tiempo que requiere un paso de cálculo de la simulación aeroelástica.

La incorporación de un aspecto más a controlar en el problema de interacción fluido estructura (la selección de la función de base radial y el parámetro de ajuste adicional) introduce otra variable más para la calibración de la herramienta numérica, y esto puede ser considerado como una desventaja.

Una ventaja interesante en la interpolación mediante funciones de base radial es la no dependencia de un arreglo de conectividades (solo se necesitan las coordenadas de los nodos de ambas mallas) siendo, por lo tanto, independiente del elemento finito utilizado en la discretización. Este hecho permite incorporar otros elementos estructurales sin la necesidad de derivar nuevamente las relaciones para transferir información entre la *MA* y la *ME*.

5.3. Acoplamiento de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento que se obtuvieron en el Capítulo 4 se repiten a continuación,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = T_C^2 [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T \mathbf{F}_E \quad (5.44)$$

De acuerdo al desarrollo presentado en la sección (5.2.2) las fuerzas aerodinámicas son transferidas como un sistema equivalente de fuerzas aplicada en los nodos de la *ME* mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A \quad (5.45)$$

Introduciendo (5.45) en (5.44) se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = T_C^2 [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AE}^{PC}]^T \mathbf{F}_A \quad (5.46)$$

La fuerza aerodinámica \mathbf{F}_A que actúa sobre el panel k de la red de vórtices se determina como

$$\{\mathbf{F}_k\}_A = \Delta p_k A_k \hat{\mathbf{n}}_k \quad (5.47)$$

donde Δp es el salto de presión a través del panel en el punto de control k , y es definido como la presión inmediatamente por debajo del punto de control del panel menos la presión por encima del punto de control panel. Este salto de presión es obtenido mediante el uso de la ecuación de Bernoulli para flujos no estacionarios, como se describió en el Capítulo 3. A_k es el área del panel k y $\hat{\mathbf{n}}_k$ es el vector unitario normal al panel en el punto de control k .

Haciendo uso de la definición del coeficiente de presión C_p , se puede escribir el salto de presión como

$$\Delta p = (\Delta C_p)_k \frac{1}{2} \rho_C V_C^2 \quad (5.48)$$

Utilizando la longitud característica L_C se puede determinar el área física en términos del área adimensional como

$$A_k = L_C^2 \hat{A}_k \quad (5.49)$$

Introduciendo la ecuación (5.48) y (5.49) en (5.47) se llega a

$$\{\mathbf{F}_k\}_A = \frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 (\Delta C_p)_k \hat{A}_k \hat{\mathbf{n}}_k \quad (5.50)$$

Luego se define la fuerza aerodinámica adimensional que actúa sobre el panel k como

$$\{\hat{\mathbf{F}}_k\}_A = (\Delta C_p)_k \hat{A}_k \hat{\mathbf{n}}_k \quad (5.51)$$

Utilizando (5.52) en conjunto con la expresión (5.50) se obtiene

$$\{\mathbf{F}_k\}_A = \frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 \{\hat{\mathbf{F}}_k\}_A \quad (5.52)$$

Extendiendo esta idea a todos los paneles que forman la malla aerodinámica se tiene

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{NP} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_k \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{NP} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$\mathbf{F}_A = \left(\frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 \right) \hat{\mathbf{F}}_A$$

donde NP es el número de paneles en la malla aerodinámica.

Finalmente, substituyendo la expresión (5.53) en (5.46),

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = \left(\frac{1}{2} \rho_C L_C^2 V_C^2 T_C^2 \right) [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AS}^{CP}]^T \hat{\mathbf{F}}_A \quad (5.54)$$

y considerando la relación que existe entre las variables características $L_C = V_C T_C$, se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q}(\hat{t}) + [\hat{\Lambda}] \mathbf{q}(\hat{t}) = \left(\frac{1}{2} \rho_C L_C \right) [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AS}^{CP}]^T \hat{\mathbf{F}}_A \quad (5.55)$$

que es la ecuación diferencial de movimiento que gobierna la dinámica del sistema aeroelástico.

5.4. Integración temporal de las ecuaciones de movimiento

Con el fin de integrar iterativa y simultáneamente en el dominio del tiempo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias expresado en (5.55) se implementa un esquema de integración numérica basado en el método predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming (Carnahan *et al.*, 1969; Preidikman, 1998).

La primera razón por la que se eligió este método, el cual sincroniza la información en el tiempo entre el UVLM y el FEM, es que el modelo aerodinámico funciona mejor cuando las cargas son sólo evaluadas en pasos enteros de tiempo de integración. La segunda razón es que las cargas aerodinámicas contienen contribuciones que son proporcionales a la aceleración, dando lugar al llamado efecto de masa agregada. Estos hechos hacen que la implementación de un método tipo Runge-Kutta no sea adecuado,

sin embargo los métodos predictores correctores, usando iteración, pueden tratar la aceleración en ambos lado de la ecuación diferencial y no evalúan las cargas en fracciones de tiempo.

El primer paso consiste en escribir las n ecuaciones diferenciales de segundo orden como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma,

$$\dot{\mathbf{y}}(\hat{t}) = \mathbf{F}[\mathbf{y}(\hat{t}); \hat{t}] \quad (5.56)$$

El vector \mathbf{y} es una cantidad adimensional, y el punto sobre este indica la derivada primera con respecto al tiempo adimensional \hat{t} .

Si se definen las variables auxiliares,

$$\mathbf{y}_1(\hat{t}) = \mathbf{q}(\hat{t}) \quad \mathbf{y}_2(\hat{t}) = \dot{\mathbf{q}}(\hat{t}) \quad (5.57)$$

El vector \mathbf{y} toma la siguiente forma,

$$\mathbf{y}(\hat{t}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1(\hat{t}) \\ \mathbf{y}_2(\hat{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(\hat{t}) \\ \dot{\mathbf{q}}(\hat{t}) \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

Derivando la ecuación (5.58) con respecto al tiempo adimensional, se puede escribir que

$$\dot{\mathbf{y}}(\hat{t}) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(\hat{t}) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(\hat{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(\hat{t}) \\ \ddot{\mathbf{q}}(\hat{t}) \end{Bmatrix} \quad (5.59)$$

Considerando las ecuaciones (5.55) y (5.57) se puede escribir la expresión (5.59) de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(\hat{t}) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(\hat{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_2(\hat{t}) \\ -[\hat{\Lambda}] \mathbf{y}_1(\hat{t}) + \left(\frac{1}{2} \rho_c L_c^4\right) [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AS}^{CP}]^T \hat{\mathbf{F}}_A \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

La forma explícita del término \mathbf{F} que aparece en (5.56) entonces resulta

$$\mathbf{F}[\mathbf{y}(\hat{t}); \hat{t}] = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_2(\hat{t}) \\ -[\hat{\Lambda}] \mathbf{y}_1(\hat{t}) + \left(\frac{1}{2} \rho_c L_c^4\right) [\tilde{\mathbf{m}}]^{-1} [\Phi]^T [\mathbf{G}_{AS}^{CP}]^T \hat{\mathbf{F}}_A \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

Una vez obtenida la forma explícita de la ecuación (5.56), se comienza con el proceso de integración numérica. Se define a la solución en el tiempo t_j como

$$\hat{t}_j = j\Delta\hat{t} \quad \mathbf{y}^j = \mathbf{y}(\hat{t}_j) \quad \mathbf{F}^j = \mathbf{F}(\mathbf{y}^j; \hat{t}_j) \quad (5.62)$$

El algoritmo de integración puede describirse brevemente como:

1. En $\hat{t}_0 \equiv \hat{t} = 0$ la solución se construye a partir de las condiciones iniciales \mathbf{y}^0 (datos del problema).
2. En $\hat{t}_1 \equiv \hat{t} = \Delta\hat{t}$ se predice la solución, ${}^p\mathbf{y}^1$, mediante el *Método de Euler*.
3. Con ${}^p\mathbf{y}^1$ utilizando el *Método de Euler Modificado* se obtiene la solución corregida \mathbf{y}^1 . Se propone ${}^1\mathbf{y}^1 = {}^p\mathbf{y}^1$ y la solución se corrige iterativamente hasta satisfacer $\|{}^{k+1}\mathbf{y}^1 - {}^k\mathbf{y}^1\|_\infty < \varepsilon$, donde k indica el número de iteración, ε es una tolerancia establecida, y $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma vectorial infinito. Una vez satisfecha la condición de tolerancia se tiene la solución en el primer paso de tiempo

$$\mathbf{y}^1 = {}^{k+1}\mathbf{y}^1 \quad (5.63)$$

4. En $\hat{t}_2 \equiv \hat{t} = 2\Delta\hat{t}$ se predice la solución, ${}^p\mathbf{y}^2$, mediante el *Método Predictor de dos pasos de Adams-Bashfort*.
5. Con ${}^p\mathbf{y}^2$ utilizando el *Método de dos pasos de Adams-Moulton* se obtiene la solución corregida \mathbf{y}^2 . Se propone ${}^1\mathbf{y}^2 = {}^p\mathbf{y}^2$ y la solución se corrige iterativamente hasta satisfacer $\|{}^{k+1}\mathbf{y}^2 - {}^k\mathbf{y}^2\|_\infty < \varepsilon$, donde k indica el número de iteración. Una vez satisfecha la condición de tolerancia se tiene la solución en el segundo paso de tiempo

$$\mathbf{y}^2 = {}^{k+1}\mathbf{y}^2 \quad (5.64)$$

6. En $\hat{t}_3 \equiv \hat{t} = 3\Delta\hat{t}$ se predice la solución, ${}^p\mathbf{y}^3$, mediante el *Método de tres pasos de Adams-Bashfort*.
7. Con ${}^p\mathbf{y}^3$ utilizando el *Método de tres pasos de Adams-Moulton* se obtiene la solución corregida \mathbf{y}^3 . Se propone ${}^1\mathbf{y}^3 = {}^p\mathbf{y}^3$ y la solución se corrige iterativamente hasta satisfacer $\|{}^{k+1}\mathbf{y}^3 - {}^k\mathbf{y}^3\|_\infty < \varepsilon$, donde k indica el número de iteración. Una vez satisfecha la condición de tolerancia se tiene la solución en el tercer paso de tiempo,

$$\mathbf{y}^3 = {}^{k+1}\mathbf{y}^3 \quad (5.65)$$

Aquí se debe evaluar, por primera vez, el error de truncamiento local

$$\mathbf{e}_T^3 = \mathbf{y}^3 - {}^p\mathbf{y}^3 \quad (5.66)$$

8. Para $\hat{t}_j \equiv \hat{t} = j\Delta t$, con $j \geq 4$ se obtiene la solución mediante el *Método Predictor-Corrector de Hamming modificado de cuarto orden*.

Primero se predice la solución ${}^p\mathbf{y}^j$ con la siguiente ecuación,

$${}^p\mathbf{y}^j = \mathbf{y}^{j-4} + \frac{4}{3}\Delta t \left(2\mathbf{F}^{j-1} - \mathbf{F}^{j-2} + 2\mathbf{F}^{j-3} \right) \quad (5.67)$$

Luego esta solución se modifica con el error de truncamiento local \mathbf{e}_T^{j-1} para obtener ${}^1\mathbf{y}^j$ como sigue

$${}^1\mathbf{y}^j = {}^p\mathbf{y}^j + \frac{112}{9}\mathbf{e}_T^{j-1} \quad (5.68)$$

Finalmente la solución modificada es corregida iterativamente utilizando la siguiente ecuación de corrección,

$${}^{k+1}\mathbf{y}^j = \frac{1}{8} \left[9\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{y}^{j-3} + 3\Delta t \left({}^k\mathbf{F}^j + 2\mathbf{F}^{j-1} - \mathbf{F}^{j-2} \right) \right] \quad (5.69)$$

donde

$${}^k\mathbf{F}^j = \mathbf{F} \left({}^k\mathbf{y}^j; \hat{t}_j \right) \quad (5.70)$$

Las iteraciones se efectúan hasta satisfacer $\|{}^{k+1}\mathbf{y}^j - {}^k\mathbf{y}^j\|_\infty < \varepsilon$, donde k indica el número de iteración. Una vez satisfecha la condición de tolerancia se estima el error de truncamiento en el paso j

$$\mathbf{e}_T^j = \frac{9}{121} \left({}^{k+1}\mathbf{y}^j - {}^p\mathbf{y}^j \right) \quad (5.71)$$

Finalmente la solución en el tiempo j se determina como

$$\mathbf{y}^j = {}^{k+1}\mathbf{y}^j - \mathbf{e}_T^j \quad (5.72)$$

El procedimiento descrito en el punto 8 se repite tantas veces como se desee.

De esta manera queda descrita la integración en el dominio del tiempo de las ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan la dinámica del sistema aeroelástico.

5.5. Integración del modelo aerodinámico dentro del esquema numérico

Durante un paso de tiempo $\Delta\hat{t}$, las estelas se convectan a sus nuevas posiciones satisfaciendo el requerimiento que establece que la vorticidad se transporta conjuntamente con las partículas de fluido, y de manera simultánea la estructura se desplaza y deforma a su nueva posición de manera consistente con las ecuaciones gobernantes. Si se conoce la solución para los tiempos \hat{t} , $\hat{t} - \Delta\hat{t}$, $\hat{t} - 2\Delta\hat{t}$ y $\hat{t} - 3\Delta\hat{t}$, la idea anterior es implementada para computar la solución en el tiempo $\hat{t} + \Delta\hat{t}$ siguiendo la secuencia de pasos que se indica a continuación:

1. Las estelas son convectadas a sus nuevas posiciones. Una partícula de fluido perteneciente a una estela se transporta desde su posición inicial $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})$ hasta su nueva posición $\hat{\mathbf{R}}(\hat{t} + \Delta\hat{t})$ por medio del siguiente esquema de convección:

$$\hat{\mathbf{R}}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) = \hat{\mathbf{R}}(\hat{t}) + \hat{\mathbf{V}}[\hat{\mathbf{R}}(\hat{t})]\Delta\hat{t} \quad (5.73)$$

donde $\hat{\mathbf{V}}$ es la velocidad local del fluido. Durante el resto del procedimiento las estelas se consideran quietas. Experimentos numéricos realizados con esquemas más precisos muestran que éste es muy adecuado. Entre los esquemas utilizados se destacan los iterativos donde se utiliza la velocidad de cada estela en su posición final (Kandil *et al.*, 1976).

2. Las cargas aerodinámicas actuales son utilizadas para predecir el estado de la estructura mediante la ecuación (5.67).
3. La predicción realizada en el punto anterior es modificada mediante el error de truncamiento del paso anterior utilizando la ecuación (5.68).
4. La solución modificada es corregida mediante el procedimiento iterativo utilizando la ecuación de corrección (5.69). Las cargas aerodinámicas son recalculadas durante cada iteración, teniendo en cuenta que las estelas no se mueven como antes se

mencionó. Este paso se repite tantas veces como sea necesario para satisfacer el criterio de convergencia. Normalmente toma entre tres y seis repeticiones para que el error de iteración alcance un valor menor a 10^{-6} . Los experimentos numéricos realizados muestran que el número de iteraciones se reduce cuando el tiempo característico es cada vez más pequeño, lo cual depende de la malla utilizada y de la velocidad de la corriente libre.

5. Una vez que se satisface el criterio de convergencia, se calcula el error de truncamiento local mediante la ecuación (5.71) para realizar una modificación final de la solución. Este error se empleará en el próximo paso de tiempo para modificar la predicción de la solución.
6. Por último, se evalúa el estado final de la estructura modificando la solución final por medio del error local de truncamiento como se muestra en la ecuación (5.72). El estado de la estructura es utilizado para computar la última estimación de las cargas aerodinámicas.

El esquema de integración utilizado en este trabajo requiere información sobre cuatro pasos anteriores de tiempo, pero en el comienzo esta información no se encuentra disponible, por lo tanto se utiliza el esquema de arranque descrito en los pasos 1 a 7 de la Sección anterior.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1. Introducción

Entre los productos obtenidos en este trabajo de tesis, uno de los más importantes y que merece ser destacado es el desarrollo de una herramienta computacional de análisis preliminar para investigar los aspectos aerodinámicos y aeroelásticos asociados a UAVs reconfigurables. Esta herramienta es el resultado de la implementación computacional de los modelos presentados en los Capítulos 2, 3, 4 y 5.

El código numérico asociado a la herramienta computacional fue escrito en FORTRAN 90 y en la compilación se utilizaron opciones de optimización automática con el fin de lograr un alto desempeño.

La estructura de la herramienta se muestra en la Figura 6-1 , donde se puede observar que la misma está constituida por 3 módulos independientes que se combinan para obtener el código principal, que puede ser dividido en dos partes:

- El código aerodinámico para alas reconfigurables, compuesto por el módulo cinemático (implementación computacional del modelo presentado en el Capítulo 2) y el módulo aerodinámico (implementación computacional del modelo presentado en el Capítulo 3).

- El código aeroelástico, compuesto por el módulo aerodinámico, el modulo estructural (implementación computacional del modelo presentado en el Capítulo 4), y una técnica de acoplamiento que permite combinar los módulos anteriores.

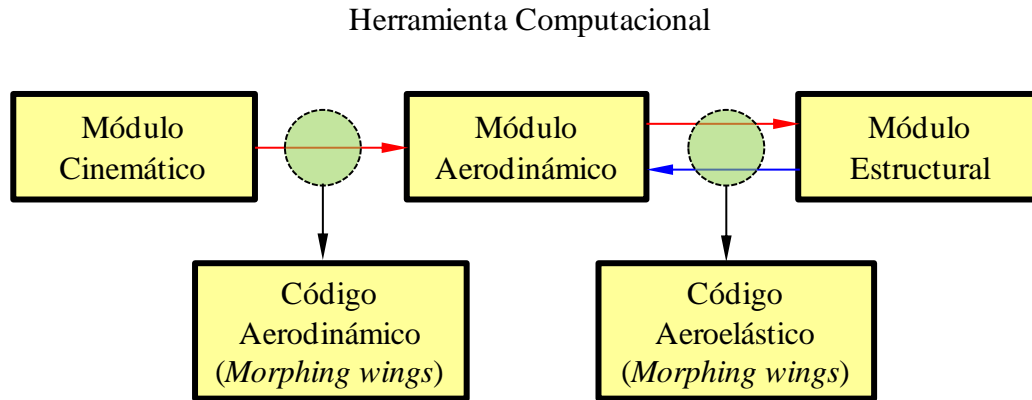


Figura 6-1: Estructura de la herramienta computacional.

En este Capítulo se presentan los resultados más relevantes obtenidos mediante el uso de la herramienta de simulación numérica desarrollada. Estos resultados se dividen en tres grupos: *i*) el primer grupo corresponde a la validación de la herramienta numérica desarrollada; *ii*) el segundo grupo está asociado al desarrollo de simulaciones numéricas del comportamiento aerodinámico inestacionario durante el proceso de reconfiguración alar; y *iii*) el tercer grupo está relacionado con el comportamiento aeroelástico del modelo *morphing wing* propuesto en el presente trabajo.

En el **primer grupo**, con el fin de validar los modelos matemáticos y su implementación computacional, se resuelven tres problemas cuyos resultados se encuentran disponibles en la literatura. El primero de ellos corresponde al cálculo de los modos de vibrar y frecuencias naturales de una viga de propiedades uniformes. El segundo problema corresponde al caso de un ala batiente (*flapping wing*) que involucra aspectos aerodinámicos y cinemáticos; el fin es determinar la sustentación en el dominio del tiempo para una cinemática prescrita de las alas. Finalmente, el tercer problema consiste en determinar las inestabilidades dinámicas de origen aeroelástico (*flutter*) de un puente colgante que experimenta cargas inducidas por una corriente de aire.

En el **segundo grupo** de resultados se estudia el comportamiento aerodinámico inestacionario durante el proceso de reconfiguración de un modelo *morphing wing* inspirado en las alas de gaviotas. En una primera etapa se realiza un análisis de sensibilidad de malla con el fin de determinar una malla adecuada para llevar a cabo las

simulaciones numéricas del modelo bioinspirado. Luego se desarrollan simulaciones numéricas para diferentes procesos de reconfiguración con el fin de investigar el comportamiento de las cargas aerodinámicas en el dominio del tiempo.

En el *tercer grupo* se desarrollan simulaciones para comprender el comportamiento de las inestabilidades de origen aeroelástico en términos de la configuración alar. En una primera etapa se analiza cómo influye la cantidad de modos y la longitud de la estela sobre la respuesta aeroelástica. Luego se analiza el comportamiento de la velocidad y frecuencia de *flutter* en función de la reconfiguración del Ala Interna. Para algunas configuraciones de las alas, se presenta un análisis de la respuesta aeroelástica para condiciones de velocidad sub-crítica, velocidad crítica y velocidad súper-crítica. Finalmente se presenta un análisis del comportamiento de la velocidad y frecuencia de *flutter* en función de la reconfiguración simultánea del Ala Interna y el Ala externa.

6.2. Validación de la herramienta computacional

En esta sección, que incluye el primer grupo de resultados, se presentan y resuelven tres problemas que permiten validar cada uno de los códigos que componen la herramienta computacional desarrollada.

6.2.1. Cálculo de modos y frecuencias para una viga en voladizo

En este problema se determinan las frecuencias naturales y los modos de vibrar para el caso de una viga con propiedades uniformes y se contrastan con las soluciones analíticas que se encuentran disponibles en la literatura (Hodges y Pierce, 2002).

Las propiedades mecánicas y las características geométricas de la viga de sección rectangular se presentan en la Tabla 6-1.

Tabla 6-1: Propiedades mecánicas y geométricas de la viga.

| Módulo E | Densidad ρ | Largo L | Ancho b | Alto h |
|------------|------------------------|-----------|-----------|----------|
| 150 GPa | 8000 kg/m ³ | 1 m | 1 cm | 2 cm |

Las expresiones analíticas para las frecuencias naturales, ω_i^a , y para los modos de vibrar, ϕ_i^a , de una viga en voladizo están dadas por:

$$\omega_i^a = (\alpha_i L)^2 \sqrt{(EI) / (\rho A_i L^4)}, \text{ y} \quad (6.1)$$

$$\phi_i^a(x) = \cosh(\alpha_i x) - \cos(\alpha_i x) - \beta_i [\sinh(\alpha_i x) - \sin(\alpha_i x)], \quad (6.2)$$

donde

$$\alpha_i L = \frac{(2i-1)\pi}{2} \quad \beta_i = \frac{\cosh(\alpha_i L) + \cos(\alpha_i L)}{\sinh(\alpha_i L) + \sin(\alpha_i L)} \quad (6.3)$$

e I es el momento de inercia del área transversal y el supraíndice “ a ” se usa para denotar solución ‘analítica’. Es importante mencionar que las soluciones presentadas en las ecuaciones (6.1) y (6.2) se dedujeron ignorando la inercia rotacional de la viga.

Los valores para los primeros 3 coeficientes definidos en la ecuación (6.3) se exponen en la Tabla 6-2,

Tabla 6-2: Coeficientes para la solución analítica.

| i | $\alpha_i L$ | β_i |
|-----|--------------|-----------|
| 1 | 1.87510407 | 0.734096 |
| 2 | 4.69409113 | 1.018470 |
| 3 | 7.85475744 | 0.999224 |

Las tres primeras frecuencias dadas por (6.1) son,

$$\omega_1^a = 87.900382 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad \omega_2^a = 550.8622 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad \omega_3^a = 1542.4303 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (6.4)$$

Con el fin de resolver el problema numéricamente, la viga es discretizada en un número finito, N_E , de elementos uniformes. En las columnas 2, 3 y 4 de la Tabla 6-3 se presentan los resultados numéricos para las tres primeras frecuencias naturales, ω_i , en función de la cantidad de elementos usados en la discretización de la viga. Notar que en la última fila de la tabla se escribieron los valores “exactos” presentados en (6.4) que fueron obtenidos usando la expresión (6.1).

En las tres últimas columnas de la Tabla 6-3 se muestra la diferencia porcentual entre las soluciones numéricas y las analíticas, que se define como,

$$d_i = 100 \left| \frac{\omega_i^a - \omega_i}{\omega_i^a} \right| \% \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

Se puede observar que la utilización de pocos elementos produce un error muy pequeño en la predicción de las frecuencias naturales. En la Figura 6-2 se presenta la diferencia porcentual en función del número de elementos con el fin de mostrar el comportamiento de la convergencia.

Tabla 6-3: Frecuencias naturales – Diferencias respecto a la solución analítica.

| N_E | ω_1 | ω_2 | ω_3 | d_1 [%] | d_2 [%] | d_3 [%] |
|----------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|
| 1 | 88.318289 | 870.17233 | ----- | 0.475 | 57.9 | ----- |
| 2 | 87.942876 | 555.53686 | 1878.92708 | 0.0483 | 0.800 | 21.8 |
| 3 | 87.909290 | 552.671480 | 1561.64955 | 0.0101 | 0.328 | 1.25 |
| 4 | 87.903257 | 551.50416 | 1554.37231 | 0.00327 | 0.116 | 0.774 |
| 5 | 87.901570 | 551.13766 | 1547.97102 | 0.00135 | 0.0500 | 0.359 |
| 6 | 87.900957 | 550.99831 | 1545.25262 | 0.000654 | 0.0247 | 0.183 |
| 7 | 87.900693 | 550.93675 | 1544.00076 | 0.000354 | 0.0135 | 0.102 |
| 8 | 87.900565 | 550.90633 | 1543.36853 | 0.000208 | 0.00800 | 0.061 |
| 9 | 87.900496 | 550.88996 | 1543.02356 | 0.000130 | 0.00502 | 0.384 |
| 10 | 87.900456 | 550.88052 | 1542.82307 | 0.0000845 | 0.00331 | 0.0255 |
| 15 | 87.900396 | 550.86593 | 1542.50958 | 0.0000162 | 0.000660 | 0.00513 |
| 20 | 87.900386 | 550.86344 | 1542.45561 | 0.00000485 | 0.000210 | 0.00164 |
| 25 | 87.900384 | 550.86276 | 1542.44074 | 0.00000257 | 0.0000860 | 0.000673 |
| ∞ | 87.900382 | 550.86220 | 1542.43031 | 0.00000000 | 0.0000000 | 0.00000 |

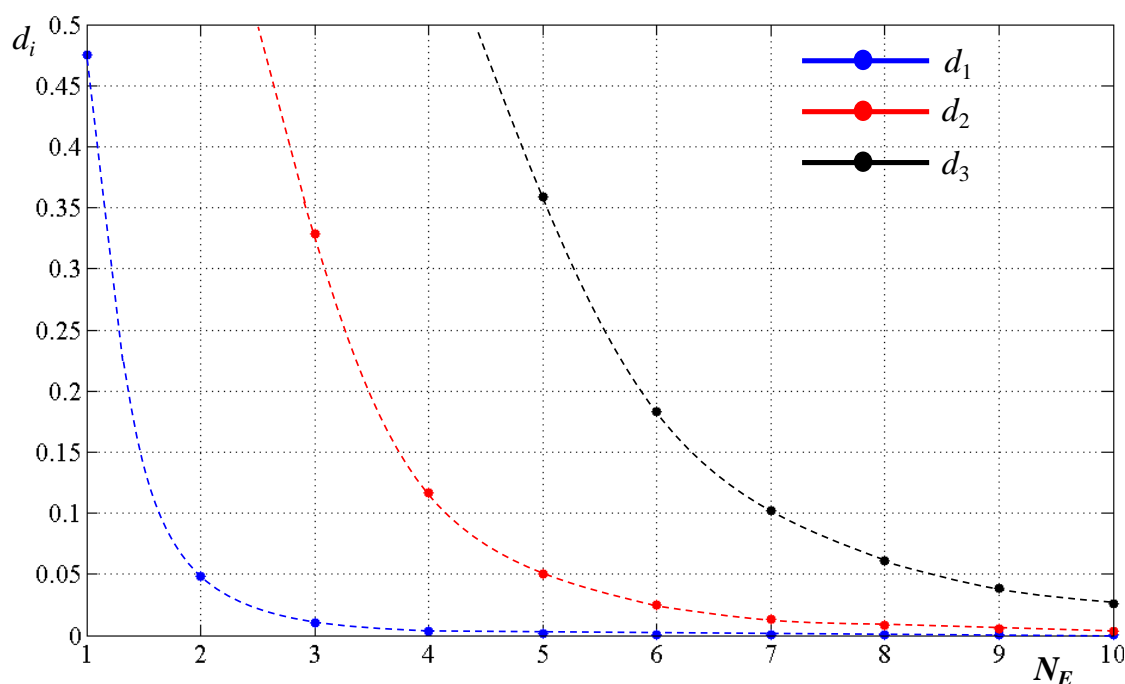


Figura 6-2: Diferencia porcentual entre las frecuencias: Resultados numéricos y analíticos.

En la Figura 6-3 se comparan los modos dados por la ecuación (6.2) (línea continua) contra los modos obtenidos con la herramienta numérica (línea de puntos). Esta figura está organizada de tal manera que las filas corresponden a la cantidad de elementos y las columnas corresponden a los modos.

Como se puede observar, considerando un solo elemento se predice el primer modo con buena exactitud pero existe una diferencia importante en el segundo; además el tercer modo en flexión no se puede computar. Al considerar dos elementos, mejora la predicción del segundo modo pero existe una diferencia importante en el tercero. Las gráficas muestran que el incremento en la cantidad de elementos mejora la exactitud con la se predicen los modos de vibrar. Con 3 y 4 elementos se tiene una exactitud suficientemente buena para el tercer modo.

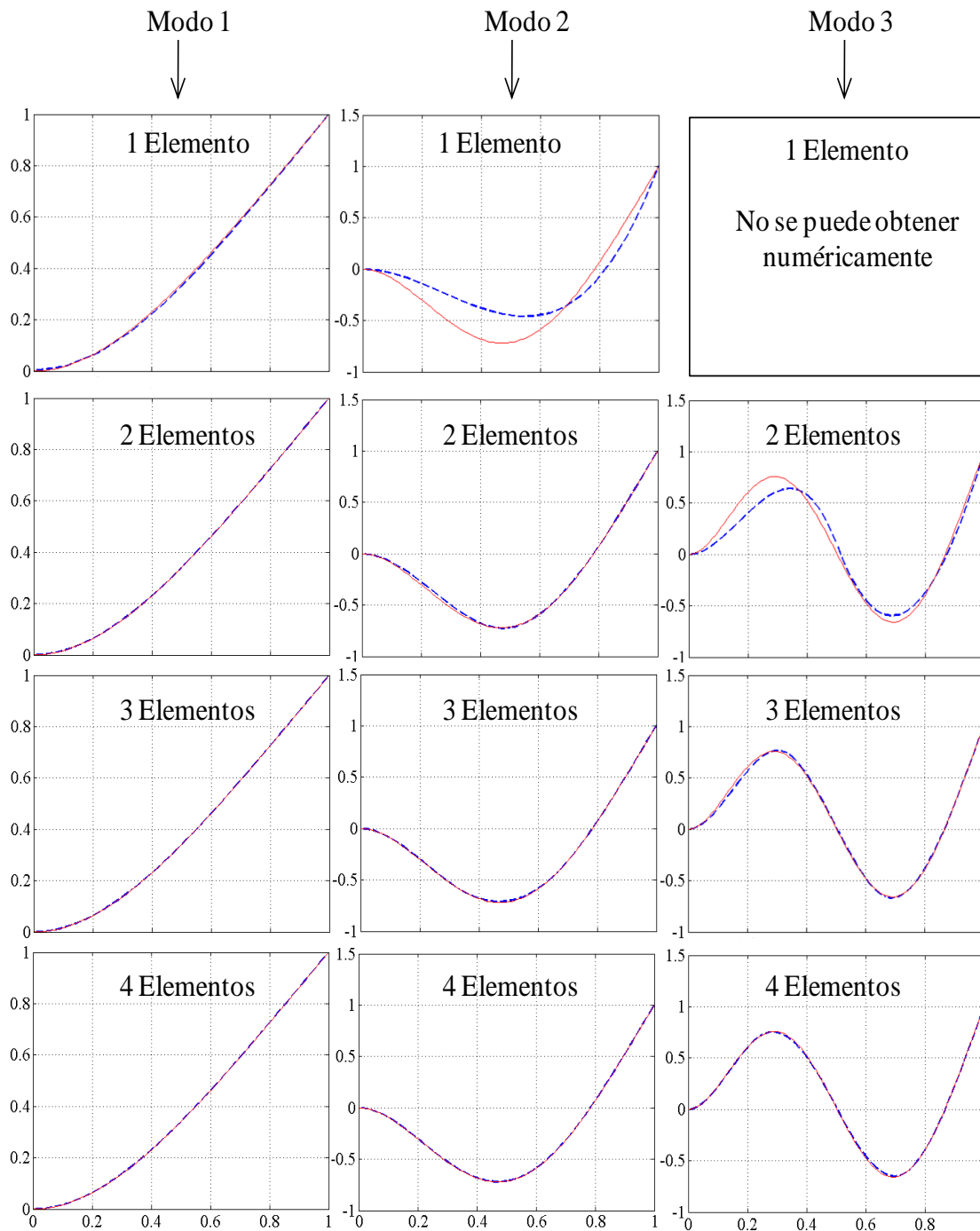


Figura 6-3: Comparación entre modos: Resultados numéricos y analíticos.

