

T. 149

49820

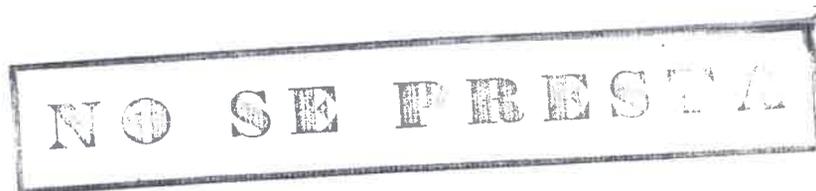
**ESTIMAÇÃO PONTUAL DOS COEFICIENTES DE
REPETIBILIDADE E REPRODUTIBILIDADE EM
ENSAIOS INTERLABORATORIAIS**



MOSCHETTI, ELSA E.
Estimacao pontual do

1997

49820



Elsa E. Moschetti

Orientador: Prof. Dr. Armando M. Infante

Este exemplar de dissertação corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Elsa Ester Moschetti e aprovada pela Comissão Julgadora.

CAMPINAS

1997

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 05 de dezembro de 1997
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

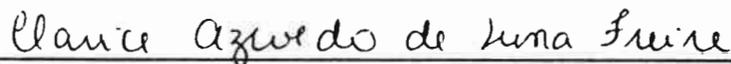
49820



Prof (a). Dr (a). ARMANDO MÁRIO INFANTE



Prof (a). Dr (a). WAGNER DE SOUZA BORGES



Prof (a). Dr (a). CLARICE AZEVEDO DE LUNA FREIRE

Aqueles sem os quais nada seria possível, meus pais, Elsa e Tulio

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais pela compreensão e incentivo.
- A toda minha família pelo apoio nestes anos, em especial a meu irmão e sobrinhos.
- Agradeço ao Prof. Armando Infante pela orientação, compreensão, colaboração e apoio, me incentivando sempre com confiança durante o desenvolvimento do trabalho.
- Aos meus amigos da Argentina por acreditar no meu esforço.
- Ao Dr. Oscar Bustos pela confiança que depositou em mim.
- Um agradecimento especial à Turma do Mestrado em Estatística, pelo convívio e intercâmbio. Em particular, pela amizade e apoio nestes anos a Edwin, Fernando, Rosemeire, Rui e Vanderli. E, com carinho a Admur, Carlos, Daniela, Helymar, Valdecir, Maristela e Virginia.
- Aos novos amigos que fizeram parte de meu convívio no Brasil, com carinho Ana, Conceição, Desirrê, Maria Rosa e Mario.
- Aos que contribuíram de diversas formas para a realização do presente trabalho.
- Aos professores, funcionários, colegas e amigos vinculados à minha formação.
- Ao colega estatístico Mário Buziol, pela sua colaboração com material bibliográfico.

-À Universidade Nacional de Río Cuarto, Argentina, pela oportunidade concedida.

-Ao IMECC pela oportunidade concedida .

-Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico -CNPq- e ao Fundo de Apoio ao Ensino e Pesquisa - FAEP- pelo suporte financeiro.

-Ao Centro de Tecnologia e Embalagem do Instituto de Tecnologia de Alimentos. CETEA - ITAL, Campinas, pela possibilidade de trabalhar com os dados obtidos na Instituição.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I: Medição e Ensaio	1
1.1 Introdução	1
1.2 Processos	3
1.2.1 Processos Produtivos	3
1.2.2 Processos de Medição	4
1.3 Avaliação da Incerteza de uma Medição	7
1.3.1 Erro de Medição	7
1.3.2 Precisão, Exatidão e Vício	8
1.4 Exemplo da Tecnologia de Alimentos	9
1.5 Ensaio Interlaboratoriais	13
1.5.1 Exemplo de um Ensaio Interlaboratorial	15
1.6 Coeficientes de Repetibilidade λ e de Reprodutibilidade Λ	16
1.7 Objetivo e Estrutura desta Dissertação	18
CAPÍTULO II: Estimadores dos Componentes de Variância	20
2.1 Introdução	20
2.2 Análise Estratificada por Material	20
2.2.1 Modelo de Classificação Simples	21
2.2.1.1 Laboratórios como Efeitos Fixos	22
2.2.1.2 Laboratórios como Efeitos Aleatórios	22
2.3 Estimadores de Componentes de Variância	23
2.4 Outros Estimadores para σ^2 e σ_L^2	27
2.4.1 Estimadores Baseados em Desvios	28
2.4.1.1 Estimador de σ^2	28
2.4.1.2 Estimador de σ_L^2	28
2.4.2 Estimadores Baseados em Amplitudes	29

2.4.2.1 Estimador de σ^2	29
2.4.2.2 Estimador de σ_L^2	29
C A P Í T U L O III: Estimadores Irrestritos de λ e Λ	31
3.1 Introdução	31
3.2 Estimadores de Substituição Baseados nos Estimadores de Momentos	31
3.2.1 Distribuições Básicas	33
3.2.2 Distribuição Exata dos Estimadores Irrestritos	36
3.2.3 Momentos da Distribuição exata dos Estimadores PME.....	41
3.2.4. Erro Quadrático Médio e Vício dos Estimadores PME.....	52
C A P Í T U L O IV: Estimadores Restritos de λ e Λ	55
4.1. Introdução	55
4.2. Estimadores de Substituição Truncados.....	56
4.2.1. Definições	56
4.2.2 Distribuição Exata do Estimador PTE	58
4.3. Estimadores de Substituição de Máxima Verossimilhança.....	62
4.3.1. Distribuição Exata dos Estimadores PMLE	64
4.4. Estimadores de Substituição de Máxima Verossimilhança Residual.....	67
4.4.1 Distribuição Exata dos Estimadores PREMLE	69
4.5. Momentos dos Estimadores Restritos.....	71
4.5.1 Momentos de Ordem 1 e 2.....	76
4.6 Vício e Erro Quadrático Médio dos Estimadores Restritos	81
C A P Í T U L O V: Uma Avaliação dos Estimadores	85
5.1 Estimativas dos Coeficientes λ e Λ	85
5.2 Desempenho dos Estimadores dos Coeficientes de λ e Λ	98
5.3 Observações Finais	99

ANEXO A: Funções Especiais	100
ANEXO B: Dados de um Ensaio Interlaboratorial	104
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	105

RESUMO

Nesta dissertação são estudados estimadores pontuais do coeficiente de repetibilidade r e de reprodutibilidade R no contexto de ensaios interlaboratoriais. A partir de um modelo linear balanceado com efeitos aleatórios correspondentes aos laboratórios do ensaio, são propostos quatro estimadores de substituição para os coeficientes r e R , baseados em estimadores dos componentes de variância. Os estimadores estudados são o de momentos, o truncado, o de máxima verossimilhança e o de máxima verossimilhança residual. São obtidas as distribuições conjuntas exatas dos estimadores, seus momentos, vícios e erros quadráticos médios. O desempenho dos estimadores é ilustrado utilizando dados de uma comparação interlaboratorial para determinação de espessura de camada de estanho em folha-de-flandres.

ABSTRACT

This dissertation studies punctual estimators of the repeatability coefficient (r) and reproducibility coefficient (R) in interlaboratory test. Assuming a linear balanced model with random effects corresponding to the laboratories, four estimators based on variance component are considered. The estimators were the moment, the truncated one, the maximum likelihood and the residual maximum likelihood. The exact joint distribution of the estimators r and R are obtained, as well as, their moments, biases, and mean square errors. The performance of the estimators was illustrated using a interlaboratory study conducted to determine thickness of tin plates.

CAPÍTULO I

Medição e Ensaio

1.1 Introdução

Nas áreas mais diversas das Ciências Naturais e da Tecnologia são utilizadas medições para descrever, avaliar e controlar fenômenos e para tomar decisões sobre eles.

Assim, por exemplo, os engenheiros determinam as características de um produto mediante inspeções ou ensaios realizados em diversos pontos do processo produtivo; analistas químicos avaliam a composição de materiais, desenvolvendo, testando e padronizando métodos de análise para obter informações confiáveis; pesquisadores e engenheiros constroem sistemas de monitoramento para acompanhar medições já obtidas, condensando ou sintetizando periodicamente as mesmas e utilizando essa informação em tomadas de decisão.

Tipicamente, as medições que surgem nessas situações apresentam variabilidade. Elas podem exibir **variação amostral**, devido à escolha das amostras de produtos ou materiais, **variação processual** atribuível a alterações nos processos específicos investigados ou **variação mensurativa**, gerada pelo processo de medição empregado.

Como a variação gera incerteza e a Estatística é precisamente a “metodologia lógica para medir a incerteza e para examinar suas consequências no planejamento e na interpretação de experimentos e observações” (Stigler, 1986), é que os métodos estatísticos constituem um importante instrumento no estudo de todos os tipos de variação.

Embora nesses contextos os processos de medição -e, até certo ponto também a amostragem associada- sejam considerados meios para obter a informação desejada sobre os produtos, processos e materiais de interesse, eles geram questões de grande importância:

- Como avaliar a qualidade de um conjunto de medições?. Em particular, como avaliar sua confiabilidade?
- Qual é o domínio de validade de um método ou processo de medição e como desenvolver padrões para sua aplicação?
- Como detectar diferenças suspeitas entre medições da mesma magnitude e como agir nessa situação?

Esta dissertação discutirá algumas questões estatísticas em ensaios interlaboratoriais, os quais tem como objetivo básico avaliar as fontes de variabilidade de processos padronizados de medição. Estes ensaios são processos que geram duas formas de **variação mensurativa** avaliadas pelos chamados coeficientes de repetibilidade e de reprodutibilidade, respectivamente denominados r e R na literatura técnica.

Neste Capítulo serão tratados alguns tópicos básicos referentes aos processos de medição, ilustrados mediante um estudo feito na área de Tecnologia de Alimentos. Também realizaremos uma discussão dos ensaios interlaboratoriais apresentando as definições dos coeficientes r e R em termos estatísticos. Finalmente, serão detalhados os objetivos e estrutura deste trabalho.

1.2 Processos

Um processo pode ser definido como uma seqüência de estados ou resultados causados pela ação de um conjunto de fatores, conduzindo a um resultado final.

Uma característica básica dos processos é a variabilidade de seus resultados. Para descrevê-la apresentaremos dois tipos importantes de processos, enfatizando suas semelhanças.

1.2.1 Processos produtivos

Nos processos produtivos, a seqüência de resultados permite a transformação de insumos em bens ou serviços que denominaremos genericamente produtos. Fatores que afetam a este tipo de processo são geralmente classificados em: matérias-primas, equipamentos, operadores, métodos e fatores ambientais .

Segundo Shewhart (1939), a variabilidade observada nos produtos e em seus fatores pode ser atribuída a dois tipos de causas: comuns e especiais. Informalmente, são consideradas causas comuns aquelas que estão sempre presentes no processo, embora de impacto variável e que individualmente podem ter um pequeno efeito na variação. As causas especiais aparecem esporadicamente e não estão sempre presentes no processo; elas vêm "de fora", contribuindo para a variabilidade do produto final. O impacto das causas especiais é geralmente maior do que o provocado pelas causas comuns.

Pode-se considerar os gráficos de controle, propostos por Shewhart (1931,1939) como definições operacionais de ambos os tipos de causas. Se a variação de um processo é devida somente a causas comuns, dizemos que o processo é estável ou que está sob controle estatístico. As variações de um

processo estável manifestam-se como aleatórias e tornam previsível o comportamento do processo em um curto período de tempo.

Em particular, a relação entre a variabilidade considerada aceitável pelas especificações “exógenas” e a variabilidade intrínseca do processo sob controle estatístico pode ser descrita mediante os chamados índices de capacidade do processo.

A teoria do controle estatístico de qualidade fornece os instrumentos estatísticos necessários para determinar se um processo está sob controle estatístico e para avaliar sua capacidade. Por outro lado, o melhoramento de processos estáveis utiliza outros instrumentos, tais como estratificação de dados, desagregação do processo e realização de experimentos planejados. Veja, por exemplo, Mandel (1964) e Joiner (1995).

1.2.2 Processos de medição

Agora centraremos nossa atenção nos processos de medição que têm medidas como produtos finais.

Segundo Einsenhart (1963), podemos definir um *processo de medição* como uma seqüência de operações, que produz um número representando um valor da magnitude ou quantidade de alguma propriedade de um objeto. O objetivo do processo é a determinação do *valor* de uma quantidade particular. O número gerado pelo processo será a *medida*. A determinação de uma constante nas ciências físicas, tais como a velocidade da luz ou a carga de um elétron, são alguns exemplos de processos de medição.

Assim, um processo de medição deve começar com a especificação apropriada do método de medição e do valor de referência ou quantidade particular

sujeita à medição. O método de medição, segundo Eisenhart (1952,1963), inclui as especificações dos aparelhos e equipamentos, as operações, as condições gerais sob as quais elas deveriam ser realizadas e a seqüência na qual serão desenvolvidas. Todos esses elementos devem ser claramente detalhados em um documento que é denominado protocolo de medição.

Existem várias sugestões para estabelecer o valor de referência de um processo de medição. As diferentes alternativas na escolha de um valor referencial sugeridas pela Norma ASTM-177 (1990-a), publicada pela Sociedade Americana de Ensaio e Materiais (American Society of Testing and Materials), cobrem um amplo espectro de situações. Possíveis valores de referência são: (1) um valor teórico ou estabelecido por princípios científicos, (2) um valor fundamentado em trabalhos experimentais ou organizações internacionais, (3) um valor baseado em trabalhos experimentais intercolaborativos sob a direção de cientistas e engenheiros e (4) um valor obtido segundo um método de referência comprovado ou aceitável.

A realização experimental de um método de medição envolve muitos fatores que podem ser considerados fontes potenciais de variabilidade nas medições. Os mais comuns são: (a) operadores (treinamento e interpretação do protocolo), (b) aparelhos (tolerância, estado de manutenção e calibração), (c) condições ambientais (temperatura, umidade, pressão atmosférica e outros fatores ambientais) e (d) materiais (heterogeneidades ou discontinuidades dos mesmos). A variabilidade entre as medições realizadas por um mesmo operador sobre um longo período de tempo, usualmente, será maior que a obtida em um curto período de tempo, desde que a possibilidade de mudanças nos fatores acima mencionados é maior.

Entretanto, como esses fatores não podem ser completamente controlados, o método deve ser capaz de suportar o impacto de variabilidade introduzida não intencionalmente.

Autores como Shewhart (1939) e Hunter (1980) indicam que o controle estatístico de um processo está relacionado com o conceito de *repetitividade* uma operação. Especificamente, Hunter (1980) indica que se uma operação está sob controle estatístico, podem ser medidas sua repetibilidade e reprodutibilidade, para o processo associado. Nesse caso, entendemos por *repetibilidade* a medida da variabilidade entre medições realizadas por um “mesmo operador” e por *reprodutibilidade* a medida da variabilidade das medições realizadas por “diferentes operadores”. Por “operadores” subtende-se fontes de variabilidade tais como métodos, hospitais, fábricas e laboratórios, dentre outras.

A análise da variabilidade dentro e entre operadores pode levar à padronização do processo de medição. Se cada processo inclui as especificações e instruções (protocolo), elas poderão ser interpretadas e realizadas em muitos casos de forma diferente; em outras situações a realização do método dependerá da qualidade do equipamento ou da supervisão utilizada.

O planejamento de experimento é um instrumento muito importante para obter processos sobre controle estatístico, pois através do uso de experimentos planejados podem-se variar de forma sistemática e eficiente as condições sob as quais a medição é realizada, detectando-se fatores de impacto razoável e fatores relativamente irrelevantes. Como indicam Box e Draper (1969), pp. 180-195 e Montgomery (1997), pp. 353-454, o controle sobre os processos depende da identificação das variáveis que causam mudanças nas respostas. A condição de estabilidade do processo de medição é indispensável na avaliação da confiabilidade das medições.

A estabilidade do processo permite assegurar a existência de uma população bem definida de medidas. Por este motivo, as quantidades a serem medidas podem ser interpretadas como parâmetros de uma população, que podem ser estimados utilizando-se toda a informação sobre o processo. Em particular, a modelagem

estatística das fontes de variação do processo permitirá estimar também os "componentes" da incerteza que deve ser atribuída as estimativas acima mencionadas.

1.3 Avaliação da incerteza de uma medição

Geralmente, é assumido que a incerteza ou "erro" das medições são desprezíveis em relação à variação do material ou produto testado. Esse suposto é vital quando, por exemplo, as medições conduzem a ações. Assim, o sucesso de um programa pode estar diretamente relacionado com a qualidade das medições que pode ser avaliada mediante os conceitos de erro, vício e exatidão, dentre outros.

1.3.1 Erro de Medição

Toda medida gerada por um processo pode ser considerada como a combinação do valor (em geral desconhecido) da característica medida e do erro associado à medida. Desde que nosso objetivo é analisar a qualidade das medições, estamos interessados no erro associado à medida. Em geral, ele é constituído por dois componentes, um considerado aleatório e outro sistemático, que serão definidos a seguir, indicando sua incidência na qualidade dos resultados do processo de medição.

Diremos que um componente do erro é *sistemático* quando afeta de igual maneira as medidas produzidas pelo processo. Em geral, o erro sistemático é devido ao sistema de medição utilizado. Uma fonte de variação sistemática muito comum é a introduzida pelos aparelhos utilizados. Por exemplo, a escala pode ser graduada ou posicionada incorretamente produzindo assim um erro absoluto; enquanto que se os braços da balança química diferem têm-se uma porcentagem

fixa de erro relativo. Os erros pessoais, como os cometidos em leituras de escalas, tempos de espera, etc também podem ser considerados fontes de variação sistemática. Neste ponto, é importante enfatizar que o pesquisador deve tomar os cuidados necessários para minimizar o impacto desse tipo de erro.

Assim alguns fatores considerados responsáveis pelo erro sistemático podem ser identificados e controlados, entanto que os aqueles fatores considerados não controláveis, podem ser muitas vezes associados ao erro aleatório.

1.3.2 Precisão, Exatidão e Vício

A magnitude da incerteza de uma medição pode ser avaliada com base na precisão, exatidão e vício do processo de medição, se ele é estável ou se está sob controle estatístico.

A *precisão* de um processo de medição é um conceito relativo ao grau de aproximação das medições obtidas mediante aplicações repetidas e independentes do processo de medição sob condições específicas. É importante observar que a precisão de um processo é a precisão do método nele utilizado.

Um processo de medição pode ser descrito como preciso quando a dispersão das medidas geradas por ele é pequena para a situação na qual o processo será aplicado. Uma estimativa da precisão pode ser realizada e interpretada somente se a situação experimental sob as quais as medidas são obtidas é cuidadosamente descrita.

A *exatidão* pode ser definida como o grau de aproximação entre as medidas obtidas mediante aplicações repetidas e independentes geradas pelo processo e um valor de referência aceitável.

Possivelmente, seja mais adequado avaliar a *inexatidão*, uma vez que ela indica a discrepância entre o valor das medidas obtidas e o valor de referência. A *inexatidão* é avaliada mediante o vício do processo de medição.

O *vício* de um processo de medição está relacionado com a consistência ou diferença sistemática entre as medições e o valor de referência da propriedade medida. A magnitude do vício depende das fontes de variabilidade incluídas no processo e da natureza do material. O conceito de vício pode ser usado para descrever diferenças sistemáticas entre operadores, épocas do ano ou métodos; ele não é uma propriedade intrínseca do método de medição.

Então, pode-se dizer que *exatidão* refere-se a aproximação entre medidas e valor de referência, já a *precisão* é a aproximação entre as medidas. Um processo de medição é de alta qualidade se produz dados exatos e de alta precisão.

1.4 Exemplo da Tecnologia de Alimentos

As idéias anteriores podem ser ilustradas analisando em detalhe um processo de medição utilizado no Centro de Tecnologia de Embalagem do Instituto de Tecnologia de Alimentos CETEA - ITAL, de Campinas, para a determinação da camada de estanho em folhas-de-flandres.

A folha-de-flandres é um produto laminado plano, constituído por aço de baixo teor de carbono, revestido em ambas as faces por uma camada de estanho. O material é utilizado principalmente na fabricação de embalagens metálicas devido a sua boa aparência, resistência à corrosão e soldabilidade.

A espessura da folha-de-flandres deve ser determinada de maneira confiável para assegurar o controle da proteção anticorrosiva e reduzir o custo do produto.

Os fatores do processo de medição para determinação da espessura da folha-de-flandres são: folha-de-flandres (matéria-prima); balança analítica, capela e cortadora (equipamento); pessoal do laboratório (operadores) e temperatura, umidade e poluição do ar (condições ambientais). A espessura, que é a medida a determinar, foi avaliada por um método gravimétrico de medição.

