TESIS DE MAESTRIA
EN
MATEMATICA APLICADA

ALGORITMO PARA LA DETERMINACION DEL ERROR EN $L\phi$-APROXIMACION

POR

FABIAN EDUARDO LEVIS

DIRECTOR

DR. HECTOR HUGO CUENYA

JURADO

DR. JUAN CESCO
DR. SERGIO FAVIER
DR. DOMINGO TARZIA

30 DE OCTUBRE DE 1998

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FISICO QUIMICA Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICO QUÍMICA Y NATURALES

TESIS DE MAESTRIA
EN
MATEMÁTICA APLICADA

ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DEL ERROR EN L_Φ-APROXIMACIÓN

POR

FABIÁN EDUARDO LEVIS

Director :

DR. HÉCTOR HUGO CUENYA

30 de Octubre de 1998

A mi esposa Claudia Gariboldi

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primaria 41A30.
Palabras Claves Aproximación Monótona. Espacios de Orlicz.
Totalmente subsidiado por CONICOR y Univ. Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ALGORITMO PARA LA DETERMINACION DEL ERROR EN LΦ-APROXIMACION.

POR

FABIÁN EDUARDO LEVIS

-1998-

Resúmen

Sean $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función convexa con $\phi(x) > 0$ si $x > 0$, $\phi(0) = 0$ y $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida donde $\Omega = \mathbb{N}$ o un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ es el conjunto de partes de Ω y μ es cualquier medida finita. Consideremos el conjunto $W_\phi^\alpha(f)$ de elementos que minimizan $\int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu$ con f en el espacio de Orlicz $L_\phi = L_\phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y g en el conjunto de funciones en L_ϕ no decrecientes. En este trabajo se obtiene un mejor ϕ-aproximante como límite de una sucesión y se da un algoritmo computacional para estimar el error en ϕ-aproximación de funciones pertenecientes al subespacio de L_ϕ, L_ϕ^∞, por funciones de L_ϕ^∞, que son no decrecientes.

Abstract

Let $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be a convex function, $\phi(x) > 0$ if $x > 0$, $\phi(0) = 0$ and let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measure space where $\Omega = \mathbb{N}$ or a finite subset of $\mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ and μ is any finite measure. We consider the set $W_\phi^\alpha(f)$ of elements that minimize $\int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu$ with f in Orlicz space $L_\phi = L_\phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ and g in the class of nondecreasing functions of L_ϕ. In this work we obtain a best ϕ-approximant as limit of one sequence and we give a computational algorithm to estimate the error in ϕ-approximation of functions in the subspace of L_ϕ, L_ϕ^∞, by functions of L_ϕ^∞, which are nondecreasing.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función medible y

$$L_\phi = L_\phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f,\ \mathcal{A}-\text{medible} : \int_\Omega \phi(\alpha|f|)d\mu < \infty \text{ para algún } \alpha > 0\}.$$

Para funciones convexas $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ con $\phi(0) = 0$ el espacio L_ϕ es conocido como el espacio de Orlicz, el cual se reduce para $\phi(x) = x^p$, $p \geq 1$ a los espacios clásicos L^p.
Sea C un retículo tal que $C \subset L_\phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, C no vacío y ϕ-cerrado. En 1980, D. LANDERS y L. ROGGE (Ref.[4]) probaron que para cada $f \in L_\phi$, existe una función $g \in C$ tal que

$$E = \int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu = \inf_{h \in C} \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu. \tag{1}$$

Además demostraron que el conjunto $M_\phi(f)$ de mejores ϕ -aproximantes a f desde C que satisfacen (1), tiene un mínimo f^* y un máximo f°, si μ es una medida σ- finita.

Sea $L_\phi^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f,\ \mathcal{A} - \text{medible} : \int_\Omega \phi(\alpha|f|)d\mu < \infty$ para todo $\alpha > 0\}$.
Nuestro propósito es dar un algoritmo computacional para estimar el error E en ϕ-aproximación de funciones pertenecientes a L_ϕ^∞, por elementos de L_ϕ^∞ no decrecientes, en el caso de $\Omega = \mathbb{N}$ o un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ el conjunto de partes de Ω y μ cualquier medida finita.

El algoritmo está basado en la contrucción de f^* realizada por M. MARANO y J.M QUESADA (Ref.[6]) en "Monotone L_Φ-approximation", durante 1997. La idea original surge de la descripción de los elementos f^* y f° realizada por R. HOUTARI (Ref.[2]) en 1986 para el espacio $L_1[0,1]$. Existen otros antecedentes del trabajo. En 1972, R.E. BARLOW (Ref.[1]) hizo una construcción para el caso l^2. Autores como J.J. SWETITS y S.E. WEINSTEIN (Ref.[8]) han realizado una construcción para el espacio l^p, $1 < p < \infty$, en 1989.

Observamos en este trabajo que el resultado principal establecido en (Ref.[6]), no sale con las definiciones auxiliares dadas allí y se lo ha corregido modificando una de estas definiciones.

Por otra parte, probamos que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finita sobre $\Omega = \mathbb{N}$, W es el retículo de todas de sucesiones en L_ϕ, no decrecientes y $f \in L_\phi$ satisface $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k < \infty$ para alguna $g \in W$ entonces el error E^* en ϕ-aproximación, viene dado por

$$E^* = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k$$

donde $\gamma_k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k}} f_k^n$ y f^n es el mínimo del conjunto $M_\phi^n(f)$ de mejores ϕ-aproximantes a $f = (f_k)_{k=1}^n$ desde el conjunto M_n de vectores monótonos en $\mathbb{R}^n$. Además

$$E^* = \lim_{n\to\infty} E_n.$$

donde

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k = \inf_{h\in M_n} \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k.$$

Sea M el conjunto de sucesiones en L_ϕ^∞ no decrecientes y $f \in L_\phi^\infty$. Entonces el error en ϕ-aproximación viene dado por

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k$$

donde f^* es el mínimo del conjunto M_ϕ^α de mejores ϕ-aproximantes a f desde M. Puesto que la construcción de f^* requeriría procesos infinitos la estimación del error se orientará hacia la aproximación en subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, vinculando ambos procesos de aproximación. En este sentido probamos que si

$$f \in \{h \in L_\phi^\infty \,:\, h \leq g \text{ para alguna } g \in M\} \text{ y } n_0 \in \mathbb{N} \text{ satisface}$$

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq \epsilon. \tag{2}$$

entonces $|E - E_{n_0}| \leq \epsilon$.

Además damos condiciones suficientes que garanticen la existencia de una sucesión $g \in M$, mayorando una sucesión $f \in L_\phi^\infty$ dada.

Finalmente mostramos algunos ejemplos de aplicación donde estimamos aproximadamente el error E en ϕ-aproximación.

CAPITULO 1

PRELIMINARES MATEMATICOS

Este capítulo repasa algunos conceptos importantes desarrollados en [4] y [6] que serán necesarios más adelante y que son establecidos aquí con el propósito de hacer este trabajo lo más autocontenido posible. El lector hará bien en pasar por alto aquel material con el que se encuentre familiarizado.

1.1 INTRODUCCIÓN Y NOTACIÓN.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y notamos por $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ el sistema de todas las clases μ- equivalentes de funciones reales $\mathcal{A}$-medibles.

Un conjunto $C \subset \mathcal{W}$ es llamado un retículo si cada vez que $f \in C$ y $g \in C$ tenemos

$$f \wedge g = \min\{f, g\} \in C \quad \text{y} \quad f \vee g = \max\{f, g\} \in C.$$

Un retículo $C \subset \mathcal{W}$ es llamado σ-completo si para toda sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C$, tenemos

$$\bigwedge_{k=1}^{\infty} f_k = \min_{k \in \mathbb{N}}\{f_k\} \in C \quad \text{y} \quad \bigvee_{k=1}^{\infty} f_k = \max_{k \in \mathbb{N}}\{f_k\} \in C.$$

Para cada función medible $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definimos

$$L_\phi = L_\phi(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{W} : \int_\Omega \phi(\alpha|f|)d\mu < \infty \ \text{ para algún } \alpha > 0\}$$

$$L_\phi^\infty = L_\phi^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in L_\phi : \int_\Omega \phi(\alpha|f|)d\mu < \infty \ \text{ para todo } \alpha > 0\}$$

Para funciones convexas $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ con $\phi(0) = 0$, el espacio L_ϕ es conocido como espacio de Orlicz, el cual se reduce para $\phi(x) = x^p$, $p \geq 1$ a los espacios clásicos L^p.
Un conjunto $C \subset L_\phi$ es llamado ϕ-cerrado si

$$f_n \in C, \ \ f_n \uparrow f \in L_\phi \ \ \text{ó} \ \ f_n \downarrow f \in L_\phi \ \ \text{entonces} \ \ f \in C.$$

Sean ahora $C \subset L_\phi$ y $f \in L_\phi$ y consideremos el problema de encontrar una función $g \in C$ tal que

$$\int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu = \inf_{h \in C} \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu \tag{1.1}$$

Denotemos por $M_\phi(f)$ al conjunto de todas las $g \in C$ que satisfacen (1.1). Cada elemento en $M_\phi(f)$ es llamado un mejor ϕ-aproximante a f, desde C.

1.2 Existencia de Mejores L_ϕ - Aproximantes.

1.2.1 Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función continua $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ con $\phi(0) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \infty$ es llamada una μ-función si para toda $f, g \in \mathcal{W}$ con $0 \leq f \leq g$ y $\int_\Omega \phi(g)d\mu < \infty$ se satisface

$$\int_\Omega \phi(f)d\mu < \infty.$$

Observación. Sea $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función convexa con $\phi(0) = 0$ y ϕ no nula. Entonces ϕ es una μ función para cada espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Observación. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ϕ una μ-función. Entonces L_ϕ y L_ϕ^∞ son ambos, espacios lineales y retículos.

A continuación establecemos un resultado de existencia de mejores L_ϕ - aproximantes.

1.2.2 Teorema. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ϕ una μ-función. Entonces para cada retículo $C \subset L_\phi$, C no vacío y ϕ-cerrado y para cada $f \in L_\phi$ tenemos que el conjunto $M_\phi(f)$ de mejores ϕ-aproximantes a f desde C, es no vacío.*

Demostración. Sea

$$E = \inf_{h \in C} \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu$$

Si $E = \infty$, el resultado es trivial pues $M_\phi(f) = C$, no vacío.

Supongamos que $E < \infty$. Elegimos $(h_n)_{n\in\mathrm{N}} \subset C$ tal que

$$\int_\Omega \phi(|f - h_n|)d\mu \leq E + \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Sea $g = \underline{\lim}_{n\in\mathrm{N}} h_n (= \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} h_k)$. Probemos que $g \in M_\phi(f)$. Ponemos para $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$

$$g_{k,n} = \bigwedge_{j=k}^{n} h_j \quad \text{y} \quad g_k = \bigwedge_{j=k}^{\infty} h_j$$

Como $g_{k,n+1} = g_{k,n} \wedge h_{n+1}$ tenemos

$$\phi(|f - g_{k,n+1}|) + \phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|) = \phi(|f - g_{k,n}|) + \phi(|f - h_{n+1}|) \tag{1.3}$$

Como $g_{k,n} \vee h_{n+1} \in C$ pues $g_{k,n}$, $h_{n+1} \in C$, la relación (1.2) implica para $k \leq n$

$$\int_\Omega \phi(|f - h_{n+1}|)d\mu \leq E + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \int_\Omega \phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|)d\mu + \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{1.4}$$

De aquí por integración de (1.3) y de (1.4) tenemos para todo $n \geq k$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu &= \int_\Omega \phi(|f - g_{k,n}|)d\mu + \int_\Omega \phi(|f - h_{n+1}|)d\mu \\
&\quad - \int_\Omega \phi(|f - g_{k,n} \vee h_{n+1}|)d\mu \\
&\leq \int_\Omega \phi(|f - g_{k,n}|)d\mu + \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Puesto que $g_{k,k} = h_k$ esto implica que para todo $n \geq k$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu &\leq \int_\Omega \phi(|f - h_k|)d\mu + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \int_\Omega \phi(|f - h_k|)d\mu + \frac{1}{2^k}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Como $g_{k,n+1} \downarrow g_k$ para $n \to \infty$ y ϕ es continua, obtenemos de (1.2) y (1.5) por el lema de Fatou

$$\int_\Omega \phi(|f - g_k|)d\mu \leq \underline{\lim} \int_\Omega \phi(|f - g_{k,n+1}|)d\mu$$
$$\leq \underline{\lim}\Big(\int_\Omega \phi(|f - h_k|)d\mu + \frac{1}{2^k}\Big) < \infty \tag{1.6}$$

Por lo tanto de (1.6) obtenemos que g_k es real y que $f - g_k \in L_\phi$. Pero $f \in L_\phi$ y L_ϕ es lineal, en consecuencia $g_k \in L_\phi$. Ahora, puesto que $g_{k,n} \in C$ y C es ϕ-cerrado, obtenemos

$$g_k \in C \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Como $g_k \uparrow g$ para $k \to \infty$ y ϕ es continua, usando nuevamente Fatou obtenemos de (1.6)

$$\int_\Omega \phi(|f - g|)d\mu \leq \underline{\lim} \int_\Omega \phi(|f - h_k|)d\mu \leq E \tag{1.8}$$

De aquí $f - g \in L_\phi$ y por ende $g \in L_\phi$. Además por (1.7), $g \in C$ porque C es ϕ-cerrado. Consecuentemente (1.8) implica que $g \in M_\phi(f)$ y así $M_\phi(f)$ es no vacío.

