UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FISICO QUÍMICA Y NATURALES

TESIS DE MAESTRÍA

EN

MATEMÁTICA APLICADA

SOLUCIONES EXACTAS PARA PROCESOS CON CAMBIO DE FASE EN SEMIESPACIOS POROSOS HÚMEDOS CON CONDICIÓN DE FLUJO DE CALOR SOBRE EL BORDE FIJO

por

EDUARDO ADRIAN SANTILLAN MARCUS

Director:

DR. DOMINGO ALBERTO TARZIA

05 de noviembre de 1998

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primaria 35C05, 35R35, 80A20, 80A22.

Palabras claves: Frontera Libre. Problema de Stefan, congelamiento, derretimiento, sublimación, desublimación, medios porosos, soluciones exactas, método de similaridad, ecuación del calor, transferencia del calor y masa, humedad.

INDICE GENERAL

T 147

Resumen

En esta tesis se contemplan tres partes fundamentales dadas por los Capítulos 2 a 4. Primero en el Capítulo 2 se obtuvieron soluciones exactas para las distribuciones de temperatura y humedad para un problema de congelamiento de humedad en un medio poroso con condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0 / \sqrt{\tau}$, con $q_0 > 0$. Una desigualdad para el coeficiente q_0 es necesaria y suficiente para obtener dicha solución explícita. Luego, introducimos un nuevo problema que es el problema anterior cambiando la condición de flujo por una condición de temperatura en $x = 0$, y estudiamos el comportamiento de la solución de este problema cuando el parámetro calor latente L tiende a infinito. Finalmente establecimos una equivalencia entre esos dos problemas cuando q_0 satisface dicha desigualdad. Por otro lado para el problema con dato de temperatura en el borde fijo se halló una desigualdad para el coeficiente que caracteriza la frontera libre.

Luego en el Capítulo 3 se obtuvieron soluciones exactas para las distribuciones de temperatura y humedad en un proceso de desublimación en un medio poroso con una condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0/\sqrt{t}$, con $q_0 > 0$ y establecimos resultados análogos a los dados en la parte anterior.

Finalmente en el Capítulo 4 se obtuvieron soluciones exactas para las distribuciones de temperatura y humedad en un problema de secado con transferencia de calor y masa acoplados en un semi-espacio poroso con condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0/\sqrt{\tau}$, con $q_0 > 0$, en el caso en el que el coeficiente $Lu = 1$. Una desigualdad para el coeficiente q_0 es necesaria y suficiente para obtener dicha solución explícita.

Estos resultados generalizan los obtenidos para el problema de cambio de fase sólido-líquido hecho por Tarzia en Quart. Appl. Math. (1981).

1. Introducción

Los procesos de transferencia de calor y masa de una sustancia están entre los grupos más importantes de la ciencia moderna, y tienen una gran importancia práctica en la ingeniería de las industrias y en los procesos tecnológicos de producción química y de industrias livianas. Los problemas de intercambio de masa y calor adquieren especial importancia en los nuevos procesos. Al mismo tiempo, una característica peculiar de los fenómenos de transferencia de calor y masa en las áreas mencionadas es su interdependencia, cuando la transferencia de calor y masa se vuelve un proceso combinado.

Es importante notar que las leyes que gobiernan los procesos de intercambio de calor y masa son cercanamente similares y las generalizaciones obtenidas en un campo pueden ser usadas exitosamente en el otro. Una característica del desarrollo de esta tecnología es la transferencia de métodos y diseños de procesos de una rama de la industria hacia otra. Esto hace posible cambios radicales en el proceso de producción y la creación de nuevos métodos de producción de materiales y artículos manufacturados. La base científica de muchos procesos de ingeniería termal es la teoría de transferencia de calor y masa, que incluye la hidrodinámica de medios continuos y la física molecular, termodinámica y la química física de medios dispersos. La teoría cinética molecular del fenómeno de intercambio de calor y masa es muy complicado y no ha sido lo suficientemente trabajado: No obstante al día de hoy la teoría de intercambio de calor y masa es principalmente una teoría fenomenológica, basada en la hidrodinámica y la termodinámica de los medios continuos. En los últimos años, gracias a los trabajos de físicos alemanes y belgas se han originado nuevos métodos poderosos de investigación empírica del fenómeno de transferencia llamado la termodinámica de procesos irreversibles o la termodinámica de los estados en no-equilibrio. Este método nos permite estudiar la transferencia de calor y masa de una sustancia en su asociación inseparable. Abraza la hidrodinámica de líquidos viscosos, conductividad de calor, difusión y fricción interna. Como resultado, en vez de ecuaciones diferenciales separadas de movimiento (Navier - Stokes), transferencia de calor (Fourier - Kirchhoff), y difusión (Fick), un sistema de ecuaciones diferenciales interconectadas de transferencia de masa y energía es obtenido. La solución de tal sistema de ecuaciones diferenciales presenta grandes dificultades matemáticas, luego en la mayor parte de los casos se emplean métodos numéricos de resolución usando computadoras. No obstante, en algunos casos particulares de transferencia de calor y masa (en soluciones moleculares, mezclas fijas binarias, medios dispersos y cuerpos de capilares porosos), este sistema de ecuaciones diferenciales puede resolverse completamente. Estas soluciones ofrecen sin duda un gran interés no sólo por el cálculo del proceso de transferencia de calor y masa sino también por el estudio de las leyes fundamentales de intercambio de calor y masa y, en particular, para trabajar nuevos métodos de determinación de características termofísicas.

La transferencia de calor y masa con los problemas de cambio de fase, que se llevan a cabo en medios porosos, tales como la evaporación, la condensación, el congelamiento, el derretimiento, la sublimación y la desublimación, tienen amplia aplicación en los procesos de separación, tecnología alimentaria, migración de calor y mezclas en suelos y terrenos, etc. Debido a la no-linealidad del problema, la obtención de soluciones explícitas usualmente tienen dificultades matemáticas. Sólo unas pocas soluciones exactas han sido halladas para casos ideales, por ejemplo Lamé y Clapeyron en 1831, Stefan en 1890, Carslaw y Jaeger en 1959, Luikov en 1968, Mikhailov en 1975 y 1976, y Tarzia en 1981. La importancia científica y tecnológica de los problemas de frontera libre queda manifiesta por los trabajos de Crank en 1984, Tarzia en 1988 y Lunardini en 1991.

La formulación matemática de la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos ha sido establecida por Luikov en 1966, 1968 y 1978. La resolución del problema de la evaporación de humedad líquida desde un medio poroso con dos modelos diferentes fue presentada por Mikhailov en 1975. Para la resolución del problema del congelamiento (desublimación) de un semi-espacio poroso húmedo, Mikhailov también presentó una solución exacta en 1976. Lin presentó en 1982 una solución exacta del problema de desublimación en un medio poroso para una condición de temperatura sobre un borde fijo. Otros problemas en esta dirección fueron dados por Fasano et al. en 1993 (y por aparecer), Gonzalez y Tarzia en 1996, y Santillan Marcus y Tarzia (por aparecer).

En el capítulo 2 se obtendrán soluciones explícitas (Santillan Marcus - Tarzia [17]) para el caso de congelamiento de un semi-espacio poroso húmedo con condición de flujo de calor en el borde fijo dada por Tarzia [20]. Se basa en un trabajo realizado por M. D. Mikhailov [16], y se utiliza para la realización de éste la solución de Neumann luego de adimensionalizar el problema. En este capítulo aparecen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}(x,\tau)\,, \text{ para la región de congelamiento}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}(x,\tau)\,, \text{ para la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) + a_m \delta \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}(x,\tau)\,, \text{ también en esta última región.}$$

donde t_1 es la temperatura en la región de congelamiento, t_2 es la temperatura en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados, a_1 es la difusividad termal en la región de congelamiento, a_2 es la difusividad termal en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados, a_m es la difusividad de humedad, u es el potencial de transferencia de masa, δ es el coeficiente del gradiente termal, x es la longitud y τ es el tiempo. Aquí consideramos que la capacidad volumétrica de la fuente (o sumidero) del material ya sea en la región de congelamiento o en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados es cero, de acuerdo a las ecuaciones (5.71) – (5.72) vistas en el Apéndice 1.

En el capítulo 3 se estudiarán soluciones explícitas (Santillan Marcus - Tarzia [18]) para el problema de desublimación, también en un semi-espacio húmedo poroso con condición de flujo de calor en el borde fijo dada por Tarzia [20]. Se basa en un trabajo realizado por S. Lin [9], y se utilizan para la realización de éste el método de similaridad y la solución de Neumann. En este capítulo aparecen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}(x,\tau), \text{ para la región de congelamiento}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}(x,\tau), \text{ para la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}, \text{ también en esta última región.}$$

donde t_1 es la temperatura en la región de congelamiento, t_2 es la temperatura en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados, a_1 es la difusividad termal en la región de congelamiento, a_2 es la difusividad termal en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados, a_m es la difusividad de masa del vapor, u es el potencial de transferencia de masa, x es la longitud y τ es el tiempo. Aquí consideramos que la capacidad volumétrica de la fuente (o sumidero) del material ya sea en la región de congelamiento o en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados es cero, y que el coeficiente del gradiente termal (5.50) es cero, de acuerdo a las ecuaciones (5.71) – (5.72) vistas en el Apéndice 1.

En el capítulo 4 se buscarán soluciones exactas para el problema de cambio de fase acoplado en un medio poroso, basándose en un trabajo de S. Cho [3]. Se utilizan para la realización de éste también el método de similaridad y la condición de flujo del tipo $\frac{q_0}{\sqrt{\tau}}$ en $x = 0$, además de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas con condiciones de frontera. En este capítulo aparecen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}(x,\tau)\,, \text{ para la región seca}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon L c_m}{c_q}\frac{\partial u_2}{\partial \tau} \text{ para la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_m \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x,\tau)\,, \text{ también en esta última región.}$$

donde t_1 es la temperatura en la región seca, t_2 es la temperatura en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados, a_1 es la difusividad termal en la región seca, a_2 es la difusividad termal en la región donde hay flujos de calor y humedad acoplados, a_m es la difusividad de humedad, L es el calor latente de evaporación de líquido por unidad de masa, c_m es la capacidad de masa específica, c_q es la capacidad de calor específico, u_2 es el potencial de transferencia de masa, ε es el criterio de cambio de fase, x es la longitud y τ es el tiempo. Aquí consideramos que la capacidad volumétrica de la fuente (o sumidero) del material en la región de secado es cero, y que el coeficiente del gradiente termal (5.50) es cero, de acuerdo a las ecuaciones (5.71) – (5.72) vistas en el Apéndice 1.

Luego en el ya mencionado Apéndice 1 se presenta un resumen extraído principalmente del libro de Luikov (1966) sobre transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos. Con el objetivo de hacer que este trabajo esté autocontenido, se presenta en el Apéndice 2 el método de similaridad o semejanza para la resolución de la ecuación del calor, extraído en parte de Tarzia [21], método que jugará un papel preponderante y será utilizado en los capítulos 2 al 4. A continuación de éste se da una nomenclatura de las variables importantes usadas en todo el texto.

2. Soluciones exactas para el congelamiento de un semiespacio poroso húmedo con condición de flujo de calor.

En lo que sigue, estudiaremos el congelamiento (desublimación) de humedad en un medio poroso con condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0 / \sqrt{\tau}$, donde $q_0 > 0$ es una dada constante real. Definiremos un modelo analítico del proceso y obtendremos soluciones exactas para la temperatura y la humedad. Una inecuación para el coeficiente q_0 es necesaria y suficiente para obtener esa solución explícita. Finalmente, encontraremos una equivalencia entre un problema de cambio de fase con condición de temperatura y un problema de cambio de fase con condición de flujo de calor del tipo $q_0 / \sqrt{\tau}$, ambos impuestos en la frontera fija $x = 0$.

Consideremos el flujo de calor y humedad a través de un semi-espacio poroso durante el congelamiento, como fue considerado por Luikov en [12] y por Mikhailov en [16]. La posición del frente de cambio de fase en el tiempo τ está dada por $x = s(\tau)$ que divide al cuerpo poroso en dos regiones. En la región de congelamiento, $0 < x < s(\tau)$, no hay movimiento de humedad y la distribución de temperatura está descripta por la ecuación del calor

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}(x,\tau), \qquad 0 < x < s(\tau), \tau > 0 \tag{2.1}$$

La región $s(\tau) < x < +\infty$ es la zona del cuerpo de capilares porosos húmedos en donde hay flujos de calor y humedad acoplados. El proceso es descripto por el bien conocido sistema de Luikov [15] para el caso $\varepsilon = 0$ (ε es el factor de conversión de fase de líquido en vapor) (ver Apéndice 1):

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}(x,\tau), \qquad x > s(\tau), \tau > 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) + a_m \delta \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}(x,\tau), \qquad x > s(\tau), \tau > 0 \tag{2.3}$$

Las distribuciones iniciales de temperatura y humedad son uniformes:

$$\begin{aligned} t_2(x,0) &= t_2(+\infty,\tau) = t_0 \\ u(x,0) &= u(+\infty,\tau) = u_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se supone que sobre la superficie del semi-espacio el flujo de calor depende del tiempo de la manera siguiente, como en [20]:

$$k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}(0,\tau) = q_0 / \sqrt{\tau} \tag{2.5}$$

donde $q_0 > 0$ es un coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$ que debe ser medido experimentalmente, y por ende se supone que es un dato del problema. Sobre el frente de congelamiento, existe una igualdad entre las temperaturas:

$$t_1(s(\tau),\tau) = t_2(s(\tau),\tau) = t_v, \qquad \tau > 0 \tag{2.6}$$

donde $t_v < t_0$.

El balance de calor y humedad en el frente de congelamiento nos da

$$k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}(s(\tau),\tau) - k_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}(s(\tau),\tau) = u(s(\tau),\tau)\,\rho_2 L \frac{ds}{d\tau}(\tau), \qquad \tau > 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(\tau),\tau) + \delta \frac{\partial t_2}{\partial x}(s(\tau),\tau) = 0, \qquad \tau > 0 \tag{2.8}$$

El conjunto de ecuaciones y condiciones (2.1)-(2.8) se llamará problema P.