O método requer duas medições: (1) uma vez cortado e limpo o corpo-de-prova (chamado também de "amostra"), ele é pesado e o valor assim obtido é denotado por P_1 ; (2) o corpo-de-prova é colocado em um reagente e, uma vez retirado, após um período de tempo prefixado, ele é limpo e pesado pela segunda vez, denotando-se essa medida por P_2 .

O resultado do método de medição neste caso é o conteúdo total de estanho obtido a partir da expressão

$$M_T = \frac{P_1 - P_2}{A},$$

onde M_T é a espessura em gramas $/m^2$ de estanho total por face, P_1 é o peso em gramas do corpo-de-prova antes do ensaio, P_2 é o peso em gramas do corpo-de-prova depois do ensaio e A é área do corpo-de-prova, em m^2 .

Como é de se esperar, os valores da espessura de estanho obtidos através do processo de medição apresentam diferenças, atribuídas ao erro experimental.

Como é tarefa do pesquisador obter medições exatas, ele deve examinar cuidadosamente a seqüência de passos a seguir para que o processo de medição forneça resultados válidos. No caso particular desse processo, para evitar erros sistemáticos e diminuir o quanto possível o erro aleatório, deverão ser controlados os fatores de cada estágio ou subprocesso. Portanto, é importante ressaltar que a

determinação dos fatores do processo de medição indicados no Quadro 1 a seguir, assim como seu controle, podem ser utilizados como base para padronização e reprodução do processo de medição.

QUADRO 1: Subprocessos e Fatores no Processo de Medição do Exemplo 1.

Subprocessos	Fatores
1-Com a cortadora, gerar as amostras, em forma de discos de área 28,5 cm ² .	-Precisão da cortadora.
2-Operação de Limpeza.	-Leitura do operador.
3-Pesar o corpo-de-prova na balança analítica.	-Calibração da balança.
4-Colocar o corpo-de-prova no recipiente contendo uma solução decapante e retirar aproximadamente um minuto após ter cessado a efervescência.	-Origem e tipo de reagente. -Operador (tempo de efervescência, tempo de demora na retirada do corpo-de-prova).
5-Remover com água o depósito negro da superfície do corpo-de-prova que se forma durante o ensaio, colocar no recipiente com reagente por mais de 30 segundos e limpar com acetona.	-Operador (limpeza). -Marca da acetona.
6-Pesar novamente o corpo-de-prova.	-Calibração da balança. -Leitura do operador.

Na próxima seção descreveremos um processo de medição específico, cuja análise será de interesse para o desenvolvimento desta dissertação.

1.5 Ensaaios Interlaboratoriais

Um processo de medição executado em materiais semelhantes e reproduzido em diferentes laboratórios exibirá medidas variáveis. Os próprios laboratórios e os fatores que operam dentro e fora deles podem contribuir para a variabilidade dos resultados do processo, gerando incerteza nas medidas e tornando-os menos confiáveis.

Para aumentar essa confiabilidade foram criados os denominados programas de comparações interlaboratoriais, através dos quais procura-se avaliar as fontes de variabilidade do processo de medição. Eles são muito utilizados por pesquisadores em Ciência e Tecnologia, especialmente nas áreas da Medicina, Química, Física e Engenharia.

Diremos que um ensaio interlaboratorial ou estudo colaborativo é a realização paralela de um processo de medição em diferentes ambientes. Esses ensaios permitem obter informação sobre variabilidade das medidas após a padronização do processo de medição, avaliando em particular as variações sistemáticas e aleatórias esperadas quando o processo, sob controle estatístico, é realizado em diferentes “contextos”.

Essencialmente, um ensaio interlaboratorial consiste na análise de diferentes materiais, cobrindo uma faixa de valores desejados, por um certo número de laboratórios, chamados de laboratórios participantes, que submetem os materiais ao processo de medição. Às vezes, várias propriedades são estudadas

simultaneamente e, em outros casos, é utilizado mais de um método de medição para caracterizar uma mesma propriedade.

Um ensaio interlaboratorial típico avalia q materiais, cada um dos quais é medido pelos p laboratórios participantes. No caso mais simples, cada laboratório realiza n medições de cada um dos q materiais. Assim, os resultados das n medições realizadas pelo i -ésimo laboratório sobre o j -ésimo material podem ser alocadas na célula (i, j) da dupla classificação "laboratório \times material", de maneira que o estudo interlaboratorial gera uma tabela de dupla entrada com pq células de n medições.

Como já foi indicado na Seção 1.2.2, dois índices precisam ser determinados para a avaliação da precisão de um processo de medição: a repetibilidade r e a reprodutibilidade R . A seguir, apresentamos definições relativamente informais desses conceitos.

A *repetibilidade* é a variabilidade dos resultados correspondentes a um mesmo material, obtidos dentro de cada laboratório utilizando realizações do processo em um curto período de tempo, com um único operador e com aparelhos e operações especificadas no protocolo.

A *reprodutibilidade* é a variabilidade dos resultados correspondentes ao mesmo material em diferentes laboratórios utilizando realizações do processo em um curto período de tempo, com um único operador e com aparelhos e operações especificadas no protocolo comum em cada um dos diferentes laboratórios.

Podemos, então, dizer que a análise estatística de um ensaio interlaboratorial têm três propósitos: (a) determinar se as medidas obtidas são consistentes, (b) investigar e atuar sobre qualquer medida considerada inconsistente e (c) obter as estatísticas que informam sobre a variabilidade do processo de medição.



As normas ISO 5275 (1986) e ISO 4259 (1992), publicadas pela Organização Internacional para Padronização (International Organization for Standardization) e a Norma E-691 (ASTM-1992) são específicas para a determinação da precisão de ensaios interlaboratoriais. Nelas encontram-se os conceitos de repetibilidade e reprodutibilidade os quais são relevantes na determinação da precisão de um processo de medição. Alguns autores como Mandel (1972,1991), Jaech (1979), Youden e Steiner (1987), Mandel & Lashof (1987) e Deutler (1991) discutem especificamente estes conceitos no caso dos ensaios interlaboratoriais.

1.5.1 Exemplo de um Ensaio Interlaboratorial

Devido às constantes reduções na quantidade de estanho que as folhas-de-flandres vêm sofrendo, tem surgido a necessidade de se reavaliar os métodos disponíveis para sua determinação. Por esse motivo, o Centro de Tecnologia de Embalagem (CETEA-ITAL) de Campinas, realizou um ensaio interlaboratorial para determinação da espessura da camada de estanho em folhas-de-flandres. Os métodos habitualmente utilizados para o ensaio de determinação de camada, isto é, o coulométrico, o gravimétrico e outro baseado em equipamentos denominados Stanomatic, foram aplicados. No ensaio procurou-se:

- verificar a exatidão das medidas realizadas nos laboratórios participantes;
- descrever os resultados obtidos pelos laboratórios participantes na aplicação do método gravimétrico;
- avaliar a “adequação” dos métodos coulométrico e gravimétrico no caso de folhas com menores espessuras de revestimento de estanho e
- estabelecer intervalos de variação para “determinações aceitáveis”.

Participaram do ensaio 8 laboratórios, que analisaram os materiais que resultaram da classificação cruzada de dois tipos de folha-de-flandres (A e B, as quais se diferenciam pelo conteúdo de estanho), e de três regiões da folha (superior, central ou inferior) de onde se obteve o corpo-de-prova. Cada laboratório realizou $n=2$ medições para cada material, e cada um dos materiais foi analisado em duas épocas diferentes. Mais detalhes sobre o ensaio figuram em Gatti et al. (1997). O Quadro 1 fornece uma descrição do processo de medição realizado nos laboratórios.

1.6 Coeficientes de Repetibilidade λ e de Reprodutibilidade Λ

Repetibilidade e reprodutibilidade são dois conceitos importantes na determinação da precisão de um processo de medição. Nesta seção apresentaremos coeficientes que permitem sua avaliação quantitativa.

As definições formais a seguir são apresentadas por Mandel & Lashof (1987). Para manter uniformidade na notação, os coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade, habitualmente denotados por r e R , serão aqui denominados com as letras gregas λ e Λ , respectivamente, para ressaltar o fato de constituírem parâmetros a serem estimados.

Definição 1: O coeficiente de repetibilidade é um número real positivo λ , tal que a probabilidade de que o valor absoluto da diferença d entre duas medições obtidas em um mesmo laboratório seja inferior a λ , satisfaça

$$P(|d| \leq \lambda) = 0.95.$$

Definição 2: O coeficiente de reprodutibilidade é um número real positivo Λ , tal que a probabilidade de que o valor absoluto da diferença d^* entre duas medições obtidas em diferentes laboratórios seja inferior a Λ , satisfaça

$$P\left(|d^*| \leq \Lambda\right) = 0.95.$$

Uma expressão explícita dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade podem ser obtidos sob as seguintes condições.

1- O uso de probabilidade requer a existência de uma distribuição estatística das medições, o que permitirá modelar sua variabilidade. A existência dessa distribuição pode ser assegurada pela estabilidade do processo de medição. Uma condição suplementar, utilizada a seguir, é a normalidade da distribuição, que muitas vezes pode ser justificada recorrendo-se ao Teorema Limite Central.

2- Para um material fixo, a distribuição D_1 das medições realizadas no mesmo laboratório possui um desvio-padrão σ_λ , enquanto que a distribuição D_2 das medições realizadas em diferentes laboratórios possui um desvio-padrão σ_Λ .

3- Nas condições anteriores, se denotarmos com Y e Y' duas observações independentes da distribuição D_1 , a variável aleatória $d = Y - Y'$ possuirá desvio-padrão $\sqrt{\text{Var}(d)} = \sqrt{2}\sigma_\lambda$. Analogamente, se Y e Y' são duas observações independentes da distribuição D_2 , o desvio-padrão de $d^* = Y - Y'$ será nesse caso $\sqrt{2}\sigma_\Lambda$.

Supondo agora que os desvios-padrão acima são determinados sem erro, as variáveis aleatórias $d / \sqrt{2}\sigma_\lambda$ e $d^* / \sqrt{2}\sigma_\Lambda$ têm distribuição normal padrão então as expressões explícitas dos coeficientes são

$$\lambda = 1.96 \sqrt{2} \sigma_\lambda \quad \text{e} \quad \Lambda = 1.96 \sqrt{2} \sigma_\Lambda.$$

Consideremos agora o modelo

$$Y_{jk} = \mu + b_j + \varepsilon_{jk} \quad (j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

para a k -ésima medida realizada pelo j -ésimo laboratório, onde μ denota a média geral das medidas; b_j é uma variável aleatória supostamente normal de média 0 e variância σ_L^2 que representa o efeito do i -ésimo laboratório e ε_{jk} é uma variável não observável correspondente ao erro experimental, supostamente com distribuição normal de média 0 e variância σ^2 . As variáveis ε_{jk} e b_j são supostas independentes.

O Modelo (1) é denominado modelo aleatório normal para uma classificação simples balanceada. Nesse contexto podem ser determinadas as quantidades $\sigma_\lambda = \sqrt{\sigma^2}$ e $\sigma_\Lambda = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_L^2}$, denominadas desvio-padrão de repetibilidade e de reprodutibilidade respectivamente, determinados mediante os componentes de variância σ^2 e σ_L^2 do modelo.

Tendo em conta as considerações expostas acima, podem-se obter expressões explícitas para os coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade em função dos desvios-padrão σ_λ e σ_Λ do modelo (1). Assim, procuraremos estimadores dos coeficientes utilizando as medidas geradas por um ensaio interlaboratorial.

1.7 Objetivo e Estrutura desta Dissertação

Dois métodos estatísticos diferentes têm sido propostos para obter estimadores para os coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade. O primeiro está baseado na análise de variância, sugerido pela Norma ISO 4259. O segundo proposto por Hamaker (1987), utiliza um método de regressão linear, que explora a dependência entre média e o desvio-padrão nas medições. Em nenhuma das duas

propostas foram utilizados métodos de estimação dos componentes de variância com a finalidade de obter estimativas dos coeficientes λ e Λ .

O objetivo desta dissertação é construir estimadores dos coeficientes λ e Λ , utilizando o fato de que eles são funções dos componentes de variância do modelo (1). Portanto, a estimação deles depende da estimação de componentes de variância. Assim, no Capítulo II definiremos quatro estimadores de componentes de variância para o modelo aleatório balanceado correspondente a uma classificação simples. Nos Capítulos III e IV apresentaremos os estimadores dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade e suas distribuições exatas, assim como seus momentos, vícios e erros quadráticos médios. Finalmente, no Capítulo V ilustraremos os cálculos utilizando resultados do ensaio interlaboratorial descrito em 1.5.1.

O Anexo A exhibe as definições das funções especiais necessárias para o cálculo dos momentos dos estimadores e o Anexo B contém os dados correspondentes à Época 1 do ensaio interlaboratorial realizado pelo CETEA-ITAL de Campinas.

CAPÍTULO II

Estimadores dos Componentes de Variância

2.1 Introdução

Como foi discutido na Seção 1.3., a precisão é uma importante característica dos resultados de um processo de medição e para determiná-la devemos estudar as fontes de variabilidade dessas medidas. No caso dos métodos de ensaio de materiais, encontra-se inicialmente na variabilidade de resultados obtidos em um mesmo laboratório gerado sob condições de repetibilidade. Se os ensaios padronizados são realizados em diferentes laboratórios, os mesmos induzem uma outra fonte de variabilidade, conduzindo à “reprodutibilidade”. Ambas as fontes de variabilidade devem ser quantificadas para avaliar o grau de concordância de ensaios executados em um ou vários laboratórios, para determinar diferenças entre eles e eventuais afastamentos com respeito a valores referenciais.

Várias quantidades podem ser utilizadas para avaliar a variabilidade dos resultados dentro e entre laboratórios. Como os coeficientes de repetibilidade (λ) e de reprodutibilidade (Λ) são funções dessas formas de variabilidade, neste Capítulo começaremos por discutir diferentes estimadores de componentes de variância.

2.2 Análise Estratificada por Material

Como foi discutido na Seção 1.5, os dados gerados em um ensaio interlaboratorial podem ser estruturados mediante uma tabela de dupla entrada. Com uma quantidade fixa n de observações em cada casela (i, j) , os dados

podem ser analisados mediante um modelo linear balanceado associado a uma dupla classificação

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

onde Y_{ijk} é uma variável aleatória que corresponde à k -ésima medição, realizada no i -ésimo material, pelo j -ésimo laboratório; μ denota a média geral das medições; α_i representa o efeito do i -ésimo material; β_j é o efeito do j -ésimo laboratório, e ε_{ijk} é uma variável aleatória não observável correspondente ao erro experimental, supostamente com distribuição normal com média nula e variância σ^2 . As variáveis ε_{ijk} são consideradas estatisticamente independentes.

Uma vez que os materiais utilizados no ensaio são muitas vezes heterogêneos, e como as propriedades físicas ou químicas dos mesmos podem interferir no processo de medição considerado, é recomendável realizar uma análise estratificada por material, como exposto por Mandel (1972, 1991) e na Norma E-691 (ASTM-1992). Nesse caso, pode-se considerar que as respostas do ensaio são afetadas somente pelo fator “laboratório” e, portanto, podem ser modeladas de acordo com uma classificação simples. Começaremos por discutir modelos estatísticos que descrevem essa situação básica.

2.2.1 Modelo de Classificação Simples

Existe extensa literatura estatística sobre modelos lineares com efeitos fixos e aleatórios. Ver, por exemplo, Scheffé (1959), Searle (1971), Searle et al. (1992) e Graybill (1976). Nessas referências são definidos os modelos e desenvolvidas conseqüências da definição. A questão da adequação dos modelos é também importante e deve ser considerada em conjunto com os pesquisadores da área de aplicação substantiva.

No caso específico dos ensaios interlaboratoriais, pode-se colocar a questão da natureza dos efeitos que descrevem os laboratórios, que podem ser fixos ou aleatórios. Procuraremos esclarecer essa questão para escolher o modelo mais adequado em cada situação.

2.2.1.1 Laboratórios como Efeitos Fixos

Os efeitos de laboratório podem ser considerados fixos quando as fontes de variação associadas aos mesmos são de interesse e importância específicos, e quando as conclusões procuradas serão aplicáveis aos laboratórios participantes do ensaio. O modelo linear para as respostas nessa situação é dado por (2.1), onde $\mu, \beta_1, \dots, \beta_p$, são parâmetros fixos. Habitualmente, é também adicionada a condição

$\sum_{j=1}^p \beta_j = 0$ de identificabilidade dos parâmetros fixos.

Em muitos ensaios interlaboratoriais, porém, os laboratórios participantes constituem uma amostra aleatória extraída de uma população de "laboratórios candidatos", levando assim à consideração de efeitos aleatórios.

2.2.1.2 Os Laboratórios como Efeitos Aleatórios

Quando os laboratórios participantes podem ser considerados uma amostra aleatória de uma população de laboratórios é que as respostas do ensaio para um material fixo podem ser estruturadas da forma

$$Y_{jk} = \mu + b_j + \varepsilon_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

onde os símbolos b_1, \dots, b_p correspondem a efeitos aleatórios modelados mediante variáveis aleatórias independentes com distribuição supostamente normal com média nula e variância constante σ_L^2 e todas as variáveis aleatórias b_j e ε_{jk} são supostas estatisticamente independentes.

A variabilidade total das respostas experimentais Y_{jk} para este modelo é descrita na seguinte Tabela de Análise de Variância, que exhibe a aditividade dos componentes de variação correspondentes às suas linhas. Na última coluna são exibidos os valores esperados dos quadrados médios correspondentes. Onde \bar{y} , \bar{y}_j indicam a média geral e a média por laboratório respectivamente.

TABELA 1: Tabela de análise de variância, para o modelo da classificação simples com efeitos aleatórios correspondente a um material específico.

Fonte	gl	SQ	QM	E(QM)
Entre Labs.	p-1	$n \sum_{j=1}^p (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	$\frac{n}{p-1} \sum_{j=1}^p (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	$\sigma^2 + n\sigma_L^2$
Residual	p(n-1)	$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (y_{jk} - \bar{y}_j)^2$	$\frac{1}{p(n-1)} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (y_{jk} - \bar{y}_j)^2$	σ^2
Total	pn-1	$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (y_{jk} - \bar{y})^2$		

2.3 Estimadores de Componentes de Variância

Sob os supostos do modelo aleatório (2.2), a variância de uma resposta tem a forma

$$\text{Var}(Y_{jk}) = \sigma^2 + \sigma_L^2, \quad j=1,2,\dots,p; k=1,2,\dots,n$$

sendo assim apropriado denominar componentes de variância aos parâmetros σ^2 e σ_L^2 . Os mesmos satisfazem as condições $0 < \sigma^2 \leq \sigma^2 + \sigma_L^2$.

Como os dados de um ensaio interlaboratorial podem ser modelados mediante equações como (2.2), centraremos nossa atenção nos estimadores para os componentes σ^2 e σ_L^2 .

A seguir são apresentados quatro estimadores dos componentes de variância.

1- Estimadores baseados no método dos momentos. Esses estimadores, também denominados de análise de variância, são construídos igualando-se os valores obtidos dos quadrados médios na tabela de análise de variância a seus valores esperados, resultando as equações de estimação

$$\hat{\sigma}^2 = QM_E \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_L^2 = \frac{QM_L - QM_E}{n} \quad (2.3)$$

2- Estimadores baseados na equação de verossimilhança. Eles são as soluções da equação de verossimilhança $\nabla L = 0$, onde

$$L(\mu, \sigma^2, \sigma_L^2 | y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{SQ_E}{\sigma^2} + \frac{SQ_L}{(\sigma^2 + n\sigma_L^2)} + \frac{np(\bar{y} - \mu)^2}{(\sigma^2 + n\sigma_L^2)} \right]\right\}}{(2\pi)^{pn/2} (\sigma^2)^{p(n-1)/2} (\sigma^2 + n\sigma_L^2)^{(p-1)/2}} \quad (2.4)$$

é a função de verossimilhança completa associada ao modelo normal (2.2), desconsiderando as restrições naturais $0 < \sigma^2 \leq \sigma^2 + n\sigma_L^2$ sobre os parâmetros σ^2 e σ_L^2 e onde ∇ designa o operador gradiente. Derivando com respeito aos parâmetros σ^2 e σ_L^2 , a condição $\nabla L = 0$ gera as equações de estimação

$$\check{\sigma}^2 = QM_E \quad \text{e} \quad \check{\sigma}_L^2 = \frac{QM_L - QM_E}{n}$$

que coincidem com as obtidas ao aplicar o método dos momentos.