□

En lo siguiente consideremos el problema de unicidad de mejores ϕ-aproximantes a f desde C. Llamemos

$$D_\phi(C) = \{f \in L_\phi : \int_\Omega \phi(|f - g|)d\mu < \infty \text{ para algún } g \in C\}.$$

Si $f \notin D_\phi(C)$ entonces $M_\phi(f) = C$. Por ende si C es no unitario, el problema de unicidad se reduce a considerar $f \in D_\phi(C)$.

1.2.3 Corolario. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ϕ una función estríctamente convexa con $\phi(0) = 0$. Entonces para cada retículo $C \subset$*

L_ϕ, C no vacío, convexo y ϕ-cerrado y para cada $f \in D_\phi(C)$ tenemos un único mejor ϕ-aproximante a f desde C.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.2.2 y una observación anterior,

$$M_\phi(f) \text{ es no vacío.}$$

Asumimos que existen $h, g \in M_\phi(f)$, no iguales. Puesto que $f \in D_\phi(C)$ y ϕ es estríctamente convexa tenemos

$$\int_\Omega \phi(|f - \frac{1}{2}(g+h)|)d\mu < \frac{1}{2}\int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu.$$

Esto es una contradicción pues $\frac{1}{2}(g+h) \in C$.

□

1.3 El conjunto de Mejores Aproximantes.

En esta sección estudiamos el conjunto $M_\phi(f)$ de mejores ϕ-aproximantes a f desde C.

1.3.1 TEOREMA. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ϕ una μ-función. Sea C un retículo $C \subset L_\phi$, C no vacío, ϕ-cerrado y $f \in D_\phi(C)$. Entonces $M_\phi(f)$ es un retículo no vacío y σ-completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in D_\phi(C)$. Conforme al teorema 1.2.2 tenemos que $M_\phi(f)$ es no vacío. Probemos primero que $M_\phi(f)$ es un retículo. Sean $g, h \in M_\phi(f)$, entonces $g \wedge h$, $g \vee h \in C$ y

$$\int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu + \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu = \int_\Omega \phi(|f-g\vee h|)d\mu + \int_\Omega \phi(|f-g\wedge h|)d\mu \quad (1.9)$$

Como $f \in D_\phi(C)$ entonces

$$g \wedge h,\ g \vee h \in M_\phi(f) \text{ y } M_\phi(f) \text{ es un retículo.}$$

Sean ahora $g_n \in M_\phi(f)$, $n \in \mathbb{N}$ y probemos sólo que

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} g_k \in M_\phi(f).$$

(El caso $\bigwedge_{k=1}^{\infty} g_k \in M_\phi(f)$ es similar). Definimos

$$G = \bigvee_{k=1}^{\infty} g_k \quad \text{y} \quad G_n = \bigvee_{k=1}^{n} g_k$$

Como $M_\phi(f)$ es un retículo, $G_n \in M_\phi(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además como $G_n \uparrow G$ por el teorema de Fatou obtenemos

$$\int_\Omega \phi(|f - G|)d\mu \leq \underline{\lim} \int_\Omega \phi(|f - G_n|)d\mu \tag{1.10}$$

Pero para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \phi(|f - G_{n+1}|)d\mu + \int_\Omega \phi(|f - g_{n+1}|)d\mu \\ &\qquad \leq \int_\Omega \phi(|f - G_{n+1}|)d\mu + \int_\Omega \phi(|f - G_n \wedge g_{n+1}|)d\mu \\ &\qquad = \int_\Omega \phi(|f - G_n|)d\mu + \int_\Omega \phi(|f - g_{n+1}|)d\mu. \end{aligned}$$

Por ende, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \phi(|f - G_{n+1}|)d\mu \leq \int_\Omega \phi(|f - G_n|)d\mu.$$

De aquí, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \phi(|f - G_n|)d\mu \leq \int_\Omega \phi(|f - g_1|)d\mu.$$

Como consecuencia de (1.10)

$$\int_\Omega \phi(|f - G|)d\mu \leq \int_\Omega \phi(|f - g_1|)d\mu. \tag{1.11}$$

Entonces $f - G \in L_\phi$ y $G \in L_\phi$. Pero como C es un retículo ϕ-cerrado, $G \in C$ y de (1.11) tenemos

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} g_k \in M_\phi(f).$$

□

Los siguientes dos resultados son auxiliares para establecer consideraciones adicionales sobre el conjunto $M_\phi(f)$, que se verán en el Teorema 1.3.4.

1.3.2 LEMA. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y Π una familia formada por elementos de $\mathcal{A}$. Entonces existe una sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset \Pi$ tal que para todo $B \in \Pi$,*

$$\mu(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\mu(B) \leq \mu(\Omega) < \infty$ para todo $B \in \Pi$, entonces existe

$$a_1 = \sup_{B\in\Pi}\{\mu(B)\}.$$

Sea entonces $B_1 \in \Pi$ tal que

$$\frac{a_1}{2} \leq \mu(B_1) \leq a_1.$$

Como para todo $B \in \Pi$, $\mu(B - B_1) \leq \mu(\Omega) < \infty$, existe

$$a_2 = \sup_{B\in\Pi}\{\mu(B - B_1)\}.$$

Definimos $B_2 \in \Pi$ tal que

$$\frac{a_2}{2} \leq \mu(B_2) \leq a_2.$$

En general podemos definir una sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n\in\mathrm{N}} \subset \Pi$ tal que,

$$\frac{a_n}{2} \leq \mu(B_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k) \leq a_n,$$

donde

$$a_n = \sup_{B\in\Pi}\{\mu(B - \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)\}.$$

Observamos que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \leq \mu(B_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty}(B_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) < \infty$$

Por lo tanto si existe $C \in \Pi$ tal que

$$\mu(C - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \epsilon > 0,$$

tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon \leq \mu(C - \bigcup_{k=1}^{n} B_k) \leq a_{n+1}.$$

Esto es una contradicción. De aquí, para todo $B \in \Pi$,

$$\mu(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0.$$

□

1.3.3 TEOREMA. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $D \subset \mathcal{W}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si μ es σ-finita entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathrm{N}} \subset D$ tal que*

$$\bigwedge_{n\in\mathrm{N}} f_n \leq g \leq \bigvee_{n\in\mathrm{N}} f_n \quad \textit{para todo } g \in D.$$

DEMOSTRACIÓN[1]. Supongamos primero el caso que μ es una medida finita. Definimos para cada $q \in \mathbb{Q}$ las familias de conjuntos

$$\mathcal{F}_q = \{X(g,q) \,:\, g \in D\}$$

y

$$\mathcal{G}_q = \{Y(g,q) \,:\, g \in D\}$$

donde $X(g,q) = \{x \in \Omega \,:\, g(x) \geq q\}$ e $Y(g,q) = \{x \in \Omega \,:\, g(x) \leq q\}$. Entonces por el lema 1.3.2, para cada $q \in \mathbb{Q}$ existen sucesiones de funciones

$$(g_{n,q})_{n\in\mathrm{N}} \subset D$$

[1] La idea general de esta demostración fue sugerida por el Doctor Fernando Mazzone.

y

$$(h_{n,q})_{n\in\mathbb{N}} \subset D$$

tales que para toda $g \in D$

$$\begin{gathered}\mu(X(g,q) - \bigcup_{k=1}^{\infty} X(g_{k,q},q)) = 0 \\ \text{y} \\ \mu(Y(g,q) - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y(h_{k,q},q)) = 0.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Veamos primero que para toda $g \in D$,

$$g \leq \bigvee_{(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} g_{n,q} \text{ en casi todo punto.}$$

Definimos

$$B = \{x \in \Omega \ : \ g(x) > \bigvee_{(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} g_{n,q}(x) \ \}.$$

Como para cada $x \in B$ existe $q_x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\bigvee_{(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} g_{n,q}(x) < q_x \leq g(x),$$

entonces si $R = \{q_x \ : \ x \in B\}$ tenemos

$$B \subset \bigcup_{q\in R} (X(g,q) - \bigcup_{k=1}^{\infty} X(g_{k,q},q)).$$

Por lo tanto de (1.12) se tiene que

$$\mu(B) \leq \sum_{q\in R} \mu(X(g,q) - \bigcup_{k=1}^{\infty} X(g_{k,q},q)) = 0.$$

En consecuencia, para toda $g \in D$,

$$g \leq \bigvee_{(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} g_{n,q} \text{ en casi todo punto.}$$

Probemos ahora que, para toda $g \in D$,

$$\bigwedge_{(n,q)\in \mathrm{N}\times \mathrm{Q}} h_{n,q} \leq g \text{ en casi todo punto.}$$

Definimos

$$V = \{x \in \Omega \ : \ g(x) < \bigwedge_{(n,q)\in \mathrm{N}\times \mathrm{Q}} h_{n,q}(x) \ \}.$$

Como para cada $x \in V$ existe $p_x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$g(x) \leq p_x < \bigwedge_{(n,q)\in \mathrm{N}\times \mathrm{Q}} h_{n,q}(x),$$

entonces si $R' = \{p_x \ : \ x \in V\}$ tenemos

$$V \subset \bigcup_{q\in R'} (Y(g,q) - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y(h_{k,q},q)).$$

Por lo tanto de (1.12) se tiene que

$$\mu(V) \leq \sum_{q\in R} \mu(Y(g,q) - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y(h_{k,q},q)) = 0$$

y en consecuencia, para toda $g \in D$,

$$\bigwedge_{(n,q)\in \mathrm{N}\times \mathrm{Q}} h_{n,q} \leq g \text{ en casi todo punto.}$$

El caso general de μ una medida σ-finita es trivial. En efecto, como

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \text{ con } \Omega_k \cap \Omega_j = \varnothing \text{ para } k,\ j \text{ distintos y } \mu(\Omega_k) < \infty,$$

si para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$D_k = \{g \ : \ \Omega_k \to \mathbb{R} \ : \ g \in D\},$$

por lo visto arriba existen sucesiones de funciones

$$(h_{n,q,k})_{(n,q)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}} \subset D_k \text{ y } (g_{n,q,k})_{(n,q)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}} \subset D_k$$

tales que para todo $g \in D_k$,

$$\bigwedge_{(n,q)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}} h_{n,q,k} \leq g \leq \bigvee_{(n,q)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}} g_{n,q,k} \text{ en casi todo punto de } \Omega_k.$$

Por consiguiente para toda $g \in D$,

$$\bigwedge_{(n,q,k)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}\times\mathrm{N}} \widetilde{h}_{n,q,k} \leq g \leq \bigvee_{(n,q,k)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}\times\mathrm{N}} \widetilde{g}_{n,q,k} \text{ en casi todo punto}$$

donde $(\widetilde{h}_{n,q,k})_{(n,q,k)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}\times\mathrm{N}} \subset D$, $(\widetilde{g}_{n,q,k})_{(n,q,k)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}\times\mathrm{N}} \subset D$, $\widetilde{h}_{n,q,k|\Omega_k} = h_{n,q,k}$ y $\widetilde{g}_{n,q,k|\Omega_k} = g_{n,q,k}$.

De aquí, el resultado es trivial considerando $f = (f_{n,q,k})_{(n,q,k)\in\mathrm{N}\times\mathrm{Q}\times\mathrm{N}}$ tal que

$$f_{n,q,k} = \begin{cases} \widetilde{g}_{\frac{n}{2},q,k} & \text{si } n \text{ es par} \\ \widetilde{h}_{\frac{n+1}{2},q,k} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

□

1.3.4 Teorema. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ϕ una μ-función. Sea C un retículo $C \subset L_\phi$, C no vacío, ϕ-cerrado y $f \in D_\phi(C)$. Si μ es σ-finita entonces $M_\phi(f)$ admite un mínimo y un máximo, es decir existen elementos f^*, $f^\circ \in M_\phi(f)$ tal que*

$$f^* \leq g \leq f^\circ \quad \text{para todo } g \in M_\phi(f).$$

Demostración. Sigue de los teoremas 1.3.1 y 1.3.3 considerando $D = M_\phi(f)$.