6.2.2. Cálculo de la sustentación para el caso de un ala batiente

Con el fin de validar el código aerodinámico se consideró un caso que involucra aspectos aerodinámicos y cinemáticos. El mismo corresponde al caso del ala batiente estudiada por Neef y Hummel (2001) mediante el uso de las ecuaciones de Euler. En su experimento numérico consideraron un ala rectangular con una relación de aspecto $AR = 8$ y un perfil NACA 0012, amplitud de batimiento (o aleteo) de $\varphi_0=15^\circ$ y una frecuencia reducida de $k = 0.1$, la cual se computa de la siguiente manera,

$$k = \frac{\pi f c}{V_\infty} \quad (6.6)$$

donde f es la frecuencia de aleteo y c es la cuerda del ala. Neef y Hummel definieron estos parámetros en base a características morfológicas y cinemáticas asociadas a grandes aves (por ejemplo gaviotas) ejecutando un vuelo crucero, con lo cual obtuvieron un valor para la cuerda $c = 0.16 \text{ m}$, y un valor para la frecuencia $f = 3 \text{ seg}^{-1}$.

El movimiento de batimiento es sinusoidal, y el ala rota con respecto al borde de ataque (se torsiona) con una fase de 90° respecto al batimiento. La amplitud del ángulo de torsión varía linealmente a lo largo de la envergadura adquiriendo una magnitud en la punta del ala de $\beta_0 = 4^\circ$. Para prescribir la variación temporal de ambos movimientos (aleteo y torsión) se utilizaron funciones armónicas dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 \cos(2\pi f t) \\ \beta(\eta, t) &= \frac{2\eta}{span} \beta_0 \sin(2\pi f t), \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $span$ es la envergadura y η es una coordenada espacial definida a lo largo del borde de ataque del ala.

La cinemática desarrollada para el modelo *morphing wing* fue fácilmente modificada para describir el movimiento de batimiento-torsión del ala de Neef y Hummel (Verstraete *et al.*, 2015).

Para llevar a cabo la simulación aerodinámica se utilizaron 63 pasos de tiempos para el ciclo de batimiento y se adoptó una discretización espacial para el ala de 120 paneles: 6 paneles a lo largo de la cuerda y 20 paneles a lo largo de la envergadura.

En la Figura 6-4 se presenta la solución numérica (coeficiente de sustentación C_L) obtenida con la herramienta computacional contrastada con la solución obtenida por Neef y Hummel. Esta comparación se realizó para dos configuraciones de vuelo diferentes; una en la cual la raíz del ala está inclinada un ángulo constante de 4° con respecto al plano horizontal (es decir, con un ángulo de ataque $\alpha = 4^\circ$) y una segunda configuración con una inclinación nula ($\alpha = 0^\circ$).

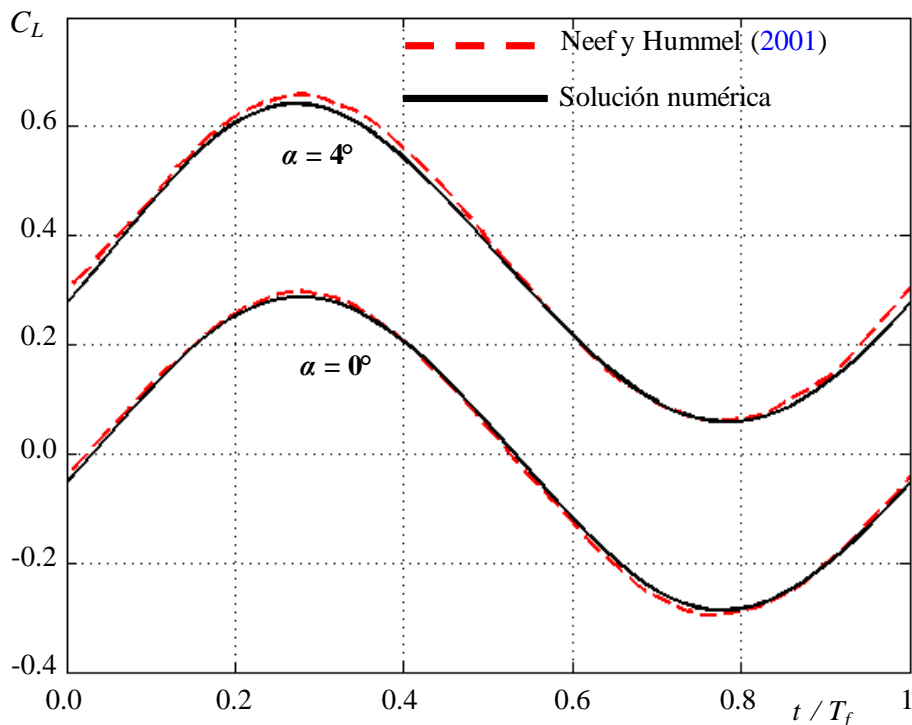


Figura 6-4: Comparación de la sustentación con la referencia Neef y Hummel (2001).

Es posible observar que los resultados provenientes de las simulaciones numéricas concuerdan muy bien con aquellos obtenidos por Neef y Hummel. Con la resolución de este problema se valida el acoplamiento entre los módulos que componen el código aerodinámico, y es posible inferir el correcto funcionamiento de los módulos independientes (módulo aerodinámico y módulo cinemático).

En la Figura 6-5 se presentan imágenes de la evolución del ala batiente y de la estela correspondientes a diferentes instantes de tiempo del ciclo de batimiento.

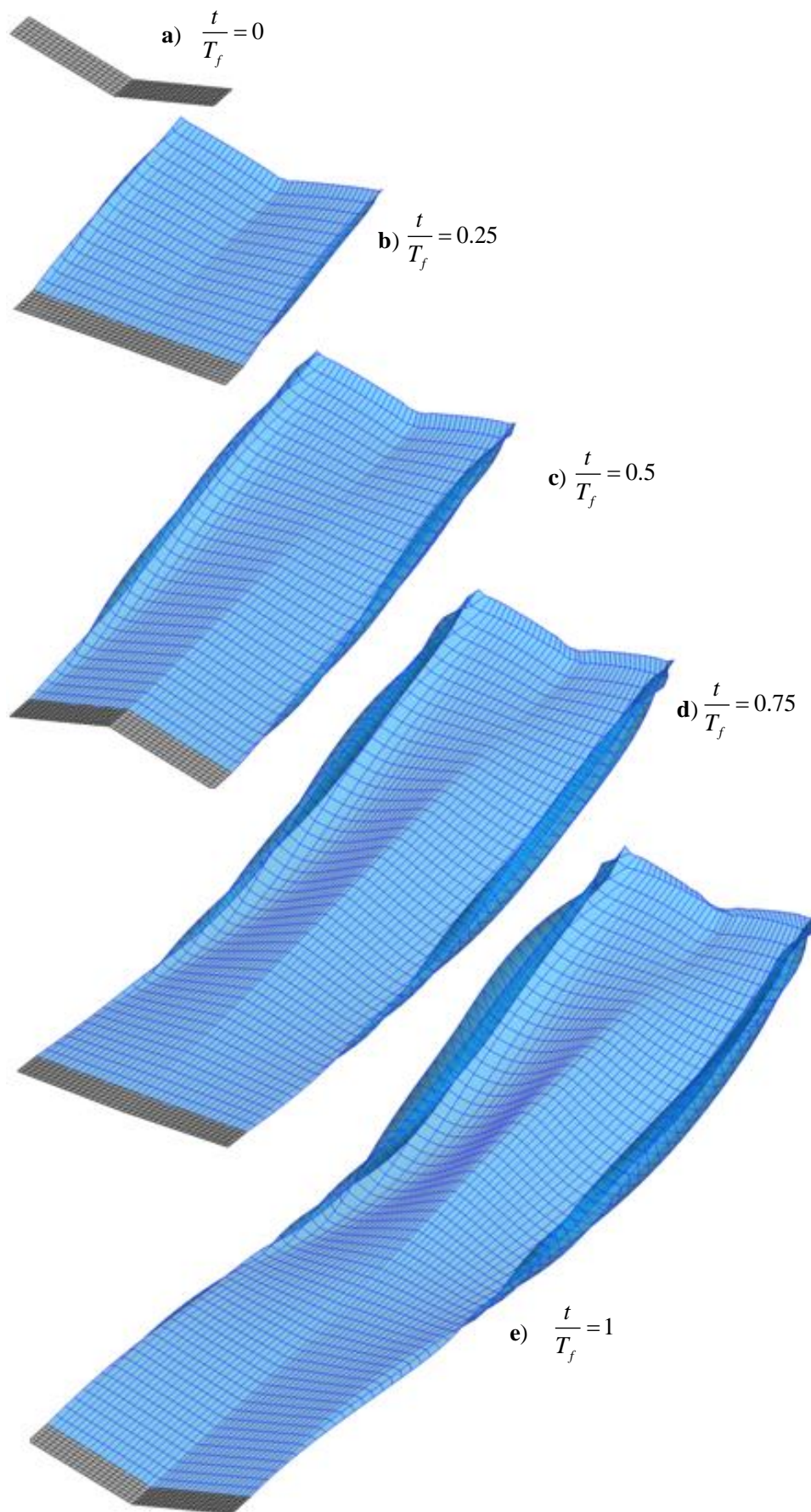


Figura 6-5: Evolución del ala batiente y de la estela en diferentes instantes de tiempo de simulación.

6.2.3. Respuesta aeroelástica de un puente colgante

En esta sección se resuelve numéricamente un problema clásico estudiado por Fung (1955) que consiste en la determinación de la velocidad y frecuencia de *flutter* para un puente colgante. El modelo propuesto por Fung es bidimensional (2D) y las propiedades del puente son las siguientes:

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ ft} & \omega_h^2 &= 0.755 \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}^2} \\ m &= 269 \frac{\text{slug}}{\text{ft}} & r_\alpha^2 &= 0.6222 \\ \rho &= 0.02378 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} & \omega_\alpha^2 &= 2.410 \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}^2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde $2b$ es el ancho del puente, m es la masa por unidad de longitud, r_α es el radio de giro alrededor del eje elástico medido en semicuerdas, ρ es la densidad del aire, ω_h es la frecuencia natural de flexión y ω_α es la frecuencia natural de torsión. Para resolver este problema se proponen los dos modelos que describen a continuación.

6.2.3.1. Modelo 1

En este primer modelo el acoplamiento entre el modelo aerodinámico y estructural se lleva cabo mediante el primer método de transferencia (PMT) descrito en el Capítulo 5.

Con el fin de construir un modelo tridimensional (3D) equivalente al modelo 2D original, para modelar la superficie aerodinámica se considera una placa plana rectangular sin espesor con una relación de aspecto $AR=10$. Esta superficie se encuentra apoyada sobre un soporte elástico que es representado como una viga bi-empotrada.

En la Figura 6-6 se puede observar claramente que la superficie aerodinámica no se extiende desde un empotramiento al otro, sino que cubre parcialmente la malla estructural (elementos de viga) dejando dos “tramos libres” en los extremos.

La viga se discretiza en 3 elementos y tiene asociado 4 nodos estructurales, donde los nodos 2 y 3 se encuentran en los extremos de la superficie aerodinámica. El modelo resultante tiene 4 grados de libertad: los desplazamientos de los nodos 2 y 3 en la dirección z (u_2 y u_3) y los giros con respecto al eje y asociado a los mismos nodos (θ_2 y θ_3).

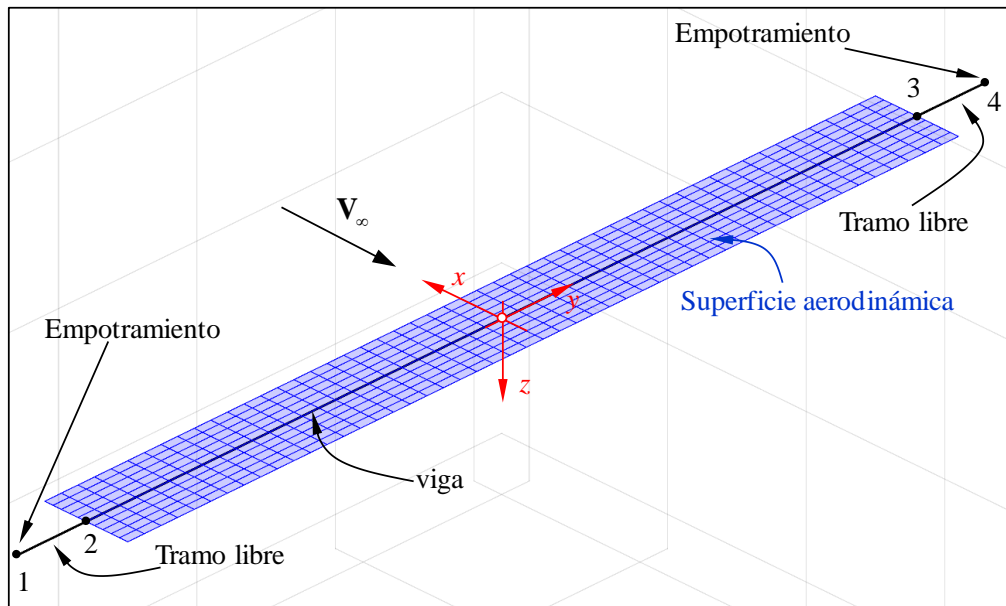


Figura 6-6: Modelo 1 del puente colgante.

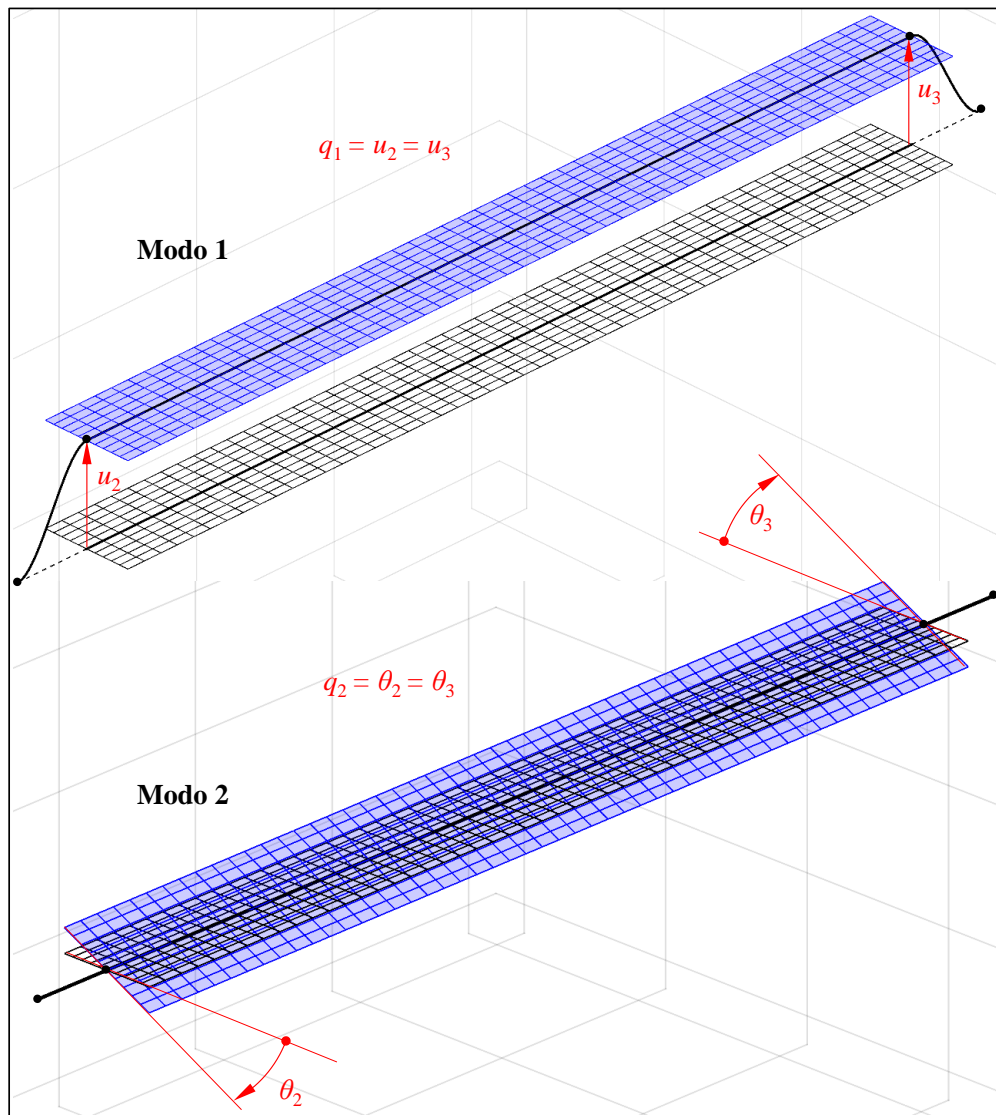


Figura 6-7: Modelo 1 del puente colgante - Modos.

Con el fin de representar la dinámica del modelo 2D, para expandir la solución se utiliza el primer modo en flexión y el primero en torsión (Figura 6-7). El elemento estructural del centro se considera indeformable. La superficie aerodinámica está conectada a este elemento y, por lo tanto, no sufre deformación, sino que solamente se desplaza en dirección vertical y rota con respecto al eje longitudinal de la viga (y) como una placa rígida.

Al considerar el primer modo en flexión, los desplazamientos transversales de los nodos 2 y 3 son numéricamente iguales al valor de la primera coordenada generalizada q_1 ($q_1=u_2=u_3$). Lo mismo sucede para el primer modo en torsión, donde los giros asociados a los nodos son numéricamente iguales al valor de la coordenada generalizada q_2 ($q_2 = \theta_2 = \theta_3$). Las propiedades másicas y elásticas de la viga son seleccionadas de manera tal que se repliquen propiedades equivalentes al modelo 2D original.

A continuación se exponen y describen los resultados que corresponden a simulaciones numéricas para una perturbación inicial (giro) impuesta sobre el modo 2 ($q_2(0) = 10^\circ$).

La Figura 6-8 corresponde al caso de una velocidad ($V_\infty = 120 \text{ ft/seg}$) inferior a la velocidad de *flutter* (velocidad sub-crítica). En las Figura 6-8a y 6-8b se observa que tanto el desplazamiento transversal (q_1) como el giro (q_2) tienen un comportamiento oscilatorio decreciente en el tiempo. El responsable de ese comportamiento es el amortiguamiento de origen aerodinámico, ya que el modelo no considera amortiguamiento estructural. En la Figura 6-8c, la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para q_1 muestra la presencia de dos frecuencias ($\approx 0.9 \text{ rad/seg}$ y $\approx 1.4 \text{ rad/seg}$). Es posible observar que en esta misma figura, además, se han indicado las frecuencias naturales de la estructura en vacío ($\omega_1 = 0.88 \text{ rad/seg}$ y $\omega_2 = 1.55 \text{ rad/seg}$); esto significa cuando la velocidad de la corriente de aire es nula ($V_\infty = 0$). La FFT correspondiente a q_2 (Figura 6-8d) muestra la presencia de una sola frecuencia ($\approx 1.4 \text{ rad/seg}$). En las Figura 6-8e y 6-8f se observa que la proyección en el espacio de estado se asemeja a un foco estable.

La Figura 6-9 muestra la respuesta aeroelástica a una velocidad ($V_\infty = 161.3 \text{ ft/seg}$) muy próxima a la velocidad de *flutter* (velocidad crítica) para dos condiciones iniciales

diferentes. Las Figura 6-9a y 6-9b muestran que, para ambas condiciones iniciales, q_1 y q_2 presentan un comportamiento transitorio de poca duración y luego permanecen oscilando en el tiempo con un movimiento periódico. La respuesta en frecuencia (Figura 6-9c y 6-9d) muestra que q_1 y q_2 oscilan con la misma frecuencia ($\approx 1.28 \text{ rad/seg}$) que se encuentra entre las dos frecuencias naturales de la estructura en vacío y, además, entre las dos frecuencias del caso sub-crítico. La proyección en el espacio de estado (Figura 6-9e y 6-9f) muestra que las trayectorias asociadas a las dos condiciones iniciales tienden a la misma curva cerrada. Esto manifiesta la presencia de un ciclo límite.

En la Figura 6-10 se presenta la respuesta aeroelástica a una velocidad ($V_\infty = 175 \text{ ft/seg}$) superior a la velocidad de *flutter* (velocidad supercrítica) para dos condiciones iniciales diferentes. En las Figura 6-10a y 6-10b se observa, para ambas condiciones iniciales, que q_1 y q_2 evolucionan con un comportamiento oscilatorio de amplitud creciente hasta, aproximadamente, cerca de los 130 *seg*, y luego alcanzan un movimiento periódico. Al igual que en el caso anterior la FFT para las dos coordenadas generalizadas manifiesta la presencia de una sola frecuencia ($\approx 1.25 \text{ rad/seg}$) (Figura 6-10c y 6-10d). Las Figura 6-10e y 6-10f muestran que las trayectorias asociadas a las dos condiciones iniciales avanzan en forma de espiral hasta converger a una curva cerrada que caracteriza a un ciclo límite.

La velocidad y frecuencia de *flutter* reportadas por Fung es 162 ft/seg y 1.25 rad/seg respectivamente. La diferencia porcentual con los resultados de las simulaciones numéricas (161.3 ft/seg y 1.28 rad/seg) es de 0.43% para la velocidad y de 2.15% para la frecuencia. Estos resultados muestran una muy buena concordancia con los obtenidos por Fung. Por otro lado, todos los casos (sub-crítico, crítico y súper-crítico) fueron comparados con los resultados obtenidos por Preidikman (1998) mostrando excelente concordancia desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo.

En la Figura 6-12 se presenta la posición del puente y de la estela en diferentes instantes de tiempo para una velocidad muy cercana a la velocidad de *flutter*. Se puede ver que el puente no desprende flujo desde sus extremos. El desprendimiento de vorticidad desde esta zona no se consideró debido a la reducida influencia que tiene sobre la respuesta aeroelástica. Sin embargo, se puede apreciar la formación de un vórtice en los extremos del puente.

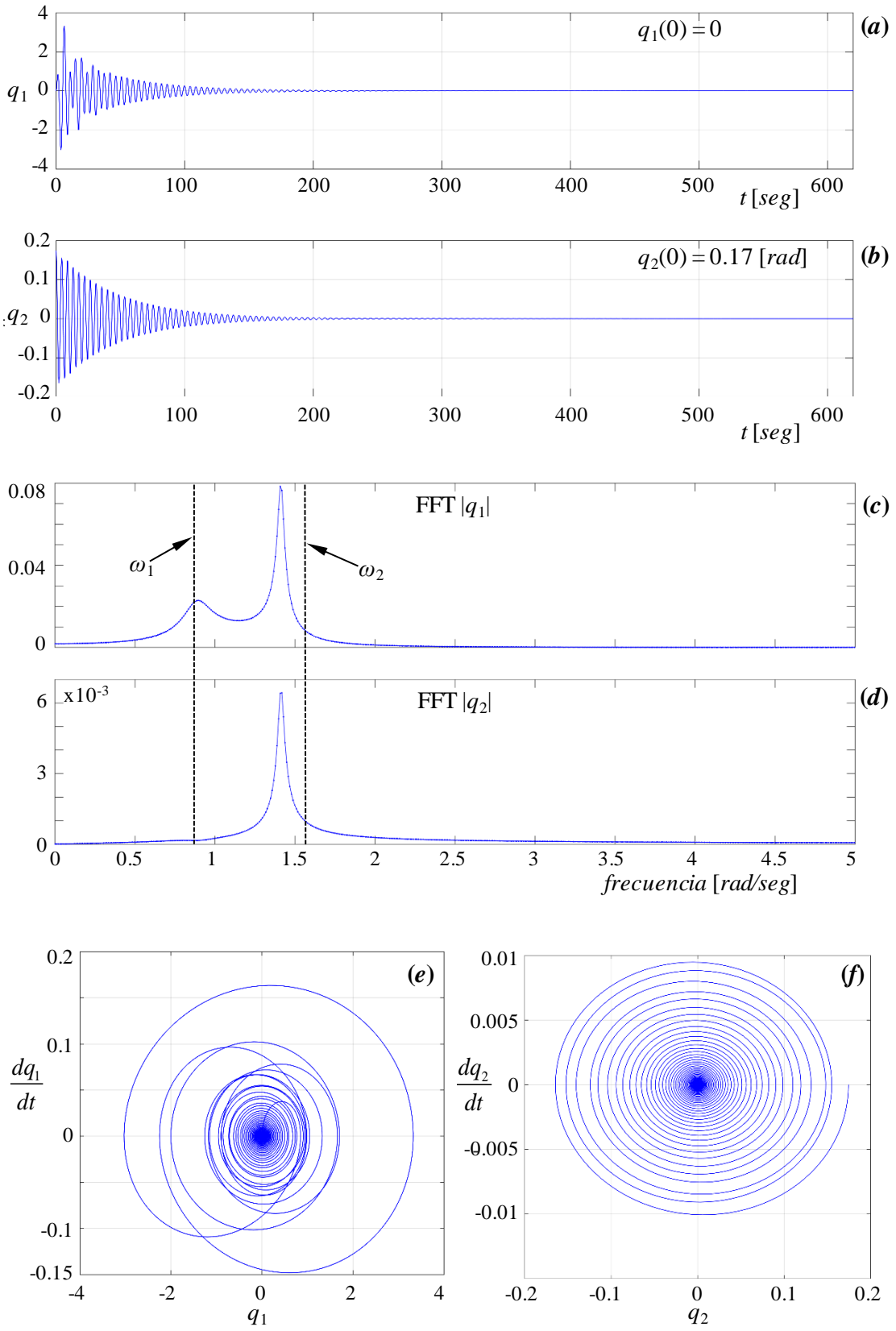


Figura 6-8: Respuesta para una velocidad inferior a la velocidad de flutter ($V_\infty = 120 \text{ ft/seg}$).

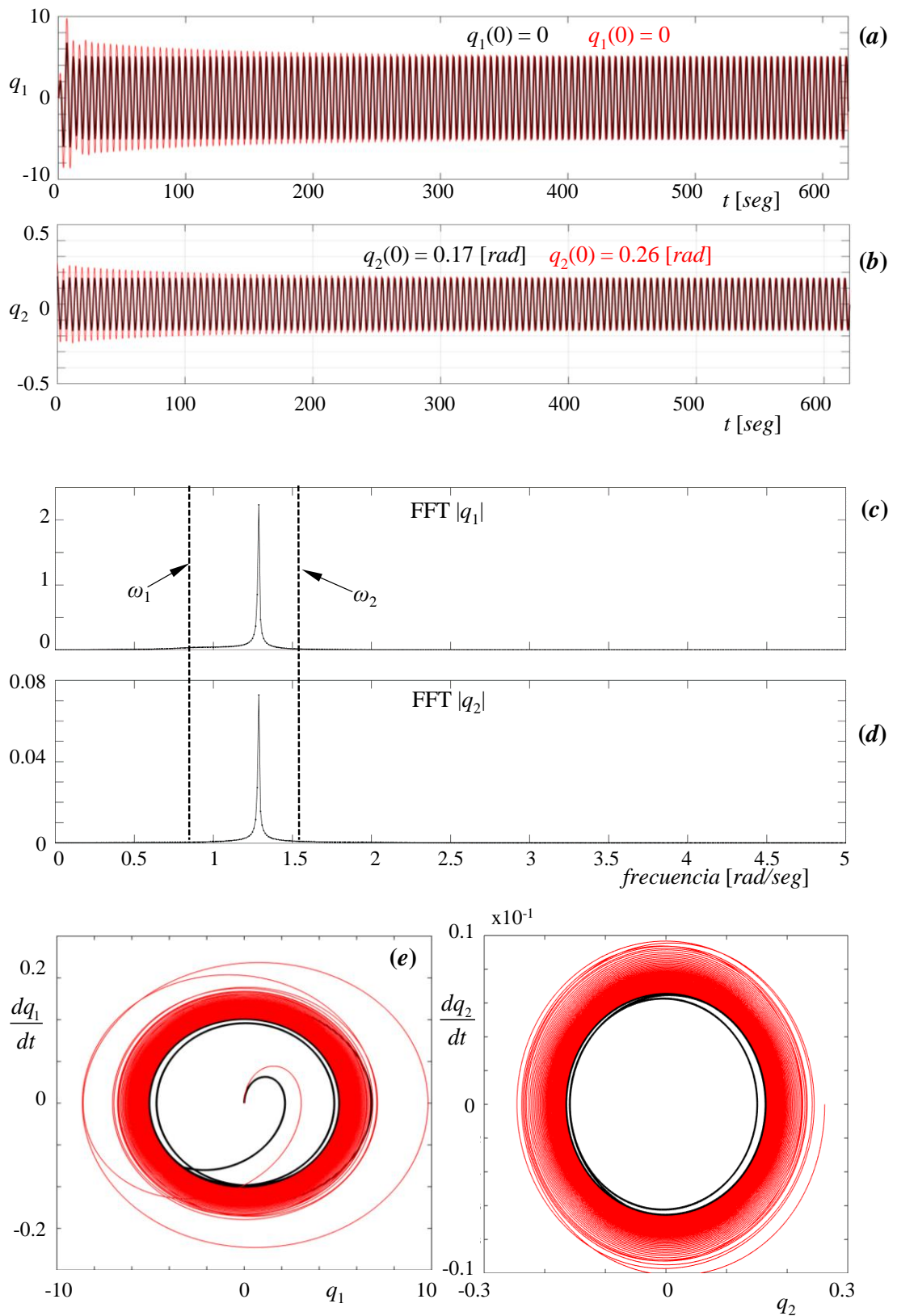


Figura 6-9: Respuesta para una velocidad próxima a la velocidad de flutter ($V_\infty = 161.3$ ft/seg).