En la Sección 2.1 obtendremos una solución exacta para el problema P cuando q_0 satisface una cierta desigualdad que depende de los datos del problema. Luego, en la Sección 2.2 introduciremos el Problema $\widetilde{P}$, que es el problema P con la condición (2.5) cambiada por una condición de temperatura en $x = 0$, dada por Mikhailov en [16] y estudiaremos el comportamiento de la solución de este problema considerando cuando el parámetro calor latente L tiende a infinito. Finalmente en la Sección 2.3 establecemos una equivalencia entre los problemas P (condición de flujo de calor en $x = 0$) y $\widetilde{P}$ (condición de temperatura en $x = 0$), y obtendremos una inecuación que debe verificar el coeficiente que caracteriza la frontera libre del problema $\widetilde{P}$.

2.1. Solución del problema

Si consideramos las siguientes transformaciones:

$$X = x/l_0; \quad F_0 = a_2\tau/l_0^2; \quad S(F_0) = s(\tau)/l_0$$

$$T_i(X, F_0) = (t_i(x,\tau) - t_v)/(t_0 - t_v), \quad i = 1,2$$

$$\Theta(X, F_0) = (u_0 - u(x,\tau))/u_0$$

el conjunto de ecuaciones y condiciones $(2.1)-(2.8)$ puede ser puesto en una forma adimensional como sigue:

$$\frac{\partial T_1}{\partial F_0}(X,F_0) = a_{12}\frac{\partial^2 T_1}{\partial X^2}(X,F_0), \qquad 0 < X < S(F_0), \quad F_0 > 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial F_0}(X,F_0) = \frac{\partial^2 T_2}{\partial X^2}(X,F_0), \qquad X > S(F_0), \quad F_0 > 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_0}(X,F_0) = \mathcal{L}_u\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}(x,\tau) + \mathcal{L}_u\mathcal{P}_n\frac{\partial^2 T_2}{\partial X^2}(x,\tau), \qquad X > S(F_0), \quad F_0 > 0 \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &T_2(X,0) = T_2(+\infty, F_0) = 1 \\ &\Theta(X,0) = \Theta(+\infty, F_0) = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial X}(0,F_0) = q_0\sqrt{a_2}/\left[k_1(t_0 - t_v)\sqrt{F_0}\right] \tag{2.13}$$

$$T_1\left(S\left(F_0\right), F_0\right) = T_2\left(S\left(F_0\right), F_0\right) = 0, \qquad F_0 > 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X}\left(S\left(F_0\right), F_0\right) + \mathcal{P}_n \frac{\partial T_2}{\partial X}\left(S\left(F_0\right), F_0\right) = 0, \qquad F_0 > 0 \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} & k_{12} \frac{\partial T_1}{\partial X}\left(S\left(F_0\right), F_0\right) - \frac{\partial T_2}{\partial X}\left(S\left(F_0\right), F_0\right) = \\ & = K_0\left(1 - \Theta\left(S\left(F_0\right), F_0\right)\right) \frac{dS}{dF_0}\left(F_0\right), \qquad F_0 > 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por razones de conveniencia en la resolución del problema, introduciremos ahora una nueva función desconocida, la cual acopla T_2 y Θ, es decir:

$$Z\left(X, F_0\right) = T_2\left(X, F_0\right) + \left[\left(1 - \mathcal{L}_u\right) \big/ \left(\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n\right)\right] \Theta\left(X, F_0\right), \qquad X > S\left(F_0\right), \quad F_0 > 0 \tag{2.17}$$

Luego de algunos cálculos elementales obtenemos:

$$\frac{\partial Z}{\partial F_0}\left(X, F_0\right) = \mathcal{L}_u \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\left(X, F_0\right), \qquad X > S\left(F_0\right), \quad F_0 > 0 \tag{2.18}$$

Entonces de las ecuaciones $(2.9), (2.10)$ y (2.18) podemos obtener las siguientes soluciones [1,21]:

$$T_1\left(X, F_0\right) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(X \big/ 2\sqrt{a_{12} F_0}\right), \qquad 0 < X < S\left(F_0\right), \quad F_0 > 0 \tag{2.19}$$

$$T_2\left(X, F_0\right) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}\left(X \big/ 2\sqrt{F_0}\right), \qquad X > S\left(F_0\right), \quad F_0 > 0 \tag{2.20}$$

$$Z(X, F_0) = A_3 + B_3 \,\mathrm{erf}\left(X \big/ 2\sqrt{\mathcal{L}_u F_0}\right), \qquad X > S(F_0), \quad F_0 > 0 \tag{2.21}$$

$$S(F_0) = 2\lambda\sqrt{F_0}\,, \qquad\qquad F_0 > 0 \tag{2.22}$$

donde las constantes λ, A_i y B_i, $i = 1, 2, 3$, deben ser elegidas de forma tal que satisfagan las siete condiciones que corresponden a las condiciones inicial y de borde $(2.12) - (2.16)$.

Además, $erf(z)$ es la función error definida por

$$erf(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z exp(-x^2)dx$$

y $erfc(z)$ es la función error complementaria, definida por

$$erfc(z) = 1 - erf(z)$$

De la condición inicial (2.12), obtenemos un sistema de dos ecuaciones algebraicas dadas por

$$A_2 = 1 - B_2, \qquad A_3 = 1 - B_3 \,\cdot \tag{2.23}$$

La ecuación (2.13) nos lleva a la solución

$$B_1 = \sqrt{\pi a_1} q_0 \big/ \left[k_1 (t_0 - t_v)\right]. \tag{2.24}$$

De la condición (2.14) , obtenemos

$$A_1 = -\left[\sqrt{\pi a_1} q_0 \diagup \left(k_1 \left(t_0 - t_v\right)\right)\right] \operatorname{erf}\left(\lambda \diagup \sqrt{a_{12}}\right) \tag{2.25}$$

$$B_2 = \left(1 - \operatorname{erf} \lambda\right)^{-1}. \tag{2.26}$$

Sigue de la ecuación (2.15) que:

$$B_3 = \exp\left(\lambda^2 \diagup \mathcal{L}_u\right) \diagup \left[\sqrt{\mathcal{L}_u} \exp\left(\lambda^2\right)\right] \left(1 - \operatorname{erf} \lambda\right) \tag{2.27}$$

Luego de determinar las constantes A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3 en función de λ de las ecuaciones (2.23) a la (2.27) , las soluciones (2.19) , (2.20) , y (2.22) pueden escribirse como:

$$T_1\left(X, F_0\right) = \left[\sqrt{\pi a_1} q_0 \diagup \left(k_1 \left(t_0 - t_v\right)\right)\right] \left(\operatorname{erf}\left(X \diagup 2\sqrt{a_{12} F_0}\right) - \operatorname{erf}\left(\lambda \diagup \sqrt{a_{12}}\right)\right) \tag{2.28}$$

$$T_2\left(X, F_0\right) = \left(1 - \operatorname{erf} \lambda\right)^{-1} \left(\operatorname{erf}\left(X \diagup 2\sqrt{F_0}\right) - \operatorname{erf} \lambda\right) \tag{2.29}$$

$$\Theta\left(X, F_0\right) =$$
$$= 1 - \left\{\exp\left(\lambda^2 \diagup \mathcal{L}_u\right) \diagup \left\{\left[\sqrt{\mathcal{L}_u} \exp\left(\lambda^2\right)\right] \left(1 - \operatorname{erf} \lambda\right)\right\}\right\} \left(1 - \operatorname{erf}\left(X \diagup 2\sqrt{\mathcal{L}_u F_0}\right)\right) \tag{2.30}$$

Las tres funciones T_1, T_2 y Θ están explicitadas como función del parámetro λ que debe determinarse por la condición (2.16) que nos da la siguiente ecuación trascendental:

$$\left\{\sqrt{\pi a_2} q_0 \diagup \left[k_2 \left(t_0 - t_v\right)\right]\right\} \exp\left(-x^2 \diagup a_{12}\right) - F_1\left(x\right) =$$
$$= \sqrt{\pi} K_0 x \left(1 - \left[\left(1 - \mathcal{L}_u\right) \diagup \left(\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n\right)\right] \left(1 - H\left(x\right)\right)\right), \qquad x > 0 \tag{2.31}$$

donde

$$F_1\left(x\right) = \exp\left(-x^2\right) . \left(1 - \operatorname{erf} x\right)^{-1}$$
$$Q\left(x\right) = \sqrt{\pi} x \exp\left(-x^2\right) \left[1 - \operatorname{erf} x\right] \tag{2.32}$$
$$H\left(x\right) = Q\left(x \diagup \sqrt{\mathcal{L}_u}\right) \diagup Q\left(x\right)$$

son funciones reales definidas para $x > 0$.

Por razones de conveniencia en la notación, definimos las siguientes funciones reales

$$\mu\left(x\right) = \left\{\sqrt{\pi a_2} q_0 \diagup \left[k_2 \left(t_0 - t_v\right)\right]\right\} \exp\left(-x^2 \diagup a_{12}\right) - F_1\left(x\right), \qquad x > 0 \tag{2.33}$$

$$\beta\left(x\right) = \sqrt{\pi} K_0 x \left(1 - \left[\left(1 - \mathcal{L}_u\right) \diagup \left(\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n\right)\right] \left(1 - H\left(x\right)\right)\right), \qquad x > 0 \tag{2.34}$$

Luego la ecuación (2.31) puede escribirse diciendo que λ debe ser la solución de la ecuación

$$\mu\left(x\right) = \beta\left(x\right), \qquad x > 0. \tag{2.35}$$

Entonces podemos enunciar y demostrar la siguiente propiedad:

Teorema: i) Si

$$q_0 > k_2\left(t_0 - t_v\right) \big/ \sqrt{\pi a_2}, \tag{2.36}$$

entonces existe una única solución $\lambda > 0$ de la ecuación (2.35). En tal caso la solución del problema (P) está dada por $(2.28) - (2.30)$

ii) Si $q_0 \leq k_2\left(t_0 - t_v\right) \big/ \sqrt{\pi a_2}$, entonces no hay solución del problema $(2.1) - (2.8)$ como problema de cambio de fase; es sólo un problema de conducción de calor para la fase inicial.

Demostración: En [20] fueron estudiadas las propiedades de $F_1(x)$, a saber: $F_1(0) = 1, F_1(+\infty) = +\infty$, y $F_1'(x) > 0, \forall x > 0$, como las de la función Q : $Q(0) = 0, Q(+\infty) = 1$, y $Q'(x) > 0, \forall x > 0$. Entonces, podemos obtener las propiedades de la función $H(x)$:

$$H(0) = \lim_{x \to 0} Q\left(x \big/ \sqrt{\mathcal{L}_u}\right) \big/ Q\left(x\right) = \mathcal{L}_u^{-\frac{1}{2}}, \qquad H(+\infty) = 1,$$

$$H'(x) = 2\left(\pi \mathcal{L}_u\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{Q(x) - 1}{F_1\left(x \big/ \sqrt{\mathcal{L}_u}\right)} - \frac{Q(x \big/ \sqrt{\mathcal{L}_u}) - 1}{\sqrt{\mathcal{L}_u} F_1\left(x\right)} \right) \left[F_1\left(x\right)\right]^2.$$

Luego obtenemos

$$H'(x) > 0 \quad si \quad \mathcal{L}_u < 1,$$

$$H'(x) < 0 \quad si \quad \mathcal{L}_u > 1,$$

$$H'(x) = 0 \quad si \quad \mathcal{L}_u = 1.$$

Por lo tanto, H es una función estrictamente creciente si $\mathcal{L}_u < 1$, y es una función estrictamente decreciente si $\mathcal{L}_u > 1$.

Ahora, podemos obtener las propiedades de la función $\beta(x)$, vale decir:

$$\beta(0) = 0, \quad \beta(+\infty) = +\infty,$$

$$\beta'(x) = \sqrt{\pi} K_0 \left(1 - \left[(1-\mathcal{L}_u) \diagup (\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n)\right](1 - H(x))\right) + \sqrt{\pi} K_0 x \left(\left[\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n \diagup (1-\mathcal{L}_u)\right] H'(x)\right) \tag{2.37}$$

Notemos que si $\mathcal{L}_u < 1$, tenemos $[\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n \diagup (1-\mathcal{L}_u)] > 0$ y $H'(x) > 0$, y entonces

$$\sqrt{\pi} K_0 x \left(\left[\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n \diagup (1-\mathcal{L}_u)\right] H'(x)\right) > 0, \tag{2.38}$$

Similarmente, si $\mathcal{L}_u > 1, [\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n \diagup (1-\mathcal{L}_u)] < 0$ y $H'(x) < 0$, nuevamente es válida (2.38). Por lo tanto, en cualquier caso tenemos $\beta'(x) > 0$, $\forall x > 0$.

Finalmente, deducimos las propiedades de la función $\mu(x)$:

$$\mu(0) = \left\{\sqrt{\pi a_2} q_0 \diagup \left[k_2 (t_0 - t_v)\right]\right\} - 1, \ \mu(+\infty) = -\infty,$$
$$\mu'(x) = -\left\{\left(\left\{\sqrt{\pi a_2} q_0 \diagup \left[k_2 (t_0 - t_v)\right]\right\}(2x \diagup a_{12})\right) \exp\left(-x^2 \diagup a_{12}\right) + F_1'(x)\right\} < 0,$$
$$\forall x > 0. \tag{2.39}$$

Por lo tanto, $\mu(x)$ es estrictamente decreciente para $x > 0$.