□

1.4 Caracterización de Mejores L_ϕ^∞ - Aproximantes en el caso discreto.

En esta sección damos la construcción hecha por Marano y Quesada (Ref.[6]), del mímimo del conjunto L_ϕ^∞ -aproximante, no decreciente, en el caso discreto, donde ϕ es una función convexa positiva, la cual generaliza a la realizada por Houtari para $L_1[0,1]$ (Ref.[2]).

1.4.1 INTRODUCCIÓN. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita donde $\Omega = \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ es el conjunto de partes de Ω. Supongamos que

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{n\}) = \alpha_n \ \text{ donde } \ \alpha_1, \ \alpha_2 > 0.$$

Claramente $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Adoptamos la siguiente convención

$$\text{si } \alpha_m = 0 \ \text{ para algún } m \in \mathbb{N}, \ \alpha_k = 0 \text{ para todo } k \geq m.$$

Definimos $N_1 = \{k \in \mathbb{N} : \alpha_k > 0\}$ y sea $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función convexa con $\phi(0) = 0$ y $\phi(x) > 0$ si $x > 0$. Entonces el espacio lineal $L_\phi^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ viene dado por

$$\{f \in L_\phi : \sum_{k \in N_1} \phi(\lambda |f_k|)\alpha_k < \infty \ \text{ para todo } \lambda > 0\}.$$

Notamos $L_\phi^\alpha = L_\phi^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se puede ver en [3] que ϕ tiene una derivada a derecha $\phi_+^{'}$ y una derivada a izquierda $\phi_-^{'}$ no decrecientes en todo punto tales que

$$\phi_-^{'}(x) \leq \phi_+^{'}(x) \ \text{ si } \ x > 0 \ \text{ y } \ \phi(x) = \int_0^x \phi_-^{'}(t)dt = \int_0^x \phi_+^{'}(t)dt.$$

De lo anterior se desprende que

$$x\phi_+^{'}(x) \leq \phi(2x) \ \text{ y } \ \underline{\lim}_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x} > 0$$

y por ende $L_\phi^\alpha \subset l_1^\alpha$ donde

$$l_1^\alpha = \{(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{k \in N_1} |f_k|\alpha_k < \infty\}.$$

Además para todo $n \in N_1$

$$|g_n|\phi_-^{'}(|f_n|) \leq |g_n|\phi_+^{'}(|f_n|) \leq (|g_n| + |f_n|)\phi_+^{'}(|g_n| + |f_n|) \leq \phi(2(|g_n| + |f_n|)),$$

entonces para toda $f, g \in L_\phi^\alpha$,

$$|g|\phi'_-(|f|),\ |g|\phi'_+(|f|) \in l_1^\alpha.$$

Sea M el retículo de todas las sucesiones en L_ϕ^α, no decrecientes. Entonces para $f \in L_\phi^\alpha$, el conjunto $M_\phi^\alpha(f)$ de mejores ϕ-aproximantes a f desde M es no vacío por el teorema 1.2.2. Además como μ es σ-finita, por el teorema 1.3.1 existe un mínimo $f^* \in M_\phi^\alpha(f)$.

Presentamos a continuación una construcción de $f^* \in M_\phi^\alpha(f)$.

1.4.2 Definición. Para $g, h \in M$ definimos la función convexa $\Psi : [0,1] \to [0,\infty)$ de variable real λ por

$$\Psi(g,h,\lambda) = \sum_{k\in N_1} \phi(|f_k-(1-\lambda)g_k-\lambda h_k|)\alpha_k = \sum_{k\in N_1} \phi(|f_k-g_k+\lambda(g_k-h_k)|)\alpha_k$$

Observación. Para todo $\lambda \in (0,1]$ y para todo $k \in N_1$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}(\phi(|f_k - g_k + \lambda(g_k - h_k)|) - \phi(|f_k - g_k|)) \\
&\qquad \le \frac{1}{\lambda}(\lambda\,|g_k - h_k|\phi'_+(|f_k - g_k| \vee |f_k - g_k + \lambda(g_k - h_k)|)) \\
&\qquad \le (|g_k - h_k| + |f_k - g_k|)\phi'_+(|f_k - g_k| + |g_k - h_k|) \\
&\qquad \le \phi(2(|f_k - g_k| + |g_k - h_k|)).
\end{aligned}$$

Como además $2(|f-g| + |g-h|) \in L_\phi^\alpha$ entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue existe $\Psi'_+(g,h,0)$ y

$$\begin{aligned}
\Psi'_+(g,h,0) = &\sum_{k\in N_1} (h_k - g_k)\chi_{\{g_k<h_k\}}\phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k\le g_k\}}\alpha_k \\
&- \sum_{k\in N_1} (h_k - g_k)\chi_{\{g_k<h_k\}}\phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k>g_k\}}\alpha_k \\
&+ \sum_{k\in N_1} (g_k - h_k)\chi_{\{g_k>h_k\}}\phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k\ge g_k\}}\alpha_k \\
&- \sum_{k\in N_1} (g_k - h_k)\chi_{\{g_k>h_k\}}\phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k<g_k\}}\alpha_k
\end{aligned}$$

1.4.3 TEOREMA. (CARACTERIZACIÓN DE MEJORES L^α_ϕ-APROXIMANTES).

(i) *Sea* $g \in M$. *Entonces* $g \in M^\alpha_\phi(f)$ *si y sólo si* $\Psi'_+(g,h,0) \geq 0$ *para todo* $h \in M$.

(ii) *Si* $g \in M$ *y* $h \in M^\alpha_\phi(f)$ *entonces* $g \in M^\alpha_\phi(f)$ *si y sólo si* $\Psi'_+(g,h,0) = 0$

DEMOSTRACIÓN. (i). Sea $g \in M$ y supongamos que $g \in M^\alpha_\phi(f)$. Entonces

$$\Psi(g,h,0) \leq \Psi(g,h,\lambda) \text{ para todo } h \in M \text{ y para todo } \lambda \in [0,1].$$

Por lo tanto

$$\frac{\Psi(g,h,\lambda) - \Psi(g,h,0)}{\lambda} \geq 0 \text{ para todo } h \in M \text{ y para todo } \lambda \in (0,1].$$

Conclusión

$$\Psi'_+(g,h,0) \geq 0 \text{ para todo } h \in M.$$

Recíprocamente, de la convexidad de Ψ, tenemos que para todo $h \in M$,

$$\Psi'_+(g,h,0) \leq \frac{\Psi(g,h,\lambda) - \Psi(g,h,0)}{\lambda} \quad \text{para todo } \lambda \in (0,1].$$

Por consiguiente

$$\Psi(g,h,0) \leq \Psi(g,h,\lambda) \text{ para todo } h \in M,$$

pues $\Psi'_+(g,h,0) \geq 0$.

Ahora para probar (ii) observamos por la convexidad de Ψ que

$$\Psi'_+(g,h,0) \leq \Psi(g,h,1) - \Psi(g,h,0) = \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k - \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k.$$

Luego si $g \in M^\alpha_\phi(f)$, como $h \in M^\alpha_\phi(f)$, se satisface

$$\sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k = \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k$$

y entonces $\Psi'_+(g,h,0) \leq 0$. Por lo tanto de (i) $\Psi'_+(g,h,0) = 0$.
Recíprocamente si $\Psi'_+(g,h,0) = 0$ entonces

$$\sum_{k\in N_1} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k - \sum_{k\in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \geq 0$$

Pero $h \in M^\alpha_\phi(f)$, entonces

$$\sum_{k\in N_1} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k = \sum_{k\in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k.$$

En consecuencia $g \in M^\alpha_\phi(f)$.

□

1.4.4 Definición. Decimos que L es un N_1-intervalo si es un conjunto no vacío de la forma $I \cap N_1$, donde I es un intervalo.

1.4.5 Definición. Una sucesión $g \in M$ se dice no constante a derecha (no constante a izquierda) en L si y sólo si existe $\delta > 0$ ($\delta < 0$) tal que la sucesión h definida por $h = g + \delta$ en L y $h = g$ en $N_1 - L$ está en M.

1.4.6 Definición. Sean $g \in M$ y L un N_1-intervalo entonces definimos las siguientes expresiones,

$$\Gamma_+(L,g) = \sum_{k\in L}[\phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k\leq g_k\}} - \phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k>g_k\}}]\alpha_k$$

$$\Gamma_-(L,g) = \sum_{k\in L}[\phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k<g_k\}} - \phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k\geq g_k\}}]\alpha_k$$

donde como es usual, nosotros notamos por χ_B, la función característica del conjunto B. Si $L = [k, u+1) \cap N_1$, escribimos $\Gamma_+(k,u,g)$, $\Gamma_-(k,u,g)$ en lugar de $\Gamma_+(L,g)$ y $\Gamma_-(L,g)$ respectivamente. (Hacemos la convención que $\infty + 1 = \infty$).

Observación. Si L es finito, claramente $\Gamma_+(L,g)$ es finito.
Si $L = \mathbb{N}$, entonces $\Gamma_+(\mathbb{N},g)$ es finito pues $(f_n - g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\alpha_\phi$, $(1)_{n\in\mathbb{N}} \in L^\alpha_\phi$ y

$$\begin{aligned}\Gamma_+(\mathbb{N},g) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k\leq g_k\}}\alpha_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi'_+(|f_k - g_k|)\alpha_k\end{aligned}$$

Análogamente $\Gamma_-(L,g)$ es finito para todo N_1-intervalo L.

1.4.7 LEMA. *Sean* $g \in M_\phi^\alpha(f)$ *y* L *un* N_1*-intervalo. Entonces*

(i) *Si* g *es no constante a derecha en* L, $\Gamma_+(L,g) \geq 0$.

(ii) *Si* g *es no constante a izquierda en* L, $\Gamma_-(L,g) \leq 0$.

DEMOSTRACIÓN. (i) Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que la sucesión h definida por

$$h_k = \begin{cases} g_k + \delta & \text{si } k \in L \\ g_k & \text{si } k \in N_1 - L \end{cases}$$

está en M. Por el teorema 1.4.3 (i), $\Psi'_+(g,h,0) \geq 0$ y por otro lado,

$$\begin{aligned} \Psi'_+(g,h,0) &= \sum_{k\in L} \delta\,[\phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k \leq g_k\}} - \phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k > g_k\}}]\alpha_k \\ &= \delta\,\Gamma_+(L,g) \end{aligned}$$

Concluimos que, $\Gamma_+(L,g) \geq 0$ pues $\delta > 0$.

(ii) Por hipótesis existe $\delta < 0$ tal que la sucesión h definida por

$$h_k = \begin{cases} g_k + \delta & \text{si } k \in L \\ g_k & \text{si } k \in N_1 - L \end{cases}$$

está en M. Luego, $\delta\,\Gamma_-(L,g) = \Psi'_+(g,h,0) \geq 0$ y de allí $\Gamma_-(L,g) \leq 0$.

□

1.4.8 LEMA. *Sean* $g,h \in M$ *y* L *un* N_1*-intervalo. Entonces*

(i) *Si* $g \geq h$ *en* L, $\Gamma_+(L,g) \geq \Gamma_+(L,h)$.

(ii) *Si* $g > h$ *en* L, $\Gamma_-(L,g) \geq \Gamma_+(L,h)$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i) observamos la siguiente afirmación

Si $f_n \leq h_n$ entonces $f_n \leq g_n$ y $\phi'_+(g_n - f_n) \geq \phi'_+(h_n - f_n)$.

Si $f_n > g_n$ entonces $f_n > h_n$ y $\phi'_-(f_n - g_n) \leq \phi'_-(f_n - h_n)$.

Luego si $f_n \leq h_n$, como $\phi'_+ \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k\in L} \phi'_+(h_k - f_k)\chi_{\{f_k \leq h_k\}}\alpha_k &\leq \sum_{k\in L} \phi'_+(g_k - f_k)\chi_{\{f_k \leq h_k\}}\alpha_k \\ &\leq \sum_{k\in L} \phi'_+(g_k - f_k)\chi_{\{f_k \leq g_k\}}\alpha_k \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por otra parte si $f_n > g_n$, como $\phi'_- \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in L} \phi'_-(f_k - g_k)\chi_{\{f_k > g_k\}}\alpha_k &\leq \sum_{k \in L} \phi'_-(f_k - h_k)\chi_{\{f_k > g_k\}}\alpha_k \\ &\leq \sum_{k \in L} \phi'_-(f_k - h_k)\chi_{\{f_k > h_k\}}\alpha_k \end{aligned} \tag{1.14}$$

Por ende de (1.13) y de (1.14), $\Gamma_+(L, g) \geq \Gamma_+(L, h)$.