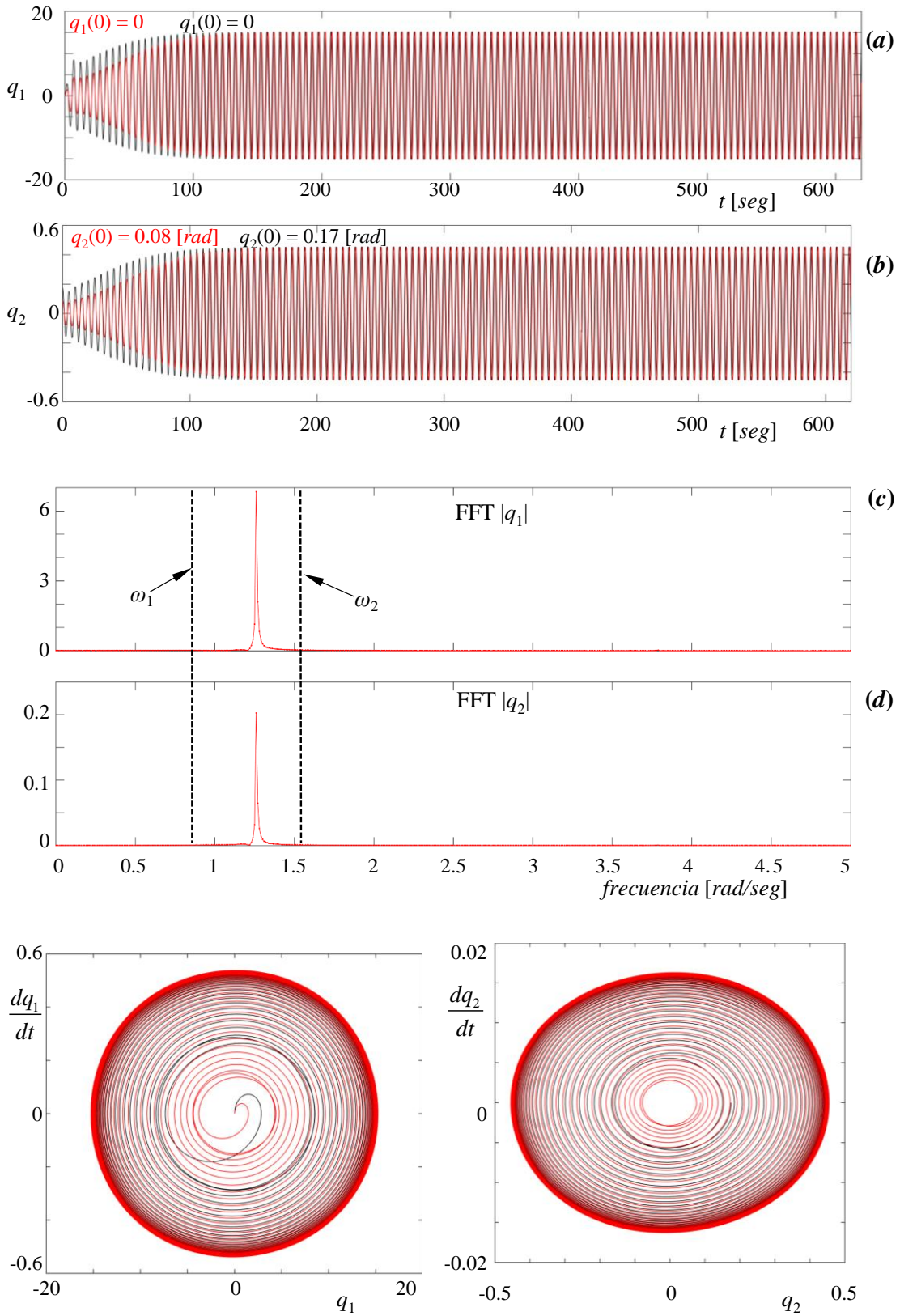


Figura 6-10: Respuesta para una velocidad superior a la velocidad de flutter ($V_\infty=175$ ft/seg).

En la Figura 6-11a y 6-11b se presentan las coordenadas q_1 y q_2 en función del tiempo, en el intervalo $t = [0, 200]$, para los casos subcrítico ($V_\infty = 120 \text{ ft/seg}$), crítico ($V_\infty = 161.3 \text{ ft/seg}$) y supercrítico ($V_\infty = 175 \text{ ft/seg}$) que se describieron anteriormente.

En la Figura 6-11c y 6-11d se presenta la FFT de las coordenadas generalizadas (q_1 y q_2) correspondientes a los tres casos, donde se puede observar que para todos ellos las frecuencias con las que oscilan q_1 y q_2 se encuentran entre las frecuencia naturales de la estructura en vacío ($\omega_1 = 0.88 \text{ rad/seg}$ y $\omega_2 = 1.55 \text{ rad/seg}$). Es posible notar claramente, como lo predice la teoría de *flutter* para un sistema de dos grados de libertad, que la frecuencia asociada al caso de velocidad supercrítica es inferior a la frecuencia asociada al caso de velocidad crítica.

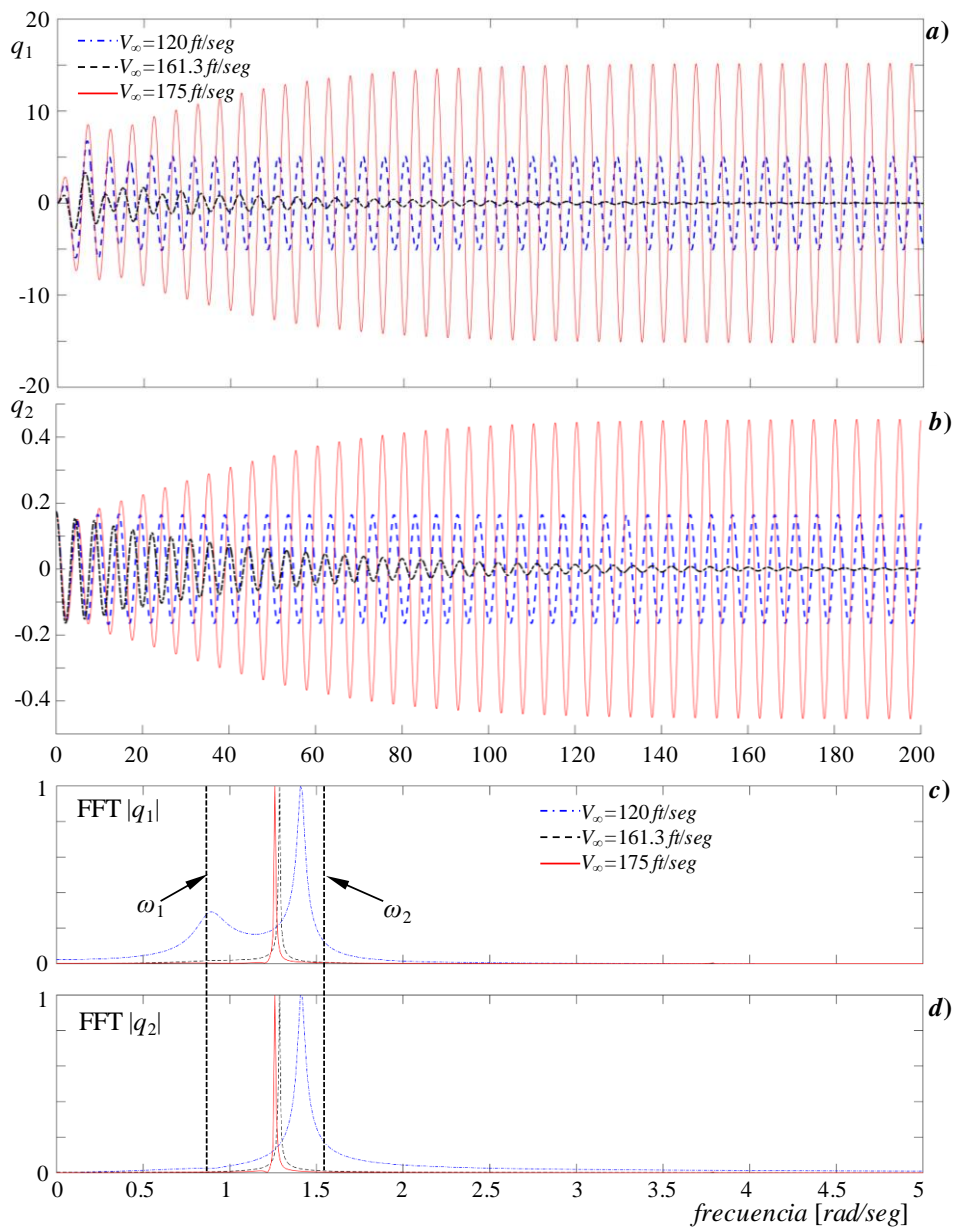


Figura 6-11: Respuesta temporal y en frecuencia de q_1 y q_2 para los casos subcrítico, crítico y supercrítico.

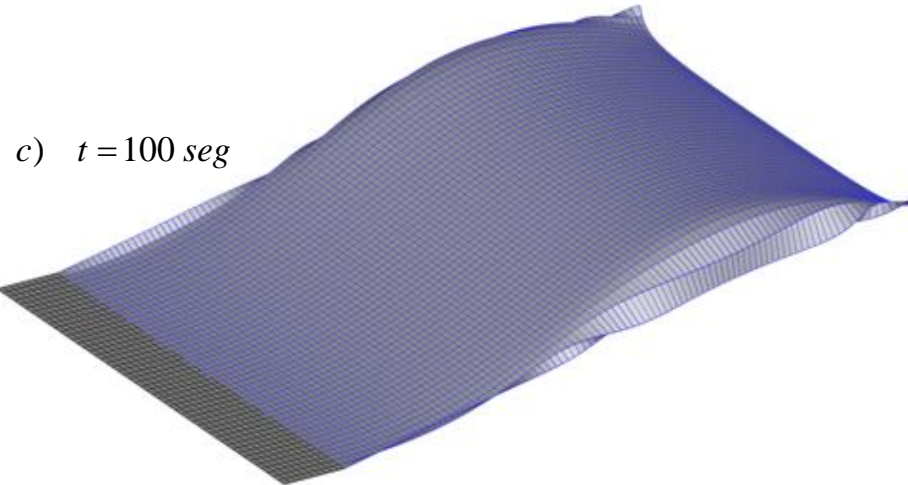
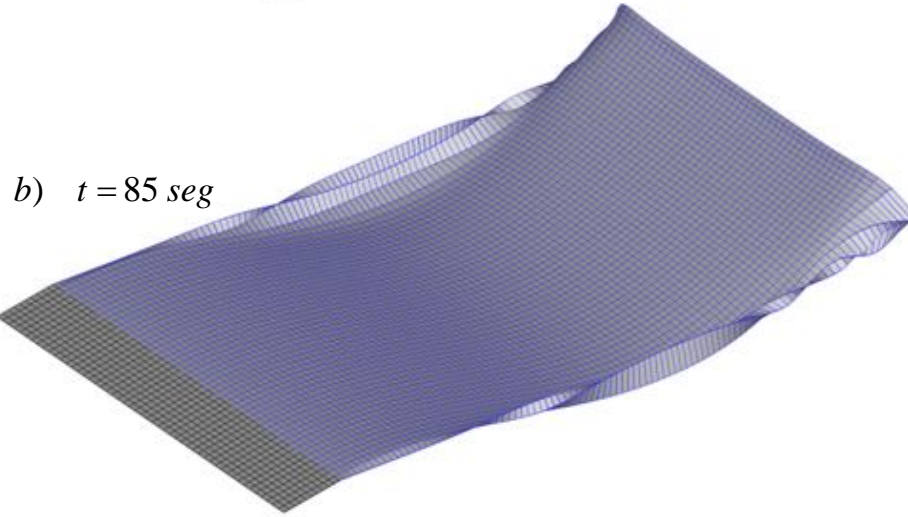
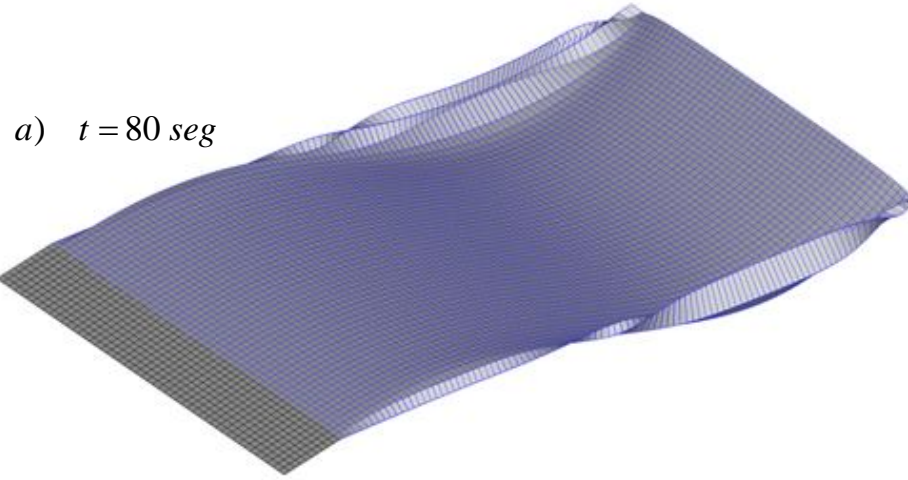


Figura 6-12: Puente y estela en diferentes instantes de tiempo para $V_{\infty} = 161.3 \text{ ft/seg}$.

6.2.3.2. Modelo 2

En esta subsección se describe el segundo modelo propuesto para estudiar el problema del puente colgante 2D reportado por Fung. En este caso, la estructura es modelada como una viga en voladizo de sección rectangular, y la superficie aerodinámica tiene una relación de aspecto $AR = 10$ (Figura 6-13). Se puede observar que la superficie aerodinámica se extiende por completo sobre la viga. En este caso, a diferencia del Modelo 1, la superficie aerodinámica se deforma acorde a la deformación de la estructura y no se comporta como una superficie rígida.

El objetivo del modelo propuesto en esta subsección es: *i)* evaluar si el modelo de viga en voladizo es adecuado para predecir el comportamiento del modelo 2D, y *ii)* comparar el PMT (Primer Método de Transferencia) con el SMT (Segundo Método de Transferencia). Debido a que el SMT (basado en *RBFs*) no incluye la información asociada a los grados de libertad de rotación, el modelo de la Figura 6-13 no es capaz de transmitir torsión a la malla aerodinámica. Por este motivo, la utilización del SMT requiere una modificación del modelo estructural para sortear este inconveniente. Se propone, entonces, la adición de elementos transversales (ver Figura 6-14) de gran rigidez y masa despreciable (elementos cinemáticos) con el fin de poder transmitir torsión a la malla aerodinámica. Las propiedades elásticas y másicas fueron elegidas de tal manera de obtener las mismas frecuencias naturales que las correspondientes al problema original 2D.

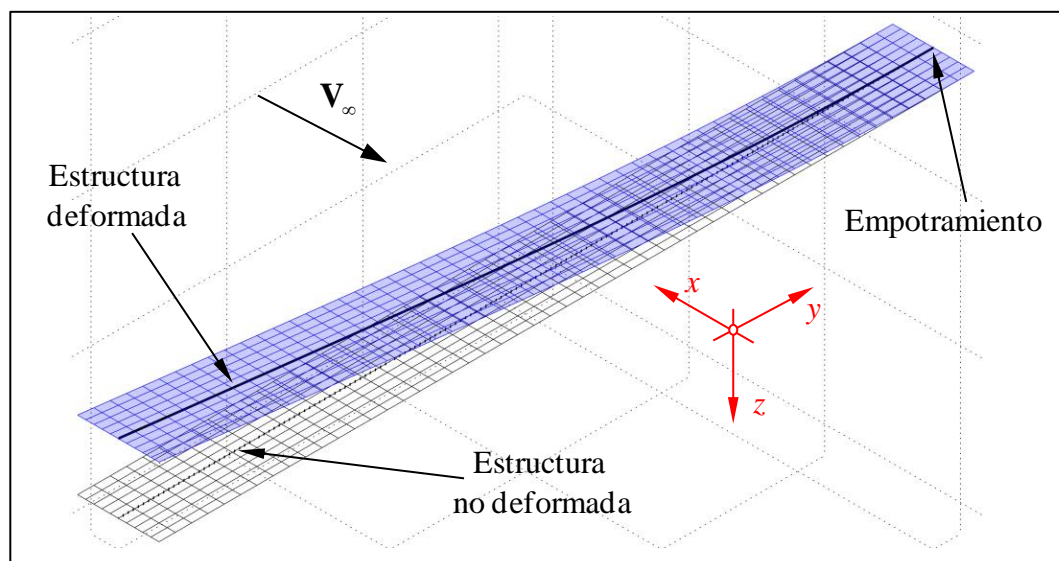


Figura 6-13: Modelo 2 del puente colgante para el PMT.

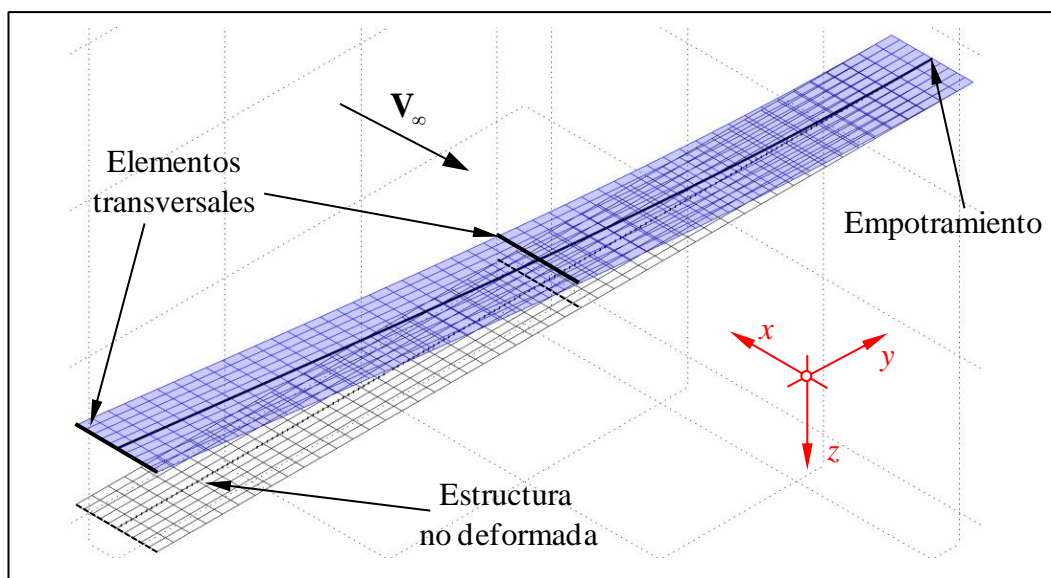


Figura 6-14: Modelo 2 del puente colgante para el SMT.

Los resultados, que se presentan en la Tabla 6-4, muestran que los dos métodos de transferencia, PMT y SMT, predicen la misma velocidad de *flutter* para casi todas las mallas tratadas. Aparece una diferencia muy pequeña (0.05%) en la última malla (*Malla10*) que es relativamente pequeña. Es importante mencionar que la búsqueda de *flutter* se realizó con saltos de 0.1 *ft/seg* en V_{∞} , lo que implica que los métodos podrían tener diferencias en la cuarta cifra significativa; sin embargo esas diferencias serían inferiores al 0.05%.

Tabla 6-4: Velocidad de *flutter* del PMT y SMT para las mallas consideradas.

| <i>Malla</i> | <i>NPCH</i> | <i>NPSP</i> | V_F para PMT | V_F para SMT |
|----------------|-------------|-------------|--------------------------|----------------------------|
| <i>Malla06</i> | 6 | 30 | 164.6 <i>ft/s</i> | 164.6 <i>ft/seg</i> |
| <i>Malla07</i> | 7 | 35 | 165.6 <i>ft/s</i> | 165.6 <i>ft/seg</i> |
| <i>Malla08</i> | 8 | 40 | 166.4 <i>ft/s</i> | 166.4 <i>ft/seg</i> |
| <i>Malla09</i> | 9 | 45 | 167.2 <i>ft/s</i> | 167.2 <i>ft/seg</i> |
| <i>Malla10</i> | 10 | 50 | 167.8 <i>ft/s</i> | 167.7 <i>ft/seg</i> |

En las dos primeras gráficas de la Figura 6-15 se presenta la respuesta, para la *Malla08*, de las coordenadas modales q_1 (asociada al desplazamiento vertical) y q_2 (asociada al giro). Puede apreciarse una pequeña diferencia (del orden del 1.5%) en la amplitud de vibración entre los dos métodos. Las respuestas se superponen al principio y aparece un desfase al final de la simulación. Esto permite inferir que existe una diferencia en la

frecuencia de *flutter*. El cómputo de la FFT (últimas dos gráficas de la Figura 6-15) muestra que ambos métodos predicen el mismo valor de frecuencia (1.264 *rad/seg*). Sin embargo, las variables características ($L_C = 7.5ft$ y $V_C = 166.4 ft/s$) y el número de pasos utilizados en la simulación (14000 pasos) permiten computar la frecuencia con una precisión de 0.01*rad/seg*. Esta precisión implica que, de existir, las diferencias se producirían a partir de la cuarta cifra significativa con un error máximo asociado del 0.8%.

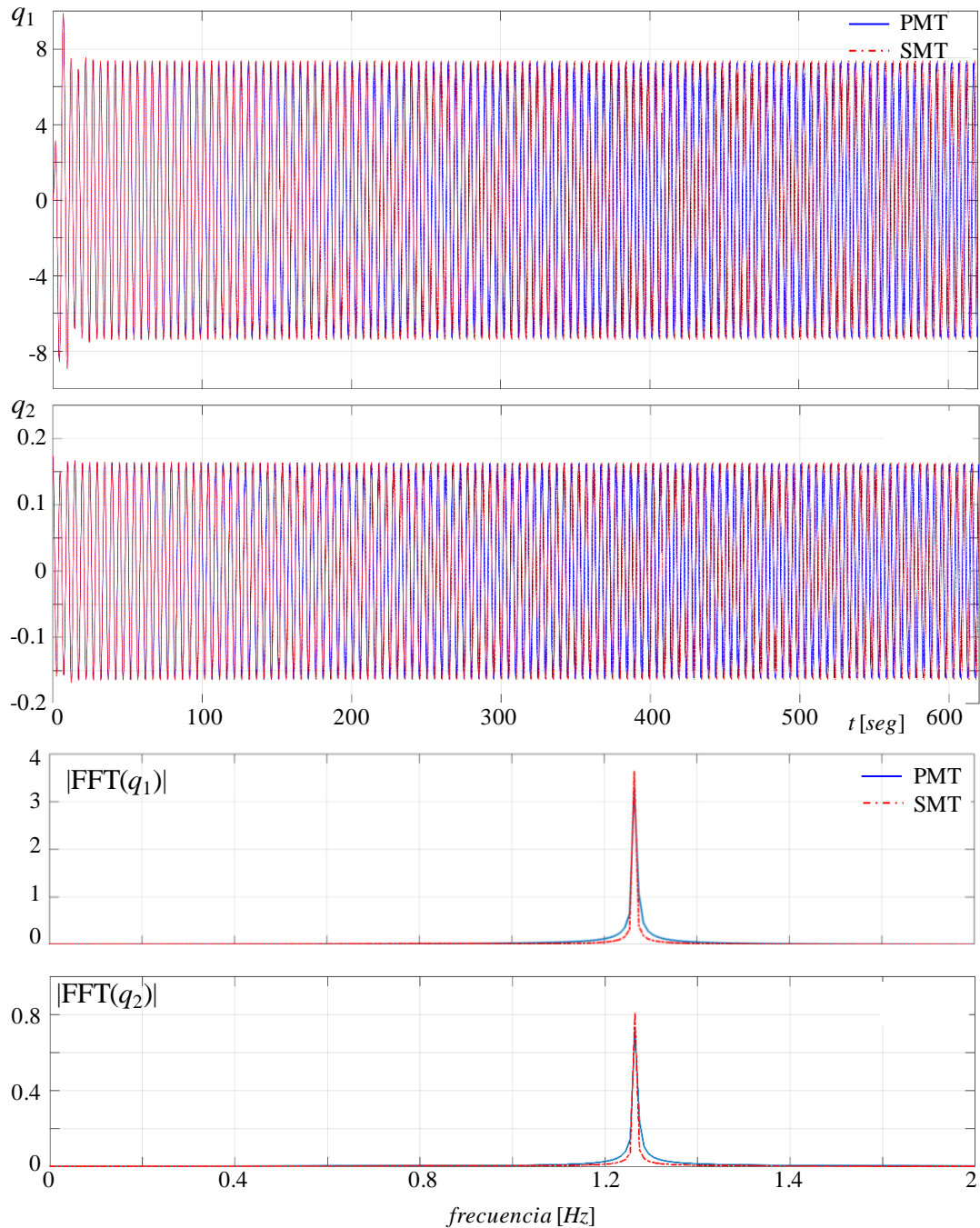


Figura 6-15: Comparación entre el PMT y SMT.

Los resultados correspondientes al Modelo 2 mostraron que la predicción de la velocidad de *flutter* es lo suficientemente buena, ya que tiene un error relativamente pequeño comparado con el 2D. Por otro lado, se mostró que el SMT predice la misma respuesta que el PMT (validado en el Modelo 1); hecho que permite concluir el correcto funcionamiento del SMT.

La predicción de la velocidad de *flutter* considerando la malla más densa difiere en un 3.58% con la del modelo 2D (162 *ft/seg*). Aunque el error es relativamente pequeño, se podría intentar mejorar la predicción incrementando la relación de aspecto del ala.

6.3. Simulaciones del comportamiento aerodinámico

En esta sección se presentan y analizan resultados numéricos para explorar y entender el comportamiento aerodinámico del modelo de ala reconfigurable inspirado en la biología propuesto en este trabajo. En esta sección las alas son consideradas rígidas. El objetivo es investigar el comportamiento de las cargas aerodinámicas que actúan sobre las alas durante el período de transición de una configuración a otra. La reconfiguración del ala, dependiente del tiempo, se establece mediante la especificación de una variación temporal en los parámetros de configuración.

6.3.1. Análisis de sensibilidad de la malla aerodinámica

En esta Subsección se presenta un análisis correspondiente a la selección de una malla adecuada para el estudio aerodinámico del proceso de reconfiguración alar. El análisis consiste en determinar el coeficiente de sustentación durante el proceso de reconfiguración alar para diferentes mallas (m_i) y luego seleccionar una de ellas de acuerdo a un criterio establecido.

Las alas *morphing* son reconfiguradas en el tiempo mediante una prescripción de los ángulos de diedro $\theta_B(t)$ y $\theta_C(t)$ dada por la ecuación (2.5). Los valores usados en este análisis son,

$$\begin{aligned} \alpha &= 5^\circ & \theta_B^S &= -30^\circ & \theta_C^S &= 0^\circ \\ T_I &= 25 \frac{c_0}{V_\infty} & T_S &= 60 \frac{c_0}{V_\infty} & T_F &= 70 \frac{c_0}{V_\infty} \\ V_\infty &= 12.4 \left[\frac{m}{seg} \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde la velocidad de corriente libre fue seleccionada de acuerdo a la velocidad crucero que exhiben las gaviotas. En el análisis se utilizaron 7 mallas aerodinámicas cuyos detalles se presentan en la Tabla 6-5. El número de paneles (o elementos) en la dirección de la cuerda (*NPCH*) y el número de paneles en la dirección de la envergadura (*NPSP*) fueron elegidos de tal manera de obtener elementos cuya forma geométrica se asemeje tanto como sea posible a un cuadrado.

Tabla 6-5: Mallas utilizadas en el análisis.

| <i>Malla</i> | <i>NPCH</i> | <i>NPSP</i> | | <i>Total</i> |
|-----------------------|-------------|--------------------|--------------------|--------------|
| | | <i>Ala interna</i> | <i>Ala externa</i> | |
| <i>m</i> ₀ | 2 | 3 | 5 | 16 |
| <i>m</i> ₁ | 4 | 6 | 10 | 64 |
| <i>m</i> ₂ | 6 | 9 | 15 | 144 |
| <i>m</i> ₃ | 8 | 12 | 20 | 256 |
| <i>m</i> ₄ | 10 | 15 | 25 | 400 |
| <i>m</i> ₅ | 12 | 18 | 30 | 576 |
| <i>m</i> ₆ | 14 | 21 | 35 | 784 |

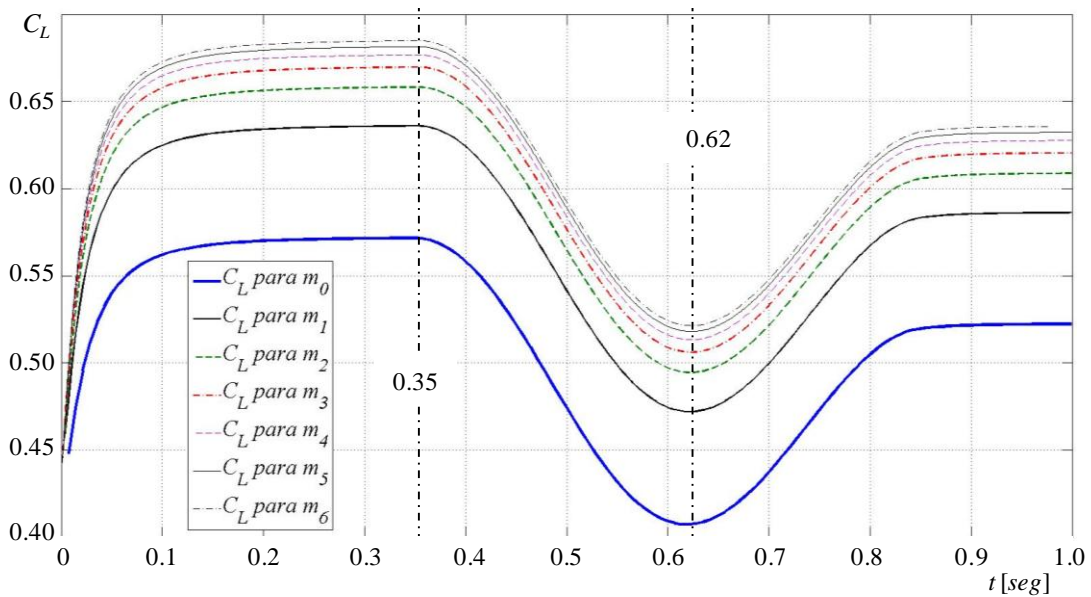


Figura 6-16: Coeficiente de sustentación en función del tiempo.

En la Figura 6-16 se muestra la variación temporal del C_L para cada una de las mallas descritas en la Tabla 6-5. De la figura se puede observar que conforme la densidad de la malla aumenta la diferencia entre las respuestas es cada vez más pequeña. Antes que el ala comience a moverse, la mayor diferencia se presenta en $t = 0.35 \text{ seg}$, luego en el proceso de adaptación del ala la mayor diferencia se encuentra en $t = 0.62 \text{ seg}$, y finalmente, cuando el alcanza su configuración final la diferencia es menor que en los instantes antes mencionados.

Con el fin de establecer un criterio para seleccionar adecuadamente la malla aerodinámica, se calcula la diferencia porcentual entre la sustentación asociada a la malla m_i y a la malla m_{i-1} , como se expresa en la ecuación (6.10). Esta diferencia se calcula únicamente en los tiempos $t=0.35 \text{ seg}$ y $t=0.62 \text{ seg}$, y se considera aceptable una diferencia porcentual inferior al 2%.

$$dif_i = \left| \frac{C_L \text{ para } m_i - C_L \text{ para } m_{i-1}}{C_L \text{ para } m_i} \right| \cdot 100\% \quad (6.10)$$

Además, el tiempo de simulación (t_c) o costo computacional para obtener la solución numérica es un factor importante, y por lo tanto, fue considerado en la elección de la malla.

La diferencia porcentual (dif) para los instantes $t=0.35 \text{ seg}$ y $t=0.62 \text{ seg}$ y el tiempo de simulación se presentan en la Figura 6-17. Es posible notar que dif decrece asintóticamente tendiendo a cero y la diferencia en 0.62 seg es menor que en 0.35 seg . Por otro lado se ve que el tiempo de simulación experimenta aparentemente un crecimiento exponencial. En la Figura 6-17a se observa que la diferencia entre las mallas m_3 y m_4 es inferior al 1.3%, y en la Figura 6-17b es posible notar que el costo computacional para m_3 (1.2hs) es una tercera parte del costo asociado a m_4 (3.6hs). De acuerdo a los resultados presentados en la Figura 6-17 la mejor elección es la malla m_3 . Si se elige una malla más densa la precisión se incrementa, sin embargo esto no es justificado debido al gran incremento en el costo computacional.

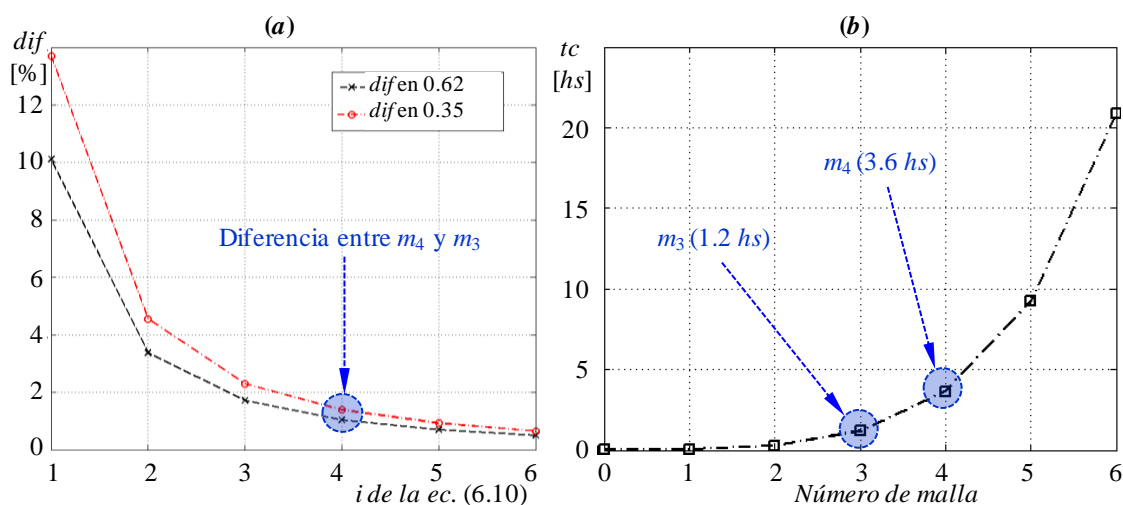


Figura 6-17: a) diferencia porcentual. b) tiempo de simulación.