Entonces, obtenemos una única solución de la ecuación (2.35) en el caso $\left\{\sqrt{\pi a_2} q_0 \diagup \left[k_2 (t_0 - t_v)\right]\right\} - 1 > 0$, esto es, q_0 satisface la inecuación (2.36). En el caso $q_0 \leq k_2 (t_0 - t_v) \diagup \sqrt{\pi a_2}$, no hay solución de la ecuación (2.35) y entonces no hay solución del problema (2.1) – (2.8) como problema de cambio de fase. Por ende, si $q_0 \leq k_2 (t_0 - t_v) \big/ \sqrt{\pi a_2}$ existe sólo un problema de conducción de calor para la fase inicial.

Nota: El caso límite $q_0 = k_2 (t_0 - t_v) \big/ \sqrt{\pi a_2}$ puede interpretarse como el límite de la solución para el caso $q_0 > k_2 (t_0 - t_v) \big/ \sqrt{\pi a_2}$ cuando $L \to +\infty$ (ver más abajo).■

2.2. Enunciado del problema $\widetilde{P}$

Si reemplazamos la condición de flujo de calor (2.5) por una condición de temperatura constante en el borde fijo $x = 0$ expresada por

$$t_1 (0, \tau) = t_s \tag{2.5 bis}$$

donde $t_s < t_v$, sea el problema $\widetilde{P}$ dado por las condiciones (2.1)–(2.4), (2.5*bis*), (2.6)–(2.16), que fue estudiado por [13]. Su solución está dada por:

$$\widetilde{T}_1 (X, F_0) = \widetilde{A_1} + \widetilde{B_1} \operatorname{erf} \left(X \big/ 2\sqrt{a_{12} F_0}\right) = \widetilde{T}_s \left(1 - \frac{\operatorname{erf}\left(X \big/ 2\sqrt{a_{12} F_0}\right)}{\operatorname{erf}\left(\widetilde{\lambda} \big/ \sqrt{a_{12}}\right)}\right), \quad 0 < X < \widetilde{S}(F_0) \tag{2.40}$$

$$\widetilde{T}_2 (X, F_0) = \widetilde{A_2} + \widetilde{B_2} \operatorname{erf} \left(X \big/ 2\sqrt{F_0}\right) = \left(1 - \operatorname{erf} \widetilde{\lambda}\right)^{-1} \left(\operatorname{erf} \left(X \big/ 2\sqrt{F_0}\right) - \operatorname{erf} \widetilde{\lambda}\right), \quad X > \widetilde{S}(F_0) \tag{2.41}$$

$$\widetilde{\Theta}(X, F_0) =$$

$$= [\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n / (1 - \mathcal{L}_u)] \left(1 - \frac{\exp(\widetilde{\lambda}/\mathcal{L}_u) \operatorname{erf}(X/2\sqrt{\mathcal{L}_u F_0})}{\sqrt{\mathcal{L}_u} \exp(\widetilde{\lambda}^2)[1 - \operatorname{erf}\widetilde{\lambda}]} + \frac{\operatorname{erf}\widetilde{\lambda}}{1 - \operatorname{erf}\widetilde{\lambda}} - \frac{\operatorname{erf}(X/2\sqrt{F_0})}{1 - \operatorname{erf}\widetilde{\lambda}}\right) \tag{2.42}$$

$$\widetilde{S}(F_0) = 2\widetilde{\lambda}\sqrt{F_0} \tag{2.43}$$

donde $\widetilde{T}_s = (t_s - t_v) / (t_0 - t_v) < 0$, y $\widetilde{\lambda}$ satisface la siguiente ecuación:

$$\alpha(x) = \beta(x), \qquad x > 0 \tag{2.44}$$

donde

$$\alpha(x) = -k_{12}\widetilde{T}_s (a_{12})^{-\frac{1}{2}} \left(\exp\left(-x^2/a_{12}\right) / \operatorname{erf}(x/\sqrt{a_{12}})\right), \quad x > 0$$

y $\beta(x)$ está dada por (2.34).

La función $\alpha(x)$ es una función contínua decreciente, con las propiedades siguientes:

$$\alpha(0) = +\infty; \quad \alpha(+\infty) = -\infty; \quad \alpha'(x) < 0, x > 0 \tag{2.45}$$

(Notemos que $[\mathcal{L}_u \mathcal{P}_n / (1 - \mathcal{L}_u)] H'(x) > 0, \forall \mathcal{L}_u \neq 1$). Por lo tanto, hay una única solución $\widetilde{\lambda}$ de la ecuación (2.44).

Si ahora consideramos al calor latente L como un parámetro en el problema $\widetilde{P}$, entonces tenemos una dependencia de las soluciones en este nuevo parámetro, digamos $\widetilde{T}_2 = \widetilde{T}_{2L}; \widetilde{\Theta} = \widetilde{\Theta}_L; \widetilde{S} = \widetilde{S}_L; \widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(L)$ y podemos ver fácilmente el siguiente enunciado:

Proposición: Si $L \to +\infty$, el parámetro $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(L) \to 0$, y las soluciones del problema $\widetilde{P}$ tienden a:

$$\lim_{L\to+\infty} \widetilde{T}_{2L}(X, F_0) = \operatorname{erf}\left(X\big/2\sqrt{F_0}\right), \quad X > 0 \tag{2.46}$$

$$\lim_{L\to+\infty} \widetilde{\Theta}_L(X, F_0) =$$
$$= \left[\mathcal{L}_u\mathcal{P}_n\big/\left(1-\mathcal{L}_u\right)\right]\left(1-\operatorname{erf}\left(X\big/2\sqrt{F_0}\right)-\left(\mathcal{L}_u\right)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{erf}\left(X\big/2\sqrt{\mathcal{L}_uF_0}\right)\right), \; X > 0 \tag{2.47}$$

$$\lim_{L\to+\infty} \widetilde{S}_L(t) = 0 \tag{2.48}$$

Remarcamos que (2.46)-(2.48) es la solución para el problema de transferencia de calor sin un proceso de cambio de fase para la fase inicial con condición de temperatura constante sobre la superficie $x = 0$. Podemos interpretar (2.42)-(2.43) para el caso $L \to +\infty$, diciendo que la fase inicial no alcanza la otra fase. Más aún, podemos obtener que la solución del problema P para el caso límite $q_0 = k_2\left(t_0 - t_v\right)\big/\sqrt{\pi a_2}$ está dada por (2.46)-(2.48).

2.3. Relación entre problemas con temperatura y flujo de calor en el borde fijo.

Ahora, volvemos al problema inicial P con condición de flujo de calor, considerando $q_0 > k_2(t_0 - t_v) \diagup \sqrt{\pi a_2}$. Calculando (2.28) en $x = 0$, obtenemos:

$$T_1(0,\tau) = -\left[\sqrt{\pi a_1} q_0 \diagup (k_1(t_0 - t_v))\right] \operatorname{erf}\left(\lambda \diagup \sqrt{a_{12}}\right) \qquad (2.49)$$

Volviendo a las variables adimensionales , observamos que

$$t_1(0,\tau) = -(t_0 - t_v)\left(\sqrt{a_{12}} \diagup k_{12}\right) \operatorname{erf}\left(\lambda \diagup \sqrt{a_{12}}\right) + t_v < t_v \qquad (2.50)$$

Luego podemos considerar el problema $\widetilde{P}$ poniendo

$$t_s = -\left[\sqrt{\pi a_1} q_0 \diagup k_1\right] \operatorname{erf}\left(\lambda \diagup \sqrt{a_{12}}\right) + t_v < t_v \qquad (2.51)$$

La solución de este problema está dada por (2.40)-(2.43) donde $\widetilde{\lambda}$ es solución de la ecuación (2.44) . Sabemos que para este problema existe un único $\widetilde{\lambda} > 0$ tal que $\alpha\left(\widetilde{\lambda}\right) = \beta\left(\widetilde{\lambda}\right)$. Ahora queremos demostrar que $\widetilde{\lambda} = \lambda$; para lo que tenemos que probar que $\widetilde{\lambda}$ es también solución de la ecuación (2.35).

$$\beta\left(\widetilde{\lambda}\right) = \alpha\left(\widetilde{\lambda}\right) =$$
$$= \left(k_{12}\sqrt{\pi a_1}q_0 / \left[k_1\left(t_0 - t_v\right)\sqrt{a_{12}}\right]\right)\operatorname{erf}\left(\widetilde{\lambda} / \sqrt{a_{12}}\right)\frac{\exp\left(-\widetilde{\lambda}^2 / a_{12}\right)}{\operatorname{erf}\left(\widetilde{\lambda} / \sqrt{a_{12}}\right)} - F_1\left(\widetilde{\lambda}\right) =$$
$$= \left[\sqrt{\pi a_2}q_0 / \left(k_2\left(t_0 - t_v\right)\right)\right]\exp\left(-\widetilde{\lambda}^2 / a_{12}\right) - F_1\left(\widetilde{\lambda}\right) = \mu\left(\widetilde{\lambda}\right), \tag{2.52}$$

vale decir que $\widetilde{\lambda}$ es una solución de la ecuación (2.35), la cual tiene una única solución λ, entonces $\widetilde{\lambda} = \lambda$.

Además, las constantes $\widetilde{A}_1$ y $\widetilde{B}_1$ pertenecientes a la solución $\widetilde{T}_1$ son

$$\widetilde{A}_1 = -\left[\sqrt{\pi a_1}q_0 / \left(k_1\left(t_0 - t_v\right)\right)\right]\operatorname{erf}\left(\lambda / \sqrt{a_{12}}\right) = A_1 \tag{2.53}$$

$$\widetilde{B}_1 = -\widetilde{T}_s \overset{-1}{\operatorname{erf}}\left(\lambda / \sqrt{a_{12}}\right) = \sqrt{\pi a_1}q_0 / \left(k_1\left(t_0 - t_v\right)\right) = B_1 \tag{2.54}$$

y A_2, A_3, B_2, B_3 son las mismas que en $(2.22), (2.25)$ y (2.26). Es obvio que si $\lambda = \widetilde{\lambda}$, resulta $S = \widetilde{S}$.

Por lo tanto, obtuvimos que las soluciones del problema $\widetilde{P}$ son las mismas que las del problema inicial, esto es decir, $T_1 = \widetilde{T}_1; T_2 = \widetilde{T}_2; \theta = \widetilde{\theta}; S = \widetilde{S}$. Esto inmediatamente implica que $t_1 = \widetilde{t}_1; t_2 = \widetilde{t}_2; u = \widetilde{u}$ y $s = \widetilde{s}$. Luego, podemos enunciar la siguiente propiedad:

Teorema: Un problema de cambio de fase para distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con condición de flujo de calor sobre la superficie $x = 0$ del tipo $q_0/\sqrt{\tau}$ cuyo coeficiente q_0 verifica la condición (2.36), es equivalente al problema de cambio de fase con condición de temperatura en $x = 0$ dado por

$$t_1(0, \tau) = t_s. \tag{2.55}$$

con $t_s < t_v$. Más aún, la relación entre q_0, t_v y t_s está dada por

$$t_s = t_v - [\sqrt{\pi a_1} q_0 / k_1] \operatorname{erf}(\lambda / \sqrt{a_1}) \tag{2.56}$$

donde λ es el coeficiente que caracteriza la frontera libre.

Como consecuencia de este último Teorema, podemos traducir la inecuación (2.36) correspondiente a q_0 para el problema P a una inecuación para λ para el problema $\widetilde{P}$, esto es decir,

$$\begin{aligned} k_2(t_0 - t_v)(\pi a_2)^{-\frac{1}{2}} &< q_0 = k_1 \frac{\partial}{\partial x} t_1(0, \tau) \sqrt{\tau} = \\ &= k_1 \sqrt{F_0 / a_2} \ (t_0 - t_v) \frac{\partial}{\partial X} T_1(0, F_0) = \\ &= k_1(t_s - t_v) / [\sqrt{\pi a_1} \operatorname{erf}(\lambda / \sqrt{a_{12}})]. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Por lo tanto, obtenemos la inecuación

$$\operatorname{erf}(\lambda / \sqrt{a_{12}}) < k_{12}(t_v - t_s) / \sqrt{a_{12}}(t_0 - t_v) \tag{2.58}$$

que es válida para el problema $\widetilde{P}$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{erf}(x) < 1,\ \forall x > 0$, la acotación (2.58) tiene sentido cuando el lado derecho de la ecuación es menor a uno, vale decir

Corolario: Cuando los datos para el problema $\widetilde{P}$ verifican la inecuación

$$k_{12}\left(t_v - t_s\right) \big/ \sqrt{a_{12}}\left(t_0 - t_v\right) < 1 \tag{2.59}$$

entonces el coeficiente $\widetilde{\lambda}$ de la frontera libre $\widetilde{S}\left(F_0\right) = 2\widetilde{\lambda}\sqrt{F_0}$ satisface la inecuación

$$\widetilde{\lambda} < \sqrt{a_{12}}\,\overset{-1}{\operatorname{erf}}\left(k_{12}\left(t_v - t_s\right) \big/ \sqrt{a_{12}}\left(t_0 - t_v\right)\right). \tag{2.60}$$

2.4. Conclusión

Se obtuvieron soluciones exactas para las distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con una condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0/\sqrt{t}$. Una desigualdad para el coeficiente q_0 es necesaria y suficiente para obtener dicha solución explícita. Luego, introducimos el Problema $\widetilde{P}$, que es el problema P cambiando la condición (2.5) por una condición de temperatura (2.5 bis) en $x = 0$, y estudiamos el comportamiento de la solución de este problema considerando cuando el parámetro calor latente L tiende a infinito. Finalmente establecimos una equivalencia entre un problema de cambio de fase con condición de temperatura y un problema de cambio de fase con condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{t}$ sobre la superficie $x = 0$ cuando q_0 satisface dicha desigualdad. Por otro lado para el problema con dato de temperatura en el borde fijo se halló una inecuación para el coeficiente que caracteriza la frontera libre.

3. Soluciones explícitas para el problema de desublimación en un semiespacio húmedo poroso con condición de flujo de calor.