La segunda afirmación sigue del siguiente hecho,

Si $f_n \leq h_n$ entonces $f_n < g_n$ y $\phi'_+(h_n - f_n) \leq \phi'_-(g_n - f_n)$.

Si $f_n \geq g_n$ entonces $f_n > h_n$ y $\phi'_+(f_n - g_n) \leq \phi'_-(f_n - h_n)$.

En efecto, si $f_n \leq h_n$, como $\phi'_- \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in L} \phi'_+(h_k - f_k)\chi_{\{f_k \leq h_k\}}\alpha_k &\leq \sum_{k \in L} \phi'_-(g_k - f_k)\chi_{\{f_k \leq h_k\}}\alpha_k \\ &\leq \sum_{k \in L} \phi'_-(g_k - f_k)\chi_{\{f_k < g_k\}}\alpha_k \end{aligned} \tag{1.15}$$

Por otra parte si $f_n \geq g_n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in L} \phi'_+(f_k - g_k)\chi_{\{f_k \geq g_k\}}\alpha_k &\leq \sum_{k \in L} \phi'_-(f_k - h_k)\chi_{\{f_k \geq g_k\}}\alpha_k \\ &\leq \sum_{k \in L} \phi'_-(f_k - h_k)\chi_{\{f_k > h_k\}}\alpha_k \end{aligned} \tag{1.16}$$

Por ende de (1.15) y de (1.16), $\Gamma_-(L, g) \geq \Gamma_+(L, h)$.

$\square$

1.4.9 DEFINICIÓN. Sea $c \in \mathbb{R}$. Definimos

$M_c = \inf\{-\Gamma_+(1, n, c) : n \in N_1\}$.

$$T_c = \begin{cases} \sup\{n \in N_1 : -\Gamma_+(1, n, c) = M_c\} & \text{si } M_c \leq 0 \\ 1 & \text{si } M_c > 0 \end{cases}$$

En el caso que $M_c \leq 0$ y el conjunto $\{n \in N_1 : -\Gamma_+(1,n,c) = M_c\}$ es vacío, convendremos en que $T_c = \infty$.

OBSERVACIÓN. Es claro que si N_1 es finito entonces M_c y T_c son finitos. Por otra parte si $N_1 = \mathbb{N}$ entonces M_c existe pues por lo visto en la observación a la definición 1.4.6, para todo $n \in N_1 \cup \{\infty\}$,

$$\Gamma_+(1,n,c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi'_+(|f_k - g_k|)\alpha_k < \infty.$$

Claramente, en este último caso $M_c \leq -\Gamma_+(1,n,c)$ para todo $n \in N_1 \cup \{\infty\}$.

Finalmente, notamos en los siguientes ejemplos que T_c, puede tomar valores infinitos.

1.4.10 EJEMPLO. Consideremos el espacio L_ϕ^α, donde $\phi(x) = x$ y α es decreciente. Sean $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión tal que $|f| \leq c$ y $d \in \mathbb{R}$ con $d > c$. Entonces es claro que,

(1) $f \in L_\phi^\alpha$, pues f es acotada,
(2) $\Gamma_+(1,n,d) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
(3) $M_d = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ y
(4) $T_d = \infty$ pues $M_d \leq 0$ y $\{n \in \mathbb{N} : -\Gamma_+(1,n,d) = M_d\} = \emptyset$.

1.4.11 EJEMPLO. Consideremos el espacio L_ϕ^α, donde $\phi(x) = x^2$ y α es decreciente. Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión tal que para todo $n \geq n_0$, $f_n = f_{n_0}$ y para todo $n < n_0$, $f_n < f_{n_0}$. Entonces es claro que $f \in L_\phi^\alpha$, pues

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|f_k|)^2\alpha_k = \sum_{k=1}^{n_0-1}(|f_k|)^2\alpha_k + (|f_{n_0}|)^2 \sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Además si $d = f_{n_0}$ se satisface,

(1) $\Gamma_+(1,n,d) = \sum_{k=1}^{n_0-1} 2(d - f_k)\alpha_k$ para todo $n \geq n_0 - 1$,
(2) $M_d = -\Gamma_+(1, n_0 - 1, d)$ y
(3) $T_d = \infty$ pues $M_d \leq 0$ y $\{n \in \mathbb{N} : -\Gamma_+(1,n,d) = M_d\} = \{n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0 - 1\}$.

Analizamos a continuación, algunas propiedades de la aplicación

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ tal que } T(c) = T_c.$$

Denotamos por $s(N_1) = \begin{cases} n & \text{si } N_1 = \{k \in \mathbb{N} \, : \, 1 \leq k \leq n\} \\ \infty & \text{si } N_1 = \mathbb{N} \end{cases}$

1.4.12 LEMA. $f_1^* = f_1 \wedge f_2^*$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f_1 < f_2^*$, definimos la sucesión g por

$$g_n = \begin{cases} f_1 & \text{si } n = 1 \\ f_n^* & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Dado que $\alpha_1 > 0$ y $\phi \geq 0$ tenemos $\phi(|f_1 - f_1^*|)\alpha_1 = 0$ pues

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k &= \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k - \phi(|f_1 - f_1^*|)\alpha_1 \\ &\leq \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k \\ &\leq \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k. \end{aligned}$$

Pero $\phi(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, por consiguiente

$$f_1^* = f_1.$$

Si $f_1 \geq f_2^*$ definimos la sucesión g por

$$g_n = \begin{cases} f_2^* & \text{si } n = 1 \\ f_n^* & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Puesto que $|f_1 - f_2^*| = f_1 - f_2^* \leq f_1 - f_1^* = |f_1 - f_1^*|$, ϕ es no decreciente y $\alpha_1 > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k &\leq \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \\ &= \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k - \phi(|f_1 - f_1^*|)\alpha_1 + \phi(|f_1 - f_2^*|)\alpha_1 \\ &\leq \sum_{k \in N_1} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k \end{aligned}$$

Por ende $\phi(|f_1 - f_1^*|)\alpha_1 = \phi(|f_1 - f_2^*|)\alpha_1$ y

$$f_1^* = f_2^*.$$

□

1.4.13 LEMA. *(i) Si $c \leq d$ entonces $M_d \leq M_c$.*
(ii) $M_{f_2^*} \leq 0$.

DEMOSTRACIÓN. (i) Sea $c \leq d$. Por la definición de M_d y el lema 1.4.8, tenemos que para todo $n \in N_1$

$$M_d \leq -\Gamma_+(1, n, d) \leq -\Gamma_+(1, n, c).$$

Concluimos que, $M_d \leq M_c$.

(ii) Supongamos primero que $f_1 < f_2^*$. Entonces como M_c es decreciente tenemos,

$$M_{f_2^*} \leq M_{f_1} \leq -\Gamma_+(1, 1, f_1) = -\phi_+'(0)\alpha_1 \leq 0.$$

Si $f_1 \geq f_2^*$ entonces por lema 1.4.12, $f_1^* = f_2^*$. Tomemos

$$m = \sup\{n \in N_1 \ : \ f_n^* = f_2^*\}$$

Como f^* es no constante a derecha en $L = [1, m+1) \cap N_1$, por lema 1.4.7 tenemos

$$-\Gamma_+(1, m, f^*) \leq 0.$$

Como $m \leq s(N_1)$ entonces por la observación a la definición 1.4.9, se tiene

$$M_{f_2^*} \leq -\Gamma_+(1, m, f_2^*) = -\Gamma_+(1, m, f^*) \leq 0.$$

□

1.4.14 TEOREMA.

(i) *$T_c \to s(N_1)$ cuando $c \to \infty$*
(ii) *Si $c < d$ entonces $T_c \leq T_d$.*
(iii) *$T_c \to 1$, cuando $c \to -\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. (i) Si $N_1 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$, es claro que

$$T_c = n \quad \text{para todo} \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad c \geq \bigvee_{k \in N_1} f_k.$$

Supongamos que $N_1 = \mathbb{N}$ y sea $n \in N_1$, $n \geq 2$, arbitrario. Afirmamos que si $c = f_n^*$ entonces $T_c \geq n$. En efecto, si $T_c < n$ y definimos

$$s = \sup\{k \in N_1 : f_k^* = c\}$$

tenemos que $f^* \leq c$ sobre $L = [T_c + 1, s + 1) \cap N_1$ y

$$f^* \text{ es no constante a derecha sobre } L.$$

Sigue del lema 1.4.7 que

$$\Gamma_+(L, f^*) \geq 0. \tag{1.17}$$

Como $f_2^* \leq c$, por el lema 1.4.13, $M_c \leq 0$. Además por definición

$$M_c \leq -\Gamma_+(1, s, c).$$

Luego si $M_c = -\Gamma_+(1, s, c)$ tenemos

$$T_c \geq s \geq n,$$

y esto es una contradicción. Por ende

$$M_c < -\Gamma_+(1, s, c)$$

y en consecuencia

$$\Gamma_+(L, c) = \Gamma_+(1, s, c) + M_c < 0. \tag{1.18}$$

Luego por (1.17) y (1.18), $\Gamma_+(L, f^*) > \Gamma_+(L, c)$ con $c \geq f^*$ y esto contradice el lema 1.4.8 (i). Por lo tanto

$$T_c \geq n$$

y por consiguiente

$$T_c \to \infty \quad \text{cuando} \quad c \to \infty.$$

(ii) Sea $c < d$ y supongamos que

$$T_d < T_c.$$

Entonces $T_c > 1$ y por ende $M_c \leq 0$. De aquí por el lema 1.4.13 (i), $M_d \leq 0$ y de la definición de T_d tenemos,

$$M_d = -\Gamma_+(1, T_d, d) < -\Gamma_+(1, T_c, d).$$

Pero como

$$\Gamma_+(1, T_d, d) + \Gamma_+(T_d + 1, T_c, d) = \Gamma_+(1, T_c, d)$$

entonces

$$\Gamma_+(T_d+1, T_c, d) + M_d < \Gamma_+(T_d+1, T_c, d) - \Gamma_+(1, T_c, d) = -\Gamma_+(1, T_d, d) = M_d$$

y de aquí

$$\Gamma_+(T_d + 1, T_c, d) < 0.$$

Por otro lado, como $c < d$, por el lema 1.4.8 (i)

$$\Gamma_+(T_d + 1, T_c, c) \leq \Gamma_+(T_d + 1, T_c, d) < 0$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} M_c &< M_c - \Gamma_+(T_d + 1, T_c, c) \leq -\Gamma_+(1, T_d, c) - \Gamma_+(T_d + 1, T_c, c) \\ &= -\Gamma_+(1, T_c, c) = M_c. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción y por ende

$$T_c \leq T_d.$$

(iii) Para ver que $T_c \to 1$, cuando $c \to -\infty$, por (ii) es suficiente mostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T_c = 1$, pues por definición $T_c \geq 1$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Si N_1 es finito, es claro que

$$T_c = 1 \quad \text{si} \quad c < \bigwedge_{k \in N_1} f_k,$$

pues $M_c = \sum_{k\in N_1} \phi'_-(f_k - c)\alpha_k > 0$.
Supongamos ahora que $N_1 = \mathbb{N}$ y sea $c < f_2$. Entonces

$$\phi'_-(|f_2 - c|)\alpha_2\chi_{\{f_2>c\}} > 0.$$

Por ende, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ tal que

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi'_+(|f_k - c|)\alpha_k\chi_{\{f_k\leq c\}} < \phi'_-(|f_2 - c|)\alpha_2\chi_{\{f_2>c\}}.$$

Luego para todo $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \phi'_+(|f_k - c|)\alpha_k\chi_{\{f_k\leq c\}} < \sum_{k=2}^{n_0}\phi'_-(|f_k - c|)\alpha_k\chi_{\{f_k>c\}}. \tag{1.19}$$

Si tomamos $d \in \mathbb{R}$ tal que $d \leq \left(\bigwedge_{k=1}^{n_0} f_k\right) \wedge c$, es claro que

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \phi'_+(|f_k - d|)\alpha_k\chi_{\{f_k\leq d\}} < \sum_{k=2}^{n_0}\phi'_-(|f_k - d|)\alpha_k\chi_{\{f_k>d\}}. \tag{1.20}$$

En efecto la afirmación sigue de (1.19) y del siguiente hecho,

Si $f_n \leq d$ entonces $f_n \leq c$ y $\phi'_+(|f_n - d|) \leq \phi'_+(|f_n - c|)$.

Si $f_n > c$ entonces $f_n > d$ y $\phi'_-(|f_n - c|) \leq \phi'_-(|f_n - d|)$.