6.3.2. Comportamiento aerodinámico del concepto *folding wing*

Se simularon tres casos de vuelo donde el ala se reconfigura a través de la variación temporal de los parámetros de configuración establecida en la ecuación (2.5). En cada uno de estos casos se consideraron dos condiciones: (i) emitiendo vorticidad desde las puntas de las alas; y (ii) sin emitir vorticidad desde las puntas de las alas. Los datos para cada uno de los casos se presentan en la Tabla 6-6.

Tabla 6-6: Datos de las simulaciones

| Caso | θ_B^s | θ_C^s | T_I | T_S | T_F | V_∞ | α |
|------|--------------|--------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------|----------|
| I | -30° | 30° | | | | | |
| II | 10° | 30° | 35 c_0/V_∞ | 70 c_0/V_∞ | 90 c_0/V_∞ | 12.4 [m/seg] | 5° |
| III | -10° | -30° | | | | | |

En la Figura 6-18 se grafica el coeficiente de sustentación en función del tiempo. Es posible notar que en los tres casos hay una pequeña diferencia entre la solución obtenida con la condición (i) y la obtenida con la condición (ii). La mayor diferencia se puede observar para el caso II cuando el ala está en movimiento.

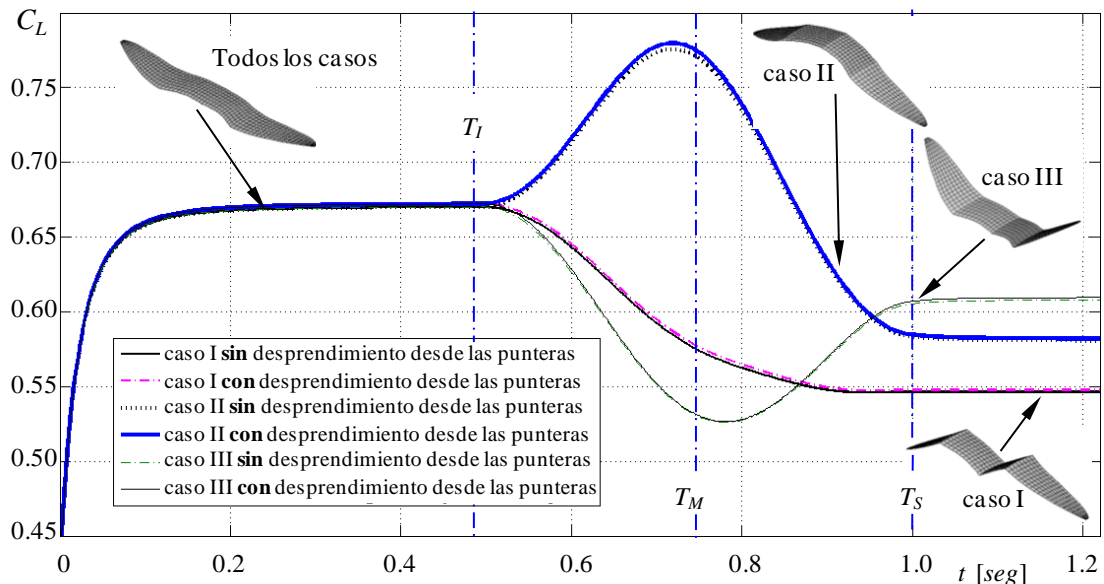


Figura 6-18: Coeficiente de sustentación en función del tiempo.

Estos resultados muestran que la influencia de la vorticidad emitida desde las puntas de las alas tiene una influencia poco significativa sobre la sustentación total. Debido a esto, la emisión de vorticidad desde las puntas de las alas puede ser ignorada con el fin de reducir el costo computacional. Para todos los casos simulados, el número de elementos

en la estela asociados a la punta del ala representa un 20% del número total de paneles en la estela; si estos elementos son eliminados se gana un 35% del tiempo requerido para la simulación.

Durante la primera parte de la simulación, cuando el ala está completamente extendida, la sustentación se incrementa gradualmente hasta alcanzar el valor en estado estacionario en el tiempo T_i . Durante el proceso de cambio de forma, la sustentación depende de la cinemática prescrita de los ángulos de diedro. Para el caso III, se observa que el C_L decrece suavemente hasta alcanzar un valor mínimo de 0.53, y luego se incrementa hasta un determinado valor ($C_L=0.62$) que corresponde a la configuración que el ala adquiere un estado estacionario. En el caso II, el coeficiente de sustentación se incrementa hasta llegar a un valor máximo cercano a 0.78, y luego comienza a decrecer hasta alcanzar un valor en estado estacionario próximo a 0.58. En el caso I, el comportamiento de la sustentación es completamente diferente, ya que decrece suavemente hasta la solución de estado estacionario (aproximadamente $C_L=0.55$). Se puede notar que la sustentación no muestra máximo ni mínimo en el proceso de cambio de forma.

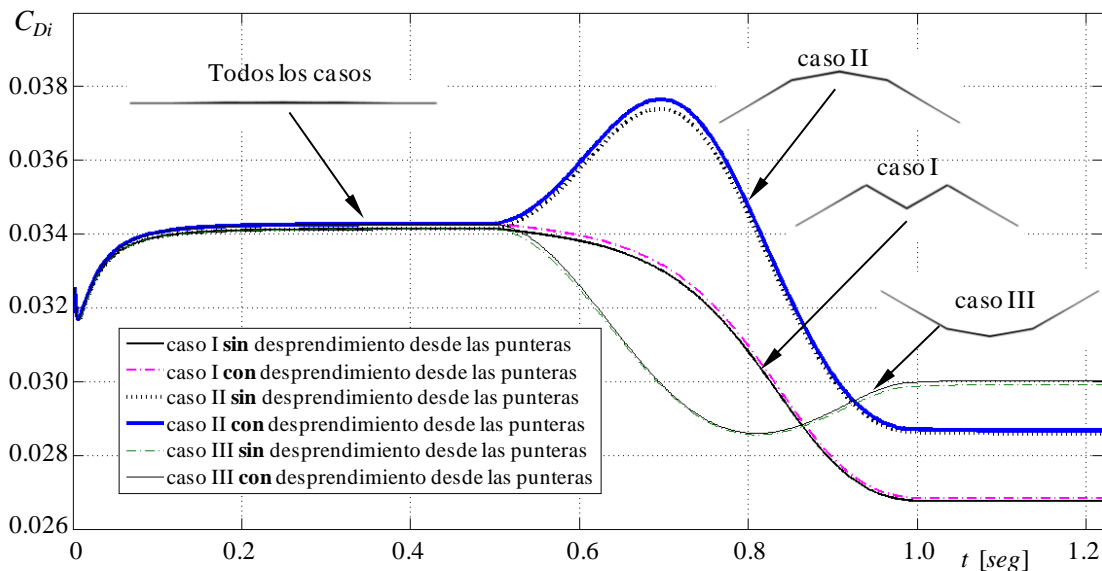


Figura 6-19: Coeficiente de resistencia inducida en función del tiempo.

En la Figura 6-19, se muestra la variación temporal del coeficiente de resistencia inducida. Puede notarse que aunque la magnitud de este coeficiente es más pequeña que la del coeficiente de sustentación, su comportamiento es cualitativamente similar. Nuevamente, los resultados obtenidos confirman que la vorticidad emitida desde las

puntas de las alas tiene una influencia poco significativa sobre las características aerodinámicas.

Estos resultados muestran que el comportamiento de las cargas aerodinámicas durante la transición desde una configuración a otra es fuertemente dependiente de la cinemática prescrita sobre las alas.

El código aerodinámico desarrollado en esta tesis automáticamente procesa los datos para generar animaciones que contribuyen a la comprensión de la variación temporal de la distribución de salto de presión (ΔC_p) sobre el ala. En la Figura 6-20 se presenta la distribución de presión para el caso II en los instantes de tiempo T_I , $T_M = (T_I + T_S) / 2$ y T_F . Es posible localizar las zonas de máximo y mínimo salto de presión. En todos los instantes el máximo salto ocurre sobre el borde de ataque en una zona cercana a la punta del ala. Se puede observar que para los tres instantes, ΔC_p experimenta un crecimiento gradual desde el borde de fuga hacia el borde de ataque, y este crecimiento no es uniforme a lo largo de la envergadura. No es fácil ver la variación de ΔC_p en el sentido de la cuerda, por lo tanto en la Figura 6-21 se muestra el salto de presión como una función de la variable adimensional λ (definida en el Capítulo 2) para las secciones E , F y H las cuales se indican en la Figura 6-20.

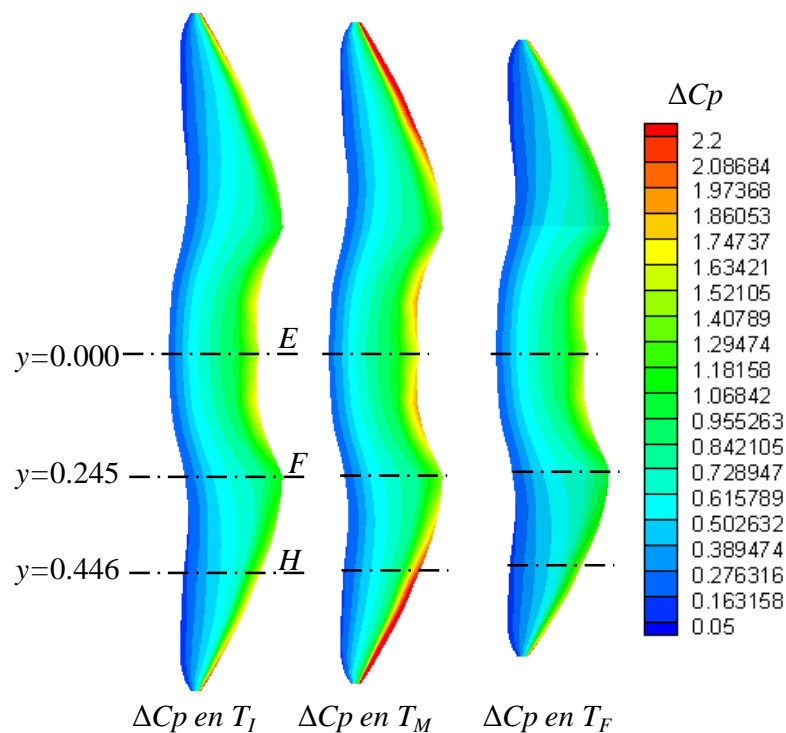


Figura 6-20: Distribución de ΔC_p para el caso II.

En la sección *E* el comportamiento de ΔC_p es similar en magnitud en los 3 instantes; una pequeña diferencia ocurre sobre el borde de ataque. En la sección *F* está diferencia se muestra algo más significativa, y en la sección *H* es mayor. Es posible observar que la diferencia decrece hacia el borde de fuga donde ΔC_p parece estar cercano a cero para todo instante de tiempo (y a largo de todo el borde de fuga), lo cual puede ser confirmado analizando otros instantes de tiempo. Es muy importante notar que este comportamiento dependiente del tiempo cercano al borde de fuga es consistente con la condición de Kutta para flujos inestacionarios, la cual requiere que ΔC_p sea cero para todo tiempo sobre este borde.

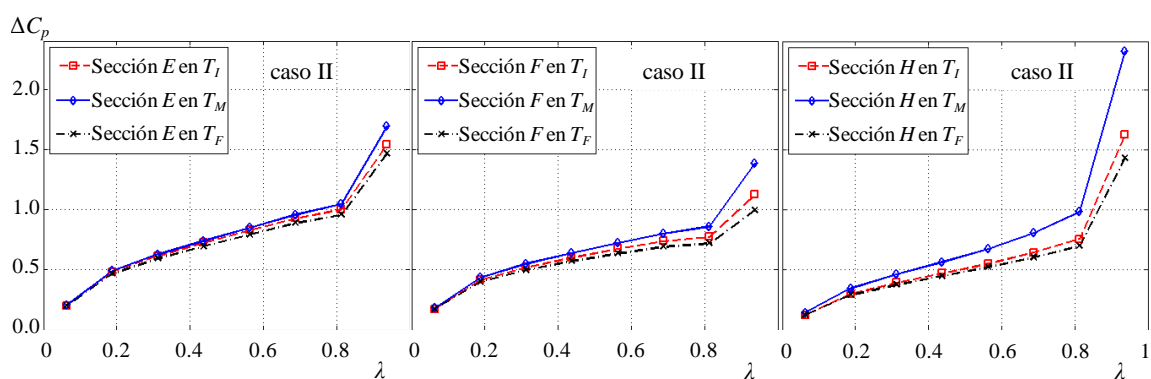


Figura 6-21: ΔC_p a lo largo de la cuerda para el caso II en las secciones *E*, *F* y *H*.

6.4. Simulaciones del comportamiento aeroelástico

En esta sección se presentan resultados sobre el comportamiento aeroelástico del concepto de ala reconfigurable (*folding wing*).

El modelo estructural se presenta en la Figura 6-22. Las vigas que constituyen la estructura son de sección rectangular (*ancho*=2 cm, *alto*=0.6 cm), y el material asociado a las mismas es un acrílico cuyas características son: densidad $\rho_b=1187 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidad $E = 3.18 \text{ GPa}$ y módulo de corte $G = 1.35 \text{ GPa}$. Este material ha sido utilizado en la construcción de prototipos experimentales de alas de UAVs para estudiar su comportamiento aeroelástico (Wang *et al.*, 2012).

El modelo de elementos finitos de la estructura cuenta con un total de 21 nodos y 21 elementos. Los dos nodos que se encuentran en la raíz del ala están empotrados. La malla aerodinámica seleccionada para realizar las simulaciones corresponde a la malla m_3 detallada en la Tabla 6-5.

Todos los resultados aquí presentados corresponden a simulaciones para un ángulo de ataque $\alpha = 0^\circ$.

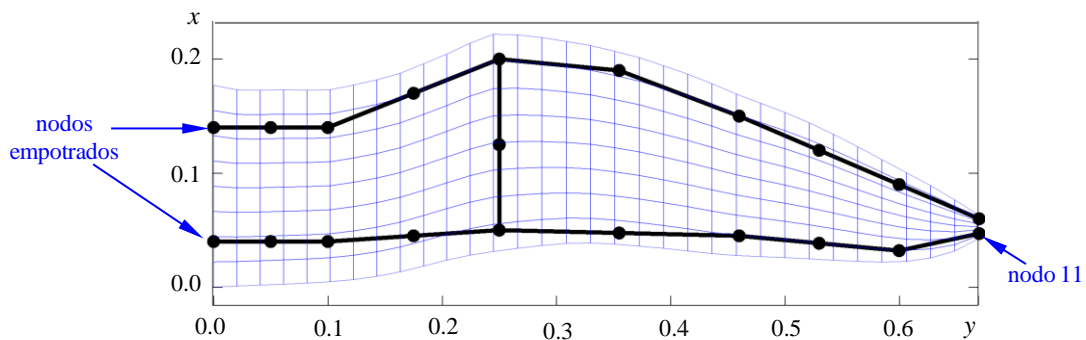


Figura 6-22: Estructura utilizada en el modelo.

Es importante recordar que en el análisis aeroelástico no se permite una especificación temporal de los parámetros de configuración θ_B y θ_C , sino que ellos asumen un valor constante en el tiempo. En otras palabras, en el análisis aeroelástico no se estudia el comportamiento de transición de una configuración a la otra, sino que, se predicen las características aeroelásticas asociadas a cada configuración del ala (cada una de ellas definida por un valor constante de θ_B y θ_C).

6.4.1. Influencia del número de modos y de la longitud de la estela

En esta subsección se analiza la influencia de la cantidad de modos adoptados para expandir la solución y de la longitud de la estela sobre la respuesta aeroelástica del ala reconfigurable. Los análisis se llevan a cabo para una configuración del ala completamente extendida, es decir que los parámetros de configuración asumen los valores $\theta_B = \theta_C = 0$.

Los resultados analizados aquí permiten seleccionar la cantidad de modos y la longitud de la estela con el fin de ser utilizados, posteriormente, en el resto de los estudios aeroelásticos.

Influencia del número de modos sobre la respuesta aeroelástica

Como parte del estudio aeroelástico se llevó a cabo una serie de simulaciones para determinar la influencia de los modos sobre la respuesta aeroelástica. Experimentos numéricos mostraron que el número de modos considerados debe ser mayor para el caso en que la velocidad de corriente libre supere la velocidad de *flutter*.

A continuación se presentan resultados correspondientes a un conjunto de simulaciones para una velocidad ($V_\infty = 29.8m/seg$) superior a la velocidad de *flutter*. Cada una de estas simulaciones considera un número diferente de modos.

En la Figura 6-23 se muestra el desplazamiento transversal (en la dirección z) del nodo estructural 11, denotado por u_{11}^z , en función del tiempo adimensional. Para todos los casos se observa que la respuesta presenta un comportamiento transitorio y luego alcanza un movimiento periódico que se mantiene en el tiempo. La diferencia entre una solución y la otra no alcanza a apreciarse en la Figura 6-23a. En la Figura 6-22b se muestra una ampliación que corresponde al estado estacionario. Claramente se observa que a medida que se consideran más modos las soluciones tienden a superponerse. Para 8, 9 y 10 modos se puede apreciar que no existen diferencias significativas en las soluciones.

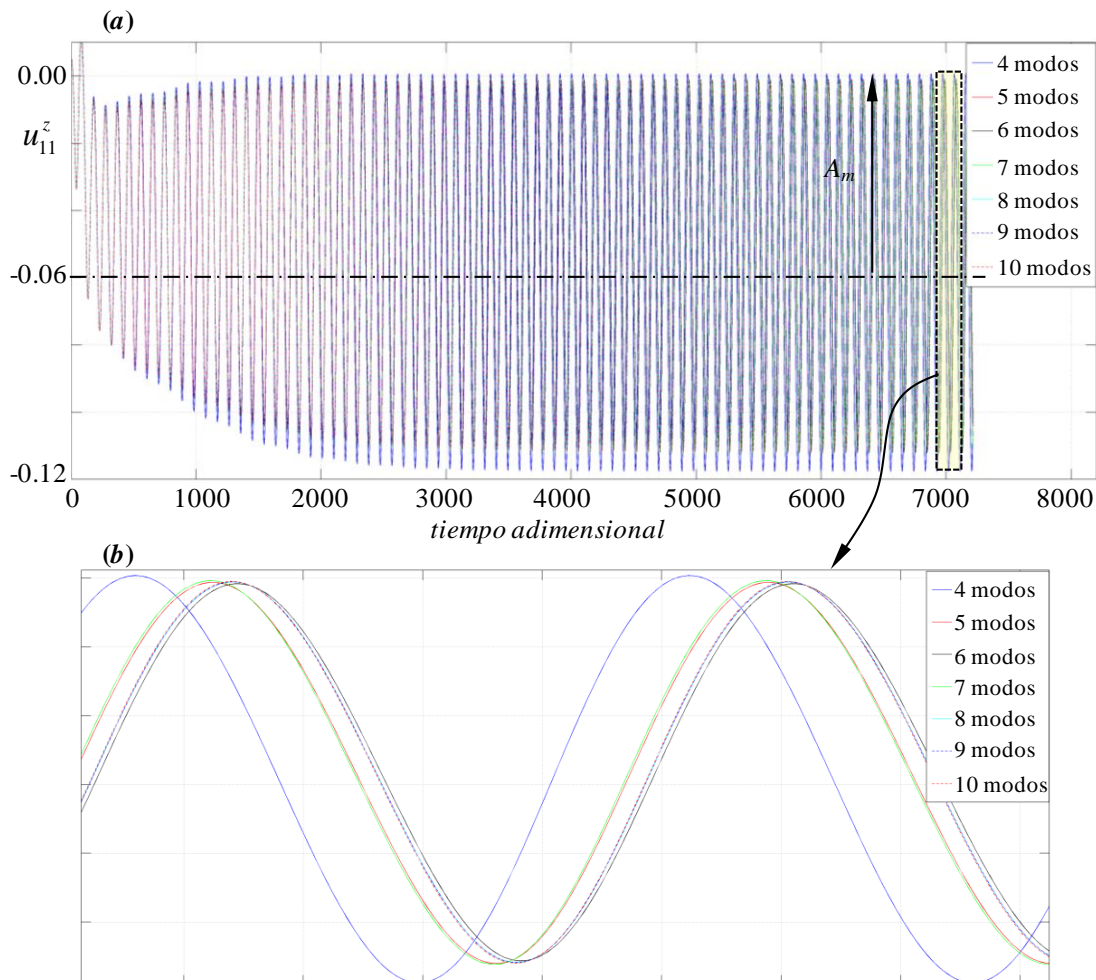


Figura 6-23: Desplazamiento u_{11}^z en función del tiempo – Influencia del número de modos.

En la Figura 6-24 se muestra la amplitud de vibración, A_m , en régimen estacionario del desplazamiento transversal del nodo estructural 11 como una función de los modos considerados. Se puede observar un comportamiento oscilatorio que se acerca a un determinado valor de amplitud. En términos cuantitativos la amplitud asociada a 8 modos tiene un diferencia del 0.09% con respecto a la amplitud correspondiente a 9 modos.

Analizando otros grados de libertad se puede ver una respuesta cualitativamente similar a la del desplazamiento transversal del nodo estructural 11. De acuerdo a los análisis realizados con respecto a la influencia de los modos, una selección razonable para llevar a cabo las simulaciones numéricas es utilizar una cantidad de 8 modos para predecir la respuesta aeroelástica.

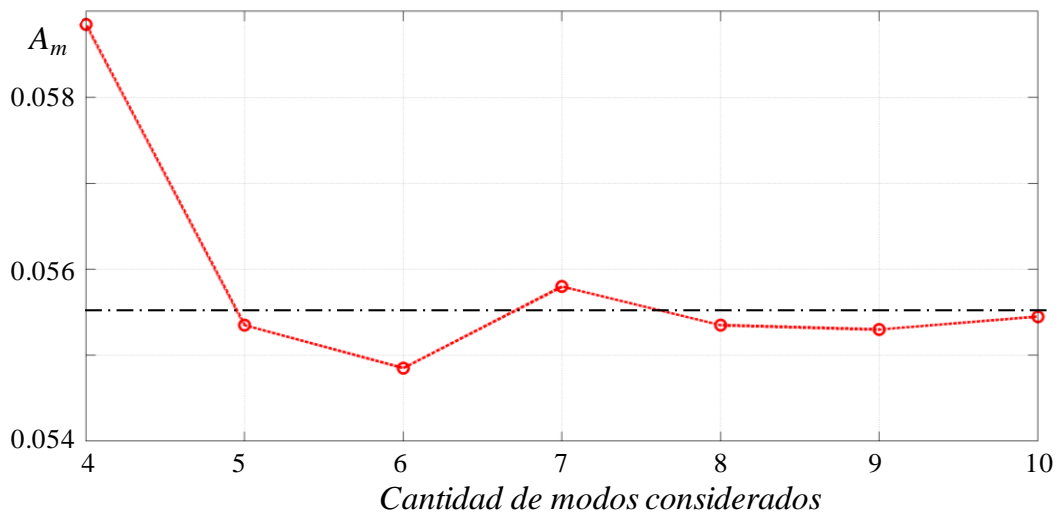


Figura 6-24: Amplitud de u_{11}^z en función del número de modos considerados.

Influencia de la longitud de la estela en la respuesta aeroelástica

A medida que la vorticidad se convecta al seno de fluido, ésta se aleja desde la superficie sustentadora, y su influencia sobre el campo de velocidad cercano a la superficie del solido se hace menos significativa. Consecuentemente su efecto sobre las cargas aerodinámicas es cada vez menor. Este fenómeno permite despreciar los segmentos vorticosos de la estela que se encuentran lejos de la superficie sustentadora con el fin de reducir el costo computacional. La herramienta numérica permite eliminar automáticamente los segmentos vorticosos que se encuentran más allá de una determinada distancia denominada “longitud de estela”, la cual debe ser establecida a priori por el usuario.

Se realizaron una serie de simulaciones para varias longitudes de estelas a fin de determinar una longitud adecuada para llevar a cabo las simulaciones numéricas aeroelásticas del concepto *folding wing*.

En la Figura 6-25 se presenta el desplazamiento transversal en la dirección z del nodo estructural 11 para una velocidad ($V_\infty = 29.8 \text{ m/seg}$) de corriente libre superior a la velocidad de *flutter*. Las soluciones corresponden a las diferentes longitudes de estelas consideradas. Para especificar la longitud de la estela (le) se ha tomado como referencia a la cuerda media (c_m) del ala; por ejemplo $le/c_m = 5$ corresponde a un longitud de estela igual a 5 veces la cuerda media del ala.

Para todas las simulaciones se observa la presencia de un transitorio, y luego la respuesta alcanza una amplitud constante que se mantiene en el tiempo. La Figura 6-25, aunque la diferencia entre las soluciones no alcanza a apreciarse, muestra que ellas tienden a superponerse a medida que se incrementa la longitud de la estela.

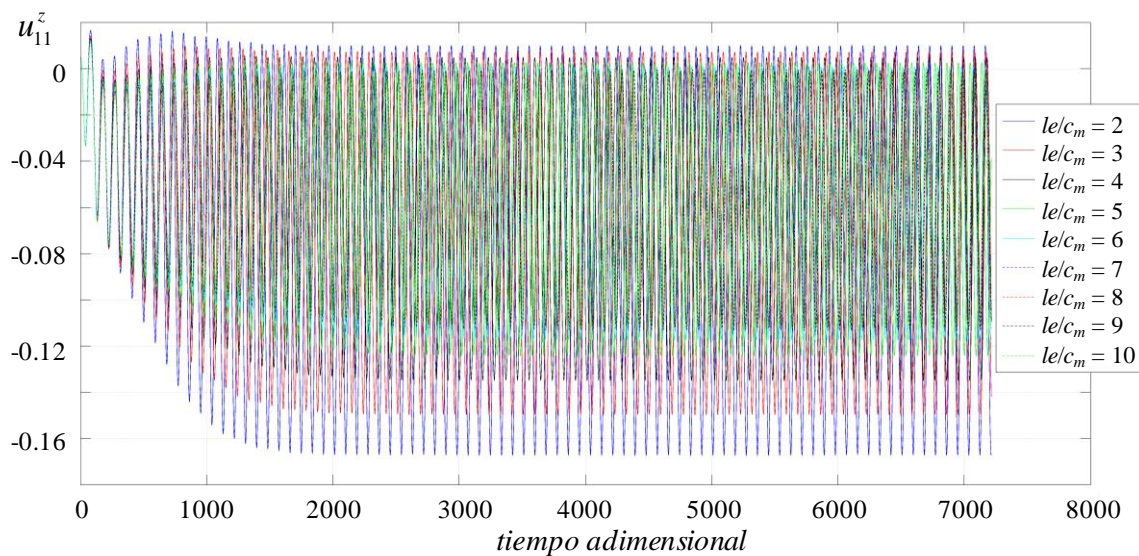


Figura 6-25: Desplazamiento u_{11}^z en función del tiempo – Influencia de la estela.

En la Figura 6-26 se grafica la amplitud de vibración del desplazamiento transversal del nodo estructural 11 como una función de le/c_m . La amplitud decrece de una forma aparentemente exponencial y tiende a un determinado valor de amplitud. Una longitud de estela de $7c_m$ tiene una diferencia porcentual con una de longitud de $8c_m$ de 2.2%; mientras que esta última ($8c_m$) tiene una diferencia porcentual con una longitud de $9c_m$ del orden de 0.35%. Con esto en mente y considerando que el tiempo para realizar la simulación correspondiente a $8c_m$ representa aproximadamente el 80% del tiempo

consumido por la simulación asociada a $9c_m$, se selecciona una longitud de estela igual a ocho veces la cuerda media del ala para realizar las simulaciones aeroelásticas del concepto *folding wings*.

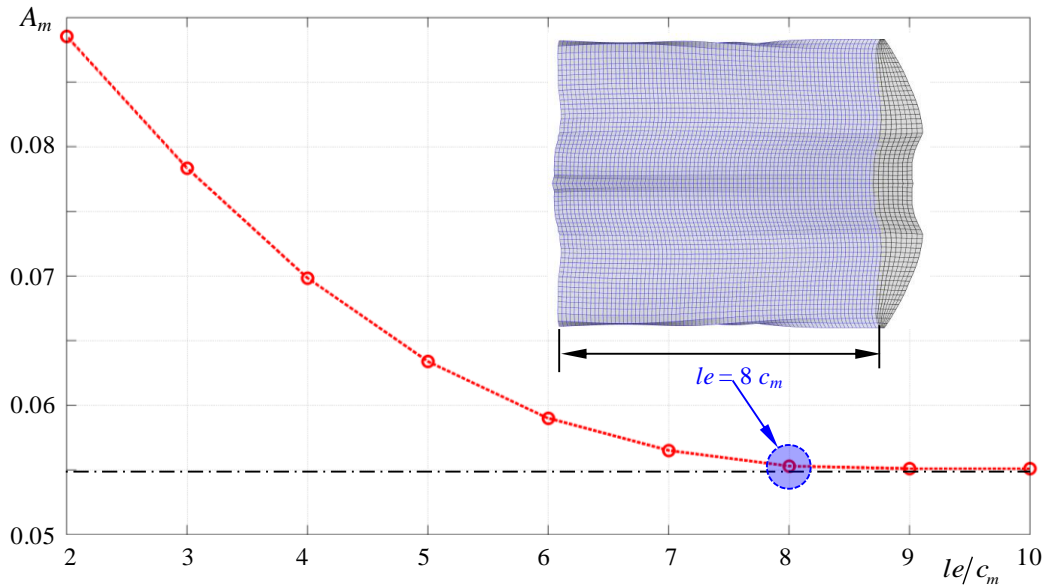


Figura 6-26: Amplitud de u_{11}^z en función de le/c_m .

6.4.2. Variación del ángulo de diedro del ala interna

En esta sección se presentan y analizan resultados que ayudan a comprender el comportamiento de las características aeroelásticas asociadas al concepto *folding wing* para distintos valores del parámetro de configuración θ_B (ángulo de diedro asociado al ala interna). El ala externa siempre se mantiene horizontal, es decir su ángulo de diedro asociado es nulo ($\theta_C = 0$).

Cada configuración del ala, y por ende la geometría de la estructura, queda definida a través de θ_B . Por lo tanto, se espera que para importantes cambios de este parámetro se tengan significativas variaciones en los modos y frecuencias naturales de la estructura. La comprensión del comportamiento de estas características naturales puede resultar transcendental para lograr un entendimiento acabado del comportamiento de las características aeroelásticas.

En la Figura 6-27 se muestran los primeros 4 modos asociados a dos configuraciones diferentes. La primera columna corresponde a una configuración definida por $\theta_B = 0^\circ$ y la segunda columna a una configuración especificada por $\theta_B = 20^\circ$.