En lo que sigue, será estudiado un proceso de desublimación en un medio poroso con una condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0/\sqrt{t}$. Se define un modelo analítico del proceso y se obtienen soluciones exactas para distribuciones de temperatura y humedad, así también como la posición de la frontera libre. Para obtener esa solución explícita es necesaria y suficiente una desigualdad para el coeficiente q_0. Finalmente, se obtiene una equivalencia entre un problema de cambio de fase con condición de temperatura y un problema de cambio de fase con condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{t}$ sobre la superficie. Más aún, una inecuación para el coeficiente que caracteriza la desublimación móvil es también obtenida cuando es dada una condición sobre la temperatura en el borde fijo. Se sigue una metodología análoga a la desarrollada en el Capítulo 2.

3.1. Enunciado del problema P

Consideremos un semi-espacio poroso sólido, rígido, que contenga una mezcla uniforme de aire y humedad en forma de vapor. Inicialmente el cuerpo poroso está a una concentración uniforme de humedad u_0 y a una temperatura uniforme t_0. El vapor está desublimado mediante el mantenimiento de una condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{\tau}$ en la superficie en $x = 0$, con $q_0 > 0$. Para la formulación del problema, hacemos las mismas suposiciones que hizo Lin en 1982 en [9]:

(1) En la región congelada, $0 < x < s(\tau)$, no hay movimiento de humedad, donde $s = s(\tau)$ indica el frente móvil de desublimación. En la región de vapor, $s(\tau) < x < +\infty$, hay flujos de calor y masas de húmedad.

(2) Los términos convectivos en la region de vapor son pequeños y pueden ser despreciados.

(3) Las propiedades termofísicas de las regiones congeladas y de vapor permanecen respectivamente constantes.

(4) El efecto Soret, o la difusión termal, hace surgir un flujo de masa que es normalmente muy pequeño en relación al flujo Fickiano normal, y puede ser despreciado.

Las siguientes ecuaciones diferenciales describen el proceso de desublimación:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1(x,\tau)}{\partial x^2}, 0 < x < s(\tau) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2(x,\tau)}{\partial x^2}, s(\tau) < x < +\infty \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}, s(\tau) < x < +\infty \tag{3.3}$$

donde a_1 y a_2 son las difusividades termales en promedio por volumen en las regiones congelada y de vapor, respectivamente, y a_m la difusividad de masa del vapor en promedio por volumen en el cuerpo poroso.

Las condiciones inicial y de frontera pueden describirse como sigue:

$$t_2(x,0) = t_0,\ 0 < x < +\infty \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0,\ 0 < x < +\infty \tag{3.5}$$

$$s(0) = 0 \tag{3.6}$$

$$k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}(0,\tau) = \frac{q_0}{\sqrt{\tau}} \tag{3.7}$$

$$t_1(s(\tau),\tau) = t_2(s(\tau),\tau) = t_s \tag{3.8}$$

$$u(s(\tau),\tau) = u_s < u_0 \tag{3.9}$$

$$t_2(+\infty,\tau) = t_0 \tag{3.10}$$

$$u(+\infty,\tau) = u_0 \tag{3.11}$$

El balance de calor y masa de humedad en el frente de desublimación $x = s(\tau)$ puede expresarse como:

$$k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}(s(\tau),\tau) - k_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}(s(\tau),\tau) = u_h L\, \dot{s}(\tau), \tag{3.12}$$

$$a_m \frac{\partial u(s,\tau)}{\partial x} = (u_h - u_s)\, \dot{s}(\tau), \tag{3.13}$$

donde k_1 y k_2 son las conductividades termales en promedio por volumen en las regiones congeladas y de vapor, respectivamente, L es el calor latente de desublimación, u_s es la concentración de humedad de la fase de vapor en el frente de desublimación y u_h ($u_h < u_s$) es la concentración de humedad de la fase congelada, la cual es desconocida y debe ser determinada como parte de la solución. La condición de flujo de calor (3.7) fue considerada por primera vez por Tarzia en [20] para un problema de cambio de fase.

3.2. Solución del problema P

El sistema de ecuaciones (3.1), (3.2), (3.4), (3.6)-(3.8) y (3.10), que describe las distribuciones de temperatura en las regiones congelada y de vapor en los procesos de desublimación es el mismo que el que describe las distribuciones de temperatura en las regiones sólida y líquida en un proceso de solidificación para una sustancia pura, con condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{\tau}$. Por lo tanto, la solución de Neumann puede ser usada para obtener las distribuciones de temperatura, como fue demostrado por Tarzia en [20] y [21]. La solución de las ecuaciones (3.1) - (3.2) que satisface las condiciones iniciales y de frontera (3.4), (3.6)-(3.8) puede obtenerse como:

$$t_1(x,\tau) = t_s + \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1}\left(erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}}\right) - erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda\right)\right) \tag{3.14}$$

$$t_2(x,\tau) = t_0 + \frac{t_0 - t_s}{erfc\lambda} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}\right) \tag{3.15}$$

donde λ es una constante adimensional que caracteriza el frente de desublimación dada por:

$$s(\tau) = 2\lambda\sqrt{a_2\tau} \tag{3.16}$$

Similarmente, la solución de la ecuación (3.3) que satisface las condiciones inicial y de frontera (3.5), (3.9) y (3.11) pueden expresarse como:

$$u(x,\tau) = u_0 - \frac{u_0 - u_s}{erfc\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_m}}\lambda\right)} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m\tau}}\right) \tag{3.17}$$

Las funciones (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17) satisfacen todas las condiciones inicial y de frontera excepto las condiciones (3.12) y (3.13) que se usan para la determinación de los u_h y λ desconocidos. De (3.15) y (3.17) junto con la ecuación (3.13) obtenemos:

$$u_h = u_s + \sqrt{\frac{a_m}{a_2}}\left(\frac{u_0 - u_s}{\sqrt{\pi}\lambda}\right) F_1\left(\sqrt{\frac{a_m}{a_2}}\lambda\right) \tag{3.18}$$

donde F_1 es la función real definida por (2.32). Luego, poniendo (3.14)-(3.16) y (3.18) en la condición (3.12), obtenemos una ecuación para la determinación de λ, dada por:

$$q_0 \exp\left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda^2\right) - \frac{k_2\left(t_0 - t_s\right)}{\sqrt{\pi a_2}} F_1\left(\lambda\right) - \sqrt{\frac{a_m}{\pi}}\left(u_0 - u_s\right) L F_1\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_m}}\lambda\right) = u_s L \sqrt{a_2}\lambda \tag{3.19}$$

Ahora, definamos las funciones reales $\Psi(x)$ y $\Phi(x)$ de la manera siguiente $(x > 0)$:

$$\Psi\left(x\right) = q_0 exp\left(-\frac{a_2}{a_1}x^2\right) - \frac{k_2\left(t_0 - t_s\right)}{\sqrt{\pi a_2}} F_1(x) - -\sqrt{\frac{a_m}{\pi}}\left(u_0 - u_s\right) L F_1\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_m}}x\right) \tag{3.20}$$

$$\Phi(x) = u_s L \sqrt{a_2} x \tag{3.21}$$

Teniendo en cuenta las propiedades vistas en [7], ya mencionadas en el primer teorema del capítulo 2, resulta que $\Psi(x)$ es una función estrictamente decreciente, con las condiciones límite

$$\Psi\ (0) = q_0 - k_2\frac{t_0 - t_s}{\sqrt{\pi a_2}} - \left(u_0 - u_s\right) L\sqrt{\frac{a_m}{\pi}}; \Psi\left(+\infty\right) = -\infty$$

Más aún, $\Phi\left(x\right)$ es una función estrictamente decreciente, con

$$\Phi\left(0\right) = 0; \Phi\left(+\infty\right) = +\infty$$

Entonces, podemos enunciar el siguiente:

Teorema. Si el coeficiente q_0 verifica la condición

$$q_0 > k_2 \frac{t_0 - t_s}{\sqrt{\pi a_2}} + (u_0 - u_s) L \sqrt{\frac{a_m}{\pi}}, \tag{3.22}$$

entonces existe una y sólo una solución $\lambda > 0$ de la ecuación (3.19).

Si $q_0 \leq k_2 \frac{t_0 - t_s}{\sqrt{\pi a_2}} + (u_0 - u_s) L \sqrt{\frac{a_m}{\pi}}$, entonces no habrá solución del problema (3.1)-(3.13) como problema de cambio de fase; es sólo un problema de conducción del calor para la fase inicial.

Demostración: Debido a las propiedades de Ψ y Φ es suficiente tener $\Psi(0) > \Phi(0)$, que nos da la desigualdad (3.22) para el coeficiente q_0.

3.3. Enunciado del problema P*

Ahora, si reemplazamos la condición de flujo de calor (3.7) por una condición de temperatura en el borde constante en el borde fijo $x = 0$ como la siguiente:

$$t_1(0, \tau) = t_i \tag{3.23}$$

donde $t_i < t_s$, sea el problema P^* dado por las condiciones (3.1)-(3.6), (3.23), (3.8)-(3.13), que fue previamente estudiada por Lin en [9]. Su solución está dada por:

$$t_1^*(x,\tau) = t_i + \frac{t_0 - t_i}{erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda^*\right)} erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}}\right), 0 < x < s^*(\tau) \tag{3.24}$$

$$t_2^*(x,\tau) = t_0 - \frac{t_0 - t_s}{erfc(\lambda^*)} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}\right), x > s^*(\tau) \tag{3.25}$$

$$u^*(x,\tau) = u_0 - \frac{u_0 - u_s}{erfc\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_m}}\lambda^*\right)} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}\right), x > s^*(\tau) \tag{3.26}$$

$$s^*(\tau) = 2\lambda^* \sqrt{a_2\tau} \tag{3.27}$$

donde λ^* satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{gathered} \frac{k_1(t_s - t_i)}{\sqrt{\pi a_1}} F_2\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda^*\right) - \frac{k_2(t_0 - t_s)}{\sqrt{\pi a_2}} F_1(\lambda^*) \\ - \frac{\sqrt{a_m} L(u_0 - u_s)}{\sqrt{\pi}} F_1\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_m}}\lambda^*\right) = \Phi(\lambda^*) \end{gathered} \tag{3.28}$$

donde $\Phi(x)$ está dado por (3.21) y F_2 es la función real definida por $F_2(z) = \dfrac{exp(-z^2)}{erf\,z}$ que satisface las siguientes propiedades

$$F_2(0^+) = +\infty;\ F_2(+\infty) = 0;\ F_2'(x) < 0\,\forall x > 0$$

Si, como antes, definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned}\Theta(x) = &\frac{k_1(t_s - t_i)}{\sqrt{\pi a_1}} F_2\left(\sqrt{\tfrac{a_2}{a_1}} x\right) - \frac{k_2(t_0 - t_s)}{\sqrt{\pi a_2}} F_1(x) \\ &- \frac{\sqrt{a_m} L(u_0 - u_s)}{\sqrt{\pi}} F_1\left(\sqrt{\tfrac{a_2}{a_m}} x\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

entonces notamos que $\Theta(x)$ es una función estrictamente decreciente, con las siguientes propiedades:

$$\Theta(0^+) = +\infty; \; \Theta(+\infty) = -\infty$$

$$\Theta'(x) < 0, \; x > 0$$

Por lo tanto, la ecuación (3.28) tiene una única solución λ^*.

3.4. Relación entre problemas con temperatura y flujo de calor en el borde fijo.

Ahora volvemos al problema inicial P con condición de flujo de calor, considerando el caso $q_0 > k_2 \dfrac{t_0 - t_s}{\sqrt{\pi a_2}} + (u_0 - u_s) L \sqrt{\frac{a_m}{\pi}}$. Evaluando la solución (3.14) en $x = 0$, obtenemos:

$$t_1(0, \tau) = t_s - \frac{q_0 \sqrt{\pi a_1}}{k_1} erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \lambda\right) \tag{3.30}$$

Entonces podemos considerar el problema P^* poniendo

$$t_i = t_s - \frac{q_0 \sqrt{\pi a_1}}{k_1} erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \lambda\right) < t_s \tag{3.31}$$

La solución del problema está dada por (3.24)-(3.27) donde λ^* es solución de la ecuación (3.28). Sabemos que para este problema existe un único $\lambda^* > 0$ tal que $\Phi(\lambda^*) = \Theta(\lambda^*)$ Ahora, queremos demostrar que $\lambda^* = \lambda$; para ello debemos probar que λ^* es también solución de la ecuación (3.19).

$$\Phi(\lambda^*) = \Theta(\lambda^*) = \frac{k_1\left(t_s - \left(t_s - \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1} erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda\right)\right)\right)}{\sqrt{\pi a_2}} F_2\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda^*\right)$$
$$-\frac{k_2(t_0 - t_s)}{\sqrt{\pi a_2}} F_1(\lambda^*) - \sqrt{\frac{a_m}{\pi}} L(u_0 - u_s) F_1\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda^*\right) = \Psi(\lambda^*)$$

o sea, λ^* es solución de la ecuación (3.19), que tiene una única solución λ, entonces $\lambda^* = \lambda$.