Observamos que si $2 \leq n \leq n_0$,

$$-\Gamma_+(2, n, d) = \sum_{k=2}^{n}\phi'_-(|f_k - d|)\alpha_k > 0.$$

Por otra parte si $n > n_0$, por (1.20) tenemos

$$\begin{aligned}
-\Gamma_+(2, n, d) &= -\Gamma_+(2, n_0, d) - \Gamma_+(n_0 + 1, n, d)\\
&= \sum_{k=2}^{n_0}\phi'_-(|f_k - d|)\alpha_k\chi_{\{f_k>d\}} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \phi'_+(|f_k - d|)\alpha_k\chi_{\{f_k\leq d\}}\\
&\quad + \sum_{k=n_0+1}^{n} \phi'_-(|f_k - d|)\alpha_k\chi_{\{f_k>d\}} > 0
\end{aligned}$$

En consecuencia para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$-\Gamma_+(1,1,d) < -\Gamma_+(1,n,d)$$

y por lo tanto $M_d = -\Gamma_+(1,1,d)$. Concluimos que en ambos casos $T_d = 1$.

$\square$

Como en el teorema 1.4.14, vimos que la función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $T(c) = T_c$ es no decreciente, $T_c \to s(N_1)$ cuando $c \to \infty$ y $T_c \to 1$ cuando $c \to -\infty$ entonces podemos enunciar la siguiente definición.

1.4.15 Definición. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ llamamos

$$\overline{h}_n = \inf\{c \in \mathbb{R} : T_c \geq n\} \quad \text{y} \quad \overline{h}_1 = \overline{h}_2 \wedge f_1.$$

Observación. Es inmediato ver que para todo $n \in N_1$ se satisface $\overline{h}_n \leq \overline{h}_{n+1}$.

1.4.16 Teorema. *Si $f \in L^\alpha_\phi$ entonces*

$$f^* = \overline{h}.$$

Demostración. Sean $f \in L^\alpha_\phi$ y $n \geq 2$ .Veamos que $\overline{h}_n \leq f^*_n$.

Asumimos $\overline{h}_n > f^*_n = c$ y sea

$$s = \sup\{k \in N_1 : f^*_k = c\}.$$

Notar que por lo visto en el teorema 1.4.14, $T_c \geq n$ y entonces

$$\overline{h}_n \leq c < \overline{h}_n.$$

Esto es una contradicción y por ende

$$\overline{h}_n \leq f^*_n \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Supongamos ahora que $\overline{h}_n < f^*_n$ para algún $n \geq 2$. Entonces por la definición de $\overline{h}_n$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{h}_n < c < f^*_n \quad \text{y} \quad T_c \geq n.$$

donde $f^* - c = c_i$ sobre L_i. Por ende del lema 1.4.7 tenemos que $g \in M_\phi^\alpha(f)$, contradiciendo la minimalidad de f^*. Luego

$$f_n^* = \overline{h}_n \text{ para todo } n \geq 2. \tag{1.21}$$

Además del lema 1.4.12 y de (1.21), tenemos

$$\overline{h}_1 = f_1 \wedge \overline{h}_2 = f_1 \wedge f_2^* = f_1^*$$

y en consecuencia $f^* = \overline{h}$.

□

CAPITULO 2

EL RESULTADO PRINCIPAL

En este capítulo obtenemos un mejor ϕ-aproximante a $f \in D_{\phi}(W)$ en el caso discreto como límite de mejores ϕ-aproximantes en dimensión finita, donde W es el conjunto de sucesiones en L_{ϕ}, no decrecientes. Además estudiamos el error E en ϕ-aproximación, definido por

$$E = \inf_{h \in M} \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$$

donde $f \in L^{\alpha}_{\phi}$ y M es el conjunto de sucesiones en L^{α}_{ϕ}, no decrecientes.

2.1 Un mejor ϕ-aproximante como límite de mejores ϕ-aproximantes en dimensión finita.

2.1.1 Introducción y Notación. Como mostramos en el capítulo 1, si $f \in D_{\phi}(W)$ el conjunto $W^{\alpha}_{\phi}(f)$ de mejores ϕ-aproximantes a f desde W es no vacío por un resultado más general probado por D. Landers y L. Rogge. Además existe un mínimo $f^* \in W^{\alpha}_{\phi}(f)$ el cual satisface,

$$E^* = \inf_{h \in W} \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - f^*_k|)\alpha_k$$

Sean $f \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ y consideremos el problema de calcular

$$E_n = \inf_{h \in M_n} \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$$

donde M_n es el conjunto de vectores $h \in \mathbb{R}^n$ monótonos. Es decir

$$M_n = \{h \in \mathbb{R}^n : h_k \leq h_{k+1} \text{ para } k = 1, ..., n-1\}.$$

Por lo mencionado anteriormente, el conjunto $M_\phi^{\alpha,n}(f)$ de mejores ϕ-aproximantes a f desde M_n es no vacío y existe un mínimo $f^n \in M_\phi^{\alpha,n}(f)$ el cual satisface,

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k$$

Probamos en esta sección que para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión

$$(f_k^n)_{n \geq k} \downarrow \gamma_k \text{ donde } \gamma = (\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \in W_\phi^\alpha(f).$$

OBSERVACIÓN. Sean $f \in L_\phi$ y C un retículo en L_ϕ, C no vacío y ϕ-cerrado. Denotemos por $M_{\phi,C}(f)$ el conjunto de todas las $g \in C$ que satisfacen

$$\int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu = \inf_{h \in C} \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu.$$

D. Landers y L. Rogge, demostraron en [4] el siguiente resultado similar :

TEOREMA Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una μ-función y asumimos $L_\phi = L_\phi^\infty$. Sea $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de retículos no vacíos en L_ϕ y ϕ-cerrados tales que $C_n \subset C_{n+1}$ y $C_n \uparrow C_\infty$ donde el retículo C_∞ es el conjunto ϕ-cerrado más pequeño que contiene a todos los C_n. Si $f \in L_\phi$ y $f^n \in M_{\phi,C_n}(f)$ entonces

$$\varliminf_{n \in \mathbb{N}} f^n \in M_{\phi,C_\infty}(f), \quad \varlimsup_{n \in \mathbb{N}} f^n \in M_{\phi,C_\infty}(f) \text{ y } E^* = \lim_{n \to \infty} E_n$$

donde

$$E_n = \inf_{h \in C_n} \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu \text{ y } E^* = \inf_{h \in C_\infty} \int_\Omega \phi(|f-h|)d\mu$$

Respecto a este hecho aclaramos que en el caso que ocupa el actual trabajo los retículos no se comportan como en el teorema anterior.

2.1.2 LEMA. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface*

$$(i)\ \ E_n \le E_{n+1}$$
$$(ii)\ \ E_n \le E^*$$

DEMOSTRACIÓN. (i) Como f^{n+1} es monótono se tiene,

$$\begin{aligned} E_n = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k &\le \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^{n+1}|)\alpha_k \\ &\le \sum_{k=1}^{n+1} \phi(|f_k - f_k^{n+1}|)\alpha_k = E_{n+1} \end{aligned}$$

(ii) Como f^* es monótono se tiene,

$$\begin{aligned} E_n = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k &\le \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k = E^* \end{aligned}$$

□

2.1.3 LEMA. *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$f_k^* \le f_k^n \quad \text{para todo } \ k = 1, ..., n.$$

DEMOSTRACIÓN. Como f^n y f^* son monótonos, entonces los vectores s y $r \in \mathbb{R}^n$ definidos por

$$s_k = f_k^n \vee f_k^* \quad \text{y} \quad r_k = f_k^n \wedge f_k^* \quad \text{para} \quad k = 1, ..., n$$

son también monótonos. Por ende es claro que,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - s_k|)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - r_k|)\alpha_k \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k \\ &\qquad \le \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - s_k|)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - r_k|)\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k. \tag{2.1}$$

Definimos $g = (g_k)_{k \in \mathrm{N}}$ por

$$g_k = \begin{cases} r_k & \text{si } k = 1, ..., n \\ f_k^* & \text{si } k > n \end{cases}$$

Claramente $g \in W$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k.$$

Pero por (2.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k.$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - f_k^*|)\alpha_k.$$

Por consiguiente, de la minimalidad de f^*, tenemos

$$f_k^* \leq g_k = f_k^n \wedge f_k^* \quad \text{para todo} \quad k = 1, ..., n.$$

Concluimos que

$$f_k^* \leq f_k^n \quad \text{para todo} \quad k = 1, ..., n.$$

□

2.1.4 Teorema. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f_k^n)_{\substack{n \geq k \\ n \in \mathrm{N}}}$ decrece a un valor γ_k donde $\gamma = (\gamma_k)_{k \in \mathrm{N}} \in W_\phi^\alpha(f)$.*

Demostración. Como por el lema 2.1.3, dado $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k^* \leq f_k^n \quad \text{para todo} \quad n \geq k,$$

para demostrar la primera afirmación es suficiente probar que

$$f_k^{n+1} \leq f_k^n \text{ para todo } n \geq k.$$

Como f^n y f^{n+1} son monótonos, entonces los vectores s y $r \in \mathbb{R}^n$ definidos por

$$s_k = f_k^n \vee f_k^{n+1} \quad \text{y} \quad r_k = f_k^n \wedge f_k^{n+1} \quad \text{para} \quad k = 1, ..., n$$

son también monótonos. Por ende es claro que,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - s_k|)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - r_k|)\alpha_k \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^{n+1}|)\alpha_k \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - s_k|)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - f_k^{n+1}|)\alpha_k.
\end{aligned}$$

Tomemos $g \in \mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$g_k = \begin{cases} r_k & \text{si } k = 1, ..., n \\ f_k^{n+1} & \text{si } k = n+1. \end{cases}$$

Como r es monótono y $r_n \leq f_n^{n+1} \leq f_{n+1}^{n+1}$ entonces $g \in M_{n+1}$ y

$$\sum_{k=1}^{n+1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} \phi(|f_k - f_k^{n+1}|)\alpha_k.$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k = \sum_{k=1}^{n+1} \phi(|f_k - f_k^{n+1}|)\alpha_k.$$

y por la minimalidad de f^{n+1}, tenemos

$$f_k^{n+1} \leq g_k = f_k^n \wedge f_k^{n+1} \text{ para todo } k = 1, ..., n.$$

Concluimos que

$$f_k^* \leq f_k^{n+1} \leq f_k^n \text{ para todo } n \geq k$$

y en consecuencia

$$(f_k^n)_{\substack{n\geq k\\ n\in\mathbb{N}}} \text{ decrece a un valor } \gamma_k \in \mathbb{R} \text{ con } \gamma_k \geq f_k^*. \tag{2.2}$$

Demostremos ahora que $\gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W_\phi^\alpha(f)$. Observamos primero que

$$\gamma_k \leq \gamma_{k+1} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

En efecto, si $\gamma_k > \gamma_{k+1}$ para algún, $k \in \mathbb{N}$, por (2.2) existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq k+1$ tal que

$$\gamma_{k+1} \leq f_{k+1}^{n_0} < \gamma_k.$$

Pero $f_k^{n_0} \leq f_{k+1}^{n_0}$ y por lo tanto $f_k^{n_0} < \gamma_k$. Esto es una contradicción.

Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k \leq E^*.$$

Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\epsilon = \sum_{k=1}^{n_0} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k - E^* > 0.$$

Como ϕ es continua, por (2.2) tenemos que para cada k, $1 \leq k \leq n_0$, existe $\lambda_k \geq n_0$ tal que

$$\text{para todo } n \geq \lambda_k, \ \ \phi(|f_k - \gamma_k|) - \phi(|f_k - f_k^n|) < \frac{\epsilon}{2^k \alpha_k}.$$

Tomemos $p = \max_{1\leq k\leq n_0} \lambda_k$. Es claro que para cada k, $1 \leq k \leq n_0$,

$$\phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k - \phi(|f_k - f_k^p|)\alpha_k < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n_0} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k - \phi(|f_k - f_k^p|)\alpha_k < \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\epsilon}{2^k} < \epsilon$$

y por ende como $p \geq n_0$,

$$E^* < \sum_{k=1}^{n_0} \phi(|f_k - f_k^p|)\alpha_k \leq E_p.$$

Esto contradice el lema 2.1.2 . En consecuencia

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k \leq E^* < \infty$$

y de aquí concluimos que

$$\gamma \in W_\phi^\alpha(f).$$

$\square$

2.2 Convergencia de los errores en dimensión finita.

2.2.1 Teorema. *Si* $f \in D_\phi(W)$ *entonces* $E^* = \lim_{n\to\infty} E_n$.

Demostración. Puesto que por el teorema 2.1.4

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k = E^*,$$

dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como ϕ es continua, por (2.2) tenemos que para cada k, $1 \leq k \leq n_0$, existe $\lambda_k \geq n_0$ tal que

$$\text{para todo } n \geq \lambda_k,\ \phi(|f_k - \gamma_k|) - \phi(|f_k - f_k^n|) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}\alpha_k}.$$

Tomemos $p = \max_{1\leq k\leq n_0} \lambda_k$. Es claro que para cada k, $1 \leq k \leq n_0$,

$$\phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k - \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k < \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \text{ para todo } n \geq p.$$

Entonces para todo $n \geq p$

$$\sum_{k=1}^{n_0} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k - \phi(|f_k - f_k^n|)\alpha_k \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y por ende como $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=1}^{n_0} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k \leq E_n + \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } n \geq p.$$

De aquí, para todo $n \geq p$

$$\begin{aligned} E_n \leq E^* &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k \\ &\leq E_n + \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - \gamma_k|)\alpha_k \\ &\leq E_n + \epsilon \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$0 \leq E^* - E_n \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq p.$$

Concluimos que $E^* = \lim_{n\to\infty} E_n$.