3- Estimadores truncados. O estimador $\check{\sigma}_L^2$ acima obtido tem a desvantagem de assumir valores negativos com probabilidade positiva, no entanto, o parâmetro estimado é não negativo. Assim, é conveniente definir o estimador truncado, que se anula quando a estimativa de σ_L^2 é negativa. Os estimadores truncados são dados por:

$$\hat{\sigma}^2 = QM_E \quad \hat{\sigma}_L^2 = \max\left\{0, \frac{QM_L - QM_E}{n}\right\} \quad (2.5)$$

Cabe esclarecer que uma estimativa truncada nula de σ_L^2 indica que a variabilidade das observações realizadas “dentro dos laboratórios” é superior à existente entre observações de diferentes laboratórios. A não-negatividade do estimador truncado $\hat{\sigma}_L^2$ pode ser considerada como produto de um artifício ad-hoc. Por esse motivo, têm sido construídos outros estimadores não-negativos para o componente de variância σ_L^2 . Ver por exemplo Herbach (1959), Thompson (1962), Federer (1968) e Klotz, Milton & Zacks (1969).

4- Estimadores de máxima verossimilhança. Outros estimadores podem ser obtidos maximizando a função de verossimilhança completa indicada em (2.4) sob as restrições

$$0 < \sigma^2 \leq \sigma^2 + n\sigma_L^2 \quad (2.6)$$

Como demonstrado em Herbach (1959) ou em Searle et al. (1992), eles possuem a forma

$$\tilde{\sigma}^2 = \min \left\{ QM_E, \frac{(p-1)QM_L + p(n-1)QM_E}{np} \right\} \quad (2.7)$$

$$\tilde{\sigma}_L^2 = \max \left(0, \frac{(1-p^{-1})QM_L - QM_E}{n} \right).$$

5-Estimadores de máxima verossimilhança residual. Esses estimadores, também denominados de máxima verossimilhança restrita, foram obtidos por Thompson (1962), fatorando a função de verossimilhança completa em duas funções, uma das quais sem os parâmetros dos efeitos fixos. Os estimadores são obtidos maximizando-se essa última função de verossimilhança residual conjunta dos quadrados médios QM_E e QM_L , sujeita às restrições (2.6), ou seja,

$$L((\sigma^2, \sigma_L^2) | QM_E, QM_L) = [\Gamma(p(n-1)/2)\Gamma((p-1)/2)]^{-1} \times (QM_E)^{\frac{p(n-1)}{2}-1} \times (QM_L)^{\frac{p-1}{2}-1} \times \left\{ \left[\frac{2\sigma^2}{p(n-1)} \right]^{\frac{p(n-1)}{2}} \times \left[\frac{2(\sigma^2 + n\sigma_L^2)}{(p-1)} \right]^{\frac{p-1}{2}} \right\}^{-1}$$

Os estimadores resultantes são

$$\tilde{\sigma}^2 = \min\left(QM_E, \frac{(p-1)QM_L + p(n-1)QM_E}{np-1}\right) \quad \tilde{\sigma}_L^2 = \max\left(0, \frac{QM_L - QM_E}{n}\right) \quad (2.8)$$

Como os estimadores de componentes de variância acima definidos são funções das estatísticas \bar{y} , QM_E e QM_L , é conveniente mencionar suas propriedades inferenciais básicas. As mesmas são exibidas nos resultados que seguem, que são demonstradas no texto de Arnold (1981) pp. (247-249).

Lema 1: Sob as suposições do modelo (2.1) de efeitos aleatórios, as estatísticas \bar{y} , QM_E e QM_L são conjuntamente suficientes, completas e minimais para os parâmetros μ , σ^2 e $\tau^2 = \sigma^2 + n\sigma_L^2$.

Lema 2: Sob as suposições do modelo (2.1) as estatísticas \bar{y} , QM_E e QM_L são estocasticamente independentes. As variáveis aleatórias $\frac{SQ_E}{\sigma^2}$ e $\frac{SQ_L}{\sigma^2 + n\sigma_L^2}$ possuem distribuições qui-quadrado centrais com $p(n-1)$ e $(p-1)$ graus de liberdade, respectivamente.

2.4 Outros Estimadores para σ^2 e σ_L^2

Nos experimentos com materiais considerados homogêneos, os estimadores dos componentes de variância σ^2 e σ_L^2 obtidos para os diferentes materiais podem ser combinados. Em experimentos desse tipo podemos utilizar também estimadores baseados nos métodos de Controle de Qualidade. Dois deles serão apresentados a seguir, mas não estudados em detalhe.

2.4.1 Estimadores Baseados em Desvios

2.4.1.1 Estimador de σ^2

Para obter o estimador de σ^2 , calculam-se a média \bar{y}_{ij} e a variância empírica s_{ij}^2 das n medições para cada combinação (i, j) de material e laboratório, resultando a média

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p s_{ij}^2,$$

em que $s_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2$, $i = 1, 2, \dots, q$; $j = 1, 2, \dots, p$.

2.4.1.2 Estimador de σ_L^2

O componente σ_L^2 é estimado obtendo-se para cada laboratório as n medições nos q materiais, calculando-se depois a variância empírica

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^p (\bar{y}_{.j} - \bar{\bar{y}})^2$$

das médias de laboratório e subtraindo-se o componente

devido ao erro de medição interno, em que $\bar{y}_{.j}$ e $\bar{\bar{y}}$ representam a média do j -ésimo laboratório e a média geral respectivamente.

$$\hat{\sigma}_L^2 = S_{\bar{y}}^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{nq}.$$

Como também nesse caso podem-se obter estimativas negativas, podemos definir estimadores truncados mediante as relações

$$\bar{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_L^2 = \max\{0, \hat{\sigma}_L^2\}$$

2.4.2 Estimadores Baseados em Amplitudes

2.4.2.1 Estimador de σ^2

Um estimador $\bar{\sigma}^2$ pode ser obtido calculando a amplitude das n medições para cada combinação de material e laboratório. Seja \bar{R} a média das pq

amplitudes. O estimador tem a forma $\bar{\sigma}^2 = \left[\frac{\bar{R}}{d^*(p)} \right]^2$, onde $d^*(p)$ é a média da

distribuição da amplitude relativa utilizada no Controle Estatístico de Qualidade.

2.4.2.2 Estimador de σ_L^2

A partir das médias por laboratório baseadas nas n medições dos q materiais obtemos $\bar{y}_{max} = \max(\bar{y}_{.1}, \dots, \bar{y}_{.p})$ e $\bar{y}_{min} = \min(\bar{y}_{.1}, \dots, \bar{y}_{.p})$, e a seguir

$R_{\bar{y}} = \bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}$. Com essa quantidade pode ser calculada $T^2 = \left[\frac{R_{\bar{y}}}{d^*} \right]^2$, onde d^*

é um valor tabelado que depende de p e do número de amplitudes $\ell = 1$. Assim, o estimador resulta

$$\bar{\sigma}_L^2 = T^2 - \frac{\bar{\sigma}^2}{nq}$$

que também pode gerar valores negativos com probabilidade positiva, conduzindo ao estimador truncado

$$\bar{\sigma}^2 = \left[\frac{\bar{R}}{d^*} \right]^2 \text{ e } \bar{\sigma}_L^2 = \begin{cases} \left[T^2 - \frac{\bar{\sigma}^2}{nq} \right] & \text{se } T^2 \geq \frac{\bar{\sigma}^2}{nq} \\ 0 & \text{se } T^2 < \frac{\bar{\sigma}^2}{nq} \end{cases}$$

Os estimadores $\bar{\sigma}^2$ e $\bar{\sigma}_L^2$ apresentados nesta seção dependem da amplitude da série de medidas; sua estrutura não será investigada. Porém, é de interesse ressaltar que eles têm a vantagem de permitir o controle do processo durante sua realização. Isto é, eles consideram o fator tempo, o que permite o monitoramento do processo de medição e uma descrição instantânea do mesmo facilitando a ação em caso de instabilidade. Essa propriedade torna esses estimadores atrativos.

Nossa intenção nos Capítulos seguintes é estimar os coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade, utilizando os componentes de variância e os quadrados médios, contidos na Tabela 1.

CAPÍTULO III

Estimadores Irrestritos de λ e Λ

3.1 Introdução

Os coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade definidos no Capítulo I mediante as relações

$$\lambda = a\sqrt{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \Lambda = a\sqrt{\sigma^2 + \sigma_L^2} \quad (3.1)$$

são funções dos componentes de variância do modelo (2.2) definidos no Capítulo II. Por esse motivo, podem ser construídos estimadores λ e Λ substituindo os estimadores dos componentes de variância em (3.1). Esses estimadores de substituição de λ e Λ serão estudados no presente Capítulo e no seguinte, obtendo-se sua distribuição conjunta exata, momentos, erro quadrático médio e vício.

No presente Capítulo serão estudados os estimadores de substituição irrestritos dos coeficientes λ e Λ , baseados na substituição dos componentes de variância pelos seus estimadores obtidos pelo método dos momentos, detalhados em (2.3).

3.2 Estimadores de Substituição Baseados nos Estimadores de Momentos

Definição 1: Quando os componentes de variância σ^2 e σ_L^2 são estimados pelo método dos momentos, os estimadores de substituição do coeficiente de repetibilidade $\lambda = a\sqrt{\sigma^2}$ e de reprodutibilidade $\Lambda = a\sqrt{\sigma^2 + \sigma_L^2}$, obtidos inserindo esses estimadores, serão denominados estimadores de substituição baseados nos estimadores de momentos (plug-in moment estimators ou PME, em inglês).

O seguinte resultado, de demonstração imediata, exhibe a forma explícita dos PME dos parâmetros λ e Λ .

Lema 1: Os estimadores PME são

$$\hat{\lambda} = a\sqrt{QM_E} \quad \text{e} \quad \hat{\Lambda} = \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)QM_E + QM_L} \quad (3.2)$$

em que

$$QM_E = \frac{1}{p(n-1)} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (y_{jk} - \bar{y}_j)^2 \quad \text{e} \quad QM_L = \frac{n}{(p-1)} \sum_{j=1}^p (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2$$

são, respectivamente, os quadrados médios, exibidos na Tabela 1 do Capítulo II, correspondentes à variação residual e à variação devida aos laboratórios. A constante a é o valor de precisão sugerido pela Norma E-177 (ASTM, 1990-a) obtido como $\sqrt{2}c$, onde c é habitualmente igualada ao quantil de ordem $1 - (\beta/2)$ da distribuição normal padrão, definido por

$$1 - (\beta / 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^c \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Lema 2: Os estimadores PME dos parâmetros λ e Λ podem ser expressos em função das variáveis aleatórias independentes X e Y com distribuições qui-quadrado centrais com $p(n-1)$ e $(p-1)$ graus de liberdade, respectivamente, na forma

$$\hat{\lambda} = b_1 \sqrt{X} \quad \text{e} \quad \hat{\Lambda} = b_2 \sqrt{X + \frac{p}{(p-1)}(1 + m\kappa)Y},$$

em que $b_1 = \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{(n-1)p}}$, $b_2 = \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{np}}$ e $\kappa = \frac{\sigma_L^2}{\sigma^2}$.

Prova:

Como os estimadores PME de $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$ são funções das somas de quadrados SQ_E e SQ_L , e como as variáveis aleatórias $\frac{SQ_E}{\sigma^2}$ e $\frac{SQ_L}{\tau^2}$, com $\tau^2 = \sigma^2 + n\sigma_L^2$, são independentes com as distribuições indicadas, a substituição

$$X = \frac{SQ_E}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad Y = \frac{SQ_L}{\tau^2} \tag{3.3}$$

permite obter as fórmulas acima. ▼

Observe que as relações que permitem representar $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$ são igualdades em distribuição. Porém, a seguir, não será utilizada a igualdade em distribuição.

3.2.1 Distribuições básicas

A seguir introduziremos definições que facilitarão a identificação das distribuições exatas dos estimadores PME e o cálculo de suas características.

Observação 1: A função indicadora de um subconjunto A de \mathfrak{R} é uma função que assume o valor 1 em A e 0 no complemento de A . Ela é denotada por $\mathbf{1}_A(x)$.

Definição 2: A variável aleatória X tem distribuição qui-quadrado central com m graus de liberdade se a distribuição de X é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue sobre \mathfrak{R} , com função de densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{x^{(m/2)-1} e^{-x/2}}{\Gamma(m/2) 2^{m/2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

onde $\Gamma(\alpha)$ denota a função gama definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Utilizaremos a notação $X \sim \chi^2(m)$.

Definição 3: Se X é uma variável aleatória qui-quadrado central com m graus de liberdade, e se $Y = \sqrt{X}$, então Y possui uma distribuição qui central com m graus de liberdade.

É fácil provar que sob as condições da Definição 3, a distribuição de Y é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue sobre \mathfrak{R} , com função de densidade:

$$g_Y(y) = \frac{y^{m-1} e^{-y^2/2}}{\Gamma(m/2) 2^{(m/2)-1}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Denotaremos com $\chi(m)$ a distribuição de Y .

Definição 4: Se X é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado central com m graus de liberdade, e se $Z = \sqrt{\theta X}$, então Z possui uma distribuição qui-central escalada com m graus de liberdade e parâmetro de escala θ .

Também nesse caso é fácil provar que a distribuição de Z é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue sobre \Re , com função de densidade:

$$g_Z(z) = \frac{z^{m-1} e^{-z^2/2\theta}}{\Gamma(m/2) \theta^{m/2} 2^{(m/2)-1}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z).$$

A notação $Z \sim \chi(m, \theta)$ será utilizada nesse caso.

Definição 5: A variável aleatória Z tem uma distribuição gama com parâmetro de forma $\alpha > 0$ e parâmetro de escala $\theta > 0$, se a distribuição de Z é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue sobre \Re , com função de densidade:

$$h_Z(z) = \frac{\theta^\alpha (z)^{\alpha-1} e^{-\theta z}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z),$$

com notação $Z \sim G(\alpha, \theta)$

Observação 2: As distribuições de qui-quadrado centrais e seus múltiplos são casos especiais da definição anterior. Especificamente

i) Se $X \sim \chi^2(m)$, então $X \sim G(m/2, 1/2)$

ii) Se $Z \sim G(\alpha, \theta)$ e $c > 0$, então $cZ \sim G(\alpha, \theta/c)$

Definição 6: Se ξ é uma constante real e se $Z^* = U + \xi$ com $U \sim G(\alpha, \theta)$ então a variável aleatória Z^* tem uma distribuição gama deslocada com parâmetro de forma $\alpha > 0$, parâmetro de escala $\theta > 0$ e parâmetro de posição ξ .

Um cálculo imediato permite demonstrar que nesse caso a distribuição de Z^* é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue sobre \mathfrak{R} , com função de densidade:

$$f_{Z^*}(z) = \frac{\theta^\alpha (z - \xi)^{\alpha-1} e^{-\theta(z - \xi)}}{\Gamma(\alpha)} 1_{(\xi, \infty)}(z).$$

Utilizaremos a expressão $Z^* \sim G(\alpha, \theta, \xi)$ para denotar a distribuição de Z^* .

3.2.2 A distribuição exata dos estimadores irrestritos

O seguinte resultado permite obter as distribuições exatas dos estimadores $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$ sob o modelo normal balanceado de efeitos aleatórios para a classificação simples considerado no Capítulo II.

Lema 3:

i) A distribuição exata do estimador de substituição $\hat{\lambda}$ é qui-central escalada com $p(n-1)$ graus de liberdade e parâmetro de escala $\theta = \frac{a^2 \sigma^2}{p(n-1)}$.

A distribuição exata de $\hat{\lambda}^2$ é gama com parâmetro de forma $\frac{p(n-1)}{2}$ e parâmetro de escala $\frac{p(n-1)}{2 a^2 \sigma^2}$.

Prova:

É suficiente utilizar as relações $\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{a^2 \sigma^2}{p(n-1)}} X$ e $X \sim \chi^2(p(n-1))$, onde X é a variável definida mediante (3.3). ▼

Lema 4: A distribuição condicional de $\hat{\Lambda}^2$ dado $X = \frac{SQE}{\sigma^2} = x$, é uma gama deslocada com parâmetro de forma $\frac{p-1}{2}$, parâmetro de escala $\frac{n(p-1)}{2 a^2 \tau^2}$ e parâmetro de posição $\frac{a^2 \sigma^2 x}{np}$.

Prova:

Pelo Lema 2, dado $X = x$, a variável aleatória

$$\hat{\Lambda}^2 = b_2^2 \left[\frac{p}{p-1} (1 + m\kappa) Y + X \right] = \frac{a^2 \tau^2}{n(p-1)} Y + \frac{a^2 \sigma^2 x}{np}$$

é a soma de uma variável $G\left(\frac{p-1}{2}, \frac{n(p-1)}{2 a^2 \tau^2}\right)$ e da constante $\frac{a^2 \sigma^2 x}{np}$. ▼

Por analogia com a definição da distribuição beta-Stacy apresentada por Johnson & Kotz (1970), definiremos uma distribuição bivariada gama-Stacy, para expressar a distribuição exata dos estimadores dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade.

Definição 7: Se W e Z são duas variáveis aleatórias tais que a distribuição de W é $G(\alpha_1, \theta_1)$ e a distribuição condicional de Z dado $W = w$ é $G(\alpha_2, \theta_2, w)$, então a distribuição do vetor (W, Z) é denominada distribuição gama-Stacy com parâmetro primário de forma α_1 , primário de escala θ_1 , secundário de forma α_2 e secundário de escala θ_2 .

Usaremos a notação $(W, Z) \sim GS(\alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2)$ para denotar essa distribuição bivariada.

Lema 5: A distribuição $GS(\alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2)$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue no plano, com densidade conjunta

$$f_{GS}(w, z; \alpha_1, \theta_1; \alpha_2, \theta_2) = \frac{\theta_1^{\alpha_1} \theta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} w^{\alpha_1 - 1} (z - w)^{\alpha_2 - 1} \times e^{-\theta_1 w} e^{-\theta_2 (z - w)} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(w) \mathbf{1}_{(w, \infty)}(z)$$

Prova:

É suficiente multiplicar a função de densidade marginal de W e a função de densidade condicional de Z dado $W = w$ para obter a função de densidade conjunta. ▼

Observe que o suporte da distribuição do vetor (W, Z) é o cone $\{(w, z): 0 < w < z\}$, que denotaremos por $C(1)$. Em geral, para $c > 0$ denotaremos por $C(c)$ ao cone aberto $\{(w, z): 0 < cw < z < \infty\}$ contido no primeiro quadrante do plano.

Lema 6: O vetor aleatório $\left(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2\right)$ possui uma distribuição gama-Stacy com

parâmetros $\alpha_1 = \frac{p(n-1)}{2}$, $\theta_1 = \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}$, $\alpha_2 = \frac{p-1}{2}$, $\theta_2 = \frac{(p-1)(n-1)}{2a^2\tau^2}$.

Prova:

Pelo Lema 2, a variável aleatória $\frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2 = \frac{a^2 \tau^2}{(p-1)(n-1)} Y + \hat{\lambda}^2$ sob a condição

$\hat{\lambda}^2 = z$ tem uma distribuição $G\left[\frac{(p-1)}{2}, \frac{(p-1)(n-1)}{2a^2\tau^2}, z\right]$, correspondente à soma de

uma

variável $G\left[\frac{p-1}{2}, \frac{(p-1)(n-1)}{2a^2\tau^2}\right]$ e da constante z . Como $\hat{\lambda}^2 \sim G\left[\frac{p(n-1)}{2}, \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}\right]$,

resulta que a distribuição do vetor bivariado $\left(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2\right)$ é uma gama-Stacy

$$GS\left[\frac{p(n-1)}{2}, \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}, \frac{(p-1)}{2}, \frac{(p-1)(n-1)}{2a^2\tau^2}\right]. \blacktriangledown$$

O próximo passo é a determinação da função de densidade conjunta do vetor aleatório $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ utilizando o Teorema de Transformação de Densidades em \mathfrak{R}^2 , que pode ser encontrado no texto de Rohatgi (1976), pág. 135.

Teorema 1: A distribuição exata dos PME $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue no plano, com densidade

$$f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(u, v) = \frac{4mv}{n-1} f_{GS}\left[u^2, \frac{mv^2}{n-1}, \frac{p(n-1)}{2}, \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}, \frac{p-1}{2}, \frac{(p-1)(n-1)}{2a^2\tau^2}\right] \quad (3.4)$$

cujos suporte é o cone aberto $C(\sqrt{(n-1)/n})$.