Por lo tanto obtuvimos que las soluciones del problema P^* son las mismas que las del problema inicial, esto es decir:

$$t_1 = t_1^* \quad ; \quad t_2 = t_2^*$$
$$u = u^* \quad ; \quad s = s^*$$

Ahora, podemos enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad. Un problema de cambio de fase para distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con condición de flujo de calor sobre la superficie $x = 0$ que verifique la condición (3.22), es equivalente a un problema de cambio de fase con condición de temperatura considerando

$$t_i = t_1(0,\tau) = t_s - \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1} erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda\right) < t_s \tag{3.32}$$

Más aún, la relación entre q_0, t_s y t_i está dada por (3.31), donde λ es el coeficiente que caracteriza la frontera libre.■

Como una consecuencia de esta propiedad, podemos trasladar la desigualdad (3.30) para q_0 para el problema P como una inecuación para λ para el problema P^*, es decir

$$\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda^*\right) = \frac{(t_s - t_i)\,k_1}{q_0\sqrt{\pi a_1}} < \frac{(t_s - t_i)\,\frac{k_1}{\sqrt{a_1}}}{\frac{(t_0 - t_s)\,k_2}{\sqrt{a_2}} + (u_0 - u_s)\,L\sqrt{a_m}}.$$

Esta última inecuación es válida para el problema P^*, y tiene sentido físico cuando el lado derecho de la inecuación es menor que uno, vale decir:

Corolario. Cuando los datos para el problema P^* verifican la desigualdad

$$\frac{\frac{k_1}{\sqrt{a_1}}(t_s - t_i)}{\frac{(t_0 - t_s)\,k_2}{\sqrt{a_2}} + (u_0 - u_s)\,L\sqrt{a_m}} < 1 \tag{3.33}$$

entonces el coeficiente λ^* de la frontera libre $s^*(\tau) = 2\lambda^*\sqrt{\tau}$ satisface la propiedad

$$\lambda^* < \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} erf^{-1}\left(\frac{(t_s - t_i)\frac{k_1}{\sqrt{a_1}}}{\frac{(t_0 - t_s)k_2}{\sqrt{a_2}} + (u_0 - u_s) L\sqrt{a_m}}\right) \tag{3.34}$$

3.5. Conclusión

Se obtuvieron soluciones exactas para las distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0/\sqrt{\tau}$, con $q_0 > 0$. Una inecuación para el coeficiente q_0 es necesaria y suficiente para obtener dicha solución explícita. Luego, introdujimos el problema P^*, que es el problema P al que se le ha cambiado la condición (3.7) por una condición de temperatura (3.23) en $x = 0$. Finalmente establecimos una equivalencia entre un problema de cambio de fase con condición de temperatura y un problema de cambio de fase con condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{\tau}$ sobre la superficie, hallando una desigualdad que debe verificar el coeficiente que caracteriza la frontera libre. Esto generaliza los resultados obtenidos para la temperatura del problema de cambio de fase sólido-líquido hecho por Tarzia en [20], para el problema de desublimación en un semi-espacio poroso húmedo con flujo de calor en el borde fijo (con distribuciones de concentración y temperatura acopladas).

4. Soluciones exactas para el problema de secado con cambio de fase acoplado en un medio poroso.

En lo que sigue será estudiado el siguiente proceso, motivado por el trabajo de Cho en [3]. Un medio poroso semi-infinito es secado al mantener la superficie $x = 0$ con una condición de flujo de calor del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ con $q_0 > 0$. Inicialmente, todo el cuerpo está a una temperatura uniforme t_0 y un potencial de humedad uniforme u_0. La humedad se supone que se evapora completamente a una temperatura constante, el punto de evaporación t_v. También se supone que el potencial de humedad en la primera región, $0 < x < s(\tau)$, es constantemente u_v, donde $x = s(\tau)$ posiciona el frente de evaporación. Se supone de aquí en más que la humedad en forma de vapor no quita ninguna cantidad apreciable de calor del sistema. Despreciando la difusión de masa debida a la variación de temperatura, el problema puede expresarse como sigue:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}(x,\tau), \qquad 0 < x < s(\tau), \tau > 0 \tag{4.1}$$

$$u_1 = u_v, \qquad 0 < x < s(\tau), \tau > 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_1 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon L c_m}{c_q}\frac{\partial u_2}{\partial \tau}, \qquad x > s(\tau), \tau > 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau}(x,\tau) = a_m \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x,\tau), \qquad x > s(\tau), \tau > 0 \tag{4.4}$$

Las condiciones iniciales y de frontera son:

$$k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} = -\frac{q_0}{\sqrt{\tau}} \quad en \quad x = 0, \tau > 0 \tag{4.5}$$

$$t = t_0 \quad en \quad x > 0, \tau = 0 \tag{4.6}$$

$$u = u_0 \quad en \quad x > 0, \tau = 0 \tag{4.7}$$

$$t_1 \left(s\left(\tau\right), \tau\right) = t_2 \left(s\left(\tau\right), \tau\right) = t_v > t_0 \quad en \quad x = s\left(\tau\right) \tag{4.8}$$

$$u_1 \left(s\left(\tau\right), \tau\right) = u_2 \left(s\left(\tau\right), \tau\right) = u_v < u_0 \quad en \quad x = s\left(\tau\right) \tag{4.9}$$

$$-k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \left(s\left(\tau\right), \tau\right) + k_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \left(s\left(\tau\right), \tau\right) = \left(1 - \varepsilon\right) \rho_m L \tfrac{ds}{dt} \quad en \quad x = s\left(\tau\right) \tag{4.10}$$

Los símbolos están especificados en la nomenclatura, como anteriormente. Aclaramos que t_1 es la temperatura del medio poroso seco y que t_2 es la temperatura del medio poroso húmedo.

4.1. Solución del problema

Pongamos entonces

$$y_i = \frac{u_i - u_0}{u_v - u_0}, \text{ para } i = 1, 2 \tag{4.11}$$

$$T_i = \frac{t_i - t_0}{t_v - t_0}, \text{ para } i = 1, 2 \tag{4.12}$$

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{a_1 \tau}} \tag{4.13}$$

$$Lu = \frac{a_m}{a_1} \tag{4.14}$$

$$Ko = \frac{Lc_m \left(u_0 - u_v\right)}{c_q \left(t_v - t_0\right)} > 0 \tag{4.15}$$

$$\nu = \frac{\left(1 - \varepsilon\right) \rho_m L a_1}{k_1 \left(t_v - t_0\right)} > 0 \tag{4.16}$$

$$k_{21} = \frac{k_2}{k_1} \tag{4.17}$$

y asumamos

$$s\left(\tau\right) = 2\lambda\sqrt{a_1 \tau} \tag{4.18}$$

donde λ es una constante a ser determinada. Suponiendo que y y T son funciones que dependen sólo de η, las ecuaciones (4.1) – (4.4) son transformadas en ecuaciones diferenciales ordinarias adimensionales de la forma:

$$\frac{d^2 T_1}{d\eta^2}\left(\eta\right) + 2\eta \frac{dT_1}{d\eta}\left(\eta\right) = 0, \qquad 0 < \eta < \lambda \tag{4.19}$$

$$y_1 = 1, \qquad 0 < \eta < \lambda \tag{4.20}$$

$$\frac{d^2 T_2}{d\eta^2}\left(\eta\right) + 2\eta \frac{dT_2}{d\eta}\left(\eta\right) - 2\varepsilon K_o \eta \frac{dy_2}{d\eta} = 0, \qquad \eta > \lambda \tag{4.21}$$

$$Lu \frac{d^2 y_2}{d\eta^2}\left(\eta\right) + 2\eta \frac{dy_2}{d\eta}\left(\eta\right) = 0, \qquad \eta > \lambda \tag{4.22}$$

Las condiciones de frontera (4.5) – (4.10) se transforman en:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \eta} = -\frac{2q_0\sqrt{a_1}}{k_1\left(t_v - t_0\right)} \quad en \quad \eta = 0, \tag{4.23}$$

$$T_2 = 0 \quad en \quad \eta \to \infty, \tag{4.24}$$

$$y_2 = 0 \quad en \quad \eta \to \infty, \tag{4.25}$$

$$T_1 = T_2 = 1 \quad en \quad \eta = \lambda, \tag{4.26}$$

$$y_1 = y_2 = 1 \quad en \quad \eta = \lambda, \tag{4.27}$$

$$\frac{dT_1}{d\eta} - k_{21}\frac{dT_2}{d\eta} = -2\nu\lambda \quad en \quad \eta = \lambda, \tag{4.28}$$

Las soluciones de las ecuaciones (4.19) y (4.22), que satisfacen las condiciones de frontera (4.25), (4.26) y (4.27), se obtienen fácilmente.

$$T_1\left(\eta\right) = 1 + \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1\left(t_v - t_0\right)}\left(\operatorname{erf}\lambda - \operatorname{erf}\eta\right), \qquad 0 < \eta < \lambda \tag{4.29}$$

$$y_2\left(\eta\right) = \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{Lu}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{Lu}}\right)}, \qquad 0 < \eta < \lambda \tag{4.30}$$

Sustituyendo (4.30) dentro de la ecuación (4.21), y resolviendo la ecuación diferencial ordinaria no homogenea resultante con condiciones de frontera (4.24) y (4.26), se obtiene lo siguiente, según sea $Lu = 1$ o $Lu \neq 1$:

$$T_2(\eta) = \frac{\varepsilon K_o}{\sqrt{\pi}\,(1 - \operatorname{erf}(\lambda))}\left[\lambda\, e^{-\lambda^2}\frac{1 - \operatorname{erf}(\eta)}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)} - \eta\, e^{-\eta^2}\right] + \frac{1 - \operatorname{erf}(\eta)}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)}, \qquad si\ Lu = 1, \eta > \lambda \tag{4.31}$$

$$T_2(\eta) = \frac{\varepsilon K_o Lu}{Lu - 1}\left[-\frac{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{Lu}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{Lu}}\right)} + \frac{1 - \operatorname{erf}(\eta)}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)}\right] + \frac{1 - \operatorname{erf}\eta}{1 - \operatorname{erf}\lambda}, \qquad si\ Lu \neq 1, \eta > \lambda \tag{4.32}$$

Las funciones $(4.29), (4.30)$ y (4.31) o (4.32) satisfacen todas las condiciones de frontera excepto la (4.28). Sustituyendo $(4.29), (4.31)$ y (4.32) en la condición (4.28), la constante λ se determina del siguiente balance, dependiendo del valor que toma Lu:

$$\frac{2\sqrt{\pi a_1} q_0}{k_1(t_v - t_s)} e^{-\lambda^2} + \frac{k_{21}}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\lambda^2}}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)}\left[-\frac{2\varepsilon K_0}{\sqrt{\pi}}\lambda\frac{e^{-\lambda^2}}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)} + 2\varepsilon K_0 \lambda^2 - \varepsilon K_0 - 2\right] = $$
$$= 2\nu\lambda, \quad si\ Lu = 1, \tag{4.33}$$

$$\frac{\sqrt{\pi a_1} q_0}{(t_v - t_s)} e^{-\lambda^2} + \frac{Lu\varepsilon K_0}{Lu - 1} k_2 \left[\tfrac{1}{\sqrt{Lu}} F_1\left(\tfrac{\lambda}{\sqrt{Lu}}\right) - F_1(\lambda)\right] = $$
$$= k_1 F_1(\lambda) + \sqrt{\pi} k_1 \nu\lambda, \quad si\ Lu \neq 1. \tag{4.34}$$

4.2. Estudio de la ecuación que determina a λ, considerando Lu=1.

Ahora veamos detalladamente el estudio de la ecuación (4.33), que surge del caso $Lu = 1$, vale decir cuando $a_m = a_1$. Definamos entonces las siguientes funciones:

$$\alpha(x) = \frac{2\sqrt{\pi a_1} q_0}{k_1 (t_v - t_s)} e^{-x^2} + \frac{k_{21}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{1 - \operatorname{erf}(x)} \left[-\frac{2\varepsilon K_0}{\sqrt{\pi}} x \frac{e^{-x^2}}{1 - \operatorname{erf}(x)} + 2\varepsilon K_0 x^2 - \varepsilon K_0 - 2 \right] \tag{4.35}$$

$$\chi(x) = 2\nu x \tag{4.36}$$

Luego la ecuación (4.33) puede escribirse diciendo que λ debe ser la solución de la ecuación

$$\alpha(x) = \chi(x), \qquad x > 0. \tag{4.37}$$

Entonces podemos ver las características de cada una de las funciones.

Primero veamos que $\chi(x)$ es estrictamente creciente con las propiedades:

$$\chi(0) = 0 \quad ; \quad \chi(+\infty) = +\infty \quad ; \quad \chi'(x) = 2\nu > 0, \; x > 0$$

Veamos, antes de estudiar a α, la siguiente función:

$$W(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{1 - \operatorname{erf}(x)} - x^2 = x^2 \left(\frac{1}{Q(x)} - 1 \right)$$

Esta es una función positiva, con las siguientes características:

$$\begin{aligned}
&W\left(0^{+}\right)=0 \\
&W(+\infty)=\frac{1}{2} \\
&W'(x)=2x\left(\frac{1}{Q(x)}-1\right)+x^{2}\left(-\frac{Q'(x)}{Q^{2}(x)}\right),
\end{aligned}$$

Veamos más profundamente a W'.

$$\begin{aligned}
W'(x) &= 2x\left(\frac{1}{Q(x)}-1\right)+x^{2}\left(-\frac{Q'(x)}{Q^{2}(x)}\right)= \\
&= 2x\left(\frac{1}{Q(x)}-1\right)+x^{2}\left(-\frac{\frac{Q(x)}{x}+2x\left(Q(x)-1\right)}{Q^{2}(x)}\right)= \\
&= \frac{x}{Q(x)}-2x-\frac{2x^{3}}{Q(x)}+\frac{2x^{3}}{Q^{2}(x)}=x\left(\left(\frac{1}{Q(x)}-1\right)\left(1+\frac{2x^{2}}{Q(x)}\right)-1\right)>0
\end{aligned}$$

Luego resulta que W es una función estrictamente creciente.