□

Observación. Sea $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función convexa con $\phi(0) = 0$ y $\phi(x) > 0$ si $x > 0$. Decimos que ϕ es Δ_2 si existen una constante $K > 0$ y $x_0 \geq 0$ tal que

$$\phi(2x) \leq K\phi(x) \text{ para todo } x \geq x_0.$$

2.2.2 Corolario. *Sea $f \in L_\phi^\alpha$. Entonces si la función ϕ es Δ_2, tenemos*

$$E = \lim_{n\to\infty} E_n.$$

Demostración. Si la función ϕ es Δ_2, entonces $f \in D_\phi(W)$ y $W = M$. Por ende $E = E^*$ y del teorema 2.2.1 $E = \lim_{n\to\infty} E_n$.

□

2.2.3 COROLARIO. *Sea $f \in L^{\alpha}_{\phi}$. Entonces si la función ϕ es estríctamente convexa y Δ_2 tenemos $\gamma = f^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la función ϕ es Δ_2 entonces $f \in D_{\phi}(W)$ y $W = M$. Luego el resultado sigue del corolario 1.2.3 y del teorema 2.1.4.

□

2.3 ESTIMACIÓN DEL ERROR EN DIMENSIÓN FINITA.

2.3.1 LEMA. *Sean $f \in \mathbb{R}^n$ y h, $g \in M_n$ tales que $h_k \leq f_k \leq g_k$ para todo k, $1 \leq k \leq n$. Entonces*

$$h_k \leq f^n_k \leq g_k \text{ para todo } k, \; 1 \leq k \leq n.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathbb{R}^n$ y probemos primero que

$$f^n_k \leq g_k \text{ para todo } k, \; 1 \leq k \leq n.$$

Supongamos que existe k, $1 \leq k \leq n$ tal que $f^n_k > g_k$ y consideremos

$$i = \min\{k \,:\, 1 \leq k \leq n \;\wedge\; f^n_k > g_k\}. \tag{2.3}$$

Definimos

$$a_k = \begin{cases} g_k & \text{si } k = i \\ f^n_k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro por (2.3) que $a \in M_n$ y además como $f_i \leq g_i$,

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - a_k|)\alpha_k < E_n.$$

Esto es una contradicción.

Demostremos ahora la otra desigualdad. Supongamos que existe k, $1 \leq k \leq n$ tal que $f^n_k < h_k$ y consideremos

$$m = \max\{k \,:\, 1 \leq k \leq n \;\wedge\; f^n_k < h_k\}. \tag{2.4}$$

Definimos

$$b_k = \begin{cases} h_k & \text{si } k = m \\ f^n_k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro por (2.4) que $b \in M_n$ y además como $h_m \leq f_m$,

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - b_k|)\alpha_k < E_n.$$

Esto es una contradicción.

□

2.3.2 TEOREMA. *Sean $f \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$,*

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ \ y \ \ C = \phi'_+(\bigvee_{k=1}^{n} f_k - \bigwedge_{k=1}^{n} f_k)\, \lambda.$$

Si $h \in \mathbb{R}^n$ es monótono y satisface

$$f_k^n \leq h_k \leq \bigvee_{i=1}^{n} f_i \quad y \quad C|f_k^n - h_k| \leq \epsilon \quad \text{para todo} \ \ k = 1, ..., n \tag{2.5}$$

entonces

$$|\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k - E_n| \leq \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $f_k = a$ para todo $k = 1, ..., n$ entonces

$$f_k^n = a \ \ \text{para todo} \ \ k = 1, ..., n.$$

Por ende $h = f$ y $\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k = E_n = 0.$

Supongamos que f es no constante. Puesto que para todo k, $1 \leq k \leq n$,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f_i \leq f_k \leq \bigvee_{i=1}^{n} f_i$$

por el lema 2.3.1,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f_i \leq f_k^n \leq \bigvee_{i=1}^{n} f_i \quad \text{para todo} \quad k = 1, ..., n.$$

Además como por hipótesis

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f_i \leq f_k^n \leq h_k \leq \bigvee_{i=1}^{n} f_i \quad \text{para todo} \quad k = 1, ..., n$$

entonces

$$\bigvee_{k=1}^{n} \{|f_k - h_k| \vee |f_k - f_k^n|\} \leq \bigvee_{k=1}^{n} f_k - \bigwedge_{k=1}^{n} f_k.$$

Por otra parte es claro que C es no nulo pues f es no constante.

Concluimos que

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{n}\phi(|f_k-h_k|)\alpha_k - E_n| &= |\sum_{k=1}^{n}\phi(|f_k-h_k|)\alpha_k - \sum_{k=1}^{n}\phi(|f_k-f_k^n|)\alpha_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\phi_+'(|f_k-h_k| \vee |f_k-f_k^n|)|f_k^n-h_k|\alpha_k \\
&\leq \frac{\epsilon}{C}\sum_{k=1}^{n}\phi_+'(|f_k-h_k| \vee |f_k-f_k^n|)\alpha_k \\
&\leq \frac{\epsilon}{C}\,\phi_+'(\bigvee_{k=1}^{n} f_k - \bigwedge_{k=1}^{n} f_k)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \\
&= \frac{\epsilon}{C}\,\phi_+'(\bigvee_{k=1}^{n} f_k - \bigwedge_{k=1}^{n} f_k)\,\lambda \\
&= \frac{\epsilon}{C}\,C \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

□

2.3.3 Definición. Dados $\epsilon > 0$ y $h^n \in \mathbb{R}^n$ monótono, satisfaciendo (2.5), definimos

$$\widetilde{E_n}(\epsilon, h^n) = \sum_{k=1}^{n}\phi(|f_k - h_k^n|)\alpha_k$$

2.4 Estimación del Error en dimensión infinita.

En la presente sección se trata la forma de estimar el error E en ϕ-aproximación. Es decir, si $f \in L_\phi^\alpha$ y $\epsilon > 0$, estudiamos para que valores de $n \in \mathbb{N}$ es

$$|E - \widetilde{E_n}(\epsilon, h^n)| \leq \epsilon.$$

2.4.1 LEMA. *Sean* $f \in L_\phi^\alpha$ *y* $g \in M$ *tal que* $f \leq g$. *Entonces*

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ tenemos } f_k^n \leq g_k \quad k = 1, ..., n.$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba sigue del lema 2.3.1 considerando $g^n \in M_n$ definida por $g^n = (g_1, ..., g_n)$.

□

2.4.2 TEOREMA. *Sean* $\epsilon > 0$, $f \in L_\phi^\alpha$ *y* $g \in M$ *tal que* $f \leq g$. *Si* $n_0 \in \mathbb{N}$ *satisface*

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq \epsilon \tag{2.6}$$

entonces $E - E_{n_0} \leq \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f \in L_\phi^\alpha$, $g \in M$ tal que $f \leq g$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaciendo (2.6). Definimos la sucesión h por

$$h_k = \begin{cases} f_k^{n_0} & \text{si } 1 \leq k \leq n_0 \\ g_k & \text{si } k > n_0 \end{cases}$$

Como por el lema anterior $h \in M$,

$$E \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k = E_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k$$

de donde,

$$E - E_{n_0} \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq \epsilon$$

□

2.4.3 COROLARIO. *Sean* $\epsilon > 0$, $f \in L_\phi^\alpha$ *y* $g \in M$ *tal que* $f \leq g$. *Supongamos que*

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq \epsilon \text{ para algún } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Si $h^{n_0} \in \mathbb{R}^{n_0}$ es un vector monótono satisfaciendo (2.5) entonces

$$|E - \widetilde{E}_{n_0}(\epsilon, h^{n_0})| \leq \epsilon$$

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, del teorema 2.4.2 tenemos

$$E - E_{n_0} \leq \epsilon.$$

Sea $h^{n_0} \in \mathbb{R}^{n_0}$ un vector satisfaciendo (2.5). Entonces por el teorema 2.3.2

$$|\widetilde{E}_{n_0}(\epsilon, h^{n_0}) - E_{n_0}| \leq \epsilon.$$

Puesto que h^{n_0} es monótono,

$$-\epsilon + E - E_{n_0} \leq E - \widetilde{E}_{n_0}(\epsilon, h^{n_0}) \leq E - E_{n_0}.$$

Luego

$$-\epsilon \leq E - \widetilde{E}_{n_0}(\epsilon, h^{n_0}) \leq \epsilon$$

es decir

$$|E - \widetilde{E}_{n_0}(\epsilon, h^{n_0})| \leq \epsilon$$

□

2.5 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE MAYORANTES MONÓTONAS EN L^{α}_{ϕ}.

Ahora analizaremos condiciones suficientes para que dada $f \in L^{\alpha}_{\phi}$, exista $g \in M$ tal que $f \leq g$, pues como se muestra en el siguiente ejemplo no siempre existe.

2.5.1 EJEMPLO. Sean

$$\phi[0,\infty) \to [0,\infty) \text{ tal que } \phi(x) = x$$

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathrm{N}} \text{ de manera que } \alpha_k = \tfrac{1}{i^3} \text{ si } \tfrac{i^2-i+2}{2} \leq k < \tfrac{i^2+i+2}{2} \quad (i \in \mathbb{N})$$

$$f = (f_k)_{k\in\mathrm{N}} \text{ con } f_k = \begin{cases} i & \text{si } k = \frac{i^2-i+2}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{i^2-i+2}{2} < k < \frac{i^2+i+2}{2} \end{cases} \quad (\mathrm{i} \in \mathbb{N})$$

Notar que

$\alpha \in L^1$, pues $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$f \in L_\phi^\alpha$, pues para todo $\lambda > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda|f_k|)\alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{k^2} = \lambda\frac{\pi^2}{6}$,

Definimos $g = (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $g_k = i$ si $\frac{i^2-i+2}{2} \leq k < \frac{i^2+i+2}{2}$ $(i \in \mathbb{N})$

Luego es fácil ver que

g es la menor sucesión monótona tal que $f \leq g$ y

$g \notin L_\phi^\alpha$, pues $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(|g_k|)\alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

□

2.5.2 Notación. Dada $f \in L_\phi^\alpha$, denotamos por $\widehat{f} = (\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a la menor sucesión monótona que mayora a f, es decir,

$$\widehat{f}_1 = f_1$$

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} \widehat{f}_{k-1} & \text{si } f_k \leq \widehat{f}_{k-1} \\ f_k & \text{si } f_k > \widehat{f}_{k-1} \end{cases} \quad \text{para todo } k \geq 2$$

Observación. Sea $f \in L_\phi^\alpha$ no acotada superiormente. Entonces existe una única subsucesión $(\widehat{f}_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \subset (\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

(1) $\widehat{f}_{k_i} = f_{k_i} \uparrow \infty$ cuando $i \to \infty$, y

(2) para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo k, $k_i \leq k < k_{i+1}$, $\widehat{f}_k = \widehat{f}_{k_i}$. $(k_1 = 1)$,

Si llamamos $\Delta\widehat{f}_i = k_{i+1} - k_i$, claramente observamos que

$$\text{para todo } i \in \mathbb{N},\ 1 \leq \Delta\widehat{f}_i < \infty.$$

2.5.3 Teorema. *Sea $f \in L_\phi^\alpha$. Entonces $\widehat{f} \in M$ si*

(i) *f es acotada superiormente ó*

(ii) *$(\Delta\widehat{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada y α es no creciente,*

DEMOSTRACIÓN. Veamos sólo el caso (ii), pues (i) es trivial.
Supongamos $f \in L_\phi^\alpha$ no acotada superiormente con $(\Delta \widehat{f}_i)_{i\in\mathrm{N}}$ acotada y α es no creciente. Luego $\widehat{f} \in M$ pues para $\lambda > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda|\widehat{f}_k|)\alpha_k &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\widehat{f}_i \phi(\lambda|\widehat{f}_{k_i}|)\alpha_{k_i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \Delta\widehat{f}_i \phi(\lambda|f_{k_i}|)\alpha_{k_i} \\
&\leq \sup_{i\in\mathrm{N}}\{\Delta\widehat{f}_i\} \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\lambda|f_{k_i}|)\alpha_{k_i} \\
&\leq \sup_{i\in\mathrm{N}}\{\Delta\widehat{f}_i\} \sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda|f_k|)\alpha_k < \infty
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN. El Ejemplo 2.5.1 muestra una sucesión $f \in L_\phi^\alpha$ con α no creciente, en el cual $(\Delta\widehat{f}_i)_{i\in\mathrm{N}}$ es no acotada y para toda $g \in M$ con $f \leq g$, $g \notin L_\phi^\alpha$.