Prova :

O vetor aleatório $(X_1, X_2) = \left(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2 \right)$ com distribuição gama-Stacy pode ser transformado no vetor

$$(U, V) = \left(X_1^{1/2}, ((n-1) X_2 / n)^{1/2} \right)$$

aplicando bijetivamente o cone aberto $C(1)$ no cone $C(\sqrt{(n-1)/n})$. A transformação possui determinante de Jacobi $\frac{n-1}{4uv}$ estritamente positivo. Assim, o Teorema da Transformação é aplicável, e o Lema 5 mostra que a função de densidade do vetor $(U, V) = (\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ é dada por (3.4). É fácil observar que o suporte da distribuição do vetor $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ é o cone aberto $C(\sqrt{(n-1)/n})$. ▼

Para unificar a descrição das distribuições exatas dos estimadores de substituição, calcularemos a função de distribuição do vetor aleatório $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$.

Teorema 2: A função de distribuição conjunta dos estimadores irrestritos é

$$F^*(u, v) = \left[\int_0^{g(u,v)} \int_{cx}^v f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(x, y) dy dx \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(v) \quad (3.5)$$

em que $g(u, v) = \min(u, v/c)$, $c = \sqrt{(n-1)/n}$ e $f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(x, y)$ é definida por (3.4).

Prova:

É suficiente observar que a interseção do quadrante $Q(u, v) = (-\infty, u] \times (-\infty, v]$ com o suporte $C(c)$ da distribuição de $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ é o trapézio $\{(x, y): 0 < x < u, cx < y < v\}$ quando $0 < u < v/c$ e o triângulo $\{(x, y): 0 < x < v/c, cx < y < v\}$ quando $0 < v < cu$. A fórmula $F^*(u, v) = P((\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in Q(u, v)) = P((\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in Q(u, v) \cap C(c))$ fornece o resultado procurado. ▼

3.2.3 Momentos da Distribuição Exata dos Estimadores PME

Agora estamos em condições de determinar os momentos dos estimadores $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$ e os momentos conjuntos do vetor $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$. Essas quantidades serão utilizadas para estudar a qualidade dos estimadores.

Embora o resultado seguinte seja um caso particular da fórmula geral (3.10), começaremos por calcular os momentos do estimador do coeficiente de repetibilidade.

Lema 7: Se s é um inteiro positivo, o momento de ordem s do estimador $\hat{\lambda}$ é

$$E(\hat{\lambda}^s) = \frac{\alpha^s \sigma^s 2^{s/2} \Gamma((s/2) + p(n-1)/2)}{[p(n-1)]^{s/2} \Gamma(p(n-1)/2)} \quad (3.6)$$

Prova:

Pelo Lema 3, a relação $\hat{\lambda}^s = \frac{\alpha^s \sigma^s}{p^{s/2} (n-1)^{s/2}} X^{s/2}$ com $X \sim \chi^2(p(n-1))$ permite obter

$E(\hat{\lambda}^s)$ utilizando os momentos da distribuição qui central, ver Johnson & Kotz (1970), p. 197. ▼

Em particular, se $s = 2$, reobtemos o valor médio da distribuição qui-quadrado e a fórmula $E(\hat{\lambda}^2) = \alpha^2 \sigma^2 = \lambda^2$.

Corolário 1: O valor médio e a variância do estimador PME do parâmetro λ são respectivamente

$$E(\hat{\lambda}) = f\lambda \quad \text{e} \quad \text{Var}(\hat{\lambda}) = (1 - f^2)\lambda^2$$

onde
$$f = \frac{\Gamma((p(n-1)+1)/2)}{[p(n-1)/2]^{1/2} \Gamma(p(n-1)/2)}$$

Prova:

Substituindo $s=1$ e $s=2$ em (3.6), e utilizando a fórmula $\text{Var}(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda}^2) - E^2(\hat{\lambda})$, resultam as expressões acima. ▼

Corolário 2: Se f é o fator do Corolário 1, o estimador $\frac{\hat{\lambda}}{f}$ é um estimador de variância mínima na classe dos estimadores não-viciados do coeficiente de repetibilidade λ .

Prova:

Pelo Lema 1 do Capítulo II as estatísticas \bar{y} , QM_E e QM_L são suficientes e completas para os parâmetros μ , σ^2 e σ_L^2 do modelo de efeitos aleatórios para a classificação simples.

Se definimos $T(X) = \frac{\hat{\lambda}}{f} = f^{-1} \alpha \sqrt{QM_E}$, é fácil observar que $T(X)$ é um estimador não-viciado de λ que depende da estatística suficiente QM_E . Logo, pelo

Teorema de Lehmann-Scheffé, $T(X)$ é um estimador de variância mínima na classe dos estimadores não-viciados do coeficiente de repetibilidade λ . ▼

Observação 3: O fator f coincide com a constante

$$c_4(n) = \frac{1}{((n-1)/2)^{1/2}} \times \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$$

utilizada na construção dos gráficos de controle para o desvio-padrão s , no caso especial em que temos somente um laboratório, isto é, para $p = 1$.

Os momentos do estimador do coeficiente de reprodutibilidade podem ser obtidos utilizando a função de densidade conjunta dos estimadores $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$ via a distribuição marginal de $\hat{\Lambda}$. No entanto, esse caminho não será seguido aqui, pois o estimador do parâmetro Λ está definido como a raiz quadrada de uma combinação linear de variáveis aleatórias independentes com distribuições qui-quadrado, o que produz uma densidade marginal relativamente intratável. Por esse motivo, esses momentos serão deduzidos a partir dos momentos conjuntos do vetor $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$, obtidos através da densidade condicional, utilizando como pivô o estimador $\hat{\lambda}$.

Assim, seguiremos os seguintes passos.

- Para a_1, a_2 e a_3 reais positivos e X e Y variáveis qui-quadrado centrais, calcularemos a função de densidade do vetor (U, V) , com $U = a_1 X$ e $V = a_2 X + a_3 Y$.
- Depois serão obtidos a função de densidade condicional de V dado $U = u$ e os momentos condicionais de ordem real t da variável V .

- Finalmente, calcularemos os momentos conjuntos $E(U^s V^t)$ para s e t reais não-negativos, que permitirão obter os momentos conjuntos do vetor $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) = (\sqrt{U}, \sqrt{V})$ para uma seleção adequada das constantes a_1, a_2 e a_3 .

Os resultados são apresentados a seguir.

Lema 8: Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim \chi^2(p(n-1))$ e $Y \sim \chi^2(p-1)$ e a_1, a_2 e a_3 são constantes reais positivas, então a função de densidade conjunta do vetor $(U, V) = (a_1 X, a_2 X + a_3 Y)$ é

$$f_{(U, V)}(u, v) = \frac{1}{a_1 a_3} f_X\left(\frac{u}{a_1}\right) f_Y\left(\frac{a_1 v - a_2 u}{a_1 a_3}\right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(a_2 u / a_1, \infty)}(v)$$

Prova:

A transformação linear $(U, V) = (a_1 X, a_2 X + a_3 Y)$ possui matriz de Jacobi $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

de determinante positivo e o Teorema de Transformação fornece a densidade

$$f_{(U, V)}(u, v) = \frac{1}{a_1 a_3} f_X\left(\frac{u}{a_1}\right) f_Y\left(\frac{a_1 v - a_2 u}{a_1 a_3}\right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(a_2 u / a_1, \infty)}(v) \quad \blacktriangledown$$

Observe que o suporte do vetor bivariado (U, V) é o cone aberto $\mathcal{C}(a_2 / a_1)$.

O lema seguinte exhibe a densidade condicional da variável aleatória $V = a_2 X + a_3 Y$ dado $U = u$.

Lema 9: Nas condições do Lema 8, a distribuição condicional de V dado $U = u$,

$u > 0$, é $G\left[\frac{p-1}{2}, \frac{1}{2a_3}, \frac{a_2u}{a_1}\right]$ cuja função de densidade é

$$f_{V|U=u}(v) = \frac{\left(v - \frac{a_2u}{a_1}\right)^{(p-3)/2} e^{-\frac{1}{2a_3}\left(v - \frac{a_2u}{a_1}\right)}}{\Gamma((p-1)/2)(2a_3)^{(p-1)/2}} \mathbf{1}_{(a_2u/a_1, \infty)}(v).$$

Prova :

A distribuição condicional de $V = a_2X + a_3Y$, dado $U = a_1X = u$ coincide com a distribuição de $a_3Y + w$, onde $w = a_2u/a_1$. Assim, essa distribuição condicional é

uma gama deslocada com parâmetros de forma $\frac{(p-1)}{2}$, de escala $\frac{1}{2a_3}$ e de

posição $w = \frac{a_2u}{a_1}$. ▼

Os momentos procurados podem ser agora obtidos utilizando as funções especiais apresentadas no Anexo A. Particularmente, os momentos serão expressos com ajuda dos dois resultados seguintes, relativos à função de Whittaker e aplicáveis em nosso caso, como demonstrado a seguir.

Resultado 1: Se γ e μ são parâmetros complexos, e se z é uma variável complexa cujo domínio exclui os reais não-positivos, então a função de Whittaker $W_{\gamma, \mu}(z)$, definida no Anexo A, admite a representação integral

$$W_{\gamma, \mu}(z) = \frac{z^{\mu+(1/2)} e^{-z/2}}{\Gamma(\mu - \gamma + (1/2))} \int_0^{\infty} e^{-zw} w^{\mu-\gamma-(1/2)} (1+w)^{\mu+\gamma-(1/2)} dw \quad (3.7)$$

Resultado 2: Se α , μ , r e q satisfazem as relações $Re[\alpha \pm \mu] > -3/2$, $Re[r] > -\frac{q}{2}$, $q > 0$, onde $Re[z]$ denota a parte real de um número complexo z , então é válida a relação

$$\int_0^{\infty} e^{-rz} z^{\alpha} W_{\gamma, \mu}(qz) dz = \frac{\Gamma(\alpha + \mu + (3/2)) \Gamma(\alpha - \mu + (3/2)) q^{\mu+1/2}}{\Gamma(\alpha - \gamma + 2)} \times$$

$$\times (r + (q/2))^{-(\alpha + \mu + (3/2))} \quad (3.8)$$

$$\times {}_2F_1\left[\alpha + \mu + (3/2), \mu - \gamma + (1/2); \alpha - \gamma + 2; \frac{2r - q}{2r + q}\right],$$

onde ${}_2F_1(\cdot)$ denota a função hipergeométrica de Gauss definida no Anexo A.

O Resultado 1 é consequência da definição da função de Whittaker. Veja § 7.4 em Magnus et al. (1966) e a fórmula 9.222 de Gradshteyn & Ryzhik (1965). O Resultado 2 está demonstrado na página 311 de Magnus et al. (1966) e detalhado como fórmula 7.62.3 em Gradshteyn & Ryzhik (1965).

Lema 10: Nas condições do Lema 8, se t é um número real positivo, o momento condicional de ordem t de V , dado $U = u$, é

$$E(V^t | U = u) = (2a_3)^t q^{t/2 + (p-3)/2} u^{t/2 + (p-3)/4} e^{qu/2} W_{\bar{\gamma}, \bar{\mu}}(qu). \quad (3.9)$$

onde $q = \frac{a_2}{2a_1a_3}$ e $W_{\bar{\gamma}, \bar{\mu}}(\cdot)$ é a função de Whittaker de parâmetros

$$\bar{\mu} = \frac{t}{2} + \frac{p-1}{4}; \quad \bar{\gamma} = \frac{t}{2} - \frac{p-1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Prova:

Utilizando a definição de esperança condicional e o Lema 8, temos

$$E(V^t | U = u) = \int_{a_2 u / a_1}^{\infty} v^t f_V | U = u(v) dv =$$

$$= A \int_{a_2 u / a_1}^{\infty} v^t e^{-\frac{1}{2a_3}(v - a_2 u / a_1)} (v - (a_2 u / a_1))^{((p-1)/2 - 1)} dv$$

onde $A = \left[\Gamma((p-1)/2) (2a_3)^{(p-1)/2} \right]^{-1}$. Mediante a substituição $y = (a_1 v / a_2 u) - 1$,

obtemos

$$E(V^t | U = u) = A \times \left(\frac{a_2 u}{a_1} \right)^{t + ((p-1)/2)} \int_0^{\infty} (1+y)^t y^{((p-1)/2 - 1)} e^{-(a_2 u / 2a_1 a_3)y} dy$$

A integral da expressão anterior pode ser expressa em termos da função de Whittaker, utilizando o Resultado 1, onde $\bar{\mu} = \frac{t}{2} + \frac{p-1}{4}$ e $\bar{\gamma} = \frac{t}{2} - \frac{p-1}{4} + \frac{1}{2}$.

Assim, obtemos para $E(V^t | U = u)$ a expressão

$$\frac{A \times (a_2 / a_1)^{t + (p-1)/2} \Gamma(\bar{\mu} - \bar{\gamma} + (1/2)) (u)^{t + (p-1)/2}}{(a_2 u / 2a_1 a_3)^{\bar{\mu} + 1/2} e^{-(a_2 u / 2a_1 a_3) / 2} W_{\bar{\gamma}, \bar{\mu}}(a_2 u / 2a_1 a_3)}.$$

E substituindo A , $\bar{\mu}$ e $\bar{\gamma}$ pelos seus valores chega-se à (3.9). ▼

Na demonstração do seguinte Teorema utilizaremos o resultado a seguir, que pode ser encontrado no texto de Rohatgi (1976), pp. 169-170.

Resultado 3: Se X é uma variável aleatória, e h é mensurável de \mathfrak{R} em \mathfrak{R} com $E(h(X)) < \infty$, então $E(h(X)) = E[E(h(X)|Y)]$.

Teorema 3: Se X e Y são variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim \chi^2(p(n-1))$ e $Y \sim \chi^2(p-1)$, se a_1, a_2 e a_3 são constantes positivas e $U = a_1X$ e $V = a_2X + a_3Y$, então

$$E(U^s V^t) = \frac{(a_2/a_3)^{(p-1)/2}}{\Gamma(p(n-1)/2)} \frac{2^{s+t} \Gamma(s+t+((pn-1)/2)) \Gamma(s+(p(n-1)/2))}{\Gamma(s+((pn-1)/2))} a_1^s a_2^t \times$$

$$\times {}_2F_1(s+t+((pn-1)/2), (p-1)/2; s+((pn-1)/2); 1-(a_2/a_3)) \quad (3.10)$$

Prova:

A variável aleatória U tem distribuição $G\left(\frac{p(n-1)}{2}, \frac{1}{2a_1}\right)$. Pelo Resultado 3, temos

$$E(U^s V^t) = E\left[U^s E(V^t|U)\right] = \int_0^\infty u^s E(V^t|U=u) f_U(u) du =$$

$$= D(a_1, a_2, a_3; t) \int_0^\infty u^{s+t/2+(p-3)/4+(p(n-1)/2)-1} e^{-u\left[\frac{1}{2a_1} - \frac{q}{2}\right]} W_{\gamma, \mu}^-(qu) du$$

em que

$$D(a_1, a_2, a_3; t) = \left[\Gamma(p(n-1)/2)(2a_1)^{p(n-1)/2}\right]^{-1} \times (2a_3)^t \times q^{t/2+(p-3)/4}$$

onde $q = a_2 / 2a_1a_3$.

Se $\delta = s + t / 2 + (p - 3) / 4 + p(n - 1) / 2 - 1$, $r = \left(\frac{1}{2a_1} - \frac{q}{2} \right) > 0$ e $q = \frac{a_2}{2a_1a_3}$ resulta

$$E(U^s V^t) = D(a_1, a_2, a_3; t) \times \int_0^\infty u^\delta e^{-ru} W_{\bar{\gamma}, \bar{\mu}}(qu) du .$$

Como as condições $\delta \pm \mu + 3/2 > 0$, $r > -q/2$ e $q > 0$ são verificadas para todo $s \geq 0$, $t \geq 0$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$, o Resultado 2 é aplicável, obtendo-se a fórmula (3.10). ▼

Notação: Denotaremos os momentos conjuntos de ordem s e t das variáveis U e V da seguinte forma

$$E(U^s V^t) = \varphi(a_1, a_2, a_3; s, t) .$$

No caso da fórmula acima resulta

$$E(U^s V^t) = \varphi\left(\frac{a^2 \sigma^2}{(n-1)p}, \frac{a^2 \sigma^2}{np}, \frac{a^2 \tau^2}{n(p-1)}; s, t\right) \quad (3.11)$$

O resultado do Teorema anterior permite reobter as expressões exibidas no seguinte Quadro e que podem ser diretamente calculadas utilizando os momentos da distribuição qui-quadrado.

QUADRO 3.1 : Momentos simples de ordem (s,t) obtidos com base na distribuição qui-quadrado.

Parâmetros	$E(U^s V^t)$
$s = 0, t = 0$	1
$s = 1, t = 0$	$a_1 p(n-1)$
$s = 2, t = 0$	$a_1^2 p(n-1)[2 + p(n-1)]$
$s = 0, t = 1$	$a_1 p(n-1) + a_2(p-1)$
$s = 0, t = 2$	$a_2^2 p(n-1)[2 + p(n-1)] + a_3^2 [2 + (p-1)] + a_2 a_3 p(n-1)(p-1)$

Mostraremos na continuação que, por exemplo, nos três primeiros casos as fórmulas apresentadas no Quadro 3.1 são equivalentes à expressão (3.10), para o que é suficiente provar o seguinte resultado.

Resultado 4 : A função hipergeométrica verifica a identidade

$${}_2F_1(a, b; a; 1-z) = z^{-b}$$

Prova:

Baseado no Binômio de Newton

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)} \frac{x^k}{k!} \quad \text{para } -1 < x < 1 \text{ e } m \text{ real}$$

E considerando $1-x=z$ e $m=-b$ em que $z=\frac{1}{1+m\kappa}$ e $\kappa=\frac{\sigma_L^2}{\sigma^2}$, verifica-se que $0 < 1-z < 1$ e portanto

$$z^{-b} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b+k-1}{k} (1-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)} \frac{(1-z)^k}{k!} = {}_2F_1(a, b; a; 1-z). \quad \nabla$$

Utilizando o Teorema 3 é possível achar os momentos do estimador $\hat{\Lambda}$, o momento conjunto $E(\hat{\lambda}\hat{\Lambda})$ e o coeficiente de correlação entre os estimadores $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$. Outras características básicas da distribuição conjunta de $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ tais como esperanças, variâncias, vícios, erros quadráticos médios e correlações, podem ser obtidas utilizando o seguinte resultado.

Corolário 3: Os momentos de primeira e segunda ordem do estimador PME do parâmetro Λ são

i)

$$E(\hat{\Lambda}) = \lambda \sqrt{\frac{2}{pn}} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(1/2 + (pn-1)/2)}{\Gamma(pn-1/2)} \times {}_2F_1\left(1/2 + (pn-1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\mu\kappa}{p(1+m\kappa)}\right) \quad (3.12)$$

ii)

$$E(\hat{\Lambda}^2) = \lambda^2 \frac{pn-1}{np} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \times {}_2F_1\left(1 + (pn-1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\mu\kappa}{p(1+m\kappa)}\right) \quad (3.13)$$

Prova:

É suficiente observar que a $E(\hat{\Lambda}) = \varphi(a_1, a_2, a_3; 0, 1/2)$ e $E(\hat{\Lambda}^2) = \varphi(a_1, a_2, a_3; 0, 1)$

onde $a_1 = \frac{a^2 \sigma^2}{(n-1)p}$, $a_2 = \frac{a^2 \sigma^2}{np}$ e $a_3 = \frac{a^2 \sigma^2}{n(p-1)}$, aplicando as fórmulas (3.10) e (3.11). ▼

Corolário 4: O momento conjunto $E(\hat{\lambda}\hat{\Lambda})$ dos estimadores PME dos parâmetros λ e Λ é

$$E(\hat{\lambda}\hat{\Lambda}) = \frac{(pn-1) \Gamma((pn-1)/2) \times \Gamma(p(n)/2)}{\Gamma(p(n-1)/2) \times \Gamma(1/2 + (pn-1)/2)} \frac{a^2 \sigma^2}{p\sqrt{n(n-1)}} \left(\frac{p-1}{p(1+n\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left[1 + (pn-1)/2, (p-1)/2; 1/2 + (pn-1)/2; \left(\frac{1+n\kappa}{p(1+n\kappa)} \right) \right] \quad (3.14)$$

Prova:

É suficiente selecionar o valor (1/2, 1/2) do par (s,t) na expressão (3.11). ▼

3.2.4. Vício e Erro Quadrático Médio dos Estimadores PME

Os resultados da seção 3.2.3 permitem também o cálculo explícito de duas importantes características dos estimadores PME $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$, segundo a seguinte definição.

Definição 8: Se $\hat{\theta}$ é um estimador do parâmetro θ , seu vício é dado por $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ e seu erro quadrático médio é $EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$.