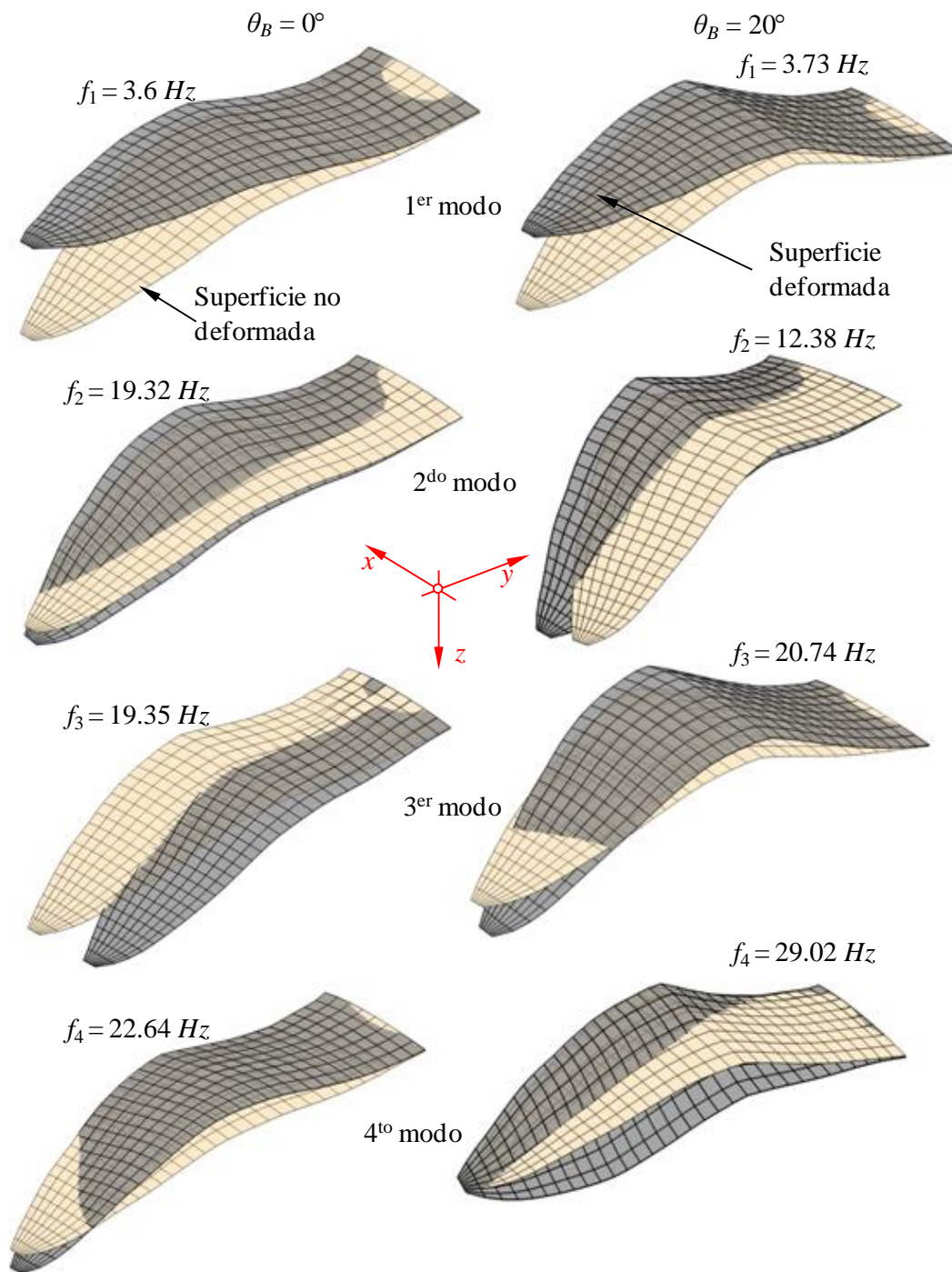


Figura 6-27: Primeros 4 modos para $\theta_B = 0^\circ$ y $\theta_B = 20^\circ$.

Claramente, para la configuración completamente extendida ($\theta_B = 0^\circ$) se puede ver que en el primer modo, al igual que en el cuarto, predomina la flexión transversal en la dirección z . En el segundo modo tiene una gran preponderancia la torsión (alrededor del eje y) y el tercer modo se corresponde a un modo en flexión en el plano xy .

Con una pequeña variación en el ángulo θ_B la estructura deja de estar contenida en el plano xy y se puede esperar que los modos cambien radicalmente. Para la configuración $\theta_B = 20^\circ$ se observa que el primer y tercer modo corresponden a modos en flexión en la dirección z ; el tercer a modo ya no tiene componente en el plano xy . El segundo tiene preponderancia en torsión y algo de flexión en la dirección y .

En la Figura 6-28 se presenta, en función de θ_B , la variación de las frecuencias naturales de la estructura en vacío (como anteriormente se mencionó, esto es cuando la velocidad de la corriente libre es nula $V_\infty = 0$). A medida que se incrementa el parámetro de configuración θ_B , la primera frecuencia crece muy lentamente y la segunda decrece con mayor velocidad; se puede observar que la diferencia entre ellas se hace cada vez más estrecha. La frecuencia asociada al tercer modo crece al principio hasta alcanzar un máximo cerca de $\theta_B = 10^\circ$ y después comienza a disminuir. La frecuencia correspondiente al cuarto modo tiene un comportamiento creciente con el incremento de θ_B . Es importante notar que para $\theta_B = 0^\circ$ las frecuencias asociadas al tercer (19.32Hz) y cuarto (19.35Hz) modo se encuentran muy próximas.

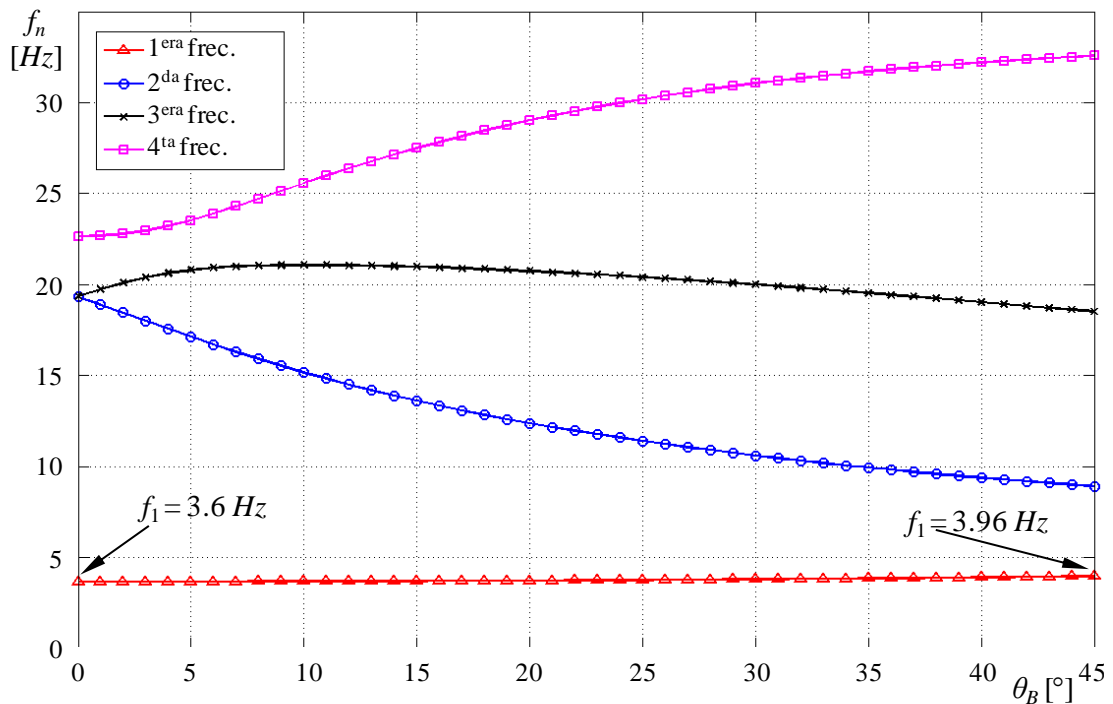


Figura 6-28: Primeras 4 frecuencias naturales en función de θ_B .

La variación de los modos y frecuencias naturales de la estructura y por otro lado la variación de la distribución de carga aerodinámica sobre el ala (ya que cambia su geometría), producen una alteración en la velocidad (V_F) y frecuencia (f_F) de *flutter*.

Para explorar el comportamiento de V_F y f_F se realizaron experimentos numéricos para un conjunto de valores de θ_B que va desde $\theta_B = 0^\circ$ hasta $\theta_B = 45^\circ$, con un salto de $\Delta\theta_B = 5^\circ$; lo que incluye un total de 10 configuraciones analizadas. Para cada uno de las configuraciones se realizó una serie de simulaciones con el fin de buscar la condición de *flutter*. Una vez encontrada dicha inestabilidad fue posible trazar las curvas que se presentan en la Figura 6-29 y en la Figura 6-30.

En la Figura 6-29 Se puede observar que V_F disminuye a medida que se incrementa el ángulo θ_B . Entre $\theta_B=10^\circ$ y $\theta_B=30^\circ$ se presenta, aparentemente, un comportamiento lineal, no siendo así entre 0° y 10° , y entre 30° y 45° . Claramente se observa que el mayor valor de V_F corresponde a la configuración completamente extendida ($\theta_B = 0^\circ$) y el menor valor corresponde a la configuración dada por $\theta_B = 45^\circ$.

De acuerdo a los resultados aquí presentados es posible concluir que la aparición de *flutter* para una determina configuración puede evitarse extendiendo las alas, es decir disminuyendo el ángulo θ_B . Por ejemplo, si el requerimiento de la aeronave es volar a una velocidad 21.2 m/seg en una configuración de $\theta_B = 30^\circ$, aparecerá el fenómeno de *flutter*, pero reconfigurándose a $\theta_B = 20^\circ$ estará en una condición de vuelo estable (la velocidad de *flutter* para esta última configuración es 24.25 m/seg). Claramente, se deberá evaluar si la configuración $\theta_B = 20^\circ$ satisface los requerimientos de sustentación para mantenerse en vuelo.

Los resultados obtenidos permiten determinar las regiones de estabilidad e inestabilidad como se indica en esta misma figura. Los puntos ubicados en la región estable están caracterizados por una respuesta que tiende a una posición de equilibrio estático ante cualquier perturbación (por ejemplo los puntos (a) y (e) que se señalan en la Figura 6-29), mientras que puntos ubicados en la región inestable están caracterizados por una respuesta que alcanza un movimiento periódico con una determinada amplitud (por ejemplo los puntos (c) y (g)). Es importante destacar que las amplitudes correspondientes a los puntos inestables pueden ser tan excesivas que pueden llevar al colapso de la estructura.

La Figura 6-30 muestra que la frecuencia de *flutter* decrece con el incremento del ángulo θ_B . Debido a que la primera frecuencia de torsión decrece más rápido de lo que crece la primera de flexión es razonable esperar este comportamiento para f_F . Esto se

debe, generalmente, a que la frecuencia de *flutter* se encuentra situada entre la primera frecuencia natural de flexión y la primera de torsión.

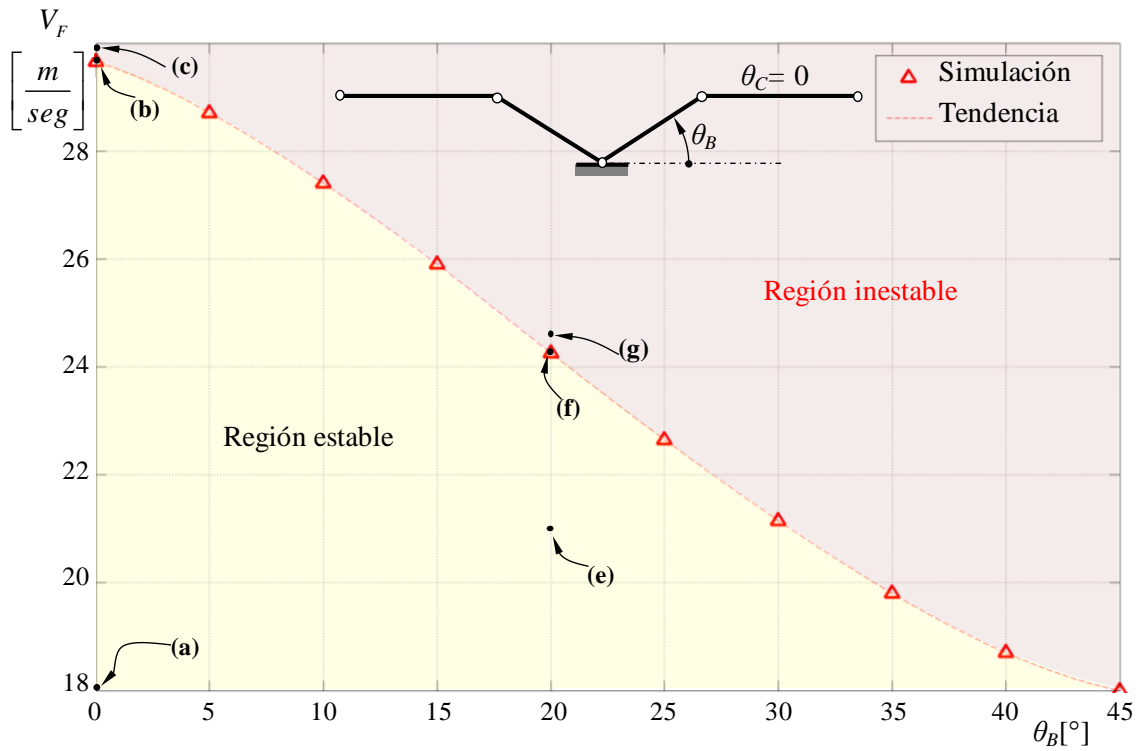


Figura 6-29: Velocidad de *flutter* en función de θ_B - regiones estables e inestables.

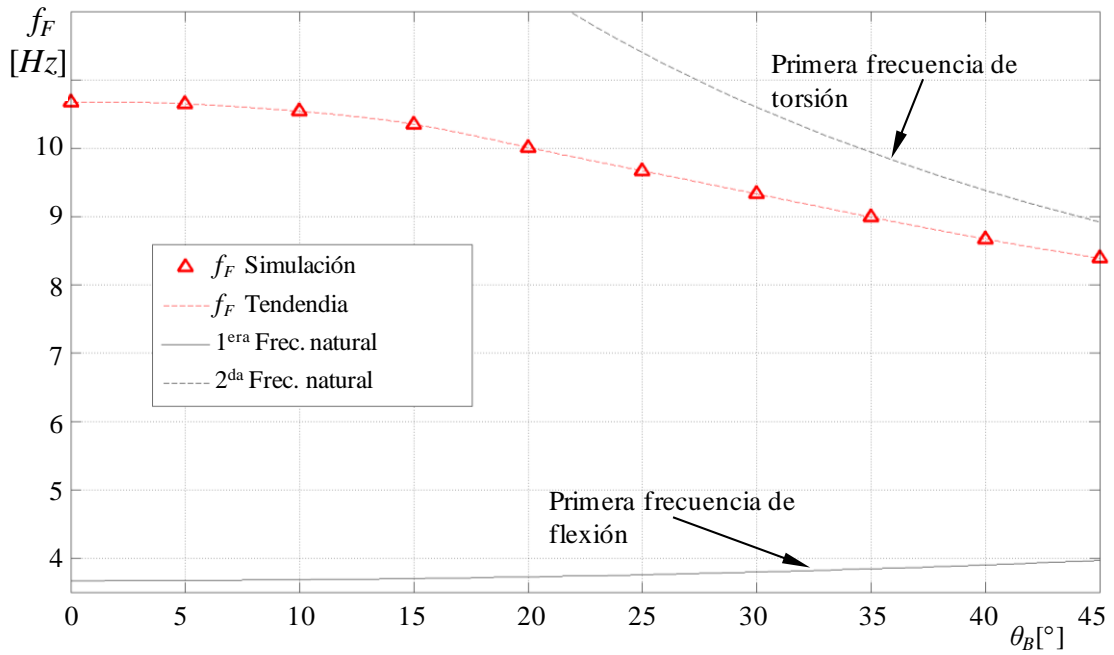


Figura 6-30: Frecuencia de *flutter* en función de θ_B .

En las siguientes Subsecciones se presentarán algunos ejemplos de respuestas asociadas a puntos ubicados en las regiones estable e inestable, además se presenta y explica la respuesta de puntos contenidos en la frontera entre estas regiones.

6.4.2.1. Configuración definida por $\theta_B = 0^\circ$ y $\theta_C = 0^\circ$

Aquí se presenta un análisis de los puntos (a), (b) y (c) que se indican en la Figura 6-29 y corresponden a la configuración completamente extendida del ala definida por los valores $\theta_B = 0$ y $\theta_C = 0$. El punto (a) se encuentra ubicado en la región estable, el punto (c) se localiza en la región inestable, y el punto (b) se encuentra sobre la frontera que divide las dos regiones.

Punto (a) - Respuesta aeroelástica para una velocidad sub-crítica

En la Figura 6-31 se presenta la respuesta de las coordenadas generalizadas asociadas a los seis primeros modos en función del tiempo adimensional. La simulación corresponde a una velocidad sub-crítica ($V_\infty = 18 \text{ m/seg}$) y se ha impuesto una condición inicial sobre el segundo modo ($q_2(0) = 0.08$). Claramente se puede observar que todos los modos, menos el tercero, tienen un comportamiento oscilatorio que se atenúa hasta alcanzar un valor que corresponde a la posición de equilibrio estático. En el modelo no se ha considerado amortiguamiento estructural, y por lo tanto la razón de este comportamiento se debe al amortiguamiento aerodinámico externo. También se puede observar que el modo 3 (el cual está asociado a la flexión en el plano xy) tiene un comportamiento transitorio al principio debido al acoplamiento que producen los efectos aerodinámicos, y luego de que todos los modos se estabilizan en su posición de equilibrio, el modo 3 se mantiene oscilando con una amplitud aproximadamente constante cuya frecuencia de vibración es de 19.35 Hz (tercera frecuencia natural en vacío). Este último comportamiento se debe a que el amortiguamiento en este modo es principalmente producido por los efectos viscosos, los cuales no son considerados en este modelo. El bajo amortiguamiento en la respuesta de q_3 , que no logra apreciarse, es debido a la resistencia inducida que es capturada por el UVLM. Además es posible notar que el orden de magnitud de vibración de este modo es muy pequeña comparada con el resto de los modos.

En la Figura 6-32, que muestra una proyección en el espacio de estado asociado al modo 1 y 2, se puede observar que se desarrolla un comportamiento similar a un foco estable. La FFT para todos los modos (Figura 6-33) muestra notoriamente que todos ellos vibran en más de una frecuencia. En esta misma figura se han indicado con líneas de punto las seis primeras frecuencias naturales de la estructura en vacío ($f_1=3.6Hz$, $f_2=19.32Hz$, $f_3=19.35Hz$, $f_4=22.64Hz$, $f_5=56.6Hz$ y $f_6=62.1Hz$). En el modo 3 se puede observar claramente que aparece una frecuencia que es preponderante, la cual corresponde a su frecuencia natural en vacío f_3 .

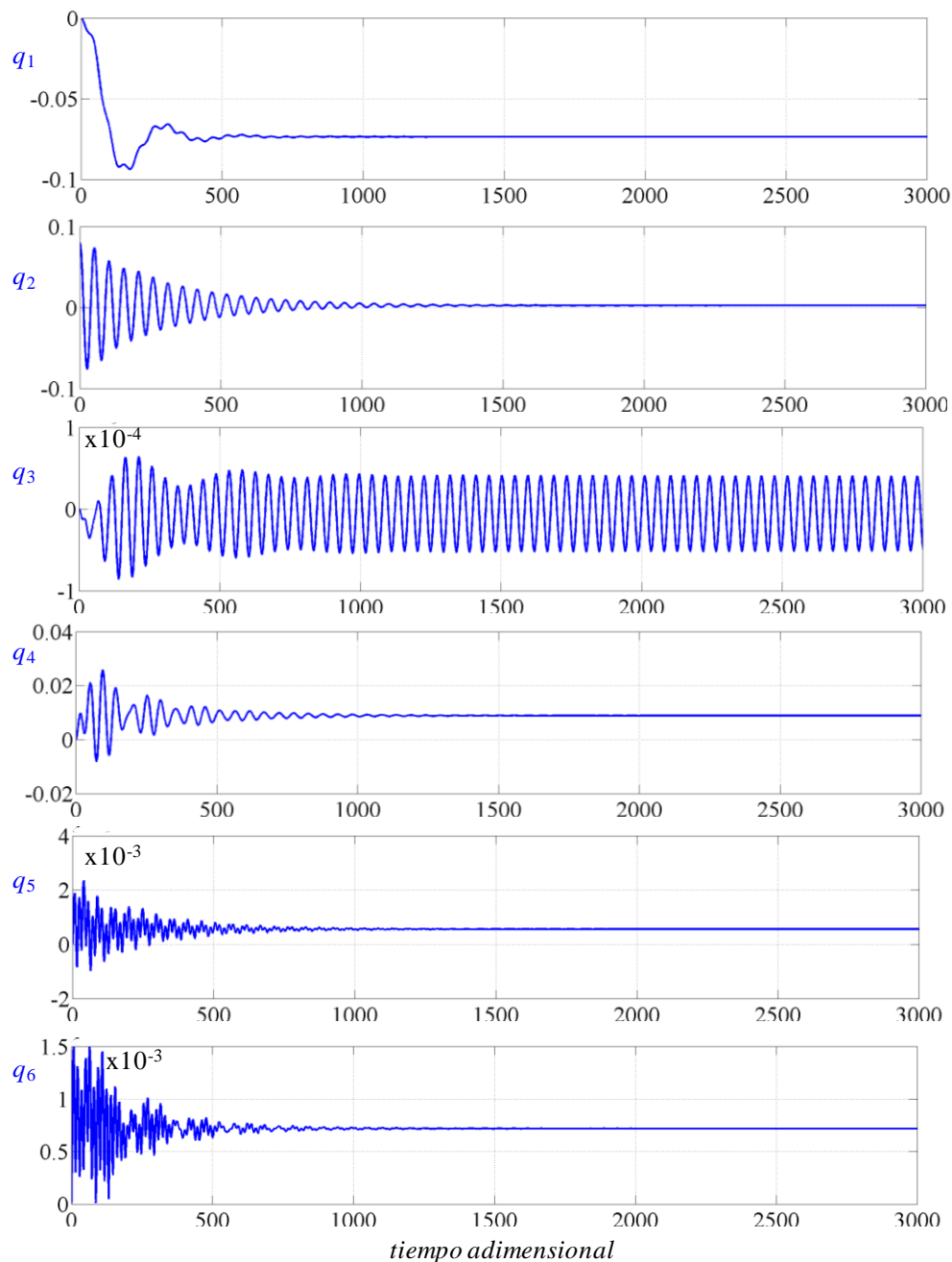


Figura 6-31: Respuesta de los primeros 6 modos para un velocidad sub-crítica ($V_\infty = 18 \text{ m/seg}$).

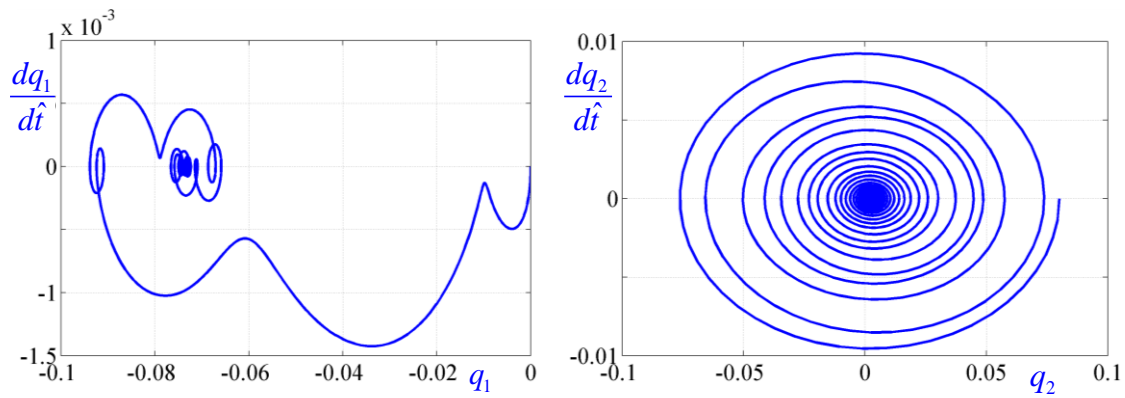


Figura 6-32: Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 18 \text{ m/seg}$).

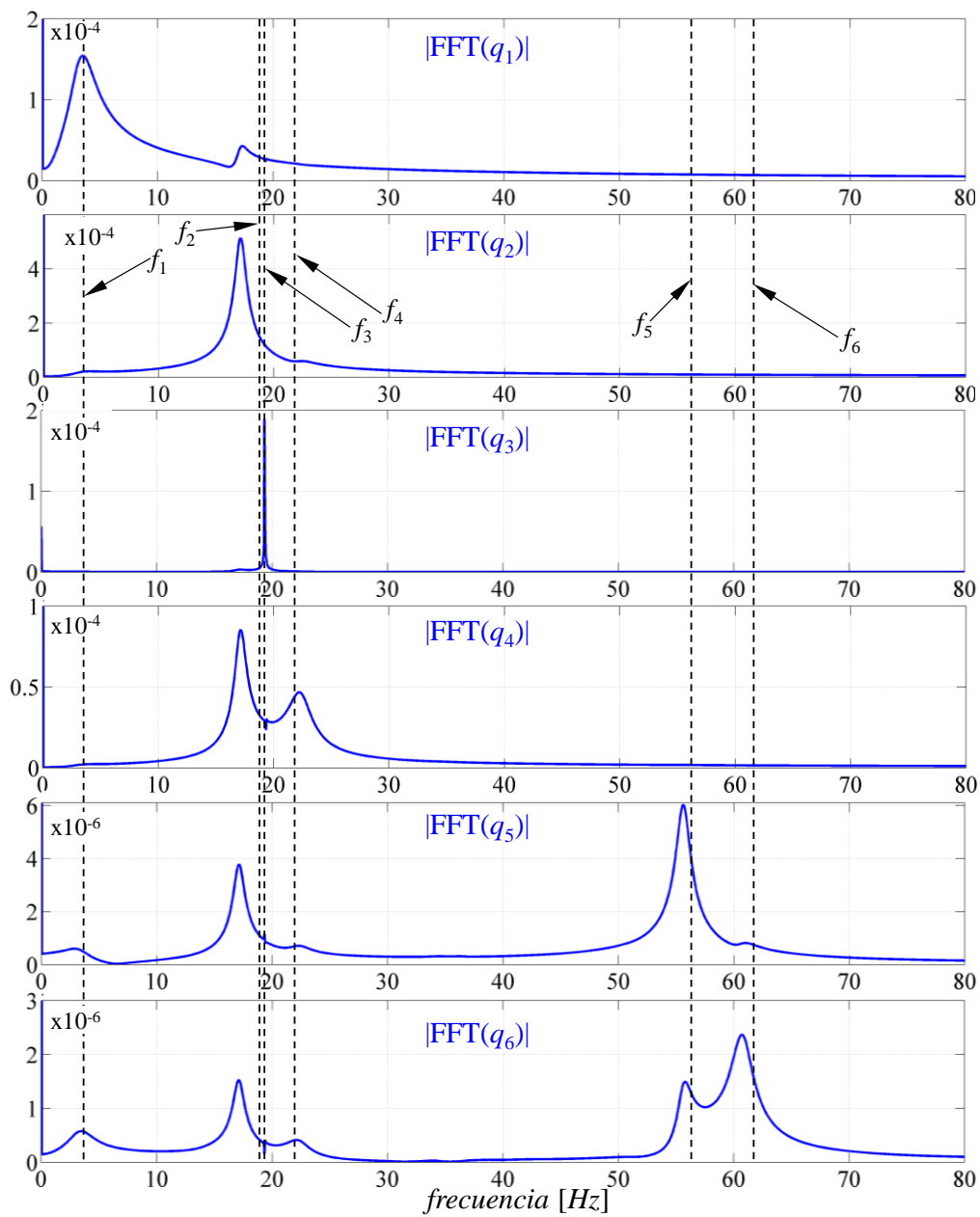


Figura 6-33: Transformada Rápida de Fourier para los primeros 6 modos – velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 18 \text{ m/seg}$).

Punto (b) - Respuesta aeroelástica para la velocidad crítica

Se realiza una simulación para una velocidad ($V_\infty = 29.66 \text{ m/s}$) muy próxima a la velocidad de *flutter*. Se impone una condición inicial sobre el segundo modo con un valor de $q_2(0) = 0.08$ y el resto de las coordenadas y velocidades generalizadas son iguales a cero. Cuando la corriente de aire alcanza la velocidad crítica la respuesta oscila en el tiempo con un movimiento periódico como se muestra en la Figura 6-34, donde se ha excluido el modo 3. Los modos comienzan con un transitorio y luego se acomodan para oscilar con una frecuencia particular denominada frecuencia de *flutter*. La Figura 6-35, que presenta la Transformada Rápida de Fourier de las coordenadas modales, muestra que la frecuencia de *flutter* está próxima a 10.67 Hz . Se puede notar que esta frecuencia se encuentra cerca del promedio entre la primera ($f_1 = 3.6 \text{ Hz}$) y segunda ($f_2 = 19.32 \text{ Hz}$) frecuencia natural de la estructura en vacío. La proyección en el espacio de estado (Figura 6-36) muestra que se desarrolla un ciclo límite.

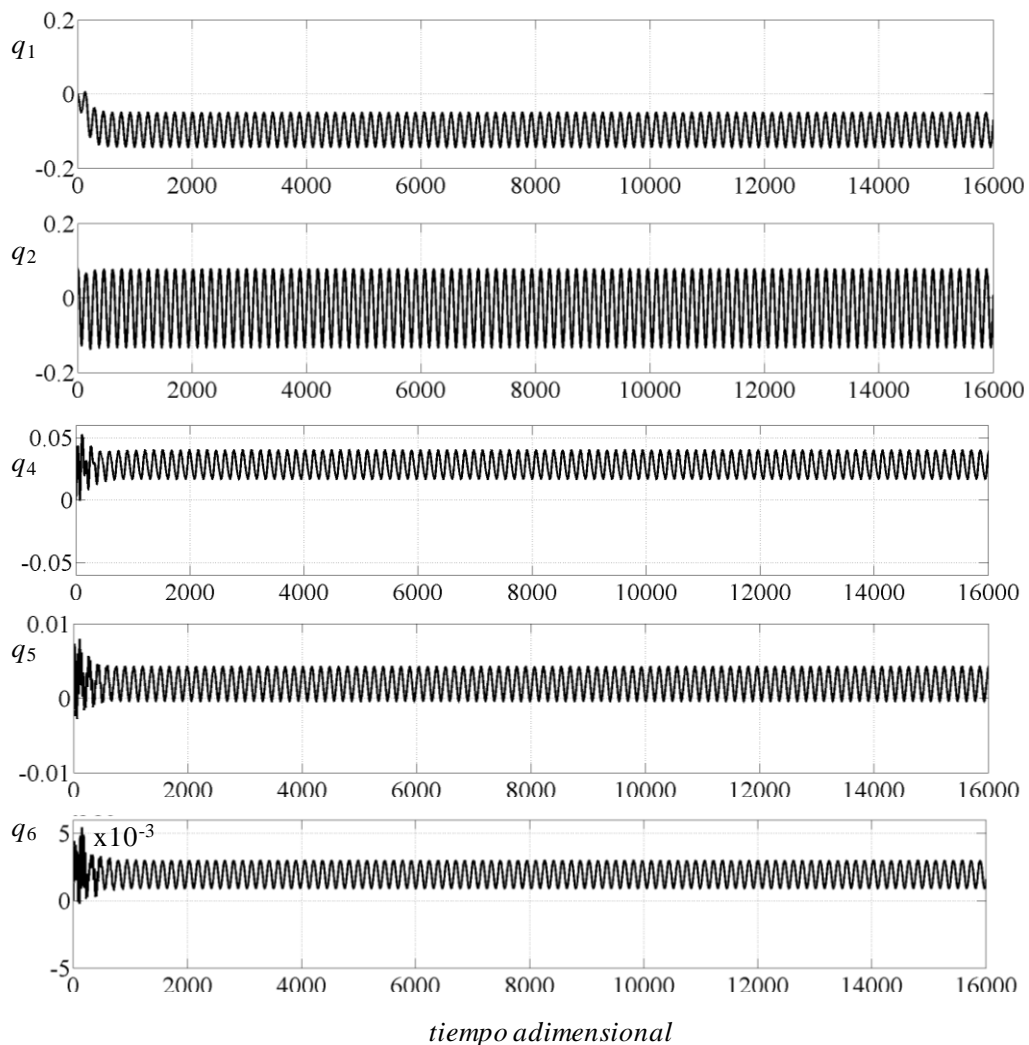


Figura 6-34: Respuesta temporal 5 modos -velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 29.66 \text{ m/seg}$).

En la Figura 6-37 se presenta la estela para diferentes pasos de tiempo. En el paso de tiempo 60 aún se puede observar el vórtice de arranque característico de un comienzo impulsivo. Aunque en la simulación no considere el desprendimiento de vorticidad desde las puntas de las alas, claramente se puede observar la formación de un vórtice de punta de ala. El paso de tiempo 1230 corresponde a un instante durante el *flutter* en donde se puede ver la presencia de una “onda” en la estela que se propaga con el fluido.