Ahora ocupémonos de α. Teniendo en cuenta a W, podemos poner a α de la manera siguiente:

$$\alpha(x)=\frac{2\sqrt{\pi a_{1}}q_{0}}{k_{1}\left(t_{v}-t_{s}\right)}e^{-x^{2}}-\frac{k_{21}}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^{2}}}{1-\operatorname{erf}(x)}\left[2\varepsilon K_{0}W(x)+\varepsilon K_{0}+2\right]$$

entonces α se puede escribir como suma de dos funciones decrecientes, por lo tanto resulta decreciente. Además tiene las siguientes propiedades:

$$\alpha(0) = \frac{2\sqrt{\pi a_1} q_0}{t_v - t_0} - \frac{k_{21}}{\sqrt{\pi}} [\varepsilon K_0 + 2]$$

$$\alpha(+\infty) = -\infty$$

$$\alpha'(x) = \frac{-4x\sqrt{\pi a_1} q_0}{k_1 (t_v - t_s)} e^{-x^2} - \frac{k_{21}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{1 - \operatorname{erf}(x)} [2\varepsilon K_0 W'(x)] - \frac{k_{21}}{\sqrt{\pi}} F_1'(x) [2\varepsilon K_0 W(x) + \varepsilon K_0 + 2] < 0$$

notando que $F_1(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{1 - \operatorname{erf}(x)}$, como fue estudiado en [7], tiene su derivada estrictamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego, para asegurarnos que estas dos funciones se intersequen, imponemos que $\alpha(0) > \chi(0)$, vale decir que $\dfrac{2\sqrt{\pi a_1} q_0}{t_v - t_0} > \dfrac{k_{21}}{\sqrt{\pi}} [\varepsilon K_0 + 2]$, que resulta equivalente a $q_o > \dfrac{k_{21}(t_v - t_0)}{2\pi\sqrt{a_1}} [\varepsilon K_0 + 2]$, y podemos finalmente enunciar el siguiente:

Teorema. Si $Lu = 1$, y el coeficiente q_0 verifica la condición

$$q_0 > \frac{k_{21}(t_v - t_0)}{2\pi\sqrt{a_1}} [\varepsilon K_0 + 2], \tag{4.38}$$

entonces existe una y sólo una solución $\lambda > 0$ de la ecuación (4.33). Más aún, la solución del problema (4.1) a (4.10) está dada por (4.29) a (4.31), donde λ es la solución de (4.33)

4.3. Conclusión

Se obtuvieron soluciones exactas para el problema de secado con cambio de fase acoplado en un medio poroso con condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $-q_0/\sqrt{\tau}$, con $q_0 > 0$, basándose en un trabajo de S. Cho [3], cuando el coeficiente $Lu = 1$. Dicha solución es obtenida cuando el coeficiente q_0 satisface una cierta desigualdad. Se utilizaron para la realización de éste el método de similaridad y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas con condiciones de frontera.

5. Apéndice 1

Transferencia de calor y materia en cuerpos de capilares porosos

La tesis aquí presentada se centra en la teoría de transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos. Este Apéndice es para entender lo que es un medio poroso y las ecuaciones que rigen la transferencia de calor y materia en un medio de este tipo. Está sólo al efecto de hacer autocontenido el trabajo y no pertenece a la tesis. Fue en gran parte extraído del libro *"Heat and mass transfer in capillary-porous bodies"* de A. V. Luikov (1966).

La transferencia de gases no condensables, vapores y líquidos puede llevarse a cabo en cuerpos de capilares porosos. La transferencia de vapor y gases inertes puede llevarse a cabo por métodos diferentes: por forma molecular en la forma de difusión; por forma molar por movimientos de filtración de la mezcla completa de gas y vapor dentro del cuerpo poroso bajo la influencia de una caída en la presión agregada.

Similarmente, la transferencia de líquidos puede llevarse a cabo mediante difusión, absorción capilar y movimientos de filtración en el medio poroso que surge del gradiente de presión hidrostática. Por lo tanto, la derivación de las reglas de transferencia de masa en un sistema de cuerpos de capilares porosos sobre la base de mecanismos de transferencia molar y molecular presentan grandes dificultades. Estas reglas pueden servir para el análisis del cuadro cualitativo de transferencia de masa en los cuerpos de capilares porosos y pueden también revelar la naturaleza de la variación de los coeficientes de transferencia en relación al contenido de humedad y temperatura del cuerpo. Cálculos cuantitativos en la mayoría de los casos se desarrollan sobre la base de propiedades termales, determinadas por métodos experimentales directamente para cuerpos específicos. Primero de todo, serán considerados sistemas de ecuaciones diferenciales para transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos.

Consideremos un sistema acotado que conste de un cuerpo de capilares porosos y una sustancia. La sustancia con el campo de capilares porosos en una región de temperaturas positivas ($t > 0°C$) puede estar en la forma de líquido, vapor o gas inerte; en temperaturas negativas puede estar en la forma de sólido (hielo), líquido subenfriado o vapor o un gas.

Dependiendo en la forma de acotación de la humedad y el cuerpo, la temperatura de congelamiento de un líquido varía con amplios límites. Por lo tanto, en cuerpos de capilares porosos con distintos tipos de acotación de humedad, hay siempre una cierta cantidad de líquido subenfriado en temperaturas negativas.

La segunda característica de la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos es el relleno parcial de los poros y capilares con humedad, i. e. algunos de los capilares del cuerpo están llenos de hielo o líquido y el resto están llenos de una mezcla de vapor y gas. La cantidad de humedad en un estado u otro varía en el proceso de transferencia de calor y masa. Luego, para hallar las ecuaciones de transferencia, el cambio en la concentración de humedad en los capilares del cuerpo deben ser considerados en lo que sigue.

La humedad en forma de vapor se denotará con el subíndice 1, en forma líquida con 2, y en forma sólida con 3, gas inerte con 4 y el esqueleto del cuerpo por 0. La concentración volumétrica ω de la masa (gas inerte, vapor, líquido y hielo) es igual a la razón entre la masa m de la sustancia con el volumen del cuerpo V:

$$\omega = \frac{m}{V} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{4} m_i = \sum_{i=1}^{4} \omega_i \tag{5.1}$$

donde m_i y ω_i son respectivamente la masa y la concentración volumétrica de la sustancia en el estado i ($i = 1,...,4$). La masa de la sustancia m en el cuerpo de capilares porosos es igual a la suma de las masas de vapor, líquido y hielo:

$$m = \sum_{i=1}^{4} m_i \tag{5.2}$$

La concentración de la sustancia en el cuerpo w_i en cualquier estado i puede expresarse en términos de la concentración de la sustancia en sí misma ϱ_i y la porosidad gruesa del cuerpo (volumen de poros en unidad de volumen del cuerpo) Π:

$$\omega_i = \frac{m_i}{V} = \varrho_i \Pi b_i \tag{5.3}$$

donde ϱ_i es la densidad de la sustancia (ϱ_4 y ϱ_1 son respectivamente las concentraciones de gas y vapor en la mezcla de gas - vapor, ϱ_2 es la densidad del líquido y ϱ_3 es la densidad del hielo) y b_i es la medida de relleno de los capilares. Para una primer aproximación la cantidad b_i es igual a la razón entre el volumen de sustancia en el estado i y el volumen de los capilares: en la teoría de flujos en medios porosos se llama saturación. No obstante, tal definición del coeficiente b_i en el caso presente tiene un carácter convencional, ya que la humedad puede ser acotada por fuerzas osmóticas y adsortivas, no sólo por las paredes de los microcapilares, sino también con las superficies interna y externa de los macrocapilares.

La ecuación (5.3) muestra que la concentración volumétrica de la sustancia no está unívocamente definida por su densidad y la porosidad del cuerpo, sino que depende del valor de b_i, que varía en el proceso de transferencia de calor y masa. De esto se deduce que las ecuaciones diferenciales de transferencia obtenidas para el movimiento de filtración de un líquido homogéneo o gas en medios porosos no son aplicables a la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos bajo cambios de fase, ya que en procesos de filtración b_i se supone igual a la unidad o a una constante. Además, el volumen del cuerpo varía en relación de la cantidad de humedad absorbida (fenómeno de contracción de un cuerpo mojado), i. e. la porosidad de un cuerpo varía en relación a la cantidad de sustancia.

Por lo tanto, en la mayoría de los casos, en vez de usar la concentración volumétrica de la sustancia, se usa la concentración relativa o contenido de masa específica u, donde u es la razón entre la masa de la sustancia y la masa del cuerpo seco m_0 (masa de la parte sólida del cuerpo):

$$u = \frac{m}{m_0} = \frac{\omega}{\gamma}, \tag{5.4}$$

donde γ es la densidad del cuerpo.

El contenido de masa específico es igual a la suma de los contenidos de masa específicos de la sustancia en distintos estados:

$$u = \sum_{i=1}^{4} u_i; \tag{5.5}$$

Más aún, es importante notar lo siguiente: bajo condiciones comunes en las que la presión del aire húmedo es cercana a la barométrica, la masa de aire y vapor en los capilares es despreciablemente pequeña en comparación con la masa de líquido o hielo. De acuerdo a los cálculos de B. A. Posnov, bajo condiciones normales para un cuerpo con porosidad máxima, la masa de aire húmedo en los capilares es de alrededor 10^{-3} por ciento de la masa de líquido correspondiente al contenido de humedad en equilibrio del cuerpo. Por lo tanto, con contenido de masa u, distinto de cero, la cantidad $(u_4 + u_1)$ puede despreciarse, i.e.

$$u = u_2 + u_3 \tag{5.6}$$

En una región de temperaturas positivas ($t > 0^oC$) el contenido de masa específico de un cuerpo puede ser considerado, con un alto grado de certeza, igual al contenido de masa específica del líquido ($u = u_2$).

El líquido en un cuerpo poroso, en el caso general, puede moverse mediante difusión selectiva a través de la armazón del cuerpo (transferencia molecular), mediante un tipo de movimiento de filtración, bajo la influencia de la gravedad o presión hidrostática (transferencia convectiva o molar) y también por absorción capilar. Algunos investigadores suponen que el movimiento capilar de líquido para la transferencia de masa es igual a la transferencia molecular (difusión capilar). No obstante, la absorción capilar, por su naturaleza física, es un movimiento molar.

La ecuación diferencial para la transferencia de masa de la sustancia es similar a la ecuación diferencial de transferencia de una de las componentes de una mezcla gaseosa en movimiento, pero en vez de la concentración ϱ_k en la expresión para la componente convectiva de transferencia de masa, es necesario escribir la concentración volumétrica de la masa en los poros del cuerpo ω_{ik}

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} = -div\left(\omega_{ik}\overline{w} + \overline{j}_{iM}\right) + I_i, \tag{5.7}$$

donde $\overline{w}$ es la velocidad lineal del movimiento molar, calculado por unidad de superficie del cuerpo; $\overline{j}_{iM}$ es la densidad del flujo de masa molecular; I_i es la capacidad volumétrica de la fuente (o sumidero) de material i, dependiente de los cambios de fase.

El producto $\omega_{ik}\overline{w}$ es la densidad del flujo convectivo de sustancia j_{ik} dentro del cuerpo poroso.

Ya que este flujo j_{ik} está expresado como el gradiente del potencial apropiado de de transferencia molar, la ecuación (5.7) será una ecuación diferencial a derivadas parciales

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} = -div\left(j_{ik} + j_{iM}\right) + I_i \tag{5.8}$$

En un cuerpo de capilares porosos la transferencia molar y molecular de la sustancia puede llevarse a cabo simultáneamente en estados distintos. Los potenciales de transferencia de humedad molar y molecular ($i = 1, 2, 3$) son iguales. El proceso de transferencia de humedad en sí es un proceso molar-molecular simple. Por lo tanto, los vectores de flujo de humedad j_{ik} y j_{iM} tienen una dirección. Si la densidad del flujo de transferencia molar-molecular se nota como j_i, donde

$$j_i = j_{ik} + j_{iM} \tag{5.9}$$

entonces

$$\frac{\partial(\gamma u_i)}{\partial \tau} = -div j_i + I_i \tag{5.10}$$

Si no hay cambios químicos conectados con que suceda la formación de un gas condensado (aire seco), la fuente I_4 estará ausente ($I_4 = 0$), i. e.

$$I_4 = 0 \tag{5.11}$$

La transferencia capilar-molar de sustancia en el estado sólido está ausente ($j_3 = 0$). En consecuencia, la ecuación diferencial de transferencia de masa para la fase sólida es de esta forma:

$$\frac{\partial(\gamma u_3)}{\partial \tau} = I_3 \tag{5.12}$$

El contenido de masa de aire y vapor en los capilares del cuerpo es despreciablemente pequeño con respecto al contenido de hielo o líquido, por lo tanto la cantidad $\frac{\partial(\gamma u_1)}{\partial \tau} = 0$, i.e.

$$\frac{\partial(\gamma u_1)}{\partial \tau} = -div\, j_1 + I_1 = 0 \tag{5.13}$$

donde

$$I_2 = -I_1 = -div\, j_1 \tag{5.14}$$

En consecuencia, la fuente I_3 puede ser calculada de la derivada local $\frac{\partial(\gamma u_3)}{\partial \tau}$ y la fuente I_1 de la cantidad $div\, j_1$. Estas expresiones serán usadas luego.

Sumando (5.10) para todos los valores de i ($i = 1, 2, 3, 4$) obtendremos la ecuación diferencial para la transferencia de masa en un cuerpo de capilares porosos:

$$\frac{\partial(\gamma \bar{u})}{\partial \tau} = -div \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{j}_1. \tag{5.15}$$

Nótese que la suma de todas las fuentes y sumideros de la sustancia es cero:

$$\sum_{i=1}^{4} I_i = 0 \tag{5.16}$$

El movimiento de la sustancia en un cuerpo capilar poroso es considerado lo suficientemente pequeño para que en la práctica la temperatura del líquido sea igual a la temperatura en las paredes de los capilares. El vapor en los capilares del cuerpo está en equilibrio termodinámico y molecular con el líquido; por lo tanto su presión parcial en la región higroscópica está determinada por las isotermas de sorpción y desorpción:

$$p_1 = f(u_2, T) \,\text{con}\, 0 < u_2 < u_{m2}, \tag{5.17}$$

donde u_{m2} es el contenido de humedad higroscópica máximo.