Expressões explícitas do erro quadrático médio e do vício para os estimadores de momentos $\hat{\lambda}$ e $\hat{\Lambda}$ são apresentadas no seguinte resultado.

Corolário 5: Vícios e erros quadráticos médios dos estimadores PME são dados pelas expressões

$$(i) \quad b(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda}) - \lambda = f\lambda - \lambda = (f - 1)\lambda.$$

$$(ii) \quad EQM(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda} - \lambda)^2 = E(\hat{\lambda}^2) - 2\lambda E(\hat{\lambda}) + \lambda^2 = 2(1 - f)\lambda^2.$$

$$(iii) \quad Var(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda}^2) - (E(\hat{\lambda}))^2 = (1 - f^2)\lambda^2.$$

$$(iv) \quad b(\hat{\Lambda}) = E(\hat{\Lambda}) - \Lambda = a\sigma f' - a\sigma\sqrt{1 + \kappa} = a\sigma(f' - \sqrt{1 + \kappa})$$

$$(v) \quad EQM(\hat{\Lambda}) = E(\hat{\Lambda} - \Lambda)^2 = E(\hat{\Lambda}^2) - 2\Lambda E(\hat{\Lambda}) + \Lambda^2 = a^2\sigma^2(f'' - 2f'\sqrt{1 + \kappa} + (1 + \kappa))$$

$$(vi) \quad Var(\hat{\Lambda}) = E(\hat{\Lambda}^2) - (E(\hat{\Lambda}))^2 = a^2\sigma^2(f'' - f'^2),$$

onde f é o fator de correção do Corolário 1,

$$f' = \frac{\Gamma(pn/2)}{[(pn-1)/2]^{1/2}} \sqrt{2/np} \left(\frac{p-1}{p(1+n\kappa)}\right)^{(p-1)/2} {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\kappa}{p(1+n\kappa)}\right)$$

e

$$f'' = \frac{pn-1}{np} \left(\frac{p-1}{p(1+n\kappa)}\right)^{(p-1)/2} {}_2F_1\left(1 + (pn-1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\kappa}{p(1+n\kappa)}\right)$$

Observação 4: O coeficiente de correlação os dois estimadores PME pode ser obtido mediante as fórmulas

$$Cov(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) = E(\hat{\lambda}\hat{\Lambda}) - E(\hat{\lambda})E(\hat{\Lambda}) \quad \text{e} \quad \rho(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) = \frac{Cov(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})}{\sqrt{Var(\hat{\lambda})Var(\hat{\Lambda})}}.$$

O Teorema 3 permite o cálculo explícito de ambas quantidades.

As definições e resultados obtidos neste Capítulo fornecem uma base sobre a qual poderão ser obtidas fórmulas para os estimadores restritos dos parâmetros λ e Λ . Os mesmos serão construídos incorporando restrições de não-negatividade em seus valores realizados (estimadores truncados), ou no espaço paramétrico (estimadores baseados na maximização das funções de verossimilhança completa ou residual). As distribuições conjuntas exatas desses estimadores, seus momentos, vícios e erros quadráticos médios serão calculados no próximo Capítulo.

CAPÍTULO IV

Estimadores Restritos de λ e Λ

4.1. Introdução

Neste Capítulo serão considerados os estimadores restritos dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade. Os mesmos surgem ao estimar os componentes de variância mediante funções que atendem à condição de assumir valores não- negativos. Três estimadores com essas características serão estudados:

- o estimador truncado, obtido quando restrições de não-negatividade são impostas aos valores realizados do estimador de momentos e
- os estimadores de máxima verossimilhança completa e residual, que incorporam restrições pertencentes ao espaço paramétrico.

Em primeiro lugar serão definidos os estimadores e obtidas suas distribuições exatas. Seguidamente serão calculados os momentos e determinados o vício e o erro quadrático médio de cada estimador.

Finalmente apresentaremos dois quadros-resumo, indicando os estimadores estudados e suas distribuições exatas.

4.2. Estimadores de Substituição Truncados

4.2.1. Definições

Definição 1: Quando os componentes de variância σ^2 e σ_L^2 são estimados truncando as estimativas obtidas mediante o método dos momentos, os estimadores de substituição dos coeficientes $\lambda = a\sqrt{\sigma^2}$ e $\Lambda = a\sqrt{\sigma^2 + \sigma_L^2}$ serão denominados estimadores de substituição truncados (plug-in truncated estimators ou PTE).

No seguinte Lema expressamos esses estimadores em função dos quadrados médios e da constante a definida no Lema 1 do Capítulo III.

Lema 1: Os estimadores PTE são

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}\right) = \left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)QM_E + QM_L}\right)$$

quando $QM_L > QM_E$

e

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}\right) = \left(a\sqrt{QM_E}, a\sqrt{QM_E}\right)$$

quando $QM_L \leq QM_E$

Prova:

É suficiente utilizar as fórmulas apresentadas no Capítulo II para os estimadores de $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}_L^2$ e a relação $\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$. ▼

A probabilidade do evento $\hat{\lambda} = \hat{\Lambda}$ coincide com a probabilidade de truncamento do estimador $\hat{\sigma}_L^2$, calculada no seguinte resultado.

Lema 2: Sob as condições (3.2) do Lema 2 do Capítulo III, a probabilidade de truncamento do estimador $\hat{\sigma}_L^2$ é

$$\gamma_1 = P\left(U \leq \frac{1}{1+m\kappa}\right) \quad (4.1)$$

onde $\kappa = \frac{\sigma_L^2}{\sigma^2}$ e U designa uma variável aleatória com distribuição F central de Fisher-Snedecor com $(p-1)$ graus de liberdade no numerador e $p(n-1)$ no denominador.

Prova:

O estimador $\hat{\sigma}_L^2$ é nulo quando $QM_L \leq QM_E$. A probabilidade desse evento é

$$\gamma_1 = P(QM_L \leq QM_E) = P\left(\frac{QM_L / (\sigma^2 + n\sigma_L^2)}{QM_E / \sigma^2} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n\sigma_L^2}\right) = P\left(U \leq \frac{1}{1+m\kappa}\right)$$

com $\kappa = \sigma_L^2 / \sigma^2$. ▼

Lema 3: Os estimadores PTE dos parâmetros λ e Λ têm a forma

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}\right) = \left(b_1 \sqrt{X}, b_2 \sqrt{X + \frac{p}{p-1}(1+m\kappa)Y}\right) \quad \text{se } Y > \mu_1 X$$

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}\right) = \left(b_1 \sqrt{X}, b_1 \sqrt{X}\right) \quad \text{se } Y \leq \mu_1 X$$

onde as variáveis X e Y são independentes e possuem distribuições qui-quadrado centrais com $p(n-1)$ e $(p-1)$ graus de liberdade respectivamente e as constantes

b_1 , b_2 e μ_1 assumem os valores $b_1 = \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{p(n-1)}}$, $b_2 = \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{pn}}$ e $\mu_1 = \frac{p-1}{p(n-1)(1+m\kappa)}$,

respectivamente.

Prova:

Com base nas condições (3.2) do Lema 2 do Capítulo III pode-se determinar a equivalência entre os eventos $QM_L \leq QM_E$ e $Y \leq \mu_1 X$ e também as expressões dos estimadores acima. ▼

4.2.2 Distribuição Exata do Estimador PTE

Para calcular a distribuição exata do estimador $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ utilizaremos o Lema anterior. Assim, o evento $QM_L \leq QM_E$ de truncamento determina a forma da distribuição exata como combinação convexa de uma distribuição absolutamente contínua com respeito à medida plana de Lebesgue e uma distribuição singular concentrada em uma semi-reta do plano.

O seguinte resultado, de prova análoga ao Lema 6 do Capítulo III, fornece a distribuição do vetor $(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2)$ sob a condição $QM_L > QM_E$.

Lema 4: Se o evento $QM_L > QM_E$ é realizado, o vetor aleatório $(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2)$

possui uma distribuição gama-Stacy de parâmetros $\alpha_1 = \frac{p(n-1)}{2}$, $\theta_1 = \frac{p(n-1)}{2\alpha^2\sigma^2}$,

$$\alpha_2 = \frac{p-1}{2} \text{ e } \theta_2 = \frac{(n-1)(p-1)}{2\alpha^2\tau^2}.$$

Pode-se observar que as distribuições dos vetores $\left(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2\right)$ e $\left(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2\right)$ coincidem sob a condição $QM_L > QM_E$.

Lema 5: Se o evento $QM_L > QM_E$ é realizado, a distribuição conjunta dos estimadores PTE é absolutamente contínua com densidade de probabilidade

$$f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(u, v) = \frac{4muv}{n-1} f_{GS}\left(u^2, \frac{n}{n-1} v^2, \frac{p(n-1)}{2}, \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}, \frac{p-1}{2}, \frac{(p-1)(n-1)}{2a^2\tau^2}\right) \quad (4.2)$$

onde $f_{GS}(w, z; \alpha_1, \theta_1, \alpha_2, \theta_2)$ é a densidade de probabilidade da distribuição gama-Stacy com parâmetros $\alpha_1, \theta_1, \alpha_2$ e θ_2 . Nesse caso, o suporte da distribuição é o cone aberto $\mathbf{C}(c) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : 0 < cu < v\}$, com $c = \sqrt{(n-1)/n}$.

Prova:

Conforme o Lema 3, quando $QM_L > QM_E$, os estimadores PTE coincidem com os estimadores PME de λ e Λ . Assim, o Teorema 1 do Capítulo III fornece o resultado procurado. ▼

A distribuição correspondente ao componente singular é dada no seguinte corolário.

Corolário 1: A função de distribuição do estimador $\left(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}\right)$ dado o evento $QM_L \leq QM_E$ é dada por

$$F_1(u, v) = \left[\begin{array}{c} g_1(u, v) \\ \int_0^g \psi(x) dx \\ 0 \end{array} \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(v) \quad (4.3)$$

onde $\psi(x)$ é a função de densidade de uma variável qui-quadrado central com $p(n-1)$ graus de liberdade, $g_1(u, v) = \frac{p(n-1)}{a^2 \sigma^2} g(u, v)$ e $g(u, v) = \min(u^2, v^2)$.

Prova:

A função de distribuição é

$$F_1(u, v) = P(\hat{\lambda} \leq u, \hat{\Lambda} \leq v | QM_L \leq QM_E) = P(b_1 \sqrt{X} \leq u) \cap P(b_1 \sqrt{X} \leq v) = P(b_1 \sqrt{X} \leq \min(u, v)) = P(X \leq \min^2(u, v) / b_1^2) = P(X \leq g(u, v) / b_1^2)$$

sendo $g(u, v) = \min(u^2, v^2)$ desde que $(\min(u, v))^2 = \min(u^2, v^2)$ para $u > 0$ e $v > 0$

$$\text{e } b_1^2 = \frac{a^2 \sigma^2}{p(n-1)}. \blacktriangledown$$

Corolário 2: A função de distribuição do estimador $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ condicionada dado o evento $QM_L > QM_E$ é dada por

$$F_2(u, v) = \left[\begin{array}{c} g_2(u, v) \\ \int_0^v \int_{cx} f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(x, y) dy dx \\ 0 \end{array} \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(v) \quad (4.4)$$

onde $f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(x, y)$ é a função de densidade dada em (4.2), $g_2(u, v) = \min(u, v/c)$ e $c = \sqrt{(n-1)/n}$.

Prova:

Pelo Lema 5 a função de distribuição é igual a

$$F_2(u, v) = P\left(\hat{\lambda} \leq u, \hat{\Lambda} \leq v \mid QM_L > QM_E\right) = \iint_{R(u, v)} f_{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(x, y) dx dy$$

para $u > 0$ e $v > 0$, onde $R(u, v)$ é o trapézio $\{(x, y): 0 < x < u, cx < y < v\}$ quando $(u, v) \in \mathbb{C}(c)$ ou o triângulo $\{(x, y): 0 < x < \frac{v}{c}, cx < y < v\}$ quando $(u, v) \notin \mathbb{C}(c)$. ▼

O Lema 2 e os Corolários acima permitem agora a descrição completa da distribuição exata do estimador truncado.

Teorema 1: A função de distribuição do estimador truncado $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$ é a mistura

$$F = \gamma_1 F_1 + (1 - \gamma_1) F_2 \quad (4.5)$$

onde F_1 é a função de distribuição singular do Corolário 1, F_2 é a função de distribuição absolutamente contínua do Corolário 2, e γ_1 é a constante do Lema 2.

Prova:

É suficiente considerar o evento $B = \{QM_L \leq QM_E\}$ de probabilidade γ_1 e aplicar o Teorema das Probabilidades Totais à distribuição $P^{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}$ do vetor bivariado $(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$.

Se C é um boreliano arbitrário do plano, resulta

$$\begin{aligned} P^{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(C) &= P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in C\right] = P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in B \cap C\right] + P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in B^C \cap C\right] = \\ &= P^{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(B) P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in C \mid B\right] + P^{\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}}(B^C) P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in C \mid B^C\right] = \\ &= \gamma_1 P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in C \mid B\right] + (1 - \gamma_1) P\left[(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in C \mid B^C\right] \end{aligned}$$

que produz (4.5) quando C é um quadrante $(-\infty, u] \times (-\infty, v]$. ▽

Nas duas seções seguintes discutiremos as distribuições exatas de outros estimadores restritos.

4.3. Estimadores de Substituição de Máxima Verossimilhança

Começaremos por definir os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade.

Definição 2: Quando os componentes de variância σ^2 e σ_L^2 são estimados utilizando o método da máxima verossimilhança, os estimadores de substituição do coeficiente de repetibilidade λ e de reprodutibilidade Λ serão denominados estimadores de substituição de máxima verossimilhança (plug-in maximum likelihood estimators ou PMLE).

Lema 6: Os estimadores PMLE são

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}) = \left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{np}} \sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$$

quando $QM_L > \frac{p}{p-1} QM_E$

e

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}) = \left(\frac{a}{\sqrt{np}} \sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L}, \frac{a}{\sqrt{np}} \sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$$

quando $QM_L \leq \frac{p}{p-1} QM_E$

Prova:

É suficiente utilizar a forma explícita dos estimadores de máxima verossimilhança dos componentes de variância cujas expressões foram apresentadas no Capítulo II e as relações

$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2} \quad \text{e} \quad \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad (4.6)$$

para obter as fórmulas dadas acima. ▼

Observação 1: Como já foi observado os estimadores PMLE dos coeficientes λ e Λ são funções dos estimadores MLE definidos no Capítulo II. Considere-se a função $g(x, y) = (a\sqrt{x}, a\sqrt{x+y})$ que aplica o espaço paramétrico $\left\{(\sigma^2, \sigma_L^2): 0 < \sigma^2 \leq \sigma^2 + \sigma_L^2\right\}$ no cone $\{(\lambda, \Lambda): 0 < \lambda \leq \Lambda\}$ de forma bijetiva. Nesse caso é possível aplicar o Teorema de Invariância para estimadores de máxima verossimilhança (Zehna 1966) e, portanto, os estimadores PMLE dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade são estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros λ e Λ .

Neste caso, a probabilidade do evento $\tilde{\lambda} = \tilde{\Lambda}$ coincide com a probabilidade do evento $(1 - p^{-1})QM_L - QM_E \leq 0$, a qual é determinada no seguinte resultado.

Lema 7: Sob as condições (3.2) do Lema 2 do Capítulo III, a probabilidade do evento $\tilde{\lambda} = \tilde{\Lambda}$ é

$$\gamma_2 = P\left(U \leq \frac{p}{(p-1)(1+m\kappa)}\right), \quad (4.7)$$

onde κ e U são definidos como no Lema 2.

Observação 2: A probabilidade γ_1 do Lema 2 e a probabilidade γ_2 do Lema 7 verificam a relação $\gamma_1 \leq \gamma_2$.



Lema 8: Utilizando a notação do Lema 2 do Capítulo III, o evento

$QM_L \leq \frac{p}{p-1} QM_E$ que produz a degeneração dos PMLE é equivalente a $Y \leq \mu_2 X$,

onde $\mu_2 = \frac{1}{(n-1)(1+m\kappa)}$.

Prova :

É imediata, utilizando as relações $(p-1)QM_L = \tau^2 Y$ e $p(n-1)QM_E = \sigma^2 X$. ▼

Lema 9: Os estimadores PMLE dos parâmetros λ e Λ assumem a forma

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}) = (b_1 \sqrt{X}, b_2 \sqrt{X + (1+m\kappa)Y}) \quad \text{se } Y > \mu_2 X$$

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}) = (b_2 \sqrt{X + (1+m\kappa)Y}, b_2 \sqrt{X + (1+m\kappa)Y}) \quad \text{se } Y \leq \mu_2 X,$$

onde as variáveis aleatórias X e Y são independentes e possuem distribuições qui-quadrado centrais com $p(n-1)$ e $(p-1)$ graus de liberdade, respectivamente; as

constantes são, neste caso, $b_1 = \frac{a\sigma}{\sqrt{p(n-1)}}$, $b_2 = \frac{a\sigma}{\sqrt{pn}}$ e $\mu_2 = \frac{1}{(n-1)(1+m\kappa)}$.

4.3.1 Distribuição Exata dos Estimadores PMLE

Como no caso dos estimadores PTE, a distribuição exata dos estimadores PMLE será uma mistura de duas distribuições, uma singular e outra absolutamente contínua. Nesta seção determinaremos esses componentes.



O seguinte Lema pode ser provado de forma análoga ao Lema 4, no entanto, o Lema 11 é obtido em forma análoga ao Teorema 1 do Capítulo III.

Lema 10: Se o evento $QM_L > \frac{p}{p-1} QM_E$ é realizado, o vetor aleatório

$\left(\tilde{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \tilde{\Lambda}^2 \right)$ possui distribuição gama-Stacy com parâmetros $\alpha_1 = \frac{p(n-1)}{2}$,

$$\theta_1 = \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}, \alpha_2 = \frac{p-1}{2}, \theta_2 = \frac{n(p-1)}{2a^2\tau^2}.$$

Observação 3: Note que a diferença entre as distribuições dos vetores

$\left(\tilde{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \tilde{\Lambda}^2 \right)$ e $\left(\hat{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \hat{\Lambda}^2 \right)$ está localizada somente no parâmetro secundário de escala denotado por θ_2 .

Lema 11: Se o evento $QM_L > \frac{p}{p-1} QM_E$ é realizado, a distribuição conjunta dos estimadores PMLE é absolutamente contínua com densidade de probabilidade

$$f_{\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}}(u, v) = \frac{4muv}{n-1} f_{GS} \left(u^2, \frac{n}{n-1} v^2, \frac{p(n-1)}{2}, \frac{p(n-1)}{2a^2\sigma^2}, \frac{p-1}{2}, \frac{p(n-1)}{2a^2\tau^2} \right) \quad (4.8)$$

cujo suporte é o cone aberto $\mathbb{C}(c) = \{(\mu, v) \in \mathbb{R}^2: 0 < cu < v\}$, onde $c = \sqrt{(n-1)/n}$.

Corolário 3: A função de distribuição do estimador $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$ condicional dado o evento

$QM_L \leq \frac{p}{p-1} QM_E$ é dada por



$$G_1(u, v) = \left[\begin{array}{c} g_3(u, v) \\ \int_0^{\cdot} f(z) dz \\ 0 \end{array} \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u, v) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u, v) \quad (4.9)$$

com $g_3(u, v) = \frac{pn}{a^2 \sigma^2} g(u, v)$, onde a função g foi definida no Corolário 1 e $f(\cdot)$ é a densidade da variável aleatória $(X + (1 + m\kappa)Y)$, com X e Y variáveis independentes, tais que $X \sim \chi^2(p(n-1))$ e $Y \sim \chi^2(p-1)$.

Prova:

A função de distribuição é

$$\begin{aligned} G_1(u, v) &= P(\tilde{\lambda} \leq u, \tilde{\Lambda} \leq v | (p-1)QM_L \leq pQM_E) = P(b_2 \sqrt{Z} \leq u, \cdot b_2 \sqrt{Z} \leq v) = \\ &= P((b_2 \sqrt{Z} \leq u) \cap (b_2 \sqrt{Z} \leq v)) = P(b_2 \sqrt{Z} \leq \min(u, v)) = P\left(\sqrt{Z} \leq \frac{\min(u, v)}{b_2}\right) = \\ &= P\left(\sqrt{(X + (1 + m\kappa)Y)} \leq \frac{\min(u, v)}{b_2}\right) = P\left(X + (1 + m\kappa)Y \leq \frac{\min^2(u, v)}{b_2^2}\right) \end{aligned}$$

para $Z = (X + (1 + m\kappa)Y)$ e $b_2 = \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{np}}$. ▼

O resultado seguinte exhibe a função de distribuição correspondente ao evento complementar e pode ser provado de forma análoga ao Corolário 2.