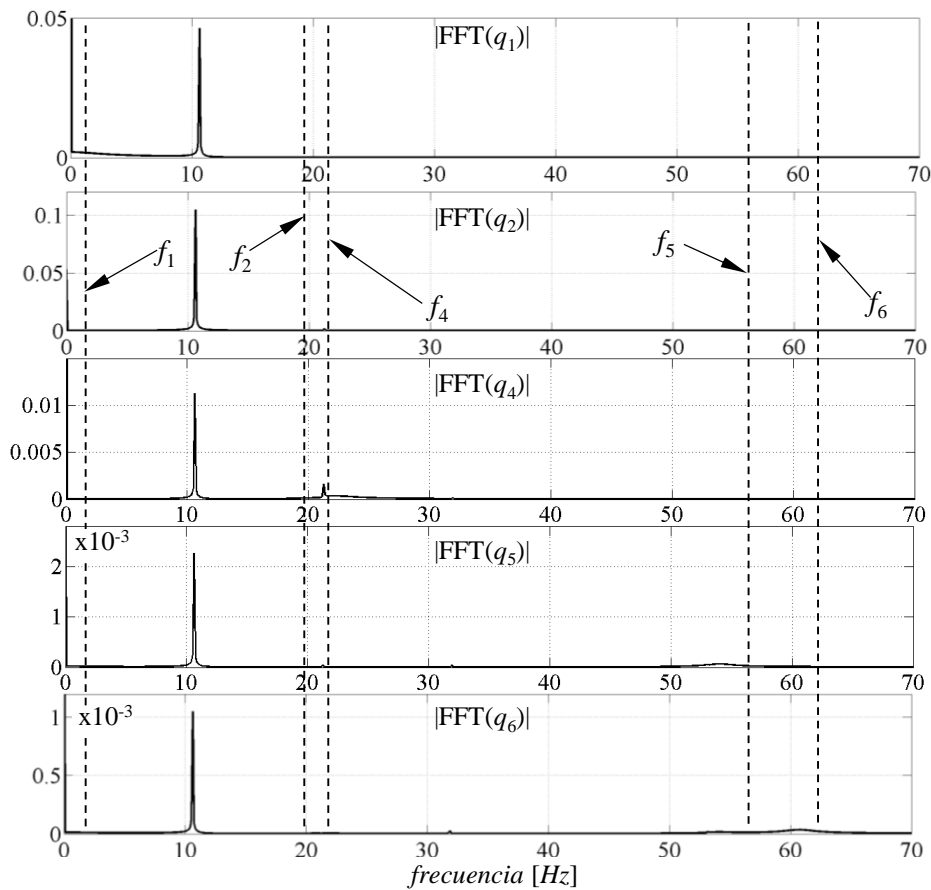


Figura 6-35: Transformada Rápida de Fourier de 5 modos - velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 29.66 \text{ m/seg}$).

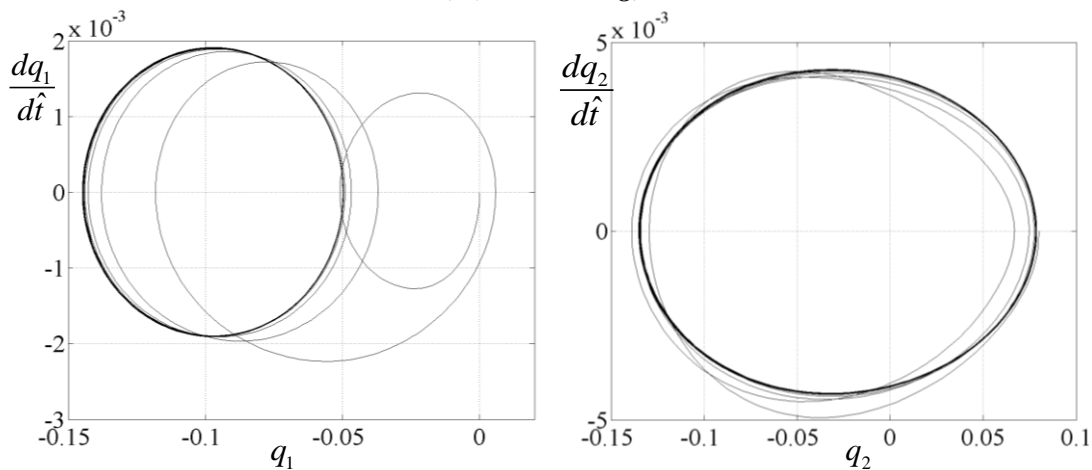


Figura 6-36: Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 29.66 \text{ m/seg}$).

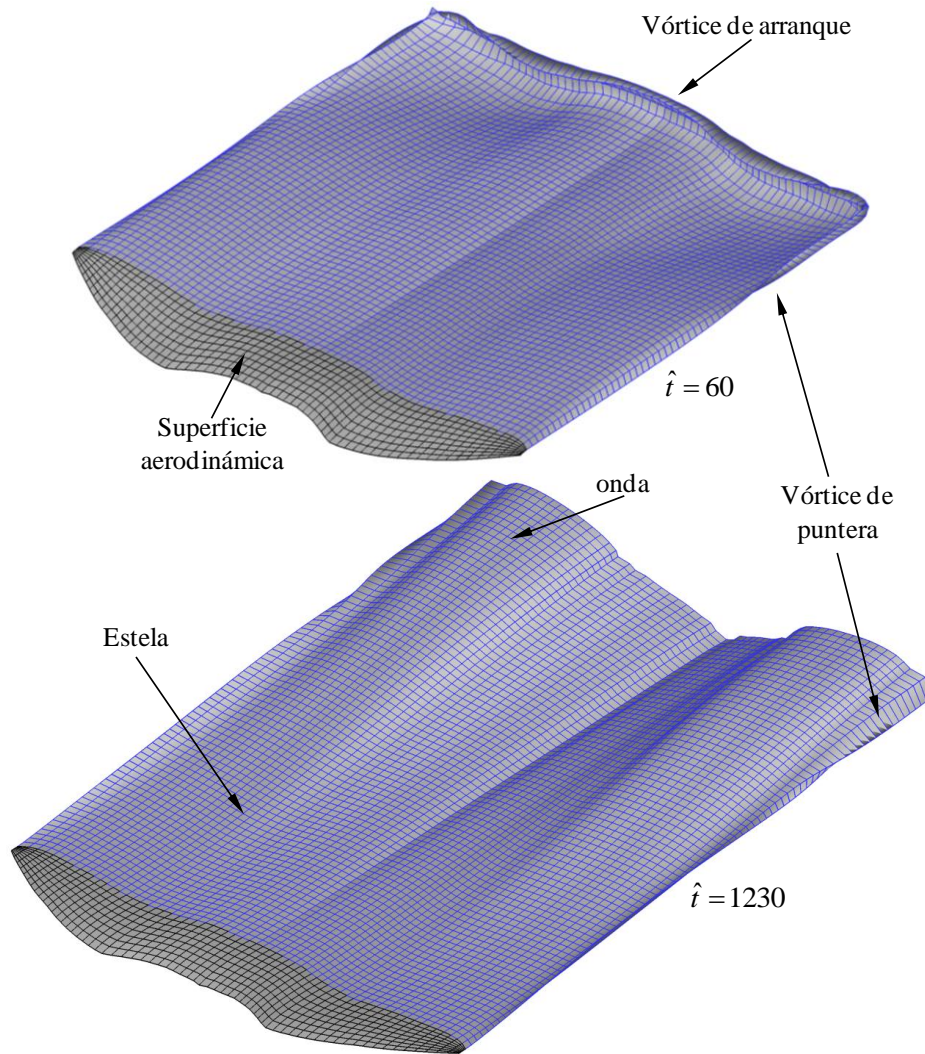


Figura 6-37: Desarrollo de la estela en diferentes pasos de cálculo -velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 29.66 \text{ m/seg}$).

Punto (c) - Respuesta aeroelástica para una velocidad supercrítica

En este caso se presentan algunos resultados correspondientes a dos simulaciones para una velocidad ($V_\infty = 29.8 \text{ m/seg}$) superior a la velocidad de *flutter*. Para cada una de ellas se impusieron condiciones iniciales diferentes: (i) una condición inicial impuesta sobre el segundo modo $q_1(0) = 0.15$ y el resto de coordenadas y velocidades generalizadas igual a cero; y (ii) una condición inicial sobre el primer modo $q_1(0) = -0.2$ y las demás coordenadas y velocidades generalizadas igual a cero.

En la Figura 6-38 se muestra la respuesta de los 4 primeros modos en función del tiempo adimensional. Cada perturbación inicial provoca un comportamiento transitorio diferente en las respuestas, y luego alcanzan un movimiento periódico de igual

amplitud. Aunque no se muestra la respuesta del resto de los modos, todos exhiben el mismo comportamiento.

La FFT para los primeros 4 modos (Figura 6-39) muestra que ellos oscilan con una determinada frecuencia cuyo valor se encuentra próximo a 10.6 Hz . Resulta interesante destacar que este valor, como lo predice la teoría de *flutter* de dos grados de libertad, es algo inferior a la frecuencia asociada a la condición crítica.

En la Figura 6-40, se puede observar la proyección en el espacio de estado donde se manifiesta la presencia de un ciclo límite. Claramente, las soluciones convergen a este ciclo que por sus características resulta ser un ciclo límite estable. La trayectoria correspondiente a la primera condición inicial evoluciona acercándose al ciclo límite desde el interior, mientras que la trayectoria asociada a la segunda condición inicial evoluciona acercándose desde el exterior. Otras condiciones iniciales fueron impuestas sobre el sistema dinámico y las trayectorias mostraron convergencia hacia el ciclo límite.

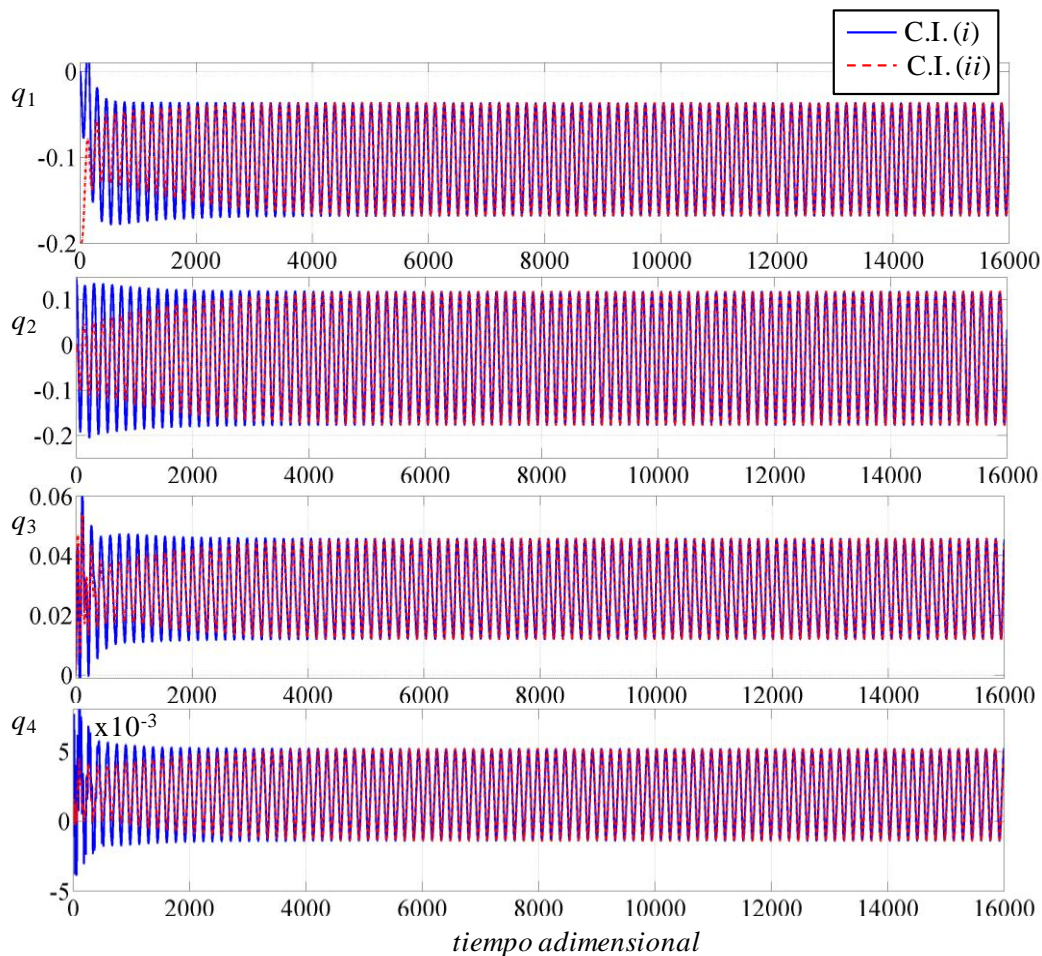


Figura 6-38: Respuesta temporal de 4 modos -velocidad superior a V_F ($V_\infty = 29.8 \text{ m/seg}$).

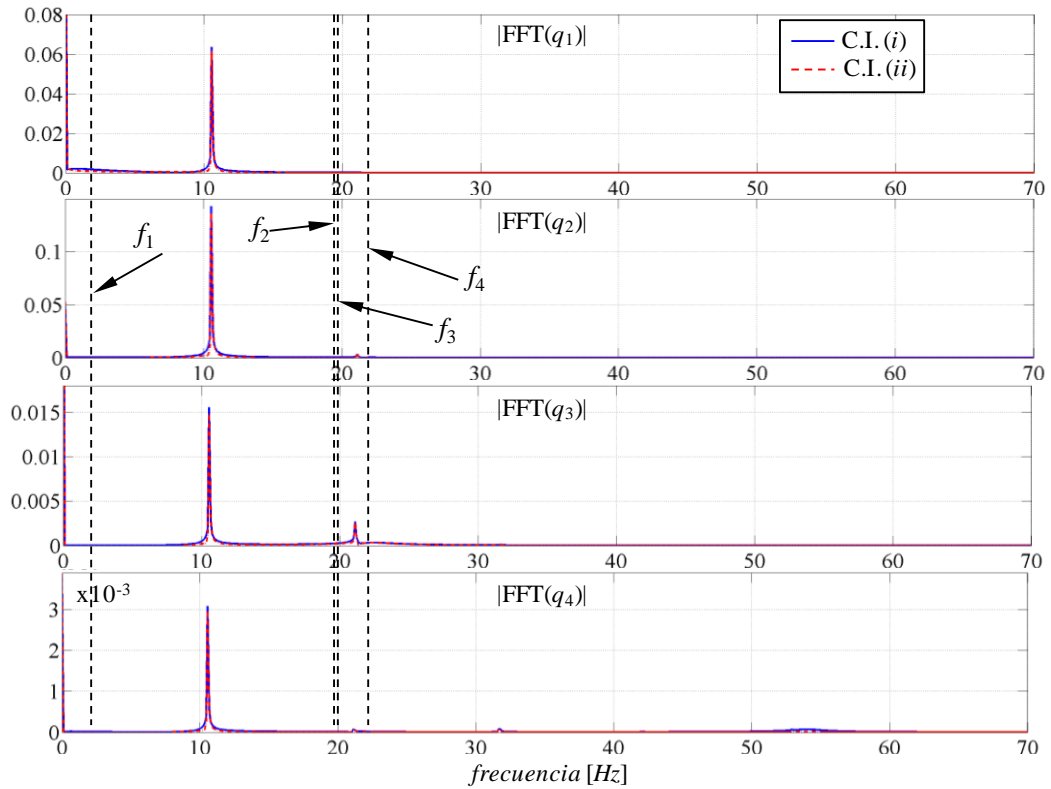


Figura 6-39: Transformada Rápida de Fourier de 4 modos - velocidad superior a V_F ($V_\infty = 29.8 \text{ m/seg}$).

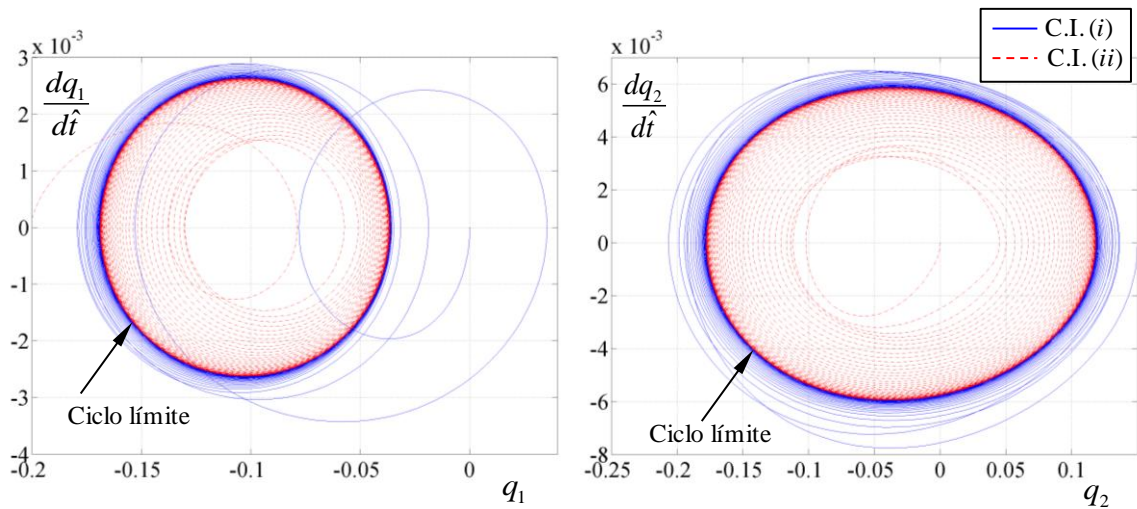


Figura 6-40: Proyección en el espacio de estado de los modos 1 y 2 ($V_\infty = 29.8 \text{ m/seg}$).

6.4.2.2. Configuración definida por $\theta_B = 20^\circ$ y $\theta_C = 0^\circ$

A continuación se presenta el análisis correspondiente a los puntos (e), (f) y (g) que se indican en la Figura 6-29; los cuales corresponden a la configuración del ala definida por los valores $\theta_B = 20^\circ$ y $\theta_C = 0^\circ$. El punto (e) se encuentra ubicado sobre la región estable, el punto (g) se localiza en la región inestable y el punto (f) se encuentra sobre la frontera que divide las regiones antes mencionadas.

Punto (e) Respuesta aeroelástica para una velocidad subcrítica

En la Figura 6-41 se presenta la respuesta correspondiente a las 3 primeras coordenadas modales en función del tiempo adimensional para una velocidad sub-crítica ($V_\infty = 21$ m/seg). Los tres modos presentan un comportamiento oscilatorio que se atenúa en el tiempo como consecuencia del amortiguamiento aerodinámico externo.

A diferencia de lo ocurrido con el tercer modo asociado a la configuración completamente extendida ($\theta_B = \theta_C = 0^\circ$), la amplitud de este modo en esta nueva configuración se amortigua con el tiempo. Esto se debe a que el tercer modo no representa un modo puro en flexión en el plano xy .

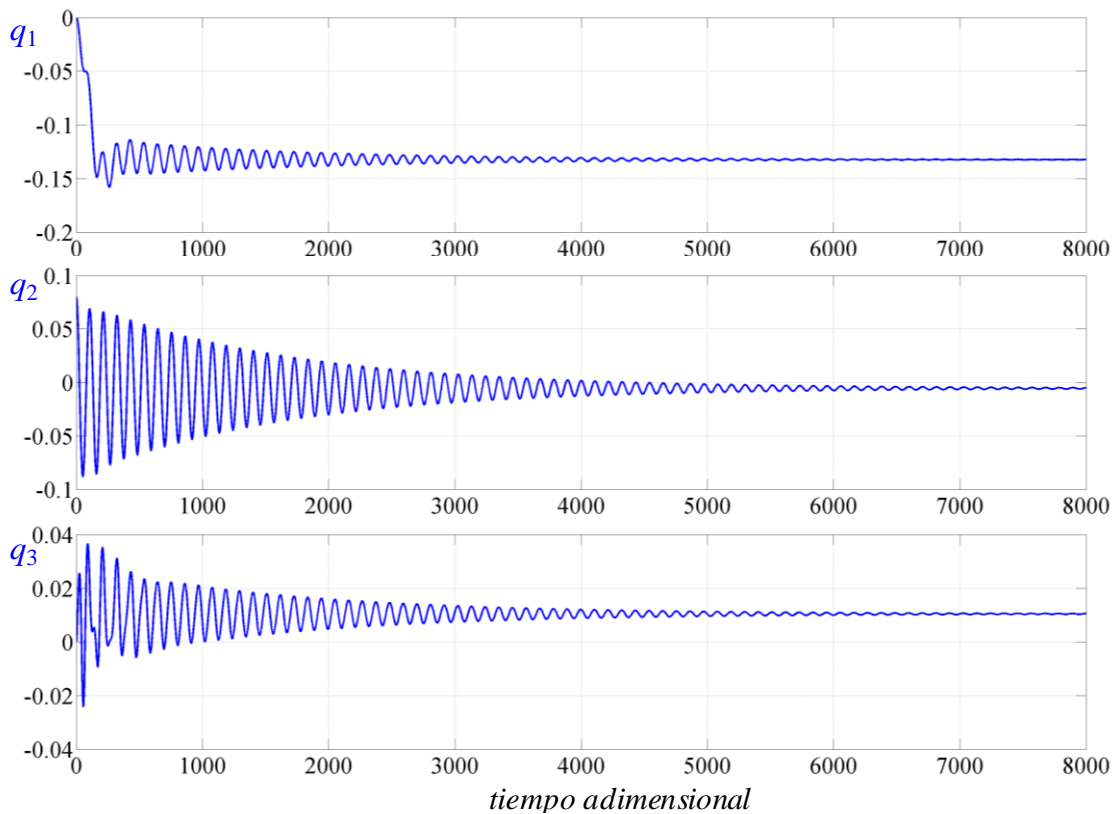


Figura 6-41: Respuesta temporal de los 3 primeros modos – velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 21$ m/seg).

En la Figura 6-42, la Transformada de Fourier para los primeros 3 modos muestra la presencia de más de una frecuencia, aunque en el modo 1 y 2 no alcanza a apreciarse. La proyección en el espacio de estado se asemeja a un foco estable (Figura 6-43). La respuesta del resto de las coordenadas modales presenta un comportamiento cualitativo similar; es por ello que no se han incluido las gráficas.

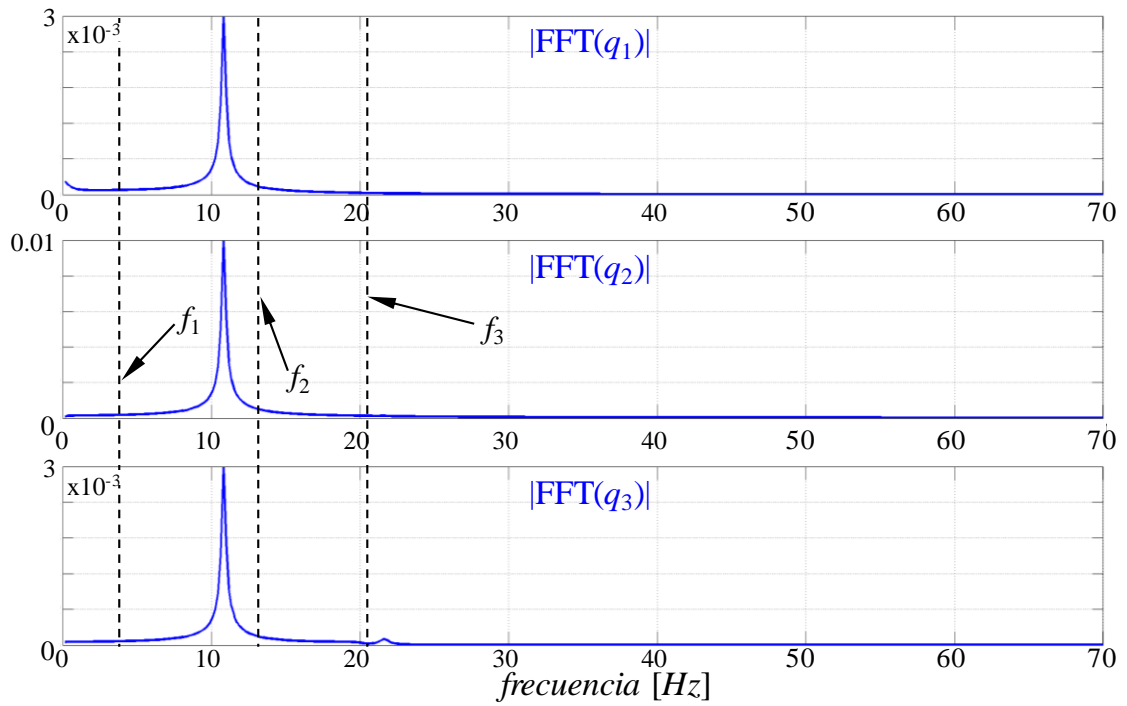


Figura 6-42: Transformada rápida de Fourier para los 3 primeros modos – velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 21 \text{ m/seg}$).

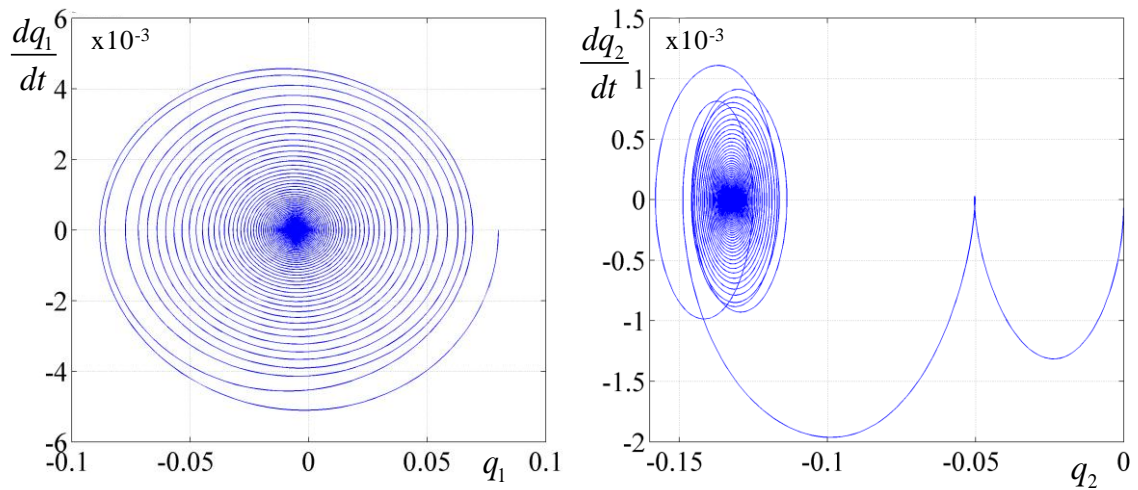


Figura 6-43: Proyección en el espacio de estado de los 2 primeros modos - velocidad inferior a V_F ($V_\infty = 21 \text{ m/seg}$).

Punto (f) Respuesta aeroelástica para la velocidad crítica

En la Figura 6-44 se presenta la respuesta de las 3 primeras coordenadas modales en función del tiempo adimensional para una velocidad ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$) muy próxima a la velocidad de *flutter*. La respuesta corresponde a una simulación que considera una perturbación inicial impuesta sobre el segundo modo con un valor de $q_2(0) = 0.08$; el resto de las coordenadas y velocidades generalizadas son iguales a ceros. Es posible observar que los tres modos presentan un comportamiento transitorio al comienzo de la simulación y luego adquieren un movimiento periódico.

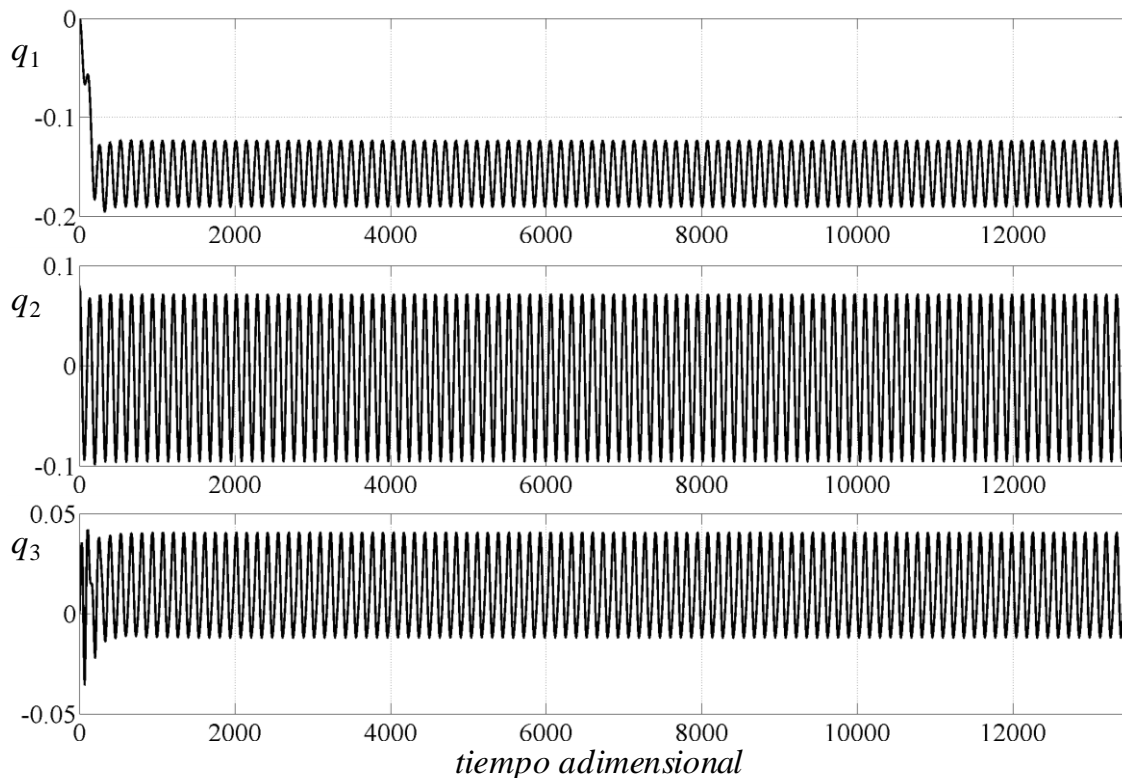


Figura 6-44: Respuesta temporal de los 3 primeros modos - velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$).

La FFT para los 3 modos (Figura 6-45) muestra que los modos oscilan en una frecuencia que es la frecuencia de *flutter* cuyo valor está próximo a 10.01 Hz . La proyección en el espacio de estado (Figura 6-46) muestra la existencia de un ciclo límite.

La Figura 6-47 muestra la estela para dos tiempos de cálculo. En primer lugar es posible ver la diferencia que existe con la estela presentada en la Figura 6-37, donde notablemente se observa como la misma se adapta a la nueva configuración del ala. Al

igual que la estela correspondiente al caso anterior, en el tiempo de cálculo 60 se observa la formación del vórtice de arranque y el desarrollo de los vórtices de punteras. El tiempo 1870 corresponde a un instante durante el movimiento periódico.