En la región de condiciones húmedas la presión del vapor es la del vapor saturado p_s, i.e. es una función que depende sólo de la temperatura.

$$p_1 = p_s = f(T). \tag{5.18}$$

La ecuación diferencial para la transferencia de calor es obtenida de la ecuación de transferencia de energía interna. A presión constante (p =constante) la derivada local de concentración volumétrica de la entalpía del sistema es igual a la divergencia del flujo de entalpía:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(h_o\gamma_o+\sum_{i=1}^{4}h_i\gamma_o u_i\right)=-div\left(j_q+\sum_{i=1}^{4}h_i j_i\right) \tag{5.19}$$

donde h_i es la entalpía específica de la sustancia i; h_o y γ_o son respectivamente la entalpía específica y densidad del esqueleto del cuerpo poroso:

$$\gamma_o=\frac{\gamma}{1+\beta u_2} \tag{5.20}$$

donde β es el coeficiente de achicamiento volumétrico. Si el coeficiente β es pequeño ($\beta\to 0$), entonces $\gamma_o=\gamma$

El calor específico isobárico se nota por c_i:

$$c_i=\left(\frac{dh_i}{dt}\right)_p \tag{5.21}$$

Entonces

$$\left(c_o\gamma_o+\sum_{i=1}^{4}c_i\gamma_o u_i\right)\frac{\partial t}{\partial\tau}+\sum_{i=1}^{4}h_i\frac{\partial\left(\gamma_o u_i\right)}{\partial\tau}=-divj_q-\sum_{i=1}^{4}j_i c_i\nabla t-\sum_{i=1}^{4}h_i divj_i \tag{5.22}$$

Multiplicando la ecuación (5.10) por h_i y sumando en i de 1 a 4, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{4}h_i\frac{\partial\left(\gamma_o u_i\right)}{\partial\tau}=-\sum_{i=1}^{4}h_i divj_i+\sum_{i=1}^{4}h_i I_i \tag{5.23}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial para la transferencia de calor es:

$$c\gamma_o\frac{\partial t}{\partial\tau}=-divj_q-\sum_{i=1}^{4}h_i I_i-\sum_{i=1}^{4}c_i j_i\nabla t \tag{5.24}$$

donde c es el calor específico del cuerpo:

$$c=\sum_{i=1}^{4}c_i u_i \tag{5.25}$$

Las fuentes de calor $\sum_{i=1}^{3}h_i I_i$ dependen de los cambios de fase ($I_4=0$); la humedad salvo en el punto triple está presente en un estado de dos fases, por lo tanto la suma de las fuentes es igual a:

$$h_i I_{ij}+h_j I_{ji}=\left(h_i-h_j\right)I_{ij}\quad(i,j=1,2,3;\ I_{ij}=I_{ji}=0). \tag{5.26}$$

De la ecuación (5.24), la ecuación de transferencia de calor de Fourier-Kirchhoff para un líquido en movimiento ($i=2$) puede ser obtenido como un caso especial:

$$c\gamma_o=c_2u_2\gamma_o=c_2\rho_2;\ j_2=\rho_2\overline{w}; \tag{5.27}$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial t}{\partial\tau}+c_2\rho_2\overline{w}\nabla t=-divj_q \tag{5.28}$$

En los cuerpos de capilares porosos, en ausencia de movimiento de filtración del líquido, la componente de transferencia de calor convectivo es pequeña en comparación con la componente convectiva, teniendo en cuenta que $R_{e_{eq}} < 20$. Este valor del número de Reynolds equivalente corresponde a un valor igual a 1000. Para valores menores a 1000 el coeficiente equivalente de conductividad termal es igual al coeficiente de conductividad termal molecular. En la mayoría de los casos de transferencia de masa en cuerpos de capilares porosos los números de Reynolds Re son considerablemente menor que la unidad.

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales para transferencia de calor y masa toma la forma:

$$c\gamma_o \frac{\partial t}{\partial \tau} = -div\,(j_q) - \sum_{i=1}^{3} h_i I_i, \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial\,(\gamma_o u_i)}{\partial \tau} = -div\, j_i + I_i\,; \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial\,(u\gamma_o)}{\partial \tau} = -div \sum_{i=1}^{4} j_i \tag{5.31}$$

Para una derivación total del sistema (5.29 - 5.31) es necesario expresar los flujos j_q y j_i por los gradientes de los potenciales apropiados, y en adición puede tenerse en cuenta que en cuerpos de capilares porosos el contenido de masa de gas y vapor no-condensados es despreciablemente menor con el contenido de masa de líquido y hielo ($u = u_2 + u_3$; $u_4 = u_1 = 0$). Además, la sustancia en el estado sólido no se mueve ($j_3 = 0$), y la fuente I_4 es igual a cero (ausencia de cambios químicos). En este caso las ecuaciones de transferencia de masa pueden escribirse como:

$$div j_4 = 0; I_1 = -I_2 = div j_1 \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial u_2 \gamma_o}{\partial \tau} = -div j_2 + I_2 = -div(j_1 + j_2) \tag{5.33}$$

$$\frac{\partial u_3 \gamma_o}{\partial \tau} = I_3 \tag{5.34}$$

El vapor se mueve dentro de un cuerpo de capilares porosos por difusión; más aún, se supone que está en equilibrio termodinámico con la sustancia líquida. En la zona higroscópica la presión parcial del vapor es función del contenido de humedad y la temperatura; por lo tanto la concentración relativa de vapor en los capilares del cuerpo también dependen de u y T:

$$\rho_{10} = p_{10}\frac{M_1}{M} = f(u, T) \tag{5.35}$$

Luego la densidad del flujo de difusión del vapor en el cuerpo de capilares porosos será igual:

$$\overline{j_1} = -\epsilon D\rho\nabla\rho_{10} = -a_{m1}\gamma_0\,(\nabla u + \delta_1 \nabla t) \tag{5.36}$$

donde ϵ es un coeficiente adimensional, representando la resistencia a la difusión de vapor en el cuerpo poroso húmedo; a_{m1} es el coeficiente de transferencia de masa o coeficiente de difusión del vapor dentro del cuerpo, y es igual a:

$$a_{m1} = \frac{\epsilon}{\gamma_0} D\rho \left(\frac{\partial \rho_{10}}{\partial u}\right)_T ; \tag{5.37}$$

δ es el coeficiente del gradiente termal para la transferencia de vapor:

$$\delta_1 = \frac{(\partial \rho_{10}/\partial T)_u}{(\partial \rho_{10}/\partial u)_T}; \tag{5.38}$$

En la derivación de (5.36) se usa la siguiente relación:

$$\nabla \rho_{10} = \left(\frac{\partial \rho_{10}}{\partial u}\right)_T \nabla u + \left(\frac{\partial \rho_{10}}{\partial u}\right)_u \nabla T. \tag{5.39}$$

El flujo j_1, expresado en términos de los gradientes ∇u y ∇T en la forma de la ecuación (5.36), corresponde a la región higroscópica ($u \leq u_{em}$). En la región húmeda $(\partial \rho_{10}/\partial u)_T$ es igual a cero (la presión parcial de un vapor no depende de su contenido de humedad), por lo tanto el flujo de difusión de vapor será igual a:

$$j_1 = -a_{m1}\gamma_0\delta_1\nabla t = -\epsilon D \rho \left(\frac{\partial \rho_{10}}{\partial T}\right) \nabla T, \tag{5.40}$$

donde

$$\frac{\partial \rho_{10}}{\partial T} = \frac{M_1}{M_p}\left(\frac{\partial p_s}{\partial T}\right), \tag{5.41}$$

p_s es la presión del vapor saturado a temperatura T.

La cantidad $\frac{1}{\epsilon}$ representa la resistencia a la difusión de vapor dentro del cuerpo poroso. Esta cantidad muestra cuántas veces el coeficiente de difusión de vapor en el aire (D) es mayor que el coeficiente de difusión de vapor dentro del cuerpo (ϵD). El coeficiente (ϵ) depende de la curva diferencial de distribución de poros $f(r)$ con respecto al radio del capilar r:

$$\epsilon = \int_{r_1}^{r_2} f(r)dr \tag{5.42}$$

El límite superior r_2 corresponde al radio máximo de los poros que están libres de líquido; r_1 es el radio mínimo de los poros abiertos.

El coeficiente ϵ varía de 0 a 1. Para algunos materiales (madera, arena de cuarzo) el coeficiente ϵ puede determinarse experimentalmente a distintos contenidos de humedad.

La transferencia de líquidos en un cuerpo de capilares porosos se lleva a cabo mediante difusión selectiva y en la forma de absorción capilar bajo la influencia del potencial capilar, que también es función del contenido de humedad y temperatura.

Bajo movimiento capilar del líquido, el gradiente del potencial capilar $\nabla\Psi$ es la fuerza de transferencia termodinámica

$$j_2 = k\nabla\Psi, \tag{5.43}$$

donde k es la conductividad capilar igual a:

$$k = \frac{\rho_2^2}{8\eta_2}\int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r)dr, \tag{5.44}$$

y η es la viscosidad dinámica.

La ausencia del signo menos en la fórmula (5.43) se explica por el hecho que la transferencia de líquidos se lleva a cabo desde el potencial menor al mayor. El potencial capilar Ψ es una función del contenido de humedad y temperatura. Usando transformaciones similares se obtiene la siguiente ecuación:

$$j_2 = a_{m2}\gamma_0 (\nabla u + \delta_2 \nabla t), \tag{5.45}$$

donde a_{m2} es el coeficiente de difusión del líquido en el cuerpo. δ_2 es el coeficiente del gradiente termal del líquido y está dado por:

$$\delta_2 = \frac{1}{\gamma_0 \sigma} \rho_2 r f(r) \frac{\partial \sigma}{\partial T} \tag{5.46}$$

donde σ es la tensión de la superficie del líquido.

La transferencia de líquido mediante difusión selectiva está determinada por el gradiente de presión osmótica. La presión osmótica es una función del contenido de humedad y temperatura. Por lo tanto, el gradiente de presión osmótica puede expresarse por el gradiente de contenido de humedad y el gradiente de temperatura. Como resultado, se obtiene una fórmula similar a (5.45).

De las fórmulas (5.36) y (5.45) sigue que las transferencias de líquido y vapor en la región higroscópica están descriptas por la misma ley, i.e. se llevan a cabo bajo la influencia de los dos gradientes ∇u y ∇T. En consecuencia, las transferencias de líquido y vapor pueden ser combinadas y expresadas por una única ley de transferencia de masa:

$$\overline{j_m} = \overline{j_1} + \overline{j_2} = -a_m \gamma_0 (\nabla u + \delta \nabla t), \tag{5.47}$$

donde a_m es el coeficiente de transferencia de masa para vapor y líquido dentro del cuerpo y δ es el coeficiente del gradiente termal; ambos están determinados experimentalmente. Los coeficientes a_m y δ son respectivamente igual a:

$$a_m = a_{m1} + a_{m2};\ \delta = \frac{a_{m1}\delta_1 + a_{m2}\delta_2}{a_{m1} + a_{m2}}, \tag{5.48}$$

Ya que el coeficiente δ se obtiene experimentalmente como la razón del gradiente del contenido de humedad con el gradiente de temperatura en ausencia de transferencia de masa ($j_m = 0$):

$$\delta = -\frac{\nabla u}{\nabla t} = -\frac{\Delta u}{\Delta t},\ \textit{cuando}\ j_m = 0, \tag{5.49}$$

entonces en la región higroscópica $\delta_1 = \delta_2$.

Este hecho hace posible describir la transferencia de vapor y líquido en la región higroscópica con un gradiente simple del potencial de transferencia de masa θ^*.

La transferencia de calor por conducción en un cuerpo de capilares porosos es descripta por la ley de Fourier:

$$j_q = -\lambda \nabla t, \tag{5.50}$$

donde λ es el coeficiente total de conductividad termal del cuerpo, que representa la transferencia de calor conductivo a través del esqueleto del cuerpo poroso y del material adosado a él (vapor, gas y líquido).

Si las expresiones correspondientes para j_q y j_i se reemplazan en las ecuaciones (5.29) y (5.31), entonces para la masa presente como líquido y vapor ($u_3 = 0$) valen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = div\,(a_m \nabla u + \delta a_m \nabla t), \tag{5.51}$$

$$c\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = div\,(\lambda \nabla t) + r_{12} div\,(a_{m1}\gamma_0 (\nabla u + \delta_1 \nabla t)), \tag{5.52}$$

donde $r_{12} = h_1 - h_2$ es el calor latente de evaporación en $kcal/kg$. Para un sistema de cálculo regional, donde para cada zona (rango) las propiedades termales $(a_m, \delta, \lambda, c)$ se suponen constantes, el sistema de ecuaciones diferenciales de transferencia de calor y masa puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \nabla^2 u + a_m \delta \nabla^2 t, \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_e \nabla^2 t + k \nabla^2 u, \tag{5.54}$$

donde a_e es el coeficiente de difusividad termal:

$$a_e = a + a_{m1}\delta_1 r_{12}, \tag{5.55}$$

y k es un coeficiente constante, igual a:

$$k = \frac{a_{m1}}{c} r_{12} \tag{5.56}$$

Con un calentamiento intenso del cuerpo mojado un gradiente de presión total aparece por evaporación del líquido a temperatura $t \geq 100°C$.

Un gradiente de presión total dentro del cuerpo puede aparecer a una temperatura menor de $100°C$ mediante la inyección de aire a lo largo de los microcapilares dentro del cuerpo (diferencia de presión termomolecular) o por la caída de presión entre los medios que están separados por la pared porosa (filtración a través de la pared porosa).

La presencia de un gradiente de la presión total ∇p en el cuerpo de capilares porosos nos trae una transferencia molar de una mezcla de gas-vapor (vapor y aire) de acuerdo con el tipo de filtración. Esta transferencia molar de vapor de agua es descripta por la ley de Darcy:

$$j_{if} = -k\rho_{10} \nabla p = -\lambda_{p_1} \nabla p, \tag{5.57}$$

donde k es el coeficiente de permeabilidad de aire húmedo; λ_{p_1} es el coeficiente de transferencia molar de vapor

$$\lambda_{p_1} = k\rho_{10} = k\frac{d}{1+d}, \tag{5.58}$$

d es el contenido de humedad del aire.

A una temperatura $t \geq 100°C$, el contenido de humedad del aire es muy alto ($d \rightarrow +\infty$), por lo tanto λ_{p_1} será igual al coeficiente de permeabilidad de vapor ($\lambda_{p_1} = k$), ya que el aire húmedo se transforma en vapor.