Corolário 4: A função de distribuição do estimador $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$ condicionada dado o

evento $QM_L > \frac{p}{(p-1)} QM_E$ é dada por



$$G_2(u, v) = \left[\begin{array}{c} g_2(u, v) v \\ \int_0^v \int_{cx} f_{\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}}(x, y) dy dx \end{array} \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(v) \quad (4.10)$$

onde $f_{\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}}(x, y)$ é a função de densidade (4.8), $g_2(u, v) = \min(u, v/c)$ e $c = \sqrt{(n-1)/n}$.

O Lema 6 e os Corolários precedentes permitem a descrição completa da distribuição do estimador de máxima verossimilhança.

Teorema 2: A função de distribuição do estimador de máxima verossimilhança completa é a mistura

$$G = \gamma_2 G_1 + (1 - \gamma_2) G_2 \quad (4.11)$$

onde G_1 é a função de distribuição correspondente ao componente singular do Corolário 3, G_2 é a função de distribuição correspondente ao componente absolutamente contínuo do Corolário 4 e γ_2 é a constante do Lema 7.

4.4. Estimadores de Substituição de Máxima Verossimilhança Residual

A definição dos últimos estimadores considerados figura a seguir.

Definição 3: Quando os componentes de variância σ^2 e σ_L^2 são estimados pelos seus respectivos estimadores de máxima verossimilhança residual, os estimadores de substituição dos coeficientes de repetibilidade λ e de reprodutibilidade Λ serão

denominados estimadores de substituição de máxima verossimilhança residual (plug-in residual maximum likelihood estimators ou PREMLE).

Lema 12: Os estimadores PREMLE são

$$\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda} \right) = \left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{np-1}} \sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$$

quando $QM_L > QM_E$

e

$$\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda} \right) = \left(\frac{a}{\sqrt{np-1}} \sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L}, \frac{a}{\sqrt{np-1}} \sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$$

quando $QM_L \leq QM_E$

Prova:

É suficiente utilizar a forma explícita dos estimadores de máxima verossimilhança residual dos componentes de variância fornecida no Capítulo II e as relações (4.6) para obter os estimadores. ▼

Observação 4: Pode-se notar que a probabilidade de truncamento do estimador $\tilde{\sigma}_L^2$ coincide com a correspondente probabilidade γ_1 do estimador PTE.

Utilizando as condições (3.2) do Lema 2 do Capítulo III é possível obter uma outra expressão para os estimadores PREMLE.

Lema 13: Os estimadores PREMLE têm a forma

$$\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}\right) = \left(b_1 \sqrt{X}, b_3 \sqrt{X + (1 + m\kappa)Y}\right) \quad Y > \mu_1 X$$

$$\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}\right) = \left(b_3 \sqrt{X + (1 + m\kappa)Y}, b_3 \sqrt{X + (1 + m\kappa)Y}\right) \quad Y \leq \mu_1 X$$

onde as variáveis X e Y são definidas como no Lema 3 e $b_1 = \frac{a\sigma}{\sqrt{p(n-1)}}$,

$$b_3 = \frac{a\sigma}{\sqrt{np-1}} \text{ e } \mu_1 = \frac{p-1}{p(n-1)(1+m\kappa)}.$$

Observação 5: Observe-se que no caso degenerado o estimador PREMLE tem a mesma expressão que o estimador PMLE, exceto na constante b_3 .

4.4.1 Distribuição Exata dos Estimadores PREMLE

A distribuição deste estimador possui uma estrutura semelhante a das distribuições dos estimadores restritos anteriores. Suas componentes são determinadas a seguir.

Corolário 5: A função de distribuição do estimador $\left(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}\right)$ condicional sobre o evento $QM_L \leq QM_E$ é

$$H_1(u, v) = \left[\begin{array}{c} g_4(u, v) \\ \int_0^u f_Z(z) dz \\ 0 \end{array} \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(v) \quad (4.12)$$

com $g_4(u, v) = \frac{pn-1}{a^2\sigma^2} g(u, v)$, $g(u, v)$ é definida no Corolário 1 e $f_Z(z)$ no Corolário 3.

Corolário 6: A função de distribuição do estimador $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$ condicional sobre o evento $QM_L > QM_E$ é

$$H_2(u, v) = \left[\int_0^v \int_{cx}^v f_{\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}}(x, y) dy dx \right] \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(v) \quad (4.13)$$

onde $f_{\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}}(x, y)$ é a função de densidade do vetor $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$, $g_2(u, v) = \min(u, v/c)$ e $c = \sqrt{(p(n-1)/pn-1)}$.

Observação 6: É fácil provar que a distribuição do vetor $(\tilde{\lambda}^2, \frac{pn-1}{p(n-1)} \tilde{\Lambda}^2)$ coincide com a distribuição do vetor $(\tilde{\lambda}^2, \frac{n}{n-1} \tilde{\Lambda}^2)$ e que a função de distribuição do estimador $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$ condicional ao evento $QM_L > QM_E$ coincide com a função de distribuição exata do vetor $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$ dada pela expressão (4.8). No caso do estimador PREMLE o suporte é o cone aberto $\mathbf{C}(c) = \{(u, v) : \in \mathfrak{R}^2 : 0 < cu < v\}$, com $c = \sqrt{p(n-1)/(pn-1)}$.

Os Corolários 5 e 6 permitem a descrição completa dos estimadores de máxima verossimilhança residual e conduzem ao seguinte Teorema, de prova análoga ao Teorema 1.

Teorema 3: A função do estimador de verossimilhança residual é a mistura

$$H = \gamma_1 H_1 + (1 - \gamma_1) H_2 \quad (4.14)$$

onde H_1 é a função de distribuição correspondente ao componente singular do Corolário 5, H_2 é a função de distribuição correspondente ao componente contínuo do Corolário 6 e $\gamma_1 = P(U \leq (1 + m\kappa)^{-1})$ é a constante do Lema 2.

A função de distribuição da variável aleatória $Z = X + (1 + m\kappa)Y$ que descreve a componente singular dos estimadores de máxima verosimilhança e dos PREMLES pode ser expressa usando resultados apresentados por Robinson & Pitman (1949). Porém, no contexto desta dissertação, a expressão obtida nos parágrafos anteriores é suficiente para determinar momentos, erro quadrático médio e vício dos estimadores.

Antes de calcular os momentos dos estimadores, observemos que uma fórmula explícita da densidade da variável $a\chi_{v_1}^2 + b\chi_{v_2}^2$, com $\chi_{v_1}^2$ e $\chi_{v_2}^2$ variáveis independentes poderia também ser utilizada para determinar as marginais do estimador conjunto $(\hat{\lambda}, \hat{\Delta})$ no Capítulo III.

4.5. Momentos dos Estimadores Restritos

Para expressar os momentos dos estimadores restritos utilizaremos a seguinte definição.

Definição 1: Os momentos de ordem real (s_1, s_2, \dots, s_n) de uma distribuição F em \mathfrak{R}^n podem ser expressos mediante a integral de Lebesgue Stieltjes

$$E\left(X_1^{s_1} X_2^{s_2} \dots X_n^{s_n}\right) = \int_{\mathfrak{R}^n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} dF,$$

onde $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função de distribuição das variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n .

Como no caso unidimensional, os momentos existem sempre que a função $\left|x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}\right|$ seja integrável com respeito a F sobre \mathfrak{R}^n .

Agora considerando as variáveis aleatórias $U = a_1 X$ e $V = a_2 X + a_3 Y$, onde X e Y são variáveis estocasticamente independentes, tais que $X \sim \chi^2(p(n-1))$, $Y \sim \chi^2(p-1)$ e a_1, a_2 e a_3 são constantes positivas e segundo o Teorema 3 do Capítulo III, temos que

$$E\left(U^s V^t\right) = \varphi(a_1, a_2, a_3; s, t) = \frac{(a_2/a_3)^{(p-1)/2}}{\Gamma(p(n-1)/2)} \frac{2^{s+t} \Gamma(s+t+((pn-1)/2)) \Gamma(s+(p(n-1)/2))}{\Gamma(s+((pn-1)/2))} a_1^s a_2^t \times {}_2F_1\left(s+t+((pn-1)/2), (p-1)/2; s+((pn-1)/2); 1-(a_2/a_3)\right) \quad (4.15)$$

Assim, os momentos dos estimadores restritos PTE, PMLE e PREMLE são obtidos particularizando a expressão (4.15) como nos Teoremas seguintes.

Teorema 4: O momento conjunto de ordem real não-negativo (s, t) dos estimadores PTE é igual a

$$E\left(\hat{\lambda}^s \hat{\Lambda}^t\right) = \gamma_1 \phi\left(a_1, a_2, a_3; \frac{s+t}{2}, 0\right) + (1-\gamma_1) \phi\left(a_1, a_2, a_3; \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right) \quad (4.16)$$

onde γ_1 é a probabilidade de truncamento, $a_1 = \frac{a^2 \sigma^2}{p(n-1)}$, $a_2 = \frac{a^2 \sigma^2}{np}$ e

$$a_3 = \frac{a^2 \tau^2}{n(p-1)}.$$

Prova:

É suficiente calcular

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\lambda}^s \hat{\Lambda}^t\right) &= \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dF = \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t d\left(\gamma_1 F_1(w, z) + (1-\gamma_1) F_2(w, z)\right) = \\ &= \gamma_1 \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dF_1(w, z) + (1-\gamma_1) \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dF_2(w, z) \end{aligned}$$

A primeira integral é uma média ponderada da função $h(w, z) = w^s z^t$ com peso determinado pela probabilidade dF_1 situada na vizinhança de (w, z) . Assim, pelo Corolário 1, resulta que

$$\iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dF_1(w, z) = \int_0^{\infty} w^{(s+t)} f_W(w) dw = \int_0^{\infty} u^{(s+t)/2} \psi(u) du = E\left(U^{(s+t)/2}\right)$$

e desde $U = a_1 X$, $\psi(u)$ é a densidade de uma distribuição qui-quadrado escalada.

Como a integral com respeito a função $F_2(u, v)$ é absolutamente contínua, os Lemas 4 e 5 permitem obter

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dF_2(w, z) &= \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t f_{W,Z}(w, z) dw dz = \iint_{\mathfrak{R}^2} u^{s/2} v^{t/2} f_{U,V}(u, v) du dv \\ &= E\left(U^{s/2} V^{t/2}\right) = \varphi\left(a_1, a_2, a_3; \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

que fornece o resultado (4.16). ▼

Teorema 5: O momento conjunto de ordem real não-negativo (s, t) dos estimadores PMLE é igual a

$$E\left(\tilde{\lambda}^s \tilde{\Lambda}^t\right) = \gamma_2 \varphi\left(a_1, a_2, a_3; 0, \frac{s+t}{2}\right) + (1-\gamma_2) \varphi\left(a_1, a_2, a_3; \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right) \quad (4.17)$$

onde γ_2 é a probabilidade de truncamento, $a_1 = \frac{a^2 \sigma^2}{p(n-1)}$, $a_2 = \frac{a^2 \sigma^2}{np}$ e

$$a_3 = \frac{a^2 \tau^2}{np}.$$

Prova:

Como no Teorema anterior

$$\begin{aligned} E\left(\tilde{\lambda}^s \tilde{\Lambda}^t\right) &= \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dG = \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t d\left(\gamma_2 G_1(w, z) + (1-\gamma_2) G_2(w, z)\right) = \\ &= \gamma_2 \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dG_1(w, z) + (1-\gamma_2) \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dG_2(w, z) \end{aligned}$$

a primeira integral é, pelo Corolário 3

$$\iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dG_1(w, z) = \int_0^\infty v^{(s+t)/2} f_V(v) dv = E\left(V^{(s+t)/2}\right) = \varphi\left(a_1, a_2, a_3, 0, \frac{s+t}{2}\right).$$

E pelo Corolário 4 temos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t dG_2(w, z) &= \iint_{\mathfrak{R}^2} w^s z^t f_{W,Z}(w, z) dw dz = \iint_{\mathfrak{R}^2} u^{s/2} v^{t/2} f_{U,V}(u, v) du dv \\ &= E\left(U^{s/2} V^{t/2}\right) = \varphi\left(a_1, a_2, a_3; \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

o que permite obter o resultado (4.17). ▼

Teorema 6: O momento conjunto de ordem real não-negativo (s, t) dos estimadores PREMLE é igual a

$$E\left(\tilde{\lambda}^s \tilde{\Lambda}^t\right) = \gamma_1 \varphi\left(a_1, a_2, a_3; 0, \frac{s+t}{2}\right) + (1 - \gamma_1) \varphi\left(a_1, a_2, a_3; \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right) \quad (4.18)$$

onde γ_1 é a probabilidade de truncamento $a_1 = \frac{a^2 \sigma^2}{p(n-1)}$, $a_2 = \frac{a^2 \sigma^2}{np-1}$ e $a_3 = \frac{a^2 \tau^2}{np-1}$.

Prova:

Para obter a expressão (4.18) é suficiente proceder como no Teorema 5. ▼

4.5.1 Momentos de Ordem 1 e 2

Os momentos de primeira e segunda ordem dos estimadores serão obtidos utilizando os Teoremas anteriores e a fórmula

$$\varphi(a_1, a_2, a_3; s, t) = \frac{(a_2/a_3)^{(p-1)/2}}{\Gamma(p(n-1)/2)} \frac{2^{s+t} \Gamma(s+t+((pn-1)/2)) \times \Gamma(s+(p(n-1)/2))}{\Gamma(s+((pn-1)/2))} a_1^s a_2^t \times$$

$$\times {}_2F_1(s+t+((pn-1)/2), (p-1)/2; s+((pn-1)/2); 1-(a_2/a_3))$$

(4.18)

Nos seguintes resultados, de prova imediata, são apresentados os momentos de primeira e segunda ordem dos estimadores irrestritos e restritos.

Corolário 7:

a) Os momentos de primeira ordem dos estimadores PME, PTE, PMLE e PREMLE do coeficiente de repetibilidade λ são, respectivamente,

i)

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda \frac{1}{[p(n-1)/2]^{1/2}} \frac{\Gamma((p(n-1)+1)/2)}{\Gamma(p(n-1)/2)}$$

ii)

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda \sqrt{\frac{2}{p(n-1)}} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma((p(n-1)+1)/2)}{\Gamma(p(n-1)/2)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; pn/2; \frac{1+n\kappa}{p(1+m\kappa)}\right)$$

iii)

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\lambda}) &= \gamma_2 \lambda \sqrt{\frac{2}{np}} \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma((pn-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{m\kappa}{(1+m\kappa)}\right) + \\
 &\quad + (1-\gamma_2) \lambda \sqrt{\frac{2}{p(n-1)}} \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma((p(n-1)+1)/2)}{\Gamma(p(n-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; pn/2; \frac{m\kappa}{(1+m\kappa)}\right)
 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\lambda}) &= \gamma_1 \lambda \sqrt{\frac{2}{np-1}} \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma((pn-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{m\kappa}{(1+m\kappa)}\right) + \\
 &\quad + (1-\gamma_1) \lambda \sqrt{\frac{2}{p(n-1)}} \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma((p(n-1)+1)/2)}{\Gamma(p(n-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; pn/2; \frac{m\kappa}{(1+m\kappa)}\right)
 \end{aligned}$$

b) Os momentos de primeira ordem dos estimadores PME, PTE, PMLE e PREMLE do coeficiente de reprodutibilidade Λ são, respectivamente,

i)

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\Lambda}) &= \lambda \times \sqrt{\frac{2}{pn}} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma(pn-1/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1\left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\eta\kappa}{p(1+m\kappa)}\right)
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\Lambda}) &= \gamma_1 \lambda \sqrt{\frac{2}{p(n-1)}} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma(p(n-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(pn/2, (p-1)/2; pn/2; \frac{1+n\mu\kappa}{p(1+m\kappa)} \right) \\
 &+ (1-\gamma_1) \lambda \sqrt{\frac{2}{np}} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma(p(n-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\mu\kappa}{p(1+m\kappa)} \right)
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\Lambda}) &= \lambda \sqrt{\frac{2}{p(n-1)}} \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma((pn-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{m\kappa}{(1+m\kappa)} \right)
 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\tilde{\Lambda}}) &= \lambda \sqrt{\frac{2}{pn-1}} \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma((pn-1)/2)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{m\kappa}{(1+m\kappa)} \right)
 \end{aligned}$$

Corolário 8:

a) Os momentos de segunda ordem dos estimadores PME, PTE, PMLE e PREMLE do coeficiente de repetibilidade λ são, respectivamente,

i)

$$E(\hat{\lambda}^2) = a^2 \sigma^2$$

ii)

$$E(\hat{\lambda}^2) = \lambda^2 \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn+1)/2; \frac{1+p\kappa}{p(1+m\kappa)} \right)$$

iii)

$$E(\tilde{\lambda}^2) = \gamma_2 \lambda^2 \left(\frac{pn-1}{pn} \right) \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{m\kappa}{(1+nk)} \right) + \\ + (1-\gamma_2) \lambda^2 \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn+1)/2; \frac{m\kappa}{(1+nk)} \right)$$

iv)

$$E(\tilde{\lambda}^2) = \gamma_1 \lambda^2 \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{m\kappa}{(1+nk)} \right) + \\ + (1-\gamma_1) \lambda^2 \left(\frac{1}{(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn+1)/2; \frac{m\kappa}{(1+nk)} \right)$$

Os momentos de segunda ordem dos estimadores PME, PTE, PMLE e PREMLE do coeficiente de reprodutibilidade Λ são, respectivamente,

i)

$$E(\hat{\Lambda}) = \lambda \sqrt{\frac{2}{pn}} \left(\frac{p-1}{p(1+m\kappa)} \right)^{(p-1)/2} \frac{\Gamma(pn/2)}{\Gamma((pn-1)/2)} \times \\ {}_2F_1 \left(pn/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n\kappa}{p(1+nk)} \right)$$

ii)

$$E(\hat{\Lambda}^2) = \gamma_1 \lambda^2 \left(\frac{p-1}{p(1+n\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn+1)/2; \frac{1+p n \kappa}{p(1+n\kappa)} \right) + (1-\gamma_1) \lambda^2 \left(\frac{pn-1}{pn} \right) {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{1+n p \kappa}{p(1+n\kappa)} \right)$$

iii)

$$E(\tilde{\Lambda}^2) = \lambda^2 \left(\frac{pn-1}{pn} \right) \left(\frac{1}{(1+n\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{n\kappa}{(1+n\kappa)} \right)$$

iv)

$$E(\tilde{\Lambda}^2) = \lambda^2 \left(\frac{1}{(1+n\kappa)} \right)^{(p-1)/2} {}_2F_1 \left((pn+1)/2, (p-1)/2; (pn-1)/2; \frac{n\kappa}{(1+n\kappa)} \right)$$

Observação 5 : Os momentos conjuntos de ordem (s, t) dos estimadores podem também ser obtidos recorrendo às fórmulas

$$E(U^s V^t) = E(U^s V^t 1_B + U^s V^t 1_{B^c}) = P(B)E(U^s V^t | B) + P(B^c)E(U^s V^t | B^c)$$

da esperança condicional da variável aleatória $U^s V^t$ sob a hipótese B de degeneração. Essa hipótese tem probabilidade γ_1 quando $B = \{QM_L \leq QM_E\}$ para os estimadores PTE e PREMLE e probabilidade γ_2 quando $B = \left\{ QM_L \leq \frac{p}{p-1} QM_E \right\}$ para o estimador de máxima verossimilhança.

Observação 6 : Baseados nos Corolários 7 e 8 pode-se obter a variância dos estimadores.

Observação 7: Baseados nos resultados anteriores é possível também obter a covariância e o coeficiente de correlação dos estimadores.