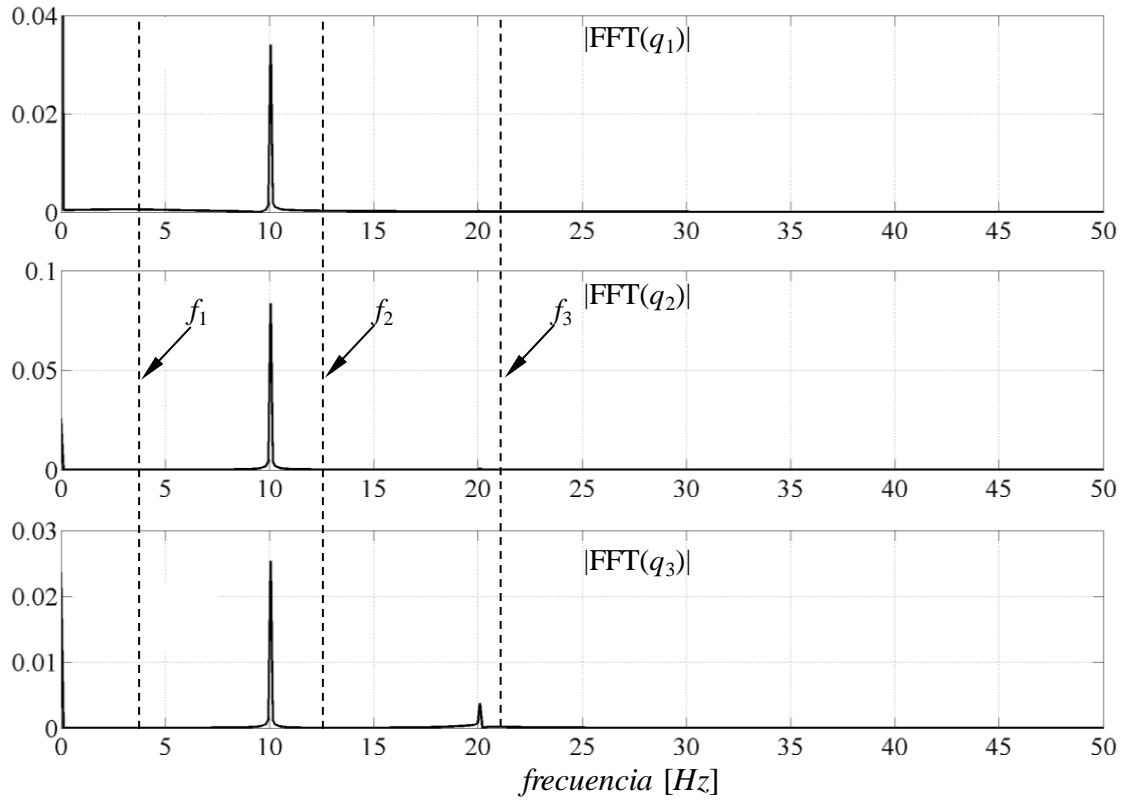


Figura 6-45: FFT para los 3 primeros modos - velocidad próxima a V_F
 ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$)

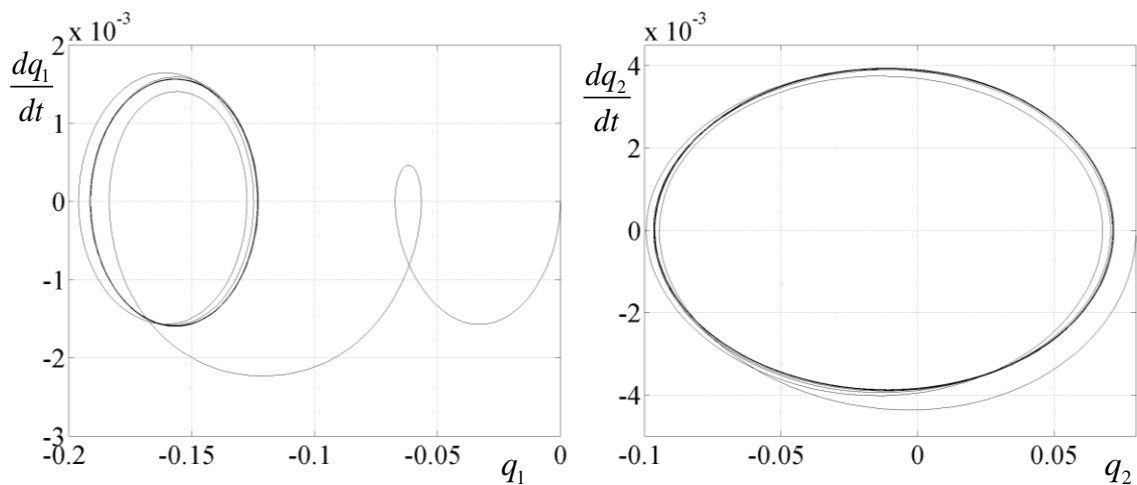


Figura 6-46: Proyección en el espacio de estado de los 2 primeros modos- velocidad próxima a V_F
 ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$).

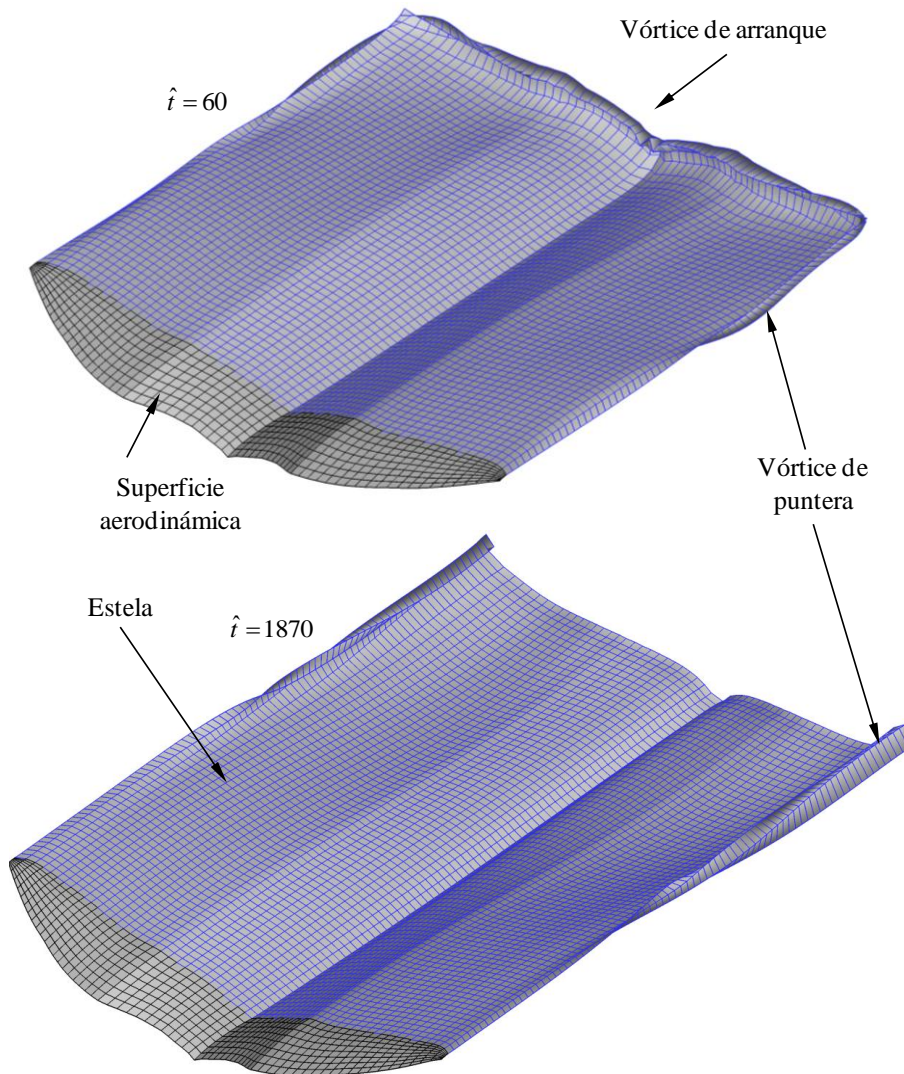


Figura 6-47: Desarrollo de la estela en diferentes pasos de cálculo -velocidad próxima a V_F ($V_\infty = 24.25 \text{ m/seg}$).

Punto (c) - Respuesta aeroelástica para una velocidad supercrítica

A continuación se presentan resultados correspondientes a dos simulaciones, para una velocidad de corriente libre ($V_\infty = 24.5 \text{ m/seg}$) superior a la velocidad de *flutter*, que tienen asociadas diferentes condiciones iniciales: (i) una perturbación inicial impuesta sólo sobre el segundo modo $q_2(0) = 0.15$; y (ii) una perturbación inicial impuesta sólo sobre el primer modo $q_1(0) = -0.25$.

En la Figura 6-48 se presenta la respuesta de los primeros 3 modos en una función del tiempo adimensional. Se puede ver que las perturbaciones iniciales provocan un comportamiento diferente en el transitorio de la respuesta. Para la primera condición inicial se presenta un ligero comportamiento transitorio y rápidamente se alcanza una amplitud de vibración constante, mientras que para la segunda condición inicial se

observa que la amplitud de los tres modos crece lentamente hasta alcanzar, en el tiempo de simulación 20000, el mismo valor que en la condición (i).

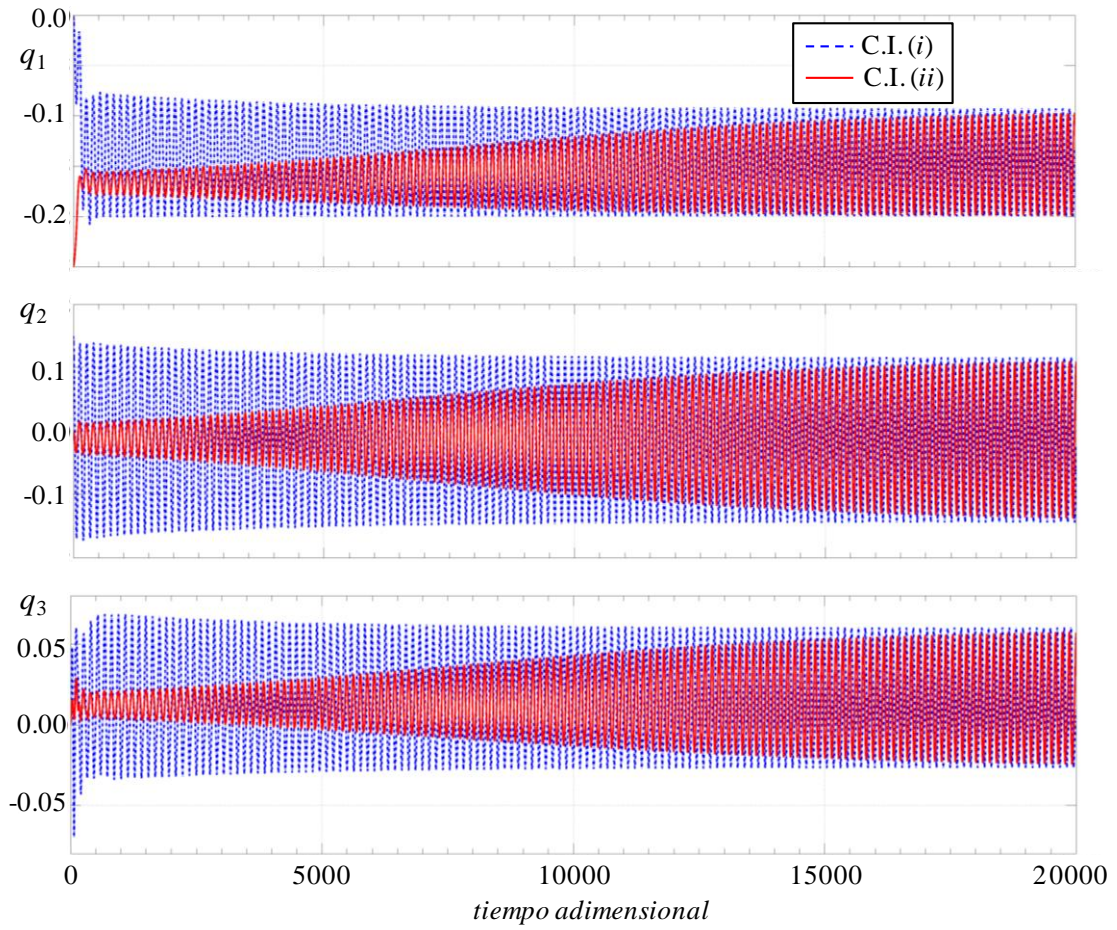


Figura 6-48: Respuesta temporal de los 3 primeros modos - velocidad superior a V_F
($V_\infty = 24.5 \text{ m/seg}$).

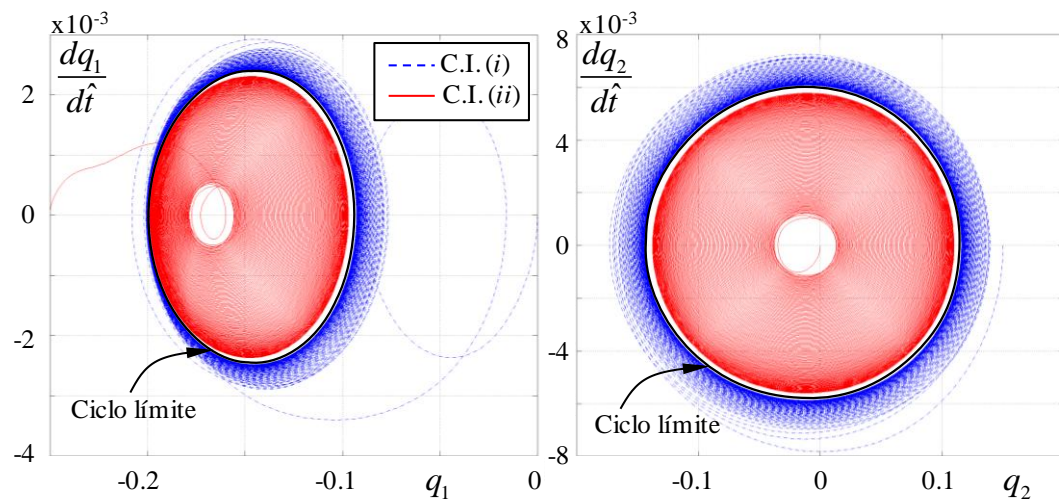


Figura 6-49: Proyección en el espacio de estado de los 2 primeros modos- velocidad superior a V_F
($V_\infty = 24.5 \text{ m/seg}$).

La Figura 6-49 muestra la proyección en el espacio de estado correspondiente a los dos primeros modos. Nuevamente, se manifiesta la presencia de un ciclo límite, donde las dos soluciones convergen a la curva cerrada que caracteriza a un ciclo límite estable. Al igual que en el punto (c) la trayectoria para la primera condición inicial se acerca al ciclo límite desde afuera, mientras que la segunda condición inicial se aproxima al ciclo límite desde adentro.

6.4.3. Variación simultánea de los ángulos de diedro del ala interna y del ala externa

En esta Sección se presentan y analizan resultados que permiten comprender el comportamiento de las características aeroelásticas asociadas al concepto *folding wing* para una variación simultánea de los ángulos de diedro θ_B y θ_C asociados a las dos partes que constituyen el ala (el Ala Interna y el Ala Externa). Para reconfigurar el ala se impone la siguiente relación

$$\theta_B = \beta \quad \theta_C = -\beta, \quad (6.11)$$

Esta condición implica que el Ala Interna rota un ángulo β en un sentido, y el Ala Externa rota el mismo ángulo pero en el sentido opuesto. De esta forma la configuración del ala queda definida mediante la especificación de un solo parámetro (β).

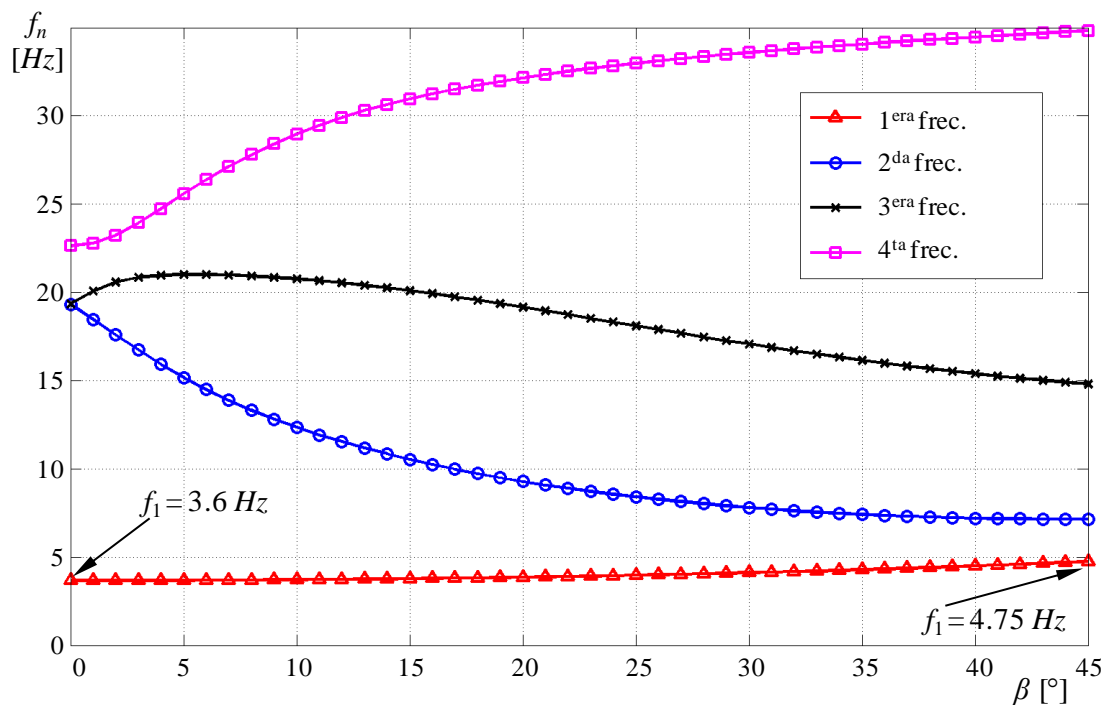


Figura 6-50: Primeras 4 frecuencias naturales en función de β .

En la Figura 6-50 se presenta la variación de las frecuencias naturales en función de β . Se puede observar que las frecuencias tienen el mismo comportamiento cualitativo que el correspondiente a la reconfiguración presentada en la Sección 6.4.2. Sin embargo en este caso, a diferencia del caso anterior, la segunda frecuencia decrece más rápido y la diferencia con la primera sea hace aún más estrecha a medida que aumenta el ángulo β . Aquí, el máximo para la tercera frecuencia se presenta cerca de $\beta = 5^\circ$, mientras que en el caso anterior es en torno a $\theta_B = 10^\circ$. Estas diferencias se atribuyen a que en este caso la geometría del ala también se ve modificada por la variación del ángulo de diedro asociado al Ala Externa.

Para investigar la variación de las características aeroelásticas (V_F y f_F) se llevaron a cabo experimentos numéricos sobre un total de 10 configuraciones (esto es para β que varía desde $\beta = 0^\circ$ hasta $\beta = 45^\circ$ con pasos de $\Delta\beta = 5^\circ$). Una vez encontrada la condición de *flutter* asociada a cada configuración se trazaron las curvas que se presentan en la Figura 6-51 y la Figura 6-52 .

La Figura 6-51 presenta la variación de la velocidad de *flutter* en función del ángulo β , y muestra que el incremento de este ángulo produce una disminución en la V_F hasta alcanzar un mínimo cerca de $\beta = 30^\circ$. Luego de este punto la velocidad de *flutter* se incrementa con el aumento de β . Los resultados muestran nuevamente que el mayor valor de V_F corresponde a la configuración completamente extendida ($\beta = 0^\circ$).

En esa misma figura se resaltan las regiones estable e inestable. Por debajo de la curva cualquier perturbación lleva al sistema a una determinada posición de equilibrio, mientras que por encima de la misma cualquier perturbación produce una respuesta que alcanza un movimiento periódico cuya amplitud dependerá de la velocidad de corriente libre. Se llevaron a cabo simulaciones numéricas cuyos resultados permiten confirmar lo expresado anteriormente. Los puntos que se localizan sobre la curva corresponden a la condición crítica, es decir cuando comienza el fenómeno de *flutter*.

La Figura 6-52 muestra que la frecuencia de *flutter* decrece con el incremento del ángulo β . Es posible notar que f_F se encuentra situada entre la primera frecuencia de flexión y la primera de torsión en vacío. Para valores relativamente bajos de β (0° y 5°) f_F se encuentra muy cerca al promedio de las dos primeras frecuencias naturales, y a medida que β toma valores más grandes la frecuencia de *flutter* tiende a aproximarse a la primera frecuencia de torsión.

En la Figura 6-53 se muestra la estela durante el *flutter* para diferentes instantes de tiempo durante el ciclo de oscilación. Las imágenes, que corresponden a una configuración del ala especificada por el valor $\beta=30^\circ$, muestran la secuencia de la evolución de la estela. En la Figura 6-54 se expone una vista lateral correspondiente a los mismos instantes de tiempo de simulación.

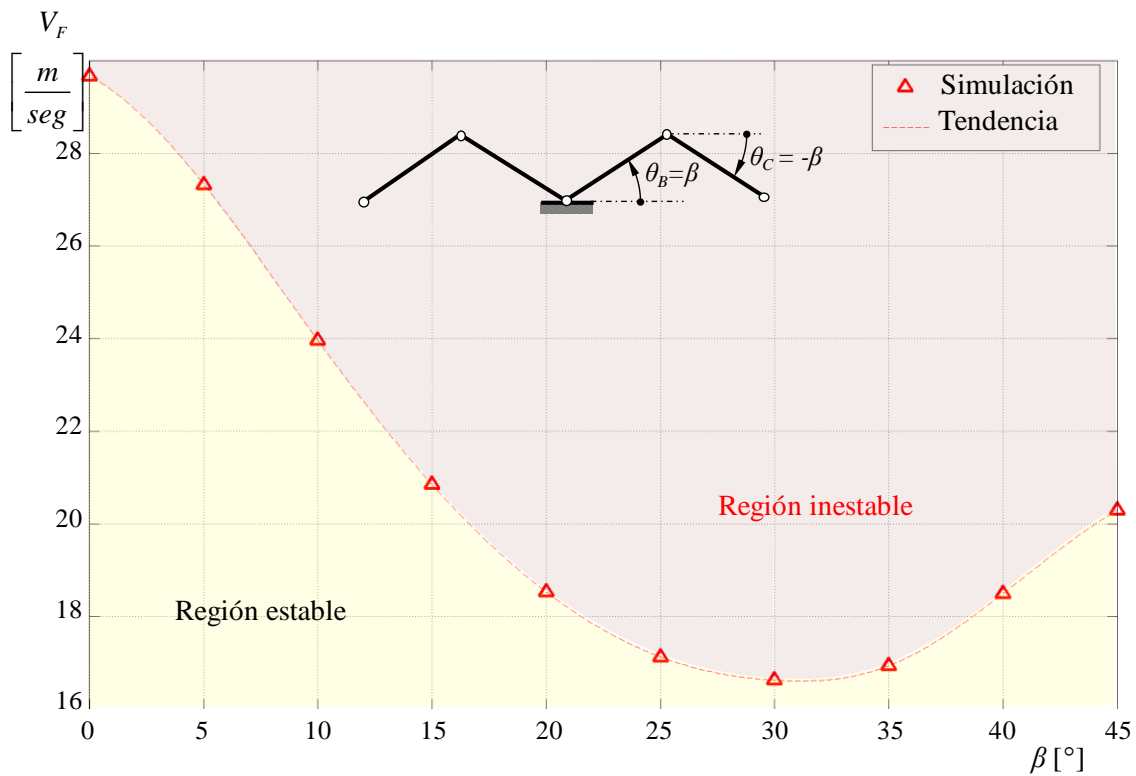


Figura 6-51: Velocidad de *flutter* en función de β - regiones estable e inestable.

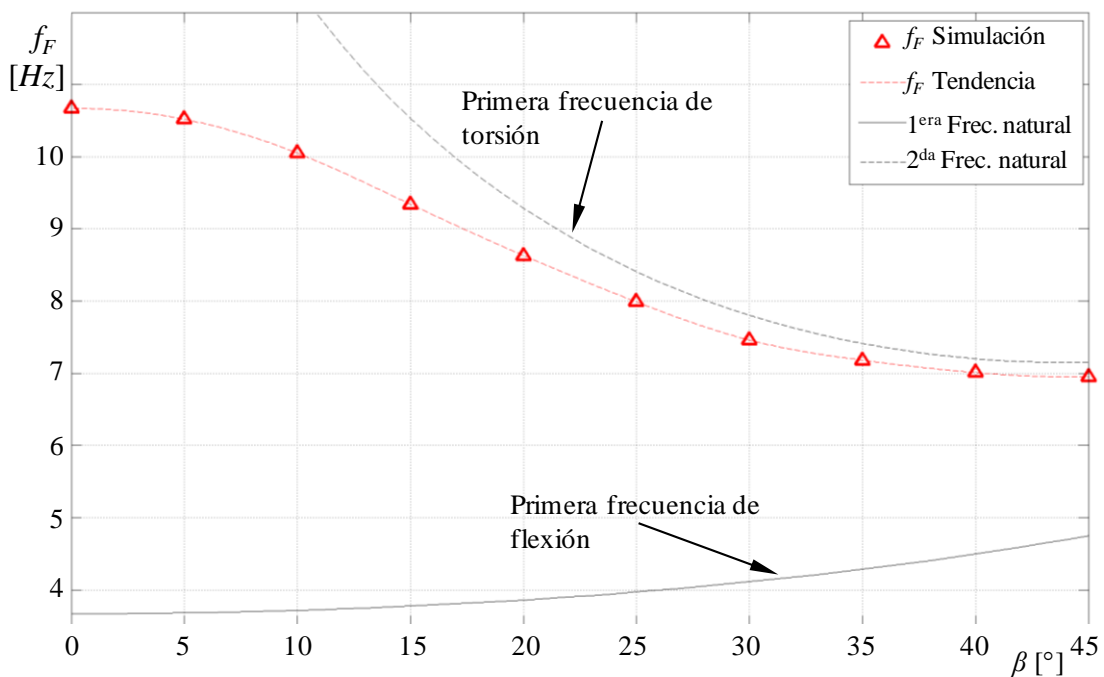


Figura 6-52: Frecuencia de *flutter* en función de β .

Las imágenes revelan el enrollamiento de la estela en las puntas de las alas, como así también, la presencia de otras estructuras vorticosas que se manifiestan debido al pliegue del ala. Puede apreciarse la propagación de una onda de pequeña amplitud, la cual resulta más visible en la Figura 6-54. Es interesante observar la emisión de una magnitud importante de vorticidad que se convecta desde la punta del ala hacia seno del fluido produciendo una distorsión en el vórtice de puntera.

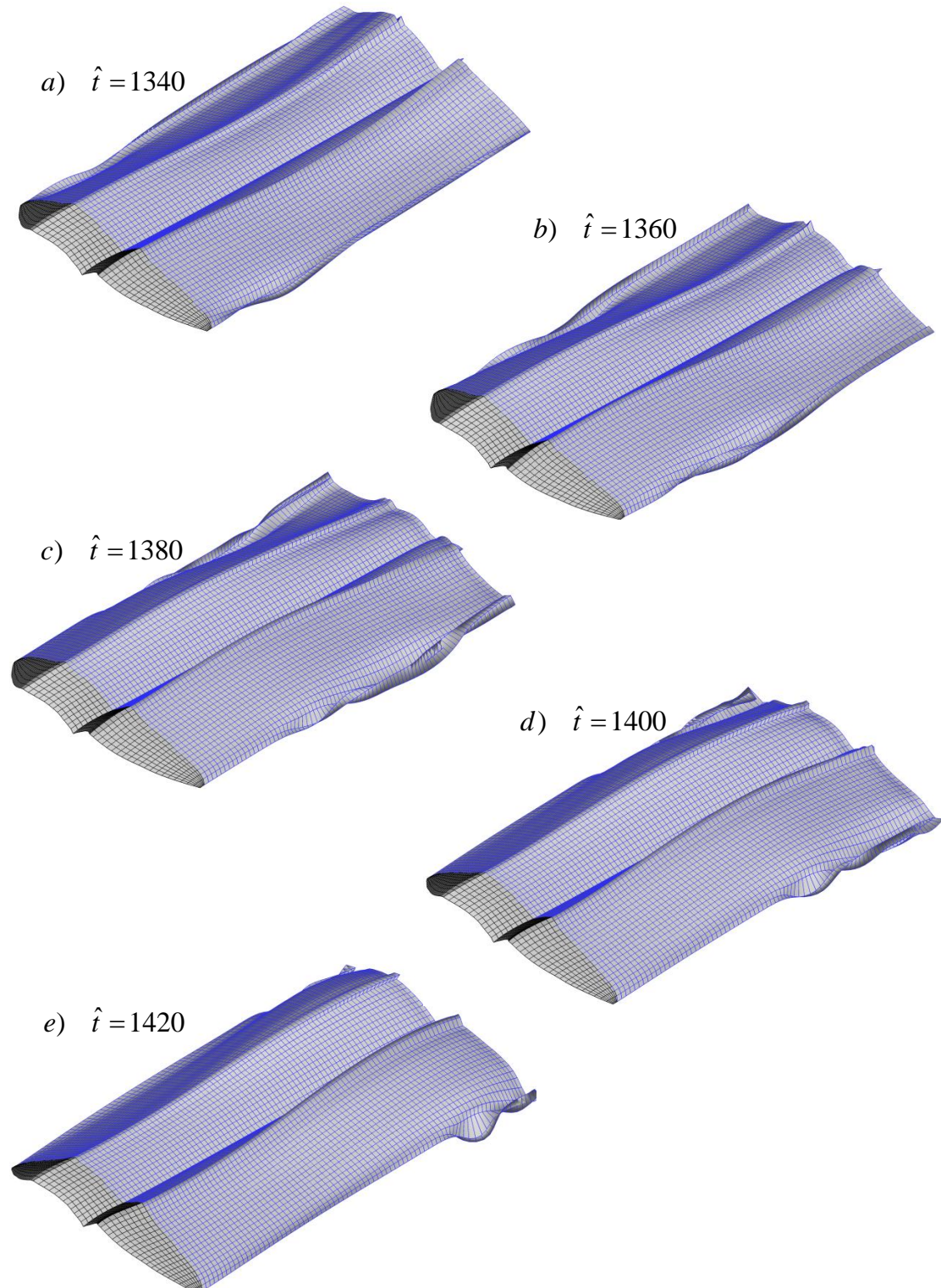
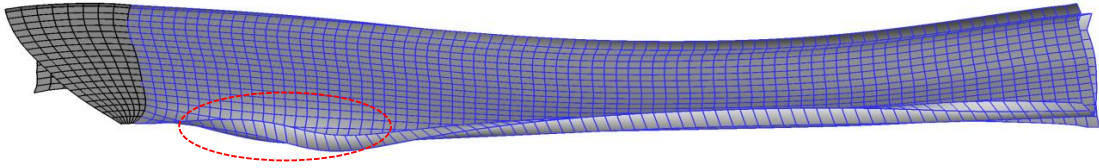
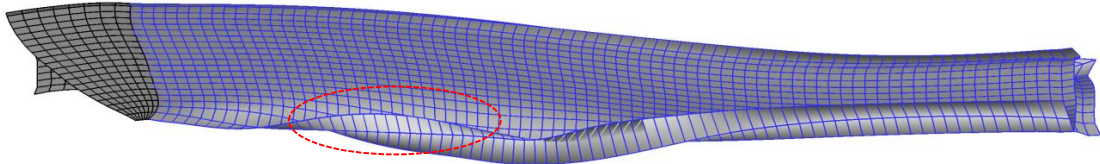


Figura 6-53: Desarrollo de la estela durante el *flutter* – vista en perspectiva ($V_\infty = 16.6 \text{ m/seg}$).

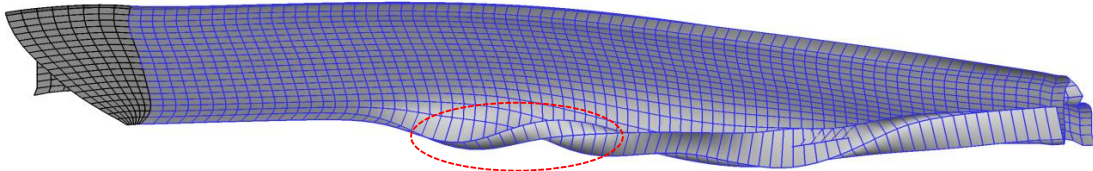
a) $\hat{t} = 1340$



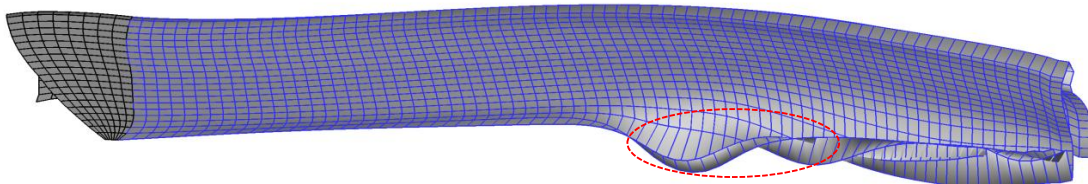
b) $\hat{t} = 1360$



c) $\hat{t} = 1380$



d) $\hat{t} = 1400$



e) $\hat{t} = 1420$

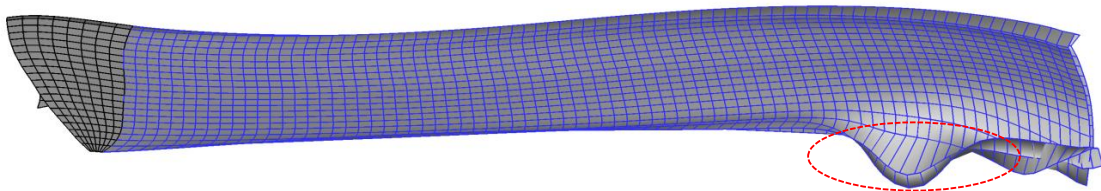


Figura 6-54: Posición de la estela durante el *flutter* – vista lateral ($V_\infty = 16.6 \text{ m/seg}$).