Si el contenido de humedad del aire es cero ($d = 0$), el coeficiente $\lambda_{p_1} = 0$ (hay ausencia de transferencia de vapor) ya que el aire húmedo se transforma en aire seco.

La presencia de un gradiente de humedad total también causa una transferencia de filtración de líquido. El movimiento del líquido que aparece por el calentamiento de aire encerrado es característico de este tipo de transferencia. La presión del aire encerrado en las pequeñas burbujas es aumentada al calentarlas, y las burbujas de aire se expanden, forzando al líquido en la dirección del flujo de calor. Comúnmente, esta forma de transferencia de líquido es tratada como la conductividad de masa termal (conductividad de humedad termal), y se tiene en cuenta como un coeficiente del gradiente. No obstante, es mejor atribuir esta forma de transferencia de líquido a una transferencia de filtración de líquido.

En consecuencia, el flujo de filtración de líquido j_{2f} es igual a:

$$j_{2f} = -\lambda_{p_2} \nabla p, \tag{5.59}$$

donde λ_{p_2} es el coeficiente de transferencia de filtración de líquido.

El flujo total de vapor y líquido, traído por el gradiente de presión total es igual a:

$$j_f = j_{1f} + j_{2f} = -\lambda_p \nabla p, \tag{5.60}$$

donde $\lambda_p = \lambda_{p_1} + \lambda_{p_2}$ es el coeficiente de transferencia por filtración de humedad. El flujo de humedad total, causado por la influencia de todas las fuerzas de transferencia, es igual a:

$$j_m = -a_m \lambda_0 \left(\nabla u + \delta \nabla t + \delta_p \nabla p \right), \tag{5.61}$$

donde $\delta_p = \frac{\lambda_p}{a_m \gamma_0}$ es un coeficiente constante. Luego la ecuación diferencial de transferencia de masa tendrá la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = div \left(a_m \left(\nabla u + \delta \nabla t + \delta_p \nabla p \right) \right), \tag{5.62}$$

Para un sistema cerrado, es necesaria una ecuación suplementaria representando el cambio del potencial de filtración p. Sumando las ecuaciones diferenciales de transferencia de masa con respecto a $i = 4, 1$ y tomando en cuenta que $I_4 = 0$, $I_1 = -I_2$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \gamma_0 \left(u_4 + u_1 \right)}{\partial \tau} = -div \left(j_4 + j_1 \right) - I_2 \tag{5.63}$$

El contenido de masa específico de la mezcla vapor-gas $(u_4 + u_1)$ en los capilares del cuerpo es determinado por la temperatura T y la presión p. Ahora

$$\left(u_4 + u_1 \right) \gamma_0 = \omega_4 + \omega_1 = \rho \Pi b_i = \frac{pM}{RT} \Pi b_i, \tag{5.64}$$

donde ρ es la densidad de la mezcla vapor-gas $(\rho = \rho_1 + \rho_2)$.

Derivando la ecuación (5.64)

$$d \left(u_4 + u_1 \right) \gamma_0 = \frac{\Pi b_i M}{R} \left(dp - \frac{1}{T^2} dT \right) + \frac{pM\Pi}{RT} db_i \tag{5.65}$$

y despreciando los últimos términos y notando a $\frac{\Pi b_i M}{R \gamma_0}$ por c_α :

$$c_\alpha = \frac{\Pi b_i M}{R \gamma_0}, \tag{5.66}$$

obtenemos:

$$\frac{\partial \gamma_0 \left(u_4 + u_1 \right)}{\partial \tau} = c_\alpha \gamma_0 \frac{\partial p}{\partial \tau}, \tag{5.67}$$

donde el coeficiente c_α describe la capacidad del cuerpo de capilares porosos con respecto al aire húmedo en el proceso de transferencia molar de la mezcla vapor-gas.

La transferencia molecular de vapor y aire (difusión mutua de vapor y aire en los capilares) es pequeña en comparación con la transferencia (filtración) molar, o sea la transferencia de aire húmedo es descripta en esta ecuación:

$$j_4 + j_1 = -k\nabla p, \tag{5.68}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial (5.63) asumirá la forma:

$$c_\alpha \gamma_0 \frac{\partial p}{\partial \tau} = div\,(k\nabla p) + I_1, \tag{5.69}$$

Así, el sistema de ecuaciones diferenciales de transferencia de calor y masa puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{r_{12}}{c\gamma_0} I_2, \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \nabla^2 u + a_m \delta \nabla^2 t + a_m \delta_p \nabla^2 p, \tag{5.71}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = a_p \nabla^2 p + \frac{I}{c_\alpha \gamma_0} I_1, \tag{5.72}$$

donde a_p es el coeficiente de difusión del movimiento de filtración de la mezcla de vapor-gas $(a_p = k/c_\alpha \gamma_0)$.

Se pueden entonces considerar algunos casos especiales de transferencia de calor y masa que se explicitan en la Introducción (Capítulo 1), en los cuales se considerará la presión constante, y por ende sólo se tenddrán en cuenta las ecuaciones (5.70) y (5.71), y luego se utilizarán en los Capítulos 2 al 4.

6. Apéndice 2

Método de similaridad para la ecuación del calor

La ecuación del calor para un material unidimensional isótropo y homogéneo está dado por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{A}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} t > 0 & \text{tiempo,} \quad x \ \text{variable del material unidimensional} \\ \rho > 0 & \text{densidad de masa,} \quad c > 0 \ \text{calor específico} \\ k > 0 & \text{conductividad térmica,} \quad a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho c} \ \text{difusividad térmica} \\ T = T(x,t) & \text{Temperatura del punto material } x \text{ al instante } t \\ q(x,t) = -k \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) & \text{flujo del calor en el punto material } x \text{ al instante } t \text{ por} \\ & \text{unidad de tiempo y área transversal} \end{array} \right. \tag{B}$$

Se verifica que la ecuación (A) es invariante bajo una transformación de las variables x,t de la manera siguiente:

$$\xi = \gamma x \quad , \quad \tau = \gamma^2 t \quad (\gamma > 0) \tag{C}$$

es decir, si $T(x,t) = T\left(\frac{\xi}{\gamma}, \frac{\tau}{\gamma^2}\right) = \Phi_\gamma(\xi, \tau)$, entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(A) \Leftrightarrow \Phi_{\gamma_\tau} = a^2 \Phi_{\gamma_{\xi\xi}}, \forall \gamma \neq 0 \tag{D}$$

Si las condiciones de contorno para la ecuación (A) no se modifican bajo un cambio de escala del tipo (C) entonces la temperatura T satisface la igualdad:

$$T(x,t) = T\left(\gamma x, \gamma^2 t\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \gamma \neq 0$$

Si se pone $\gamma = \frac{1}{2a\sqrt{t}}$ se obtiene

$$T(x,t) = T\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \frac{1}{4a^2}\right) = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

con lo cual la temperatura T depende sólo del argumento $z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ llamada variable de semejanza.

Entonces:

a) La función $T = T(x,t)$ es solución de (A) si y sólo si la función $\Phi = \Phi(z)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\Phi''(z) + 2z\Phi'(z) = 0 \tag{E}$$

b) La solución general de (E) está dada por:

$$\Phi(z) = c_1 + c_2 \int_0^z \exp\left(-u^2\right) du, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

Se define como función de error a la dada por la siguiente expresión:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-u^2\right) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) La función erf(x) tiene las siguientes propiedades:

a) $\operatorname{erf}(0) = 0$;

b) $\operatorname{erf}(\infty) = 1$;

c) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$;

d) $\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-x^2\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

e) $\operatorname{erf}''(x) = -2x \operatorname{erf}'(x) < 0, \forall x > 0$

f) Puede ser representada como una serie de potencias

$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$

ii) Teniendo en cuenta a la función de error $\operatorname{erf}(x)$, la temperatura T viene dada por:

$$T(x,t) = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

donde las constantes A y B se determinan de las condiciones de contorno del problema correspondiente a la ecuación (A).

7. Nomenclatura

$A_i, B_i,\ i = 1, 2, 3$	constantes de integración
$a_i, i = 1, 2$	difusividad termal de la región fase i-ésima
a_{12}	razón entre las difusividades termales de las regiones 1 y 2
a_m	difusividad de humedad
c_m	capacidad de masa específica
c_q	capacidad de calor específico
F_0	número de Fourier
$k_i,\ i = 1, 2$	conductividad termal de la región fase i-ésima
k_{12}	razón entre las conductividades termales de las regiones 1 y 2
$K_0 = ru_0/c_2\Delta t$	número de Kossovitch
L	calor latente de evaporación de líquido por unidad de masa
l_0	la longitud característica
$\mathcal{L}_u = a_m/a_2$	número de Luikov
$\mathcal{P}_n = \delta\Delta t/u_0$	número de Posnov
q_0	coeficiente que caracteriza al flujo de calor en $x = 0$
$s(\tau)$	posición del frente de evaporación
$t_i(x, \tau), i = 1, 2$	temperatura en la región i-ésima
t_0	temperatura inicial
t_s	temperatura en la superficie $x = 0$
t_v	temperatura en el estado de vaporización
$T_i,\ i = 1, 2$	temperatura adimensional
u	potencial de transferencia de masa
x	coordenadas de longitud
X	longitud adimensional
Z	potencial definido por la ecuación (21)
ε	criterio de cambio de fase
δ	coeficiente del gradiente termal
ρ_2	densidad del cuerpo poroso en la región 2
λ	constante adimensional
ν	calor latente de evaporación adimensional
τ	tiempo
Θ	potencial de transferencia de masa adimensional

Agradecimientos

Agradezco en particular por su apoyo humano y técnico a mi director Doctor Domingo Alberto Tarzia. El reconocimiento se extiende a la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral de Rosario por el apoyo que me ha dado en este emprendimiento. Además quisiera agradecer a María Fernanda Natale, Adriana Briozzo, Graciela Garguichevich por apoyarme y aguantarme, y a Dirce Braccialarghe, María Alejandra Valenzuela y Gabriela Argiroffo por compartir desde el comienzo tardes de estudio, viajes y apuntes. Y por sobre todo, quiero agradecer a mi madre y abuelos todo el cariño, comprensión y tolerancia que pusieron en mí.

Esta tesis fue parcialmente financiada por el proyecto PIP # 4798 / 96 "Problemas de Frontera Libre para la Ecuación del Calor - Difusión Unidimensional" del CONICET - UA, Rosario (Argentina).

Departamento de Matemática – Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral Paraguay 1950 – (2000) Rosario, Argentina.

E-mail: maths@uaufce.edu.ar

emarcus@citynet.net.ar

References

[1] Alexiades, V. and Solomon, A. D. , *"Mathematical modeling of melting and freezing processes"*, Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1993).

[2] Carslaw, H. S. - Jaeger, J. C., "*Conduction of heat in solids*", Clarendon Press, Oxford (1959)

[3] Cho, S. H., "An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium", Int. J. Heat and Mass Transfer, 18, (1975), pp. 1139-1142.

[4] Crank, J , *"Free and moving boundary problems"*, Clarendon Press, Oxford (1984).

[5] Fasano, A. - Guan, Z. - Primicerio, M. - Rubinstein, I., *"Thawing in saturated porous media"*, Meccanica, 28 (1993), pp 103-109.

[6] Fasano, A. - Primicerio, M. - Tarzia, D. A., *"Similarity solutions in class of thawing processes"*, Math. Models Methods Appl. Sci., To appear.

[7] Gonzalez, A. M. - Tarzia, D. A., *"Determination of unknown coefficients of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for the two phase Stefan problem"*, Int. J. Engng. Sci., 34 (1996), pp 799-817.

[8] Lame, G. - Clapeyron, B. P., *"Memoire sur la soldification par refroidissement d'un globe liquide"*, Annales Chimie Physique, 47 (1831), pp. 250-256.

[9] Lin, S , *"An exact solution of the desublimation problem in a porous medium"*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 25, (1982), pp. 625-630.

[10] Luikov, A. V., *"Heat and mass transfer in capillary-porous bodies"*, Pergamon Press, Oxford (1966).

[11] Luikov, A. V., *"Analytical heat diffusion theory"*, Academic Press, New York (1968).

[12] Luikov, A. V., *"Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies."*Int. J. Heat Mass Transfer, 18 (1975), pp. 1-14.

[13] Luikov, A. V., *"Heat and mass transfer"*, MIR Publishers, Moscow (1978).

[14] Lunardini, V. J. , *"Heat transfer with freezing and thawing"*, Elsevier, Amsterdam (1991).

[15] Mikhailov, M. D., *"Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front"*, Int. J. Heat Mass Transfer, 18 (1975), pp. 797-804.

[16] Mikhailov, M. D., *"Exact solution for freezing of humid porous half-space"*, Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 19 (1976), pp. 651-655.

[17] Santillan Marcus, E. A. and Tarzia, D. A., *"Explicit solution for freezing of humid porous half-space with a heat flux condition"*, To appear.

[18] Santillan Marcus, E. A. and Tarzia, D. A., "Explicit solutions for the desublimation problem in a humid porous half-space with a heat flux condition", LATCYM '98, 7º Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia, Salta 5-8/10/1998, Vol II, pp. 452-456.

[19] Stefan, J , *"Über die theory der Eisbildung"*, Monatshefte fur Mathematik und Physik, 1, pp. 1-6 (1890).

[20] Tarzia, D. A., *"An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem"*, Quart. Appl. Math., 39 (1981), pp. 491-497.

[21] Tarzia, D. A. , *"Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional"*, Cuadern. Inst. Mat. B. Levi, 12 (1985), pp. 5 - 36. Ver también *"Transferencia de calor y materia con cambio de fase"*, cap. 2, ECAMAT '92, Primera Escuela de Postgrado en Transferencia de Calor y Materia, Tandil (1992), pp. 2.1 - 2.46

[22] Tarzia D. A. , *"A bibliography on moving free-boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem"*, Progetto Nazionalle M.P.I.: Equazioni di Evoluzione e Applicazioni Fisico-Matematiche, Firenze (1988). An improved version of this bibliography with more than 5000 references will be edited.