OBSERVACIÓN. Es claro que las condiciones (i) y (ii) del teorema 2.5.2 no son condiciones necesarias para que $\widehat{f} \in M$ En efecto:

(1) Si ϕ, f y g son las del ejemplo 2.5.1 y $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathrm{N}}$ está definida por

$$\alpha_k = \frac{1}{i^4} \text{ si } \frac{i^2 - i + 2}{2} \leq k < \frac{i^2 + i + 2}{2} \quad (i \in \mathbb{N})$$

entonces tenemos α no creciente, $f \in \mathrm{Ł}_\phi^\alpha$, no acotada superiormente, $g = \widehat{f} \in M$ y $(\Delta\widehat{f}_i)_{i\in\mathrm{N}}$ no acotada.

(2) Si $\phi(x) = x$, $f_n = (-1)^{n+1}n$ y $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-3}} & \text{si n es par} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si n es impar} \end{cases}$

entonces tenemos α no - no creciente, $f \in \mathrm{Ł}_\phi^\alpha$, no acotada superiormente, $\widehat{f} \in M$ donde $\widehat{f}_n = 2i - 1$ si $2i - 1 \leq n \leq 2i$, $i \in \mathbb{N}$ y $\Delta\widehat{f}_i = 2$, $i \in \mathbb{N}$.

CAPITULO 3

EL ALGORITMO DE BISECCION

En este capítulo damos un algoritmo para estimar el error E_n en ϕ - aproximación, definido por

$$E_n = \inf_{h \in M_n} \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$$

donde $f \in \mathbb{R}^n$, no constante y M_n es el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$, no decrecientes.

3.1 El Algoritmo de Bisección.

Sean $\epsilon > 0$ y $f \in \mathbb{R}^n$, no constante. Presentamos a continuación un algoritmo basado en el teorema 1.4.16, para calcular un vector monótono $h \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f_k^n - h_k| \leq \frac{\epsilon}{C} \quad \text{y} \quad f_k^n \leq h_k \leq \bigvee_{i=1}^{n} f_i \quad \text{para todo } k = 1, ..., n \tag{3.1}$$

donde $C = \phi'_+(\bigvee_{k=1}^n f_k - \bigwedge_{k=1}^n f_k)\,(\sum_{k=1}^n \alpha_k)$.

Observación. Si $f \in \mathbb{R}^n$ es constante entonces

$$f = f^n = h \text{ y } E_n = \widetilde{E}_n(h, \epsilon) = 0.$$

Algoritmo de Bisección

Datos de Entrada:

1) Un vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$,
2) Una función convexa $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\phi(x) > 0$ si $x > 0$ y $\phi(0) = 0$,
3) Un vector $f \in \mathbb{R}^n$, no constante,
4) Un número real $\epsilon > 0$.

Procedimiento :

$\Gamma_+(1,j,x) = \sum_{k=1}^{j}[\phi_+'(x-f_k)\chi_{\{f_k\leq x\}} - \phi_-'(f_k-x)\chi_{\{f_k>x\}}]\alpha_k$

$M(x,n) = \inf\{-\Gamma_+(1,k,x) : 1 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}\}$

$$T(x,n) = \begin{cases} \sup\{k : 1 \leq k \leq n \wedge -\Gamma_+(1,k,x) = M(x,n)\} & \text{si } M(x,n) \leq 0 \\ 1 & \text{si } M(x,n) > 0 \end{cases}$$

$C = \phi_+'(\bigvee_{k=1}^{n} f_k - \bigwedge_{k=1}^{n} f_k)\ (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k)$.

$i = \bigwedge_{k=1}^{n} f_k$

$m = \bigvee_{k=1}^{n} f_k$, $d = m$

Para $k=2$ hasta n

  $x = i,\ y = m$

  Si $T(i,n) \geq k$ entonces $h(k) = i$.

    en caso contrario

      Repetir

        $a = \frac{i+m}{2}$,

        Si $T(a,n) \geq k$ entonces $i = x,\ m = a,\ y = a$

          en caso contrario $i = a,\ m = y,\ x = a$

      hasta $m - i \leq \frac{\epsilon}{C}$,

      $h(k) = m$,

  $i = h(k)$,

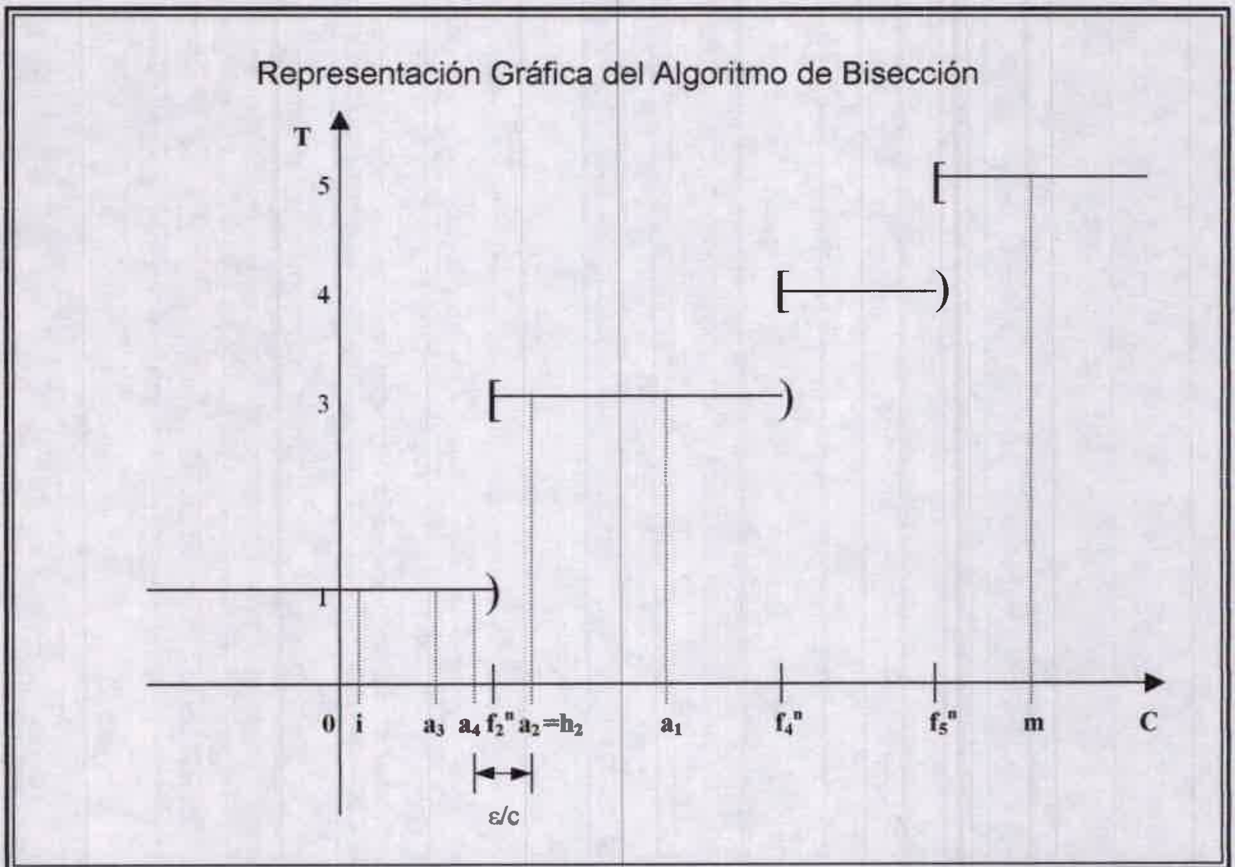
  $m = d$,

$h(1) = f(1) \wedge h(2)$,

Datos de Salida: Un vector monótono $h \in \mathbb{R}^n$, satisfaciendo (3.1).

OBSERVACIÓN. El vector $h \in \mathbb{R}^n$, obtenido por el Algoritmo de Bisección satisface por el teorema 2.3.2 que

$$|\sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k - E_n| \leq \epsilon.$$



OBSERVACIÓN. Sea $f \in L_\phi^\alpha$ definida por

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 2 & \text{para } n = 2 \\ 3 & \text{para } n = 3, 4 \\ 4 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, es claro que

$$T_c = \begin{cases} 1 & \text{si } c < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq c < 3 \\ 4 & \text{si } 3 \leq c < 5 \\ n & \text{si } c \geq 5 \end{cases}$$

y por lo tanto $f_k = f_k^n$ para todo $k = 1, ..., n$.

Calculemos computacionalmente para $n \geq 5$, un vector $h \in \mathbb{R}^n$ monótono tal que

$$0 \leq h_k - f_k^n \leq 0{,}001 \text{ para todo } k = 1, ..., n.$$

Si $k = 2$, sabemos que siempre se verifica,

$$T_i \leq T_{f_2^n} \leq T_m \text{ para todo } n \geq 5$$

donde

$$i = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i = 1 \quad \text{y} \quad m = \bigvee_{i=1}^{n} f_i = 4.$$

Uno podría aplicar otro método de convergencia más rápida como es el Regula Falsi en el intervalo $[1, 4]$ para estimar $T_{f_2^n}$.
En la primera aproximación con Regula Falsi, obtenemos, $c_1 = \frac{5}{2}$ y por ende no podemos aplicar más el método de Regula Falsi ya que $T_{c_1} = 2$.

Sin embargo si uno pretendería usar este método para cualquier $f \in L_\phi^\alpha$ en la estimación de f_k^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, con el objetivo de acelerar la convergencia en los primeros pasos, para luego aplicar el método de Bisección, debería conocer a priori el valor de $T_{f_k^n}$ el cual es desconocido.

3.2 Ejemplos de Aplicación.
En los siguientes ejemplos estimamos aplicando el Algoritmo de Bisección, el error E en ϕ - aproximación, definido por

$$E = \inf_{h \in M} \sum_{k=1}^{\infty} \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$$

donde $f \in L_\phi^\alpha$ y M es el conjunto de funciones en L_ϕ^α, no decrecientes.

3.2.1 Ejemplo. Sean $\epsilon = 0.00001$, $\phi[0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\phi(x) = x^2$,

$$\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ donde } \alpha_k = \frac{1}{k!}$$

y

$$f = (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ con } f_k = \frac{k}{k+1} \cos(k\pi).$$

Es claro que $\alpha \in l^1$, pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$$

y $f \in L^{\alpha}_{\phi}$ pues f es acotada.