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1 Conclusiones

En este trabajo se presentó el desarrollo de un modelo aerodinámico no-lineal e inestacionario para alas reconfigurables bioinspiradas, basadas en el concepto *folding wings*, que permite predecir el comportamiento aerodinámico no-lineal e inestacionario durante el proceso de transición desde una configuración a otra. Esto se logró por medio de la combinación de: (i) un modelo cinemático, capaz de describir los grandes cambios de forma del ala, y (ii) un modelo aerodinámico no lineal e inestacionario que permite predecir las cargas aerodinámicas en el dominio del tiempo y estimar la posición y distribución de vorticidad en las estelas.

Por otro lado, se desarrolló un modelo aeroelástico no-lineal e inestacionario para alas reconfigurables inspiradas en la biología que permite predecir la respuesta aeroelástica antes, durante y después del comienzo de *flutter*. Este modelo comprende tres partes principales: (i) un modelo estructural para el concepto *folding wing*, (ii) el modelo aerodinámico descrito en el párrafo anterior, y (iii) una estrategia para combinar los modelos antes mencionados. La estrategia utiliza una técnica para transferir la información entre ambos modelos (desplazamientos, velocidades y fuerzas) y un método predictor-corrector para integrar, iterativamente y simultáneamente, en el dominio del tiempo las ecuaciones gobernantes.

Una importante contribución que resultó de este trabajo de tesis, fue el desarrollo de una técnica de transferencia de información para combinar el método de red vórtices con el método de los elementos finitos. Esta técnica es independiente del elemento finito utilizado en la discretización de la estructura, lo que la hace apta para considerar arbitrariamente elementos finitos de diferente topología al utilizado en este trabajo.

La implementación numérica de los modelos antes mencionados condujo al desarrollo de una herramienta computacional apropiada para el estudio de dos aspectos que resultan trascendentales en el diseño de UAV con alas que cambian de forma: *aspectos aerodinámicos y aeroelásticos*.

Mediante la utilización de la herramienta computacional, se desarrollaron simulaciones numéricas que permitieron investigar y comprender los comportamientos aerodinámico y aeroelástico asociados al modelo de alas reconfigurables inspirado en las alas de gaviotas.

Los resultados provenientes de las simulaciones que se presentaron en este trabajo, se dividieron en 3 grupos. El primer grupo se refirió a la validación de la herramienta numérica desarrollada, el segundo incluyó resultados que permitieron comprender algunos aspectos del comportamiento aerodinámico inestacionario durante el proceso de reconfiguración alar, y el último grupo incluyó resultados numéricos que brindaron interesante información correspondiente al comportamiento aeroelástico del modelo de ala reconfigurable en estudio.

- En el ***primer grupo de resultados*** se abordaron 3 problemas cuya solución se encuentra disponible en la literatura.

En el primer problema, que consistió de un caso muy simple, se determinaron las frecuencias naturales y los modos de vibrar de una viga en voladizo, y los resultados numéricos mostraron excelente concordancia con los resultados analíticos disponibles.

El segundo problema corresponde al caso de un ala batiente que involucra aspectos aerodinámicos y cinemáticos, cuyo objetivo fue determinar la sustentación en el dominio del tiempo. Los resultados se contrastaron con resultados obtenidos por otros autores mostrando muy buena concordancia.

El tercer problema consistió en la determinación de la velocidad y frecuencia de *flutter* de un puente colgante. Este problema, considerado un clásico en aeroelasticidad, fue estudiado por Fung en una versión 2D, y para comparar con sus resultados se desarrollaron dos modelos equivalentes en 3D. En el modelo 1, donde se utilizó un método de transferencia (denominado PMT), los resultados mostraron una excelente predicción para la velocidad y frecuencia de *flutter*, teniendo una diferencia con respecto a los resultados reportados por Fung del 0.43% y 2.15% respectivamente. Con el modelo 2, donde se utilizaron dos métodos de transferencia (denominado PMT y SMT), los resultados mostraron una diferencia porcentual del 3.58% para la velocidad de *flutter*. Lo interesante de los resultados del modelo 2, fue que los dos métodos estimaron la misma velocidad y frecuencia de *flutter* para todas las mallas que se consideraron. De esta manera se logró inferir el correcto funcionamiento del SMT, ya que el PMT fue validado mediante el uso del modelo 1.

- En el *segundo grupo de resultados* se estudió el comportamiento aerodinámico no-lineal e inestacionario durante el proceso de cambio de forma del ala para el modelo de ala reconfigurable inspirado en las alas de gaviota.

En una primera etapa se realizó un análisis de sensibilidad de la malla aerodinámica y, de acuerdo a un criterio establecido, se determinó una malla adecuada para las simulaciones numéricas.

Luego se presentaron resultados que permitieron sacar algunas conclusiones interesantes. Para el ala reconfigurable en estudio, la vorticidad emitida desde las puntas de las alas mostró tener una débil influencia sobre las características aerodinámicas. Esto se manifestó para las tres condiciones de vuelo simuladas. Los resultados mostraron que, a los efectos de reducir el costo computacional, a la porción de la estela asociada a las puntas de las alas puede ser ignorada.

El comportamiento de las cargas aerodinámicas durante el proceso de reconfiguración mostró una fuerte dependencia de la cinemática prescrita sobre las alas, lo que implica que los detalles del proceso de reconfiguración no pueden ser ignorados, y necesariamente deben ser considerados en el diseño de UAVs con alas que mutan dinámicamente.

- En el *tercer grupo de resultados* se desarrollaron simulaciones para comprender el comportamiento de las inestabilidades de origen aeroelástico para las diferentes configuraciones que pueden adquirir las alas.

En una primera etapa se realizó un análisis para determinar cómo influyen los modos de vibrar de la estructura sobre la respuesta aeroelástica, donde se concluyó que la consideración de los primeros 8 modos resulta suficiente para predecir las características aeroelásticas. Adicionalmente, se condujo un análisis relativo a la influencia de la longitud de la estela sobre la respuesta del ala, lo que permitió seleccionar una determinada longitud de estela para realizar las simulaciones numéricas optimizando el esfuerzo computacional.

Luego se realizó un análisis para comprender como varían la velocidad (V_F) y frecuencia (f_F) de *flutter* de acuerdo a la configuración que adquiere el ala cuando se hace variar únicamente el ángulo de diedro (θ_B) asociado al ala interna. Los resultados revelaron que el incremento de θ_B produce una disminución en la V_F . Aunque la relación entre V_F y θ_B resulta no-lineal, se observa la presencia de una zona de comportamiento casi lineal (entre $\theta_B = 15^\circ$ y $\theta_B = 30^\circ$). La frecuencia de *flutter* presenta un comportamiento decreciente con el incremento de θ_B y se encuentra situada entre la primera frecuencia natural de flexión y la primera frecuencia natural de torsión. Los resultados permitieron identificar las regiones estable e inestable de vuelo. Para algunas configuraciones se condujo un análisis exhaustivo para puntos ubicados en las regiones antes mencionadas. Los resultados revelaron que la metodología permite simular el comportamiento aeroelástico antes, durante y después del inicio del *flutter*. Se manifestó la presencia de ciclos límites, que caracterizan el fenómeno de *flutter*, los cuales resultaron de las no-linealidades introducidas por el modelo aerodinámico.

Para continuar profundizando en el estudio del comportamiento aeroelástico se analizaron algunos resultados que permitieron comprender el comportamiento de la velocidad y frecuencia de *flutter* para una variación simultánea del ángulo de diedro del ala interna y del ala externa. La configuración completa del ala se expresó en términos de un solo parámetro de configuración (β) imponiendo la relación $\theta_B = \beta$ y $\theta_C = -\beta$. Los resultados revelaron una relación no-lineal entre V_F y β . Se observa una disminución de V_F con el incremento de β hasta presentar un mínimo cerca de $\beta = 30^\circ$, luego de este punto V_F se incrementa con el aumento del parámetro de configuración. La frecuencia

de *flutter* nuevamente presentó un comportamiento decreciente con el incremento de β . Para este caso se observó que con el aumento del parámetro de configuración f_F tiende a acercarse a la primera frecuencia natural de torsión de la estructura.

El UVLM mostró ser capaz de capturar ciertos fenómenos producidos en las estelas que pueden afectar de manera significativa el campo de velocidades en las cercanías de la superficie del ala y, consecuentemente, las cargas aerodinámicas actuando sobre ella. Esto pone de manifiesto la importancia de utilizar métodos que consideren a la estela como parte de la solución, en lugar de utilizar aquellos métodos que consideran una estela con geometría y distribución de vorticidad impuestas.

7.2. Trabajos Futuros

Aunque los modelos desarrollados en este trabajo de tesis condujeron al desarrollo de una interesante herramienta de análisis preliminar, ellos tienen ciertas limitaciones que se deben tener presente. El modelo aerodinámico implementado aquí no modela los efectos viscosos, y en una próxima etapa se podría reemplazar este modelo por otro que considere estos efectos con el fin de captar fenómenos asociados, como por ejemplo la separación del flujo sobre la superficie del ala. Por otro lado, con el fin de incrementar las capacidades del modelo estructural se podría incluir el amortiguamiento estructural y no-linealidades geométricas. Este tipo de no-linealidades permitirán considerar fenómenos asociados a las grandes deformaciones que puedan ocurrir a velocidades supercríticas. En el modelo propuesto, las propiedades elásticas del ala fueron consideradas únicamente en su esqueleto estructural. Otra importante contribución sobre el modelo estructural, que necesariamente deberá ser incluida, es el modelado elástico de la superficie del ala. La herramienta computacional permitirá incluir esas modificaciones sin mayores inconvenientes debido a su estructura modular.

En una próxima etapa está previsto implementar un algoritmo de control, donde se utilizarán actuadores y sensores piezoeléctricos como parte del sistema, lo que permitirá eliminar las inestabilidades dinámicas de origen aeroelástico. Por otro lado, está previsto implementar un modelo multicuerpo flexible para estudiar el proceso de reconfiguración alar, con el fin de investigar cómo influyen la flexibilidad y los efectos inerciales en el proceso de reconfiguración del ala.

ANEXO A

LISTA DE PUBLICACIONES DEL AUTOR RELACIONADAS CON EL TEMA DE LA TESIS

En este anexo se listan las publicaciones del autor relacionadas con el tema de la tesis. Los textos completos de las publicaciones se encuentran disponibles en el disco compacto que se adjunta a este trabajo.

Publicaciones en revistas internacionales

1. M. L. Verstraete, S. Preidikman, B. A. Roccia, D. T. Mook, “*A Numerical Model to Study the Nonlinear and Unsteady Aerodynamics of Bioinspired Morphing-Wing Concepts*”. International Journal of Micro Air Vehicles. ISSN: 1756-8293, vol. 7, no. 3, pp. 327-345, 2015.

Publicaciones en revistas nacionales y congresos

1. M. L. Verstraete, L. R. Ceballos, y S. Preidikman, “*Aviones no-tripulados inspirados en el vuelo natural con alas que mutan: Aspectos aerodinámicos*”. Mecánica Computacional. Editorial: Asociación Argentina de Mecánica Computacional. ISSN: 1666-6070, Volumen: 28, páginas: 2975-2993. Año: 2009.
2. M. L. Verstraete, S. Preidikman, y J. C. Massa. “*Características aerodinámicas de aviones no tripulados con alas que mutan*”. Mecánica Computacional. Editorial: Asociación Argentina de Mecánica Computacional. ISSN 1666-6070, Volumen: 29. páginas: 5081-5104. Año: 2010.
3. M. L. Verstraete, M. S. Maza, y S. Preidikman. “*Influencia de la variación dinámica de la flecha en la aerodinámica de aviones con alas que mutan*”. II Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica, CAIA 2010, 24 - 26 de noviembre de 2010, Córdoba - Argentina.
4. M. S. Maza, M. L. Verstraete, S. Preidikman, y J. C. Massa. “*Estudio aerodinámico de aviones con alas que mutan – Parte I: Influencia del diedro y de las mutaciones dinámicas*”. II Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica, CAIA 2010, 24 - 26 de noviembre de 2010, Córdoba - Argentina.

5. M. L. Verstraete, S. Preidikman, y J. C. Massa. “*Aviones no-tripulados con alas que mutan: aspectos aerodinámicos*”. III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 2011, 9 – 11 de mayo de 2011, Bahía Blanca – Argentina.
6. M. L. Verstraete, S. Preidikman, y J. C. Massa. “*Aviones no-tripulados con alas que mutan: aspectos estructurales*”. III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 2011, 9 – 11 de mayo de 2011, Bahía Blanca – Argentina.
7. M. L. Verstraete, S. Preidikman, y J. C. Massa. “*Desarrollo de un modelo estructural para vehículos aéreos no-tripulados con alas que mutan*”. VI Congreso de Argentino de Tecnología Espacial, CATE 2011, 18 – 20 de mayo de 2011, San Luis – Argentina.
8. M. L. Verstraete, S. Preidikman, L. R. Ceballos y J. C. Massa. “*Vehículos aéreos no-tripulados con alas que mutan: accionamiento de alas flexibles mediante actuadores piezoeléctricos*”. Mecánica Computacional. Editorial: Asociación Argentina de Mecánica Computacional. ISSN: 1666-6070. Volumen: 30, páginas: 1377-1394. Año: 2011.
9. M. L. Verstraete, S. Preidikman, L. R. Ceballos y J. C. Massa. “*Un modelo estructural no-lineal de alas flexibles para vehículos aéreos no-tripulados con alas que mutan*”. Mecánica Computacional. Editorial: Asociación Argentina de Mecánica Computacional. ISSN: 1666-6070. Volumen: 31, páginas: 2657-2670. Año: 2012.
10. M. L. Verstraete, S. Preidikman, B. A. Rocca y J. C. Massa. “*Simulaciones numéricas del comportamiento aerodinámico de aviones con alas que mutan: Resultados preliminares*”, Memorias del Cuarto Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial – IV MACI 2013, Buenos Aires, Argentina, 15-17 Mayo 2013.
11. M. L. Verstraete, S. Preidikman, B. A. Rocca y J. C. Massa. “*Modelo no-lineal para vigas con actuadores piezoeléctricos integrados: Implementación numérica*”, Memorias del Cuarto Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial – IV MACI 2013, Buenos Aires, Argentina, 15-17 Mayo 2013.

12. M. L. Verstraete, S. Preidikman, L. R. Ceballos y J. C. Massa. “*Resultados preliminares del estudio numérico del comportamiento aerodinámico de aviones con alas que mutan*”, Séptimo Congreso Argentino de Tecnología Espacial – CATE 2013. Mendoza, Argentina, 15 al 17 de Mayo 2013.

REFERENCIAS

- Abdulrahim M. and Lind R., "Using Avian Morphology to Enhance Aircraft Maneuverability," AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, August 2006.
- Abdulrahim M. and Lind R., "Control and Simulation of a Multi-Role Morphing Micro Air Vehicle". AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, San Francisco, California, 2005.
- Anderson J. D., *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, January 2001.
- Anderson J. D., *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw Hill, 1994.
- Ashley Dove-Jay. What commercial aircraft will look like in 2050. November 7, 2014. <http://theconversation.com/what-commercial-aircraft-will-look-like-in-2050-33850>
- Atkinson M., 2004 <http://mikeatkinson.net/PeregrineFalcon.htm>
- Bae J. S., Yang S. M., and Lee I., "Linear and Nonlinear Aeroelastic Analysis of a Fighter-Type Wing with Control Surface," *Journal of Aircraft*, vol. 39, no. 4, pp. 697–708, 2002.
- Bae J. S., Seigler T. M., and Inman D. J., "Aerodynamic and Aeroelastic Considerations of A Variable-Span Morphing Wing," 45th AIAA/ASME/ ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2004.
- Bae J.S., Seigler T.M. y Inman D.J., "Aerodynamic and Static Aeroelastic Characteristics of a Variable-Span Morphing Wing", *Journal of Aircraft*, Vol. 49, no. 3, pp. 528-534, 2005.
- Barbarino S., Bilgen O., Ajaj R. M., Friswell M. I., and Inman D. J., "A Review of Morphing Aircraft," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, no. 9, pp. 823-877, 2011.
- Baruh H., *Analytical Dynamics*, McGraw Hill, 1999.
- Batchelor G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1967.

- Bazilevs Y., Takizawa K., Tezduyar T.E., *Computational fluid-structure interaction: methods and applications*, first edition, Wiley, United Kingdom, 2013.
- Beckert A. and Wendland H., “Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 5, pp.125–134, 2001.
- Belotserkovskii S. M., “Calculating the Effects of Gust of an Arbitrary Thin Wing,” *Fluid Dynamics*, vol. 1, no. 1, pp. 34-40, January-February 1966.
- Belotserkovskii S. M., and Nisht M. I., “Nonstationary Nonlinear Theory of a Thin Wing of Arbitrary Planform,” *Fluid Dynamics*, vol. 9, no. 4, pp. 583-589, 1974.
- Bisplinghoff R. L. and Ashley H., *Principles of Aeroelasticity*, Dover Publications Inc., New York, 1962.
- Black S., The changing shape of future aircraft, 2006. [Consulta: Noviembre de 2015].
<http://www.compositesworld.com/articles/the-changing-shape-of-future-aircraft>.
- Bowman J. C., Sanders B., and Cannon B., “Development of Next-Generation Morphing Aircraft Structures,” AIAA Structures Structural Dynamics and Materials Conference, pp 1-10, 2007.
- Brown S. A., “Displacement Extrapolations for CFD+CSM Aeroelastic Analysis,” 38th AIAA/ASME/ASCE/AHAIASC, Structures, Structural Dynamics and Materials, pp.291-300, 1997.
- Bucalem M.L. and Bathe K-J, *The Mechanics of Solids and Structures –Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- Buhmann M., *Radial Basis Functions*. Cambridge University Press, 2005.
- Bye D. R. and McClure P. D., “Design of a Morphing Vehicle,” 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2007.
- Cebral J.R. and Löhner R., “Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems,” *AIAA Journal*, vol. 35, no. 4, pp. 687-692, 1997.
- Chen P.C. and Jadic I., “Interfacing of fluid and structural models via innovative structural boundary element method,” *AIAA Journal*, vol. 36, no. 2, pp. 282–286, 1998.

- Colorado J., Barrientos A. and Rossi C., “Biomechanics of morphing wings in a Bat-robot actuated by SMA muscles,” International Workshop on bioinspired robots, Nantes, France, 1-3, 2011.
- Cox T. H., Nagy C. J., and Skoog M. A., “Civil UAV Capability Assessment,” NASA’s Report. December 2004.
- De Breuker R., Abdalla M., Gürdal Z., and Lindner D., “Energy-Based Aeroelastic Analysis of a Morphing Wing,” Modeling, Signal Processing, and Control for Smart Structures, San Diego, California, 2007.
- Dowell E. H., “Eigenmode Analysis in Unsteady Aerodynamics: Reduced Order Models”, *AIAA Paper 95-1450-CP*, April 1995.
- Duchon J., “Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces,” *Constructing Theory of Functions of Several Variables, Oberwolfach 1976*, 85-100, 1977.
- Farhat C., Lesoinne M., and Le Tallec P. “Load and motion transfer algorithms for fluidstructure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization, and application to aeroelasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:95–114, 1998.
- Fung Y. C., *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications Inc., New York, 1955.
- Ermolenko S. D., “Nonlinear Theory of Small Aspect Ratio Wings,” *Soviet Aeronautics*, vol. 9, pp. 5-11, 1966.
- Géradin M. D. J., and Rixen D. J., *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*, third edition, Wiley, 2015.
- Gomez J. C., and Garcia E., “Morphing unmanned aerial vehicles,” *Smart Materials and Structures*, vol. 20, 2011.
- Goura GSL, Badcock KJ, Woodgate M.A., and Richards B.E., “Extrapolation effects on coupled computational fluid dynamics/computational structural dynamics simulations,” *AIAA Journal*; vol. 42, no. 2, pp. 312–315, 2003

- Grant D. T., Modeling and Dynamic Analysis of a Multi-joint Morphing Aircraft, Master of Science Dissertation, University of Florida, 2009.
- Hall B. D., Mook D. T., Nayfeh A. H., Preidikman S., “Novel Strategy for Suppressing the Flutter Oscillations of Aircraft Wings,” *AIAA Journal*, vol. 39, no. 10, pp. 1843-1850, 2001.
- Han S.M., Benaroya H., and Wei T. “Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, no. 5, pp. 935-988, 1999.
- Hardy R.L., “Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*,” vol.76 no. 8, pp. 1905-1915, 1971.
- Heil M., Hazel A.L. and Boyle J., “Solvers for large-displacement fluid–structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches”, *Computational Mechanics*, 2008.
- Hodges D.H., and Pierce G.A., *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity* Cambridge University Press, 2002.
- Hughes T.J.R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Mineola, NY, 2000.
- Hou G., Wang J., and Layton A., “Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction—A Review,” *Commun. Comput. Phys.*, vol. 12, pp. 337-377, 2012.
- Ivanco T, Scott R, Love M, Zink S and Weisshaar T “Validation of the Lockheed Martin morphing concept with wind tunnel testing,” 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2007.
- Johnston C. O., Neal D. A., Wiggins L. D., Robertshaw H. H., Mason W. H., and Inman D. J., “A model to compare the flight control energy requirements of morphing and conventionally actuated wings,” 11th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference, April 2003.
- Jung Y.Y. and Kim J.H., “Unsteady Subsonic Aerodynamic Characteristics of Wing in Fold Motion,” *International Journal of Aeronautical and Space Science*, vol. 12, no. 1, pp 63–68, 2011).

- Kalmar-Nagy T. and Stanciulescu I., “Can complex systems really be simulated?,” *Applied Mathematics and Computation* 227, pp. 199–211, 2014.
- Katz K.J. and Plotkin A., *Low speed aerodynamics: from wing theory to panel methods*,” McGraw-Hill, 1991.
- Kudva J. N., “Overview of the DARPA Smart Wing Project,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol.15. pp 261-267, April, 2004.
- Konstadinopoulos P., Mook D.T., and Nayfeh A.H., “A numerical method for general unsteady aerodynamics”, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, August 19-21, 1981.
- Landahl M. and Ashley H., *Aerodynamics of Wings and Bodies*, Dover Publications, July 1985.
- Lilienthal O., *Bird flight As the Basis of Aviation: A Contribution toward a System of Aviation*, Markowsky International Publishers, January 2001.
- Liska S., and Dowell E. H., “Continuum Aeroelastic Model for a Folding-Wing Configuration”, *AIAA Journals*, vol. 47, no. 10, pp. 2350-2358, 2009.
- Liu T., Kuykendoll K., Rhew R., and Jones S., “Avian Wing Geometry and Kinematics”, *AIAA Journal*, vol. 44, no. 5, pp. 954-963, 2006.
- Love M. H., Zink P. S., Stroud R. L., Bye D. R., Chase C., “Impact of Actuation Concepts on Morphing Aircraft Structures,” 45th AIAA Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, 2004.
- Love M, Zink P, Stroud R, Bye D, Rizk S and White D. “Demonstration of morphing technology through ground and wind tunnel tests” 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials, 2007.
- Masud A., “Effects of mesh motion on the stability and convergence of ALE based formulations for moving boundary flows,” *Computational Mechanics*, 2006.
- Matsuzaki Y., and Torii H., “Flutter-Boundary Prediction of a Morphing Wing in the Process of Adaptation”, *AIAA Journals*, vol. 50, no. 6, pp. 1257-1264, 2012.

- Maza M., “Desarrollo de herramientas numéricas para la simulación de la interacción de estructuras con un fluido a elevado número de Reynolds,” Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, 2013.
- Meier, P. Humanitarian in the sky: drones for disaster response, 2014, [consulta enero de 2015] In: <https://www.virgin.com/virgin-unite/business-innovation/humanitarian-in-the-sky-drones-for-disaster-response>.
- Michler C., Hulshoff S.J., van Brummelen E.H., de Borst R., “A monolithic approach to fluid-structure interaction,” *COMPUTERS & FLUIDS*, vol. 33, no.5-6, pp. 839-848, 2004.
- Miller G. D., “Active Flexible Wing (AFW) Technology,” Report of Rockwell International, 1988.
- Milne-Thomson L. M., *Theoretical Aerodynamics*, Dover Publications, June, 1973.
- Mook D. T., and Maddox S. A., “An Extension of a Vortex-Lattice Method to Include the Effects of Leading-Edge Separation,” *Journal of Aircraft*, vol. 11, no. 2, pp. 127-128, February 1974.
- Neef M., and Hummel D., “Euler Solution for a Finite-Span Flapping Wing,” *Fixed and Flapping Wing Aerodynamics for Micro Air Vehicle Applications*, edited by T. J., Muller, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Reston, VA, 2001, vol. 195, pp. 429–449, Chap. 19.
- Niksch A., Valasek J., Strganac T.W., and L. A. Carlson, “Morphing Aircraft Dynamical Model: Longitudinal Shape Changes”. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, August 2008.
- Namgoong H., Crossley W. A. and Lyrintzis A. S., “Aerodynamic Optimization of a Morphing Airfoil Using Energy as an Objective,” *AIAA Journal* vol. 45, no. 9, pp. 2113-2124, 2007.
- Obradovic B. and Subbarao K., “Modeling of Flight Dynamics of Morphing-Wing Aircraft,” *Journal of Aircraft* vol. 48, no. 2, pp. 391-402, 2011.
- Perry B., Cole S.R., and Miller G.D., “A summary of the Active Flexible Wing program”, *AIAA Journal of Aircraft*, vol. 32 pp. 9-76, 1992.
- Pippen J. S., 2006. <http://www.jeffpippen.com/>.

- Powers S. G., Webb L. D., Friend E. L. and Lokos W. A. “Flight test results from a supercritical mission adaptive wing with smooth variable camber,” NASA Technical Memorandum 4415, 1992.
- Prandtl L. and Tietjens O. G. *Applied Hydro- and Aeromechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1997.
- Preidikman S., “Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems,” Ph.D. Dissertation, Department of Engineering Science and Mechanics. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1998.
- Preidikman S., y Mook D.T., “Time-Domain Simulations of Linear and Non-Linear Aeroelastic Behavior,” *J. Vibration and Control*, vol. 6, no. 8, pp. 1135-1176, 2000.
- Rendall T. C. S., and Allen C. B., “Unified fluid–structure interpolation and mesh motion using radial basis functions,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 74, pp. 1519-1559, 2007.
- Rodriguez A.R., “Morphing Aircraft Technology Survey” 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 8 - 11 January 2007, Reno, Nevada.
- Romanowski M. C. and Dowell E. H., “Aeroelastic Analysis of an Airfoil Using Eigenmode Based Reduced Order Unsteady Aerodynamics,” AIAA Paper 95- 1380-CP, April 1995.
- Rugg K., An Eagle Morphing Into an Avanced Concept Vehicle, 2007. [Consulta: enero 2016]. http://www.aeronautics.nasa.gov/videos/eagle_morph.htm.
- Ryzhakov P. B., Rossi R., Idelsohn S. R. and Oñate E., “A monolithic Lagrangian approach for fluid-structure interaction problems,” *Computational Mechanics*, vol. 46, pp. 883-899, 2010.
- Sarris, Z., “Survey of UAV applications in civil markets,” 9th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation. June, 2001, Dubrovnik, Croatia.
- SEANET Blog, Dead bird quiz answers, October 2010. <http://seanetters.wordpress.com>
- Seigler T.M., “Dynamics and Control of Morphing Aircraft,” Ph.D. Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2005.

- Selitrennik E., Karpel M. and Levy Y., “Generalized Approach to Aeroelastic CFD Time Simulations of Morphing Flight Vehicles,” 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, May 2009.
- Scanlan R. H. and Rosenbaum R., *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*. The McMillan Company, New York, 1951.
- Shabana A. A., *Dynamics of Multibody Systems*, fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013.
- Shrestha P., Jeong M.S., Lee I. Bae J.S. y Koo K.N., “Flutter Characteristics of a Morphing Flight Vehicle with Varying Inboard and Outboard Folding Angles” *Int. J. of Aeronautical & Space Sci.*, vol. 14, no. 2, pp. 133-139, 2013.
- Sofla A.Y.N., Meguid S.A., Tan K.T. and Yeo W.K., “Shape morphing of aircraft wing: Status and challenges,” *Materials and Design*, vol. 31, no. 3, pp. 1284–1292, 2010.
- Song, J. O., and Haug, E. J., “Dynamic analysis of planar flexible mechanisms” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 24, pp. 359-381, 1980.
- Subbarao K., Supekar A. H. and Lawrence K., “Investigation of Morphable Wing Structures for Unmanned Aerial Vehicle Performance Augmentation”, AIAA conference, 2009.
- Stanford B., Abdulrahim M., Lind R., and Ifju P., “Design and Optimization of Morphing Mechanisms for Highly Flexible Micro Air Vehicles,” 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2006.
- Tennekes H., *The Simple Science of Flight: From Insects to Jumbo Jets*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2009.
- Thill C., Etches J., Bond I., Potter K. and Weaver P., “Morphing skins,” *The Aeronautical Journal*, vol. 112, pp. 117-139, 2008.
- Thwapiah G. and Campanile L.F., “Nonlinear aeroelastic behavior of compliant airfoils,” *Smart Materials and Structure*, vol. 19, 2010.
- Valasek J., *Morphing Aerospace Vehicles and Structures*, Wiley, March 2012.

- Vasista S., Tong L., and Wong K. C., “Realization of Morphing Wings: A Multidisciplinary Challenge,” *Journal of aircraft* Vol. 49, No. 1, 2012
- Wang I., and Dowell E. H., “Structural Dynamics Model of Multisegmented Folding Wings: Theory and Experiment,” *Journal of Aircraft*, Vol. 48, No. 6, pp. 2149-2160, 2011.
- Wang I., Gibbs S.C., and Dowell E. H., “Aeroelastic Model of Multisegmented Folding Wings: Theory and Experiment,” *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 2, pp. 911-921, 2012a.
- Wang I., Gibbs S.C., and Dowell E. H., “Aeroelastic Analysis of a Folding Wing: Comparison of Simple and Higher Fidelity Models for a Wide Range of Fold Angles,” 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2013.
- Wang Q., Chen Y. and Tang H., “Mechanism Design for Aircraft Morphing Wing,” 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 2012b.
- Wang Z. G. and Zhang Z. N., “Modeling and Simulation of Unsteady Aerodynamics on a Morphing Wing,” *Applied Mechanics and Materials*, pp. 77-80, 2013.
- Weisshaar T. A., “Morphing Aircraft Technology – New Shapes for Aircraft Design”. Aeronautics and Astronautics Department Purdue University West Lafayette, Indiana 47907 USA, 2006.
- Wickenheiser A. M. and Garcia E., “Aerodynamic Modeling of Morphing Wings Using an Extended Lifting-Line Analysis,” *AIAA Journal of Aircraft*, vol. 44, no. 1, 2007.
- Wendland H., *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.
- Wendland H., Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger. *Dissertation Universität Göttingen*, 1996.
- Wendland H., “Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree,” *Advances in computational Mathematics*, vol. pp. 389-396, 1995.

Yue T., Wang L. y Ai J., “Multibody Dynamic Modeling and Simulation of a Tailless Folding Wing Morphing Aircraft,” AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, August 2009.

Zhao Y. and Hu H. “Parameterized aeroelastic modeling and flutter analysis for a folding wing,” *Journal of Sound and Vibration* 331, pp. 308–324, 2012.

Zhao Y. and Hu H., “Prediction of transient responses of a folding wing during the morphing process,” *Aerospace Science and Technology* vol. 24, pp. 89–94, 2013.

Zienkiewicz O. C. *El Método de los Elementos Finitos*, Reverté, España, 1980.