4.6 Vício e Erro Quadrático Médio dos Estimadores Restritos

Duas características importantes na avaliação da qualidade dos estimadores podem ser obtidas sobre a base dos resultados anteriores, da Definição 8 do Capítulo III

Corolário 9 : O vício e o erro quadrático médio dos estimadores PME, PTE , PMLE, e PREMLE são obtidos baseados nos resultados anteriores .

a) Dos estimadores PTE

i) $b(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda}) - \lambda$ e $EQM(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda}^2) - 2E(\hat{\lambda}) + \lambda^2$, onde $E(\hat{\lambda})$ e $E(\hat{\lambda}^2)$ são obtidas usando as fórmulas dos Corolários 7 e 8.

ii) $b(\hat{\Lambda}) = E(\hat{\Lambda}) - \Lambda$ e $EQM(\hat{\Lambda}) = E(\hat{\Lambda}^2) - 2E(\hat{\Lambda}) + \Lambda^2$ onde $E(\hat{\Lambda})$ e $E(\hat{\Lambda}^2)$ são obtidas nos Corolários 9 e 10.

b) Dos estimadores PMLE

i) $b(\tilde{\lambda}) = E(\tilde{\lambda}) - \lambda$ e $EQM(\tilde{\lambda}) = E(\tilde{\lambda}^2) - 2E(\tilde{\lambda}) + \lambda^2$, onde $E(\tilde{\lambda})$ e $E(\tilde{\lambda}^2)$ são obtidas nos Corolários 11 e 12.

ii) $b(\tilde{\Lambda}) = E(\tilde{\Lambda}) - \Lambda$ e $EQM(\tilde{\Lambda}) = E(\tilde{\Lambda}^2) - 2E(\tilde{\Lambda}) + \Lambda^2$ onde $E(\tilde{\Lambda})$ e $E(\tilde{\Lambda}^2)$ são obtidas no Corolário 13.

c) Dos estimadores PREMLE

i) $b(\tilde{\lambda}) = E(\tilde{\lambda}) - \lambda$ e $EQM(\tilde{\lambda}) = E(\tilde{\lambda}^2) - 2E(\tilde{\lambda}) + \lambda^2$, onde $E(\tilde{\lambda})$ e $E(\tilde{\lambda}^2)$ são obtidas com base nas fórmulas dos Corolários 14 e 15.

ii) $b(\tilde{\Lambda}) = E(\tilde{\Lambda}) - \Lambda$ e $EQM(\tilde{\Lambda}) = E(\tilde{\Lambda}^2) - 2E(\tilde{\Lambda}) + \Lambda^2$ onde $E(\tilde{\Lambda})$ e $E(\tilde{\Lambda}^2)$ são obtidas com base nas fórmulas do Corolários 16.

Para exibir os resultados obtidos representaremos a informação em dos Quadros. No Quadro 1 exibem os estimadores irrestritos e restritos, e no Quadro 2 são apresentados as distribuições conjuntas exatas dos estimadores restritos e irrestritos, identificando a distribuição correspondente a os componentes singular e absolutamente contínuo da distribuição.

QUADRO 4.1: Estimadores de Substituição de Coeficientes de Repetibilidade λ e de Reprodutibilidade Λ

Estimadores	CONDIÇÃO	
	$QM_L \leq dQM_E^{(*)}$	$QM_L > dQM_E$
$PME(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$	$\left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)QM_E + QM_L} \right)$	$\left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)QM_E + QM_L} \right)$
$PTE(\hat{\lambda}, \hat{\Lambda})$	$\left(a\sqrt{QM_E}, a\sqrt{QM_E} \right)$	$\left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)QM_E + QM_L} \right)$
$PMLE(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$	$\left(\frac{a}{\sqrt{np}}\sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L}, \frac{a}{\sqrt{np}}\sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$	$\left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{np}}\sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$
$PREMLE(\tilde{\tilde{\lambda}}, \tilde{\tilde{\Lambda}})$	$\left(\frac{a}{\sqrt{np-1}}\sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L}, \frac{a}{\sqrt{np-1}}\sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$	$\left(a\sqrt{QM_E}, \frac{a}{\sqrt{np-1}}\sqrt{p(n-1)QM_E + (p-1)QM_L} \right)$

(*) A constante d é igual a 1 para os estimadores PME, PTE e PREMLE e igual a $\frac{p}{p-1}$ para o estimador PMLE.

Quadro 4.2: Distribuições exatas dos estimadores dos coeficientes de repetibilidade λ e de reprodutibilidade Λ sob o modelo aleatório balanceado (2.1).

Método	Estimador	Função de distribuição
Dos Momentos	<i>PME</i>	$F^*(u, v)$ (3.5)
Truncado	<i>PTE</i>	$F(u, v) = \gamma_1 F_1(u, v) + (1 - \gamma_1) F_2(u, v)$ (4.5)
De Máxima Verossimilhança	<i>PMLE = MLE</i>	$G(u, v) = \gamma_2 G_1(u, v) + (1 - \gamma_2) G_2(u, v)$ (4.11)
De Máxima Verossimilhança Residual	<i>PREMLE</i>	$H(u, v) = \gamma_1 H_1(u, v) + (1 - \gamma_1) H_2(u, v)$ (4.14)

CAPÍTULO V

Uma Avaliação dos Estimadores

Neste Capítulo realizaremos uma breve comparação das características dos estimadores definidos nos Capítulos III e IV. Para isto serão utilizados valores dos parâmetros sugeridos pelos resultados do ensaio interlaboratorial descrito na Seção 1.5 do Capítulo I.

5.1 Estimativas dos Coeficientes λ e Λ

Como mencionado no Exemplo do Capítulo I, o Centro de Tecnologia de Embalagem -CETEA, realizou um ensaio interlaboratorial. O mesmo teve as seguintes características: nele participaram 8 laboratórios, os quais realizaram duas medições em duas épocas sobre cada um dos 6 materiais definidos mediante as combinações de, duas amostras, as que se diferenciam pela espessura da camada de estanho e três regiões, nas quais foi dividida a folha-de-flandres, como foram definidas na Seção 1.5.1 do Capítulo I. Um esquema dos diferentes materiais é mostrado a continuação:

MATERIAL	AMOSTRA	REGIÃO
A	A	Inferior
B	A	Superior
C	A	Central
D	B	Inferior
E	B	Superior
F	B	Central

As medições realizadas pelos laboratórios na Época 1 utilizando o método gravimétrico são apresentadas na Tabela 1 do Anexo B. No seguinte Quadro são mostradas as correspondentes estimativas de espessura média e os quadrados médios QM_E e QM_L , ver Gatti et al.(1997).

QUADRO 5.1: Espessura média, quadrados médios residuais e entre laboratórios para os dados da Época 1 nos diferentes materiais.

Material	Espessura Média	Quadrados Médios	
		Residual	Entre Labs.
A	1.348	0.0540	0.1057
B	1.234	0.0301	0.0529
C	1.177	0.0611	0.1337
D	2.948	0.1050	0.0464*
E	2.785	0.0684	0.1189
F	2.810	0.1056	0.0867*

(*) O quadrado médio entre laboratórios é inferior ao correspondente quadrado médio residual, produzindo uma estimativa negativa do componente σ_L^2 , segundo o método dos momentos.

No Quadro 5.2, a seguir, são apresentadas as estimativas dos estimadores dos coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade definidos nos Capítulos III e IV, no caso específico do Material D, Época 1. O mesmo foi selecionado por fornecer uma estimativa negativa do parâmetro σ_L^2 .

Quadro 5.2: Estimadores dos coeficientes λ e Λ para o Material D, Época 1.

ESTIMADORES	ESTIMATIVAS DOS COEFICIENTES	
	λ	Λ
PME	0.9072	0.7704
PTE	0.9072	0.9072
PMLE	0.7555	0.7555
PREMLE	0.7833	0.7833

Para calcular as características distribucionais, vício e erro quadrático médio para cada um dos estimadores PME, PTE, PMLE e PREMLE são necessárias as probabilidades de truncamento.

No Quadro 5.3 são exibidas as probabilidades de truncamento dos estimadores PTE e PREMLE dadas pela expressão (4.1) e que dependem do valor $\frac{1}{1+m\kappa}$; e no Quadro 5.4 é indicada a probabilidade de truncamento do estimador

PMLE dada por (4.7) a que depende de $\frac{p}{(p-1)(1+m\kappa)}$, sendo $\kappa = \frac{\sigma_L^2}{\sigma^2}$.

Quadro 5.3: Probabilidade de truncamento γ_1 dos estimadores PTE e PREMLE para $n=2$ e $p=8$.

σ_L^2	σ^2	0.01	0.10	0.50	1
0		0.5066	0.5066	0.5066	0.5066
0.001		0.4115	0.4962	0.5045	0.5055
0.10		0.00031	0.0823	0.3352	0.4115
2.5		5.91×10^{-9}	0.00002	0.0024	0.0145
10		4.68×10^{-11}	1.42×10^{-7}	0.00003	0.0003

Quadro 5.4: Probabilidade de truncamento γ_2 do estimador PMLE para $n=2$ e $p=8$.

σ_L^2	σ^2	0.01	0.10	0.50	1
0		0.5766	0.5766	0.5766	0.5766
0.001		0.4809	0.5663	0.5745	0.5755
0.10		0.0005	0.1105	0.4010	0.4809
2.5		9.42×10^{-9}	0.00003	0.0037	0.0208
10		7.46×10^{-11}	2.26×10^{-7}	0.00005	0.00048

Os cálculos para determinar as características distribucionais, o vício e erro quadrático médio foram realizados com o software *Mathematica*, Versão 2.2.3, para Windows 95, utilizando precisão de 30 casas decimais. (Em alguns casos foi mantido um bom número de casas decimais para possibilitar a comparação de valores muito próximos). Trabalhou-se com o valor da constante $\sqrt{2} c = 2.8 = a$, considerando c como o quantil de ordem 0.975 da distribuição normal, valor sugerido pelas correspondentes Normas ASTM E- 691 e ISO 5725.

Nos Quadros 5.5 até 5.8 figuram as características dos estimadores do parâmetro λ de repetibilidade. As casas decimais sublinhadas exibem eventualmente as diferenças entre os valores tabelados.

E nos Quadros 5.9 até 5.12 figuram as características dos estimadores do parâmetro A de reprodutibilidade.

Quadro 5.5 : Valores esperados dos estimadores do coeficiente de repetibilidade λ .

σ^2	σ_L^2	λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	<u>0.2714069959199072</u>	<u>0.2714069959199072</u>	0.26865	0.27342
	0.001		<u>0.2714069959199072</u>	<u>0.2714069959199073</u>	0.27494	0.27820
	0.10		<u>0.2714069959199072</u>	<u>0.2714069959199053</u>	0.27168	0.27159
	2.5		<u>0.2714069959199072</u>	<u>0.2714069959198366</u>	0.27141	0.27141
	10		<u>0.2714069959199072</u>	<u>0.2714069959197365</u>	0.27141	0.27141
0.10	0	0.8854	<u>0.858264280010933</u>	<u>0.858264280010933</u>	0.84955	0.86462
	0.001		<u>0.858264280010933</u>	<u>0.858264280010933</u>	0.85193	0.86650
	0.10		<u>0.858264280010933</u>	<u>0.858264280010932</u>	0.89246	0.88705
	2.5		<u>0.858264280010933</u>	<u>0.858264280010924</u>	0.85834	0.85832
	10		<u>0.858264280010933</u>	<u>0.858264280010956</u>	0.85826	0.85827
0.50	0	1.9799	<u>1.919137272764359</u>	<u>1.919137272764359</u>	1.89966	1.93335
	0.001		<u>1.919137272764359</u>	<u>1.91913727276436</u>	1.90074	1.93421
	0.10		<u>1.919137272764359</u>	<u>1.919137272764359</u>	1.97279	1.98657
	2.5		<u>1.919137272764359</u>	<u>1.919137272764365</u>	1.92835	1.92563
	10		<u>1.919137272764359</u>	<u>1.919137272764354</u>	1.91947	1.91936
1	0	2.8	<u>2.714069959199072</u>	<u>2.714069959199072</u>	2.68653	2.73717
	0.001		<u>2.714069959199072</u>	<u>2.714069959199071</u>	2.68729	2.73478
	0.10		<u>2.714069959199072</u>	<u>2.714069959199073</u>	2.74944	2.78195
	2.5		<u>2.714069959199072</u>	<u>2.714069959199068</u>	2.75800	2.74688
	10		<u>2.714069959199072</u>	<u>2.714069959199072</u>	2.71683	2.71595

Quadro 5.6: Variância dos estimadores do coeficiente de repetibilidade λ .

σ^2	σ_L^2	λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	<u>0.004738242565731507</u>	<u>0.004738242565731494</u>	0.00340	0.00364
	0.001		<u>0.004738242565731507</u>	<u>0.004738242565731452</u>	0.00345	0.00402
	0.10		<u>0.004738242565731507</u>	<u>0.004738242565731993</u>	0.00492	0.00486
	2.5		<u>0.004738242565731507</u>	<u>0.00473824256574941</u>	0.00474	0.00474
	10		<u>0.004738242565731507</u>	<u>0.004738242565774834</u>	0.00474	0.00474
0.10	0	0.8854	<u>0.04738242565731488</u>	<u>0.04738242565731488</u>	0.03400	0.03643
	0.001		<u>0.04738242565731488</u>	<u>0.0473824256573151</u>	0.03434	0.03681
	0.10		<u>0.04738242565731488</u>	<u>0.04738242565731588</u>	0.05791	0.05772
	2.5		<u>0.04738242565731488</u>	<u>0.04738242565732187</u>	0.04767	0.04758
	10		<u>0.04738242565731488</u>	<u>0.04738242565729623</u>	0.04739	0.04739
0.50	0	1.9799	<u>0.2369121282865763</u>	<u>0.2369121282865745</u>	0.17001	0.18215
	0.001		<u>0.2369121282865763</u>	<u>0.2369121282865745</u>	0.17035	0.18252
	0.10		<u>0.2369121282865763</u>	<u>0.236912128286574</u>	0.20491	0.21885
	2.5		<u>0.2369121282865763</u>	<u>0.2369121282865652</u>	0.26342	0.25660
	10		<u>0.2369121282865763</u>	<u>0.2369121282865843</u>	0.23924	0.23853
1	0	2.8	<u>0.473824256573149</u>	<u>0.473824256573149</u>	0.34001	0.36429
	0.001		<u>0.473824256573149</u>	<u>0.4738242565731526</u>	0.34035	0.36467
	0.10		<u>0.473824256573149</u>	<u>0.4738242565731472</u>	0.37483	0.40183
	2.5		<u>0.473824256573149</u>	<u>0.4738242565731597</u>	0.57997	0.55902
	10		<u>0.473824256573149</u>	<u>0.473824256573149</u>	0.49166	0.48649

Quadro 5.7: Vício dos estimadores do coeficiente de repetibilidade λ .

σ^2	σ_L^2	λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	-0.00859300408009284	-0.00859300408009284	-0.01134	-0.00658
	0.001		-0.00859300408009284	-0.00859300408009267	-0.00505	-0.00180
	0.10		-0.00859300408009284	-0.00859300408009467	-0.00832	-0.00841
	2.5		-0.00859300408009284	-0.00859300408016339	-0.00859	-0.00859
	10		-0.00859300408009284	-0.00859300408026342	-0.00859	-0.00859
0.10	0	0.8854	-0.0271734648362133	-0.0271734648362133	-0.03588	-0.02082
	0.001		-0.0271734648362133	-0.02717346483621363	-0.03350	-0.01894
	0.10		-0.0271734648362133	-0.02717346483621452	0.00702	0.00161
	2.5		-0.0271734648362133	-0.02717346483622185	-0.02709	-0.02712
	10		-0.0271734648362133	-0.02717346483618999	-0.02717	-0.02717
0.50	0	1.9799	-0.0607617145579733	-0.06076171455797308	-0.08023	-0.04655
	0.001		-0.0607617145579733	-0.06076171455797286	-0.07915	-0.04569
	0.10		-0.0607617145579733	-0.06076171455797308	-0.00710	0.00667
	2.5		-0.0607617145579733	-0.06076171455796753	-0.05154	-0.05427
	10		-0.0607617145579733	-0.06076171455797841	-0.06043	-0.06054
1	0	2.8	-0.0859300408009283	-0.0859300408009283	-0.11347	-0.06583
	0.001		-0.0859300408009283	-0.08563004080092991	-0.11270	-0.06522
	0.10		-0.0859300408009283	-0.0859300408009269	-0.05056	-0.01805
	2.5		-0.0859300408009283	-0.0859300408009323	-0.04199	-0.05312
	10		-0.0859300408009283	-0.0859300408009283	-0.008317	-0.08405

Quadro 5.8: Erro quadrático médio dos estimadores do coeficiente de repetibilidade λ .

σ^2	σ_L^2	λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	<u>0.004812082284852013</u>	<u>0.004.812082284851986</u>	0.00353	0.00369
	0.001		<u>0.004812082284852013</u>	<u>0.004.812082284851941</u>	0.00377	0.00402
	0.10		<u>0.004812082284852013</u>	<u>0.004.812082284852516</u>	0.00498	0.00493
	2.5		<u>0.004812082284852013</u>	<u>0.004.812082284871115</u>	0.00481	0.00481
	10		<u>0.004812082284852013</u>	<u>0.004.812082284898258</u>	0.00481	0.00481
0.10	0	0.8854	<u>0.04812082284851983</u>	<u>0.0481208228485198</u>	0.03529	0.03686
	0.001		<u>0.04812082284851983</u>	<u>0.04812082284852004</u>	0.03547	0.03716
	0.10		<u>0.04812082284851983</u>	<u>0.04812082284852086</u>	0.05791	0.05772
	2.5		<u>0.04812082284851983</u>	<u>0.04812082284852726</u>	0.04841	0.04832
	10		<u>0.04812082284851983</u>	<u>0.04812082284849988</u>	0.04813	0.48129
0.50	0	1.9799	<u>0.2406041142426005</u>	<u>0.2406041142425991</u>	0.17644	0.18431
	0.001		<u>0.2406041142426005</u>	<u>0.2406041142425991</u>	0.17661	0.18461
	0.10		<u>0.2406041142426005</u>	<u>0.2406041142425987</u>	0.20496	0.21889
	2.5		<u>0.2406041142426005</u>	<u>0.2406041142425891</u>	0.26608	0.25955
	10		<u>0.2406041142426005</u>	<u>0.2406041142426095</u>	0.24289	0.24219
1	0	2.8	<u>0.4812082284851975</u>	<u>0.4812082284851983</u>	0.35289	0.36863
	0.001		<u>0.4812082284851975</u>	<u>0.4812082284852019</u>	0.35306	0.36891
	0.10		<u>0.4812082284851975</u>	<u>0.4812082284851962</u>	0.37739	0.40216
	2.5		<u>0.4812082284851975</u>	<u>0.4812082284852095</u>	0.58173	0.56184
	10		<u>0.4812082284851975</u>	<u>0.4812082284851983</u>	0.49857	0.49355

Quadro 5.9 Valores esperados dos estimadores do coeficiente de reprodutibilidade Λ .

σ^2	σ_L^2	Λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	0.27536	0.27336	0.26663	0.27538
	0.001	0.2937	0.28871	0.28159	0.27876	0.28790
	0.10	0.9287	0.89932	0.89913	0.84433	0.87202
	2.5	4.4360	4.28161	4.28162	4.00575	4.13712
	10	8.8588	8.54937	8.54937	7.99754	8.25982
0.10	0	0.8854	0.87076	0.86443	0.84316	0.87081
	0.001	0.8899	0.87508	0.86674	0.84709	0.87487
	0.10	1.2522	1.22555	1.19514	1.16770	1.20599
	2.5	4.5149	4.36373	4.36367	4.08835	4.22243
	10	8.8985	8.59087	8.59087	8.03934	8.30298
0.50	0	1.9799	1.94707	1.93292	1.88537	1.97720
	0.001	1.9819	1.94001	1.93394	1.88713	1.94901
	0.10	2.1689	2.13133	2.06020	2.05296	2.12028
	2.5	4.8497	4.70848	4.70167	4.43347	4.57887
	10	9.0730	8.77242	8.77219	8.22186	8.49150
1	0	2.8	2.75357	2.73356	2.66631	2.75376
	0.001	2.8014	2.75494	2.73428	2.66755	2.75504
	0.10	2.9367	2.88710	2.81590	2.78762	2.87904
	2.5	5.2383	5.10309	5.06857	4.82614	4.98441
	10	9.2865	8.99322	8.99126	8.44332	8.72022

Quadro 5.10: Variância dos estimadores do coeficiente de reprodutibilidade Λ .

σ^2	σ_L^2	Λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	0.00258	0.00368	0.00241	0.00257
	0.001	0.2937	0.00289	0.00372	0.00265	0.00283
	0.10	0.9287	0.05362	0.05373	0.04660	0.04971
	2.5	4.4360	1.34616	1.34616	1.17747	1.25597
	10	8.8588	5.38666	5.38666	4.71291	5.02710
0.10	0	0.8854	0.02578	0.03676	0.02408	0.02568
	0.001	0.8899	0.02607	0.03672	0.02431	0.02593
	0.10	1.2522	0.06604	0.07473	0.05748	0.06132
	2.5	4.5149	1.34185	1.34203	1.17039	1.24842
	10	8.8985	5.38091	5.38092	4.70420	5.01781
0.50	0	1.9799	0.12892	0.18382	0.12039	0.12842
	0.001	1.9819	0.12921	0.18377	0.12062	0.12866
	0.10	2.1689	0.16143	0.19677	0.14638	0.15613
	2.5	4.8497	1.35022	1.36645	1.16931	1.24726
	10	9.0730	5.36465	5.36606	4.67599	4.98772
1	0	2.8	0.25783	0.36764	0.24079	0.25684
	0.001	2.8014	0.25812	0.36759	0.24101	0.25708
	0.10	2.9367	0.28864	0.37209	0.26516	0.28284
	2.5	5.2383	1.39845	1.46638	1.20841	1.28898
	10	9.2865	5.36205	5.37283	4.66042	4.97111

Quadro 5.11 : Vício dos estimadores do coeficiente de reprodutibilidade Λ .

σ^2	σ_L^2	Λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	-0.00464	-0.00664	-0.01337	-0.00462
	0.001	0.2937	-0.00496	-0.01208	-0.01490	-0.00576
	0.10	0.9287	-0.02933	-0.02953	-0.08432	-0.05663
	2.5	4.4360	-0.15442	-0.15442	-0.43029	-0.29891
	10	8.8588	-0.30943	-0.30943	-0.86127	-0.59898
0.10	0	0.8854	-0.01468	-0.02101	-0.04228	-0.01462
	0.001	0.8899	-0.01477	-0.023117	-0.04277	-0.01499
	0.10	1.2522	-0.02665	-0.05705	-0.084501	-0.04621
	2.5	4.5149	-0.15113	-0.15119	-0.42651	-0.29243
	10	8.8985	-0.30767	-0.30767	-0.85921	-0.59556
0.50	0	1.9799	-0.03283	-0.04698	-0.09453	-0.03270
	0.001	1.9819	-0.03287	-0.04794	-0.09475	-0.03286
	0.10	2.1689	-0.03754	-0.10867	-0.11592	-0.04859
	2.5	4.8497	-0.14126	-0.14807	-0.41627	-0.27087
	10	9.0730	-0.30062	-0.30085	-0.85118	-0.58153
1	0	2.8	-0.04643	-0.06644	-0.13369	-0.04625
	0.001	2.8014	-0.04646	-0.06712	-0.13384	-0.04636
	0.10	2.9367	-0.04956	-0.12076	-0.14904	-0.05762
	2.5	5.2383	-0.13523	-0.16975	-0.41218	-0.25391
	10	9.2865	-0.29333	-0.29529	-0.84323	-0.56633

Quadro 5.12: Erro quadrático médio dos estimadores do coeficiente de reprodutibilidade Λ .

σ^2	σ_L^2	Λ	PME	PTE	PMLE	PREMLE
0.01	0	0.28	0.00260	0.00372	0.00259	0.00259
	0.001	0.2937	0.00291	0.00387	0.00287	0.00286
	0.10	0.9287	0.05448	0.05460	0.05371	0.05292
	2.5	4.4360	1.37001	1.37001	1.36262	1.34532
	10	8.8588	5.48241	5.48241	5.45469	5.38588
0.10	0	0.8854	0.02600	0.03721	0.02587	0.02590
	0.001	0.8899	0.02629	0.037251	0.02613	0.02615
	0.10	1.2522	0.06675	0.07799	0.06462	0.06345
	2.5	4.5149	1.36469	1.36487	1.35231	1.33394
	10	8.8985	5.47557	5.47558	5.44244	5.37250
0.50	0	1.9799	0.13000	0.18603	0.12933	0.12949
	0.001	1.9819	0.13029	0.18606	0.12960	0.12974
	0.10	2.1689	0.16284	0.20858	0.15981	0.15849
	2.5	4.8497	1.37017	1.38837	1.34259	1.32063
	10	9.0730	5.45502	5.45657	5.40049	5.32590
1	0	2.8	0.26999	0.37206	0.25866	0.25898
	0.001	2.8014	0.26028	0.37209	0.25893	0.25923
	0.10	2.9367	0.29110	0.38667	0.28738	0.28616
	2.5	5.2383	1.41674	1.49520	1.37831	1.35344
	10	9.2865	5.44810	5.46003	5.37146	5.29184

5.2 Desempenho dos Estimadores dos Coeficientes de λ e Λ .

Como exibido no Quadro 5.5 pode-se observar que, em geral, os valores esperados dos estimadores PTE, PME e PREMLE se aproximam do valor alvo do parâmetro λ . Entretanto, os valores esperados do estimador PMLE ficam um pouco mais afastados do parâmetro a estimar, para alguns valores dos parâmetros σ^2 e σ_L^2 . Dos quatro estimadores o PREMLE parece ter um melhor comportamento. Os valores esperados dos quatro estimadores considerados são muito próximos quando o valor de σ_L^2 aumenta. É de destacar que os estimadores PME e PTE diferem, somente a partir da décima primeira casa decimal, para os valores mais baixos do parâmetro σ_L^2 .

As variâncias mostradas no Quadro 5.6 são semelhantes, para os estimadores PME e PTE, o mesmo acontece com as variâncias dos estimadores PMLE e PREMLE, sendo estas de menor magnitude para valores baixos do parâmetro σ_L^2 .

Os vícios exibidos no Quadro 5.7, mostram que eles subestimam o valor populacional, sendo menor em todos os casos o vício do estimador PREMLE. Este comportamento também se reflete nos valores do erro quadrático médio contidos no Quadro 5.8 e pode-se notar que, para quando $\sigma^2 = 0.10$ e $\sigma_L^2 = 0.10$, o vício resulta positivo para os estimadores PMLE e PREMLE.

O comportamento das estimativas dos valores esperados do parâmetro Λ , mostra que os estimadores PME e PTE tem valores esperados, em geral, mais próximos do valor do parâmetro λ , ver Quadro 5.9. No entanto, o estimador PMLE apresenta valores esperados menores que os outros três estimadores.

Os valores de variância de estimador PMLE de Λ são menores que os dos outros estimadores, segundo o Quadro 5.10; o vício de todos os estimadores considerados é negativo, sendo maior o vício de estimador PMLE.

O erro quadrático médio possui um comportamento semelhante para todos os estimadores, no entanto ele aumenta quando o valor do parâmetro σ_L^2 aumenta.

Em resumo, podemos afirmar que, para esses dados, os estimadores comportam-se de forma análoga com uma ligeira vantagem do estimador PREMLE.

5.3 Observações Finais

Muitas são as pesquisas dedicadas a estudar a variabilidade entre e dentro dos laboratórios avaliada por os coeficientes de repetibilidade e reprodutibilidade. Neste trabalho os coeficientes são considerados como parâmetros, diferente ao tratamento usual, definindo diferentes estimadores, determinando suas distribuições e características distribucionais. Esses resultados têm como base um modelo linear balanceado associado a uma classificação simples.

No contexto desta dissertação dirigimos nossos esforços na estimação pontual o qual fornece um ponto inicial para a inferência estatística. O passo seguinte pode ser a determinação de intervalos de confiança para os parâmetros λ e Λ . Recentemente Burdick & Larsen (1997) apresentaram intervalos de confiança para as medidas de variabilidade dos coeficientes r e R, em um estudo de repetibilidade e reprodutibilidade.

Desde que, em nosso trabalho, consideramos um modelo com uma classificação simples, poderia ser de interesse realizar um estudo sistemático baseado em modelos mais complexos considerando outros fatores, assim como a interação entre eles.

ANEXO A: Funções Especiais

Para obter os momentos dos estimadores dos Capítulos III e IV é necessário utilizar como auxílio a função especial de Whittaker e algumas relações entre a mesma e funções hipergeométricas. A seguir são apresentados resultados básicos relevantes.

Muitas funções da Análise podem ser expressas em termos da função hipergeométrica, introduzida por Gauss em 1812 e denotada por ${}_2F_1(a, b; c; z)$, definida mediante a série de potências

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \quad (\text{A1})$$

que converge absolutamente para $|z| < 1$ ficando indefinida quando c é um inteiro negativo. A função ${}_2F_1$ pode ser estendida analiticamente para valores complexos utilizando diversas representações integrais, ver por exemplo §2.5 de Magnus et al. (1966).

A função ${}_2F_1$ é uma solução da equação diferencial linear homogênea

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0 \quad (\text{A2})$$

que possui pontos singulares $z_0 = 0, 1$ e ∞ (isto é: a equação pode ser escrita na forma

$$(z - z_0)^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + (z - z_0)p(z) \frac{dw}{dz} + q(z)w = 0 \quad (A3)$$

com $p(z)$ e $q(z)$ funções analíticas em z_0 ; para $z_0 = \infty$ é necessário inverter primeiro a variável z utilizando $z \longrightarrow 1/z$ para obter depois uma equação semelhante a (A3) para a função transformada).

Muitas funções conhecidas são casos particulares da função hipergeométrica. Assim por exemplo são válidas as relações

- ${}_2F_1(1, 1; 2; -z) = (1+z)^{-1}$
- ${}_2F_1(a, b; a; 1-z) = z^{-b}$, para a e b reais
- $z {}_2F_1(1/2, 1/2; 3/2; z) = \log(1+z)$
- $z {}_2F_1(1/2, 1; 3/2; z^2) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$
- $z {}_2F_1(1/2, 1/2; 3/2; z^2) = \arcsen z$.

A função de Kummer ou função hipergeométrica confluyente é denotada por ${}_1F_1$ e definida como limite da função ${}_2F_1(a, b; c; z)$, quando z é substituída por z/b e $b \longrightarrow \infty$ em (A1) e (A2). Nesse caso (A2) converte-se na equação diferencial

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0$$

e (A1) na função de Kummer

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

que é convergente para todo z complexo, ficando indefinida quando a ou b são inteiros negativos, veja §6.1.1 de Magnus et al (1966).

A função hipergeométrica confluyente também possui diversas representações integrais e dá origem à funções conhecidas, como as indicadas a seguir, veja por exemplo §6.7.2 de Magnus et al (1966).

- ${}_1F_1(a; a; z) = e^z$

- ${}_1F_1(a; a+1; -z) = az^{-a} \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt$ (função gama incompleta)

- ${}_1F_1(1/2; 3/2; -z^2) = \frac{1}{z} \int_0^z e^{-t^2} dt$

Em particular a função hipergeométrica confluyente permite definir a função

$$M_{\mu, \gamma}(z) = e^{-z/2} z^{(\mu+1/2)} {}_2F_1(\mu+1/2-\gamma; 1+2\mu; z)$$

e com ela a função de Whittaker

$$W_{\mu, \gamma}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} - \gamma\right)} M_{-\mu, \gamma}(z) + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(-\mu + \frac{1}{2} - \gamma\right)} M_{\mu, \gamma}(z)$$

de parâmetros μ e γ .

A função $W_{\gamma,\mu}(z)$ tem um ponto de ramificação para $z=0$ e uma singularidade essencial no infinito; por esse motivo será definida somente para z complexo com $|\text{Arg}z| < \pi$ e em particular para z real positivo.

As demonstrações dos resultados enunciados podem ser encontradas no §7.1.1 de Magnus et al (1966), onde também é apresentada a equação diferencial de Whittaker, que têm as funções $M_{\gamma,\mu}(z)$ e $W_{\gamma,\mu}(z)$ como soluções.

ANEXO B: Dados do Ensaio Interlaboratorial

Na seguinte tabela são apresentadas as medições correspondentes à Época 1 para os 6 Materiais analisados no ensaio interlaboratorial realizado pelo CETEA - ITAL, Campinas. Detalhes do ensaio figuram em Gatti et al. (1997).

TABELA 1: Espessura de estanho em folha-de-flandres em g/m^2

LAB.	MATERIAL					
	A	B	C	D	E	F
1	1.01	1.24	1.82	2.88	3.20	3.06
	1.74	1.43	1.36	3.04	2.67	2.95
2	1.28	0.89	1.32	3.02	3.06	2.91
	1.24	1.47	1.01	2.95	3.02	2.98
3	1.20	1.01	0.85	2.67	2.95	2.98
	0.96	1.05	0.93	3.00	2.83	2.71
4	1.23	1.23	1.12	3.24	3.02	2.80
	1.56	1.34	0.90	2.91	2.91	3.02
5	1.55	1.55	1.55	2.71	2.71	2.71
	1.55	1.55	1.55	2.71	2.32	2.32
6	1.00	1.40	1.00	3.00	2.80	2.60
	1.10	1.10	1.00	2.80	2.80	2.80
7	1.32	1.05	1.01	3.14	2.71	3.10
	1.34	1.12	1.09	3.29	2.91	2.98
8	1.94	1.16	1.55	2.32	1.94	1.94
	1.55	1.16	0.77	3.49	2.71	3.10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

American Society of Testing and Materials (1990), *ASTM Standard E 177-90a, Standard Practice for Use of the Terms Precision and Bias in ASTM Test Methods*, Philadelphia, ASTM Press.

American Society of Testing and Materials (1992), *ASTM Standard E 691-92, Standard Practice for Conducting an Interlaboratory Study to Determine the Precision of a Test Method*, Philadelphia, ASTM Press.

Association of Official Analytical Chemists (1989), *Guidelines for Collaborative Study Procedure to Validate Characteristics of a Method of Analysis*, Arlington, *Journal of the Association of Official Analytical Chemists*, 72, 694-704.

Arnold, S. F. (1981), *The Theory of Linear and Multivariate Analysis*, New York: John Wiley, 247-249.

Bailar, B. (1985), "Quality Issues in Measurement", *International Statistical Review*, 53, 123-139.

Barrentine, L. (1991), *Concepts for R&R Studies*, Wilconsin, ASQC Quality Press.

Bateman, H. (1954), *Tables of Integral Transforms*, Vol. 2. New York: McGraw- Hill, 391-407.

Bissel, D. (1994), *Statistical Methods for SPC and TQM*, 3. Ed., New York: Chapman & Hall.

- Box, G. and Draper, N. (1969), *Evolutionary Operation. A Statistical Method for Process Improvement*, New York: John Wiley.
- Burdick, R. and Larsen, G. (1997), "Confidence Intervals on Measures of Variability in R&R Studies", *Journal of Quality Technology*. 29, 61- 273.
- Corbeil, R. R. and Searle, S. R. (1976) "Restricted Maximum Likelihood (REML) Estimation of Variance Components in the Mixed Model", *Technometrics*, 18, 31-38.
- Corbeil, R. R. and Searle, S. R. (1976), "A Comparison of Variance Component Estimators ",*Biometrics*, 32, 779-791.
- Cramer, H. (1968), *Métodos Matemáticos de Estadística* , 4. Ed. Madrid.
- Deming, W. E. (1990), *Qualidade: A Revolução da Administração*, Rio de Janeiro: Saraiva.
- Deutler, T. (1991), "Grubbs- Type Estimators for Reproducibility Variances in an Interlaboratory Study". *Journal of Quality Technology*, 23, 324-335.
- Eisenhart, C. (1952), "The Reliability of Measured Values-I: Fundamental Concepts". *Photogrammetric Engineering* . 18, 542-561.
- Eisenhart, C. (1963), "Realistic Evaluation of the Precision and Accuracy of Instrument Calibration Systems". *Journal of Research of the National Bureau of Standards C; Engineering and Instrumentation*. 67 C, 161-187.
- Eisenhart, C. (1968), "Expression of the Uncertainties of Final Results", *Science* 160, 1201-1204.

- Federer, W.T. (1968). "Non-negative Estimators for Components of Variance". *Applied Statistics* 17, 171-174.
- Feller W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol 2. 2 Ed. New York: John Wiley.
- Gatti, J., Dantas, S., Infante A. and Moschetti, E. (1997), "Análise Estatística Preliminar de um Estudo Interlaboratorial para Determinação de Camada de Estando em Folha-de-Flandres". Relatório Interno , *Coletânea do ITAL*, Campinas.
- Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (1965), *Tables of Integrals, Series and Products*, New York: Academic Press.
- Graybill , F. A. (1976), *Theory and Application of the Linear Model* . Wadsworth Company, California.
- Hamaker, H. (1987), "Repeatability and Reproducibility: Some Problems in Applied Statistics", In: Mallows, C. (Ed.) *Design, Data and Analysis*, New York: John Wiley, 71-92.
- Harville, D. (1977), "Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems", *Journal of the American Statistical Association* 72, 320-340.
- Herbach, L. H. (1959), "Properties of Model II-type Analysis of Variance Tests, A: Optimum Nature of the F-Test for Model II in the Balanced Case", *Annals of Mathematical Statistics*. 30, 939-959.
- Hunter, J. (1980), "The National System of Scientific Measurement", *Science*. 210:

869-874.

International Organization for Standardization (1993), *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. 1 Ed., Genève, ISO.

International Organization for Standardization (1986), *ISO 5725 86, Precision of Test Methods - Determination of Repeatability and Reproducibility for a Standard Test Method by Inter-laboratory Tests*, 2 Ed., Genève, ISO.

International Organization for Standardization (1992), *ISO 4259 92, Petroleum Products- Determination and Application of Precision Data in Relation to Methods of Test*, Genève, ISO.

Iyanaga, S and Kawada Y. (Eds.) (1968), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* 2.Ed., Vol.II, Cambridge, MIT Press , 1458-1471

Jaech, J. (1979), "Estimating Within-Laboratory Variability from Interlaboratory Test Data", *Journal of Quality Technology*. 11,185-191.

Johnson, N. and Kotz, S. (1970), *Distributions in Statistics. Continuous Univariate Distributions*, Vol 1, New York: Houghton Mifflin.

Joiner, B. L. (1995), *As Metas Gerenciais. Gerência de Quarta Geração*, Rio de Janeiro: Makron. Books do Brasil.

Klotz, J.H. , Milton, R. C. and Zacks, S. (1969), "Mean Square Efficiency of Estimators of Variance Components" *Journal of the American Statistical Association*. 64, 1383-1402.

Mandel, J. (1959), "The Measuring Process" *Technometrics*, 1, 251-267.

- Mandel, J. (1964), *The Statistical Analysis of Experimental Data*, New York: John Wiley.
- Mandel, J. (1972), "Repeatability and Reproducibility", *Journal of Quality Technology*, 4, 74-85.
- Mandel, J. and Lashof T. (1987), "The Nature of Repeatability and Reproducibility", *Journal of Quality Technology*, 19, 29-36
- Mandel, J. (1991), "The Validation of Measurement through Interlaboratory Studies", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 11, 109-119.
- Magnus, W. , Oberhettinger, F. and Soni, R. P. (1966), *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 2 Ed. New York: Springer-Verlag, 295-314.
- Mihram, G. and Hultquist, R. (1967), "A Bivariate Warning -Time / Failure -Time Distribution", *Journal of the America Statistical Association*, 62, 589-597.
- Miller, R. (1986), *Beyond ANOVA. Basics of Applied Statistics*, New York : John Wiley.
- Montgomery, D. (1997), *Introduction to Statistical Quality Control*, 3. Ed. New York: John Wiley.
- Robbins, H. and Pitman, E.J. G. (1949), "Application of the Method of Mixture to Quadratic Forms in Normal Variates", *Annals of Mathematical Statistics*. 20, 552-560.
- Rohatgi, V. K. (1976), *An Introduction to Probability, Theory and Mathematical*



Statistics, New York: John Wiley.

Scheffé, H. (1959), *The Analysis of Variance*, New York: John Wiley.

Searle, S. R. (1971), *Linear Models*, New York: John Wiley.

Searle, S. R. , Casella G. and McCulloch C. (1992), *Variance Components*, New York: John Wiley.

Sahai, H. and Thompson, W. (1973), "Non-negative Maximum Likelihood Estimators of Variance Components in a Simple Linear Model", *The American Statistician* 27, 112-113.

Shewhart, W. A. (1931), *Economic Control of Manufactured Product*, New York: D. Van Nostrand Company.

Shewhart, W. A. (1939), *Statistical Methods from Viewpoint of Quality Control*, New York: Dover Publications.

Stacy, E. (1962), "A Generalization on the Gamma Distribution", *Annals of Mathematical Statistics*. 33, 1187-1192.

Stacy, E. and Mirham G. (1965), "Parameter Estimation for Generalized Gamma Distribution". *Technometrics*. 7, 349- 458.

Stigler, S. (1986), *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty Before 1900*, Cambridge: Harvard, University Press.

Thompson, W. A. (1962), "The Problem of Negative Estimates of Variance Components", *Annals of Mathematical Statistics*. 33, 273-289.

Youden, W.J. and Steiner E.H. (1987), "Statistical Manual of the Association of Official Analytical Chemists", Arlington. *Association of Official Analytical Chemists*. Arlington.

Wang, Y. (1967), "A Comparison of Several Variance Component Estimators", *Biometrika*. 54: 301-305.

Whittaker, E. T. and Watson G. N. (1969), *A Course of Modern Analysis*, 4 Ed. Londres: Cambridge University Press. Cambridge.

Zehna, P. (1966), "Invariance of Maximum Likelihood Estimators", *Annals of Mathematical Statistics*. 37, 744.