Como $g = (\frac{k}{k+1})_{k\in\mathrm{N}} \in M$ y $f \leq g$ entonces

$$\text{si } n_0 = 9 \text{ tenemos } |E - \widetilde{E}_{n_0}(h, \epsilon)| \leq \epsilon$$

donde las componentes del vector $h \in \mathbb{R}^9$, obtenido del Algoritmo de Bisección son

$$\begin{aligned}
h_1 &= -0.50000000000000\\
h_2 &= \ \ 0.31250067816840\\
h_3 &= \ \ 0.31250067816840\\
h_4 &= \ \ 0.52777885168196\\
h_5 &= \ \ 0.52777885168196\\
h_6 &= \ \ 0.64062573830912\\
h_7 &= \ \ 0.64062573830912\\
h_8 &= \ \ 0.71000084829665\\
h_9 &= \ \ 0.71000084829665.
\end{aligned}$$

La afirmación sigue del corolario 2.4.3 pues

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \leq 4 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\widetilde{E}_{n_0} = 0.31249982515971.$$

3.2.2 Ejemplo. Sean $\epsilon = 0.0001$, $\phi[0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\phi(x) = x^{\frac{3}{2}}$,

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathrm{N}} \text{ donde } \alpha_k = \frac{1}{2^k}$$

y

$$f = (f_k)_{k\in\mathrm{N}} \text{ con } f_k = k\,(-1)^k.$$

Es obvio que $\alpha \in l^1$, pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

y $f \in L_{\phi}^{\alpha}$, pues para $\lambda > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda |f_k|)\alpha_k = \lambda^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{2^k} < \infty.$$

Además $\widehat{f}_1 = -1$, para $k \geq 2$,

$$\widehat{f}_k = 2i \text{ si } 2i \leq k \leq 2i+1, \ i \in \mathbb{N}$$

y $\Delta \widehat{f}_i \leq 2$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\text{si } n_0 = 18 \text{ tenemos } |E - \widetilde{E}_{n_0}(h, \epsilon)| \leq \epsilon$$

donde

$$\begin{array}{rlrl}
h_1 = & -1.00000000000000 & h_2 = & 1.00000309944153 \\
h_3 = & 1.00000309944153 & h_4 = & 2.20000078257431 \\
h_5 = & 2.20000078257431 & h_6 = & 3.40000549150963 \\
h_7 = & 3.40000549150963 & h_8 = & 4.60000046251768 \\
h_9 = & 4.60000046251768 & h_{10} = & 5.80000261454904 \\
h_{11} = & 5.80000261454904 & h_{12} = & 7.00000092686911 \\
h_{13} = & 7.00000092686911 & h_{14} = & 8.20001017176363 \\
h_{15} = & 8.20001017176363 & h_{16} = & 9.40000835403756 \\
h_{17} = & 9.40000835403756 & h_{18} = & 18.00000000000000
\end{array}$$

Este hecho sigue del corolario 2.4.3 pues

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - \widehat{f}_k|)\alpha_k = \sum_{i=\frac{n_0}{2}}^{\infty} \frac{(4i+1)^{\frac{3}{2}}}{2^{2i+1}} \leq \sum_{i=\frac{n_0}{2}}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \epsilon.$$

En consecuencia

$$\widetilde{E}_{n_0} = 1.26654922516184.$$

3.2.3 EJEMPLO. Sean $\epsilon = 0.0001$, $\phi[0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\phi(x) = x$,

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathrm{N}} \text{ donde } \alpha_k = \frac{2^{k-3}}{3^{k+1}\,k}$$

y

$$f = (f_k)_{k\in\mathrm{N}} \text{ con } f_k = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

Es claro que $\alpha \in l^1$, pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-3}}{3^{k+1}\,k} \le \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{12}$$

y $f \in L^{\alpha}_{\phi}$, pues para todo $\lambda > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda|f_k|)\alpha_k \le \lambda \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-3}}{3^{k+1}} = \frac{\lambda}{24}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k} = \frac{\lambda}{12}.$$

Notar que $g = (k)_{k\in\mathrm{N}} \in M$ y $f \le g$. Entonces por el corolario 2.4.3 si $n_0 = 17$ tenemos

$$|E - \widetilde{E}_{n_0}(h,\epsilon)| \le \epsilon$$

puesto que

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \phi(|f_k - g_k|)\alpha_k \le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{2^{k-3}}{3^{k+1}} \le \epsilon$$

donde las componentes del vector $h \in \mathbb{R}^{17}$ obtenido por el Algoritmo de Bisección son :

$$\begin{aligned}
h_1 &= 1.00000000000000 & h_2 &= 1.00000000000000 \\
h_3 &= 3.00000000000000 & h_4 &= 3.00000000000000 \\
h_5 &= 5.00036621093750 & h_6 &= 5.00036621093750 \\
h_7 &= 7.00054930895567 & h_8 &= 7.00054930895567 \\
h_9 &= 9.00056151077160 & h_{10} &= 9.00056151077160 \\
h_{11} &= 11.00042113307870 & h_{12} &= 11.00042113307870 \\
h_{13} &= 13.00052487887486 & h_{14} &= 13.00052487887486 \\
h_{15} &= 15.00026243943743 & h_{16} &= 15.00026243943743 \\
h_{17} &= 17.00000000000000.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\widetilde{E}_{n_0} = 0.00879779967022.$$

Comentarios

En [6], sus autores probaron que $f^* = \overline{h}$ para toda $f \in L^\alpha_\phi$, donde

$$\begin{aligned}
&\overline{h}_n = \inf\{c \in \mathbb{R} : T_c \geq n\} \text{ para todo } n \geq 2,\\
&\overline{h}_1 = \overline{h}_2 \wedge f_1,\\
&T_c = \sup\{n \in N_1 : -\Gamma_+(1,n,c) = M_c\} \text{ y}\\
&M_c = \inf\{-\Gamma_+(1,n,c) : n \in N_1\}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, como se muestra en los siguientes ejemplos, el resultado no es cierto con la definición de T_c dada arriba.

Ejemplo I. Sean $\phi(x) = x$, $f = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Es claro que $f^* = (1,1,1)$. Además para $2 \leq k \leq 3$,

$$\overline{h}_k = \inf\{c \in \mathbb{R} \ : \ T_c \geq k\} = 0.$$

En efecto, como

$$-\Gamma_+(1,n,c) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{f_k > c\}} - \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{f_k \leq c\}}$$

entonces si $c \geq 1$, $M_c = -3$ y $T_c = 3$ pues

$$-\Gamma_+(1,1,c) = -1 \qquad -\Gamma_+(1,2,c) = -2 \qquad -\Gamma_+(1,3,c) = -3,$$

si $0 \leq c < 1$, $M_c = 1$ y $T_c = 3$ ya que

$$-\Gamma_+(1,1,c) = 1 \qquad -\Gamma_+(1,2,c) = 2 \qquad -\Gamma_+(1,3,c) = 1$$

y si $c < 0$, $M_c = 1$ y $T_c = 1$ puesto que

$$-\Gamma_+(1,1,c) = 1 \qquad -\Gamma_+(1,2,c) = 2 \qquad -\Gamma_+(1,3,c) = 3.$$

Por consiguiente

$$\overline{h}_k = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq 3$$

y por lo tanto

$$\overline{h} \text{ es distinto de } f^*.$$

EJEMPLO II. Sean $\phi(x) = x^2$, $\alpha \in l^1$ donde $\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq 3 \\ \frac{1}{k^2} & \text{si } k \geq 4 \end{cases}$

y $f \in L^\alpha_\phi$ tal que $f_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 3 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Es claro que

$$\overline{h}_2 = \inf\{c \in \mathbb{R} : T_c \geq 2\} = \frac{1}{2}.$$

En efecto, como

$$-\Gamma_+(1,n,c) = \sum_{k=1}^{n} 2|f_k - c|\chi_{\{f_k > c\}}\alpha_k - \sum_{k=1}^{n} 2|f_k - c|\chi_{\{f_k \leq c\}}\alpha_k$$

si $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ entonces

$$-\Gamma_+(1,1,c) = 2 - 2c, \quad -\Gamma_+(1,2,c) = 4 - 4c, \quad -\Gamma_+(1,3,c) = 4 - 6c \text{ y}$$

$$-\Gamma_+(1,n,c) = 4 - 6c + \sum_{k=4}^{n} 2(1-c)\frac{1}{k^2} \quad \text{para todo } n \geq 4.$$

De aquí, si $c < \frac{1}{2}$ entonces

$$M_c = 2 - 2c \quad \text{y} \quad T_c = 1$$

y si $c = \frac{1}{2}$ tenemos

$$M_{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad T_{\frac{1}{2}} = 3 \geq 2.$$

Por consiguiente $\overline{h}_2 = \frac{1}{2}$. Sin embargo por teorema 1.4.3

$$f^*_k = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } 1 \leq k \leq 3 \\ 1 & \text{si } k \geq 4 \end{cases}$$

pues ϕ es estríctamente convexa y para todo $h \in M$,

$$\Psi'_+(f^*, h, 0) = -\frac{2}{3}h_1 - \frac{2}{3}h_2 + \frac{4}{3}h_3 = \frac{2}{3}(h_3 - h_1) + \frac{2}{3}(h_3 - h_2) \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\overline{h}_2 \text{ es distinto de } f^*_2.$$

NOTA IMPORTANTE. Remarcamos que la nueva definición de T_c, es decir

$$T_c = \begin{cases} \sup\{n \in N_1 : -\Gamma_+(1,n,c) = M_c\} & \text{si } M_c \leq 0 \\ 1 & \text{si } M_c > 0 \end{cases}$$

utilizada en el teorema 1.4.16, para demostrar la igualdad

$$f^* = \overline{h},$$

ha sido modificada en este trabajo de acuerdo a una sugerencia que me fue hecha por M. Marano.

Símbolos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, espacio de medida. (7)
$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sistema de todas las clases μ-equivalentes de funciones reales. (7)
C, retículo. (7)
L_ϕ, espacio de Orlicz. (7)
$L_\phi^\infty = \{f \in L_\phi : \int_\Omega \phi(\alpha|f|)d\mu < \infty$ para todo $\alpha > 0\}$. (7)
$D_\phi(C) = \{f \in L_\phi : \int_\Omega \phi(|f-g|)d\mu < \infty$ para algún $g \in C\}$. (10)
$f_{|A}$, restricción de f al conjunto A. (17)
$N_1 = \{k \in \mathbb{N} : \alpha_k > 0\}$. (18)
$L_\phi^\alpha = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{k\in N_1} \phi(\lambda|f_k|)\alpha_k < \infty$ para todo $\lambda > 0\}$. (18)
ϕ'_+, derivada a derecha de ϕ. (18)
ϕ'_-, derivada a izquierda de ϕ. (18)
M, retículo de todas las sucesiones en L_ϕ^α, no decrecientes. (19)
$M_\phi^\alpha(f)$, conjunto de mejores ϕ-aproximantes a f desde M. (19)
$f^* = \inf M_\phi^\alpha(f)$. (17)
χ_A, función caracteristica de A. (21)
$\Gamma_+(L,g) = \sum_{k\in L}[\phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k \le g_k\}} - \phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k > g_k\}}]\alpha_k$. (21)
$\Gamma_-(L,g) = \sum_{k\in L}[\phi'_-(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k < g_k\}} - \phi'_+(|f_k - g_k|)\chi_{\{f_k \ge g_k\}}]\alpha_k$. (21)
$\Gamma_+(1,n,g) = \Gamma_+([1,n],g)$. (21)
$\Gamma_-(1,n,g) = \Gamma_+([1,n],g)$. (21)
$M_c = \inf\{-\Gamma_+(1,n,c) : n \in N_1\}$. (23)
$T_c = \sup\{n \in N_1 : -\Gamma_+(1,n,c) = M_c\}$ si $M_c \le 0$ y 1 en caso contrario. (23)
$s(N_1) = n$ si $N_1 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le n\}$ o $s(N_1) = \infty$ si $N_1 = \mathbb{N}$. (25)
$\overline{h}_n = \inf\{c \in \mathbb{R} : T_c \ge n\}$. (30)
W, retículo de todas las sucesiones en L_ϕ, no decrecientes. (33)
$W_\phi^\alpha(f)$, conjunto de mejores ϕ-aproximantes a f desde W. (33)
$E = \inf_{h\in M} \sum_{k=1}^\infty \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$. (33)
$E^* = \inf_{h\in W} \sum_{k=1}^\infty \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$. (33)
$E_n = \inf_{h\in M_n} \sum_{k=1}^n \phi(|f_k - h_k|)\alpha_k$. (33)
M_n, conjunto de vectores monótonos en $\mathbb{R}^n$. (34)
$M_\phi^{\alpha,n}(f)$, conjunto de mejores ϕ-aproximantes a f desde M_n. (34)
$f^n = \inf M_\phi^{\alpha,n}(f)$. (34)

$\widetilde{E_n}(\epsilon, h^n) = \sum_{k=1}^{n} \phi(|f_k - h_k^n|)\alpha_k$. (43)

$\widehat{f}$, menor sucesión monótona que mayora a f. (46)

Agradecimientos

Me complace en especial dar las gracias por su apoyo de carácter técnico y humano a mi director Doctor Héctor Hugo Cuenya.
Agradezco al Doctor Felipe Zó el haberme subsidiado la realización de un curso de postgrado en la Universidad Nacional de San Luis.
El reconocimiento se extiende al Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Provincia de Córdoba por el apoyo de carácter económico y a la Universidad Nacional de Río Cuarto por el uso de sus instalaciones y el financiamiento de las actividades de investigación.
Quiero finalmente expresar el agradecimineto a mi familia y en especial a mi esposa por su apoyo incondicional a lo largo de estos últimos años.

Bibliografia

1. R.E. BARLOW, D.J. BARTHOLOMEW, J.M. BREMNER, H.D. BRUNK, *Statistical Inference under Order Restrictions*, Jhon Wiley, New York, 1972.
2. R. HOUTARI, *Best Monotone Approximation in* $L_1[0,1]$, Approximation Theory **47** (1986), 85-91.
3. M.A. KRANOSSELSKII, YA.B. RUTIKII, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1961.
4. D. LANDERS, L. ROGGE, *Best approximation in* L_ϕ*-spaces*, Z. Wahrscheilichkeitst-theirie verw. Gabiete **51** (1980), 215-237.
5. M. MARANO, J.M. QUESADA, L_Φ*-approximation by Nondecreasing Function on the Interval*, Constructive Aproximation **13** (1997), 177-186.
6. M. MARANO, J.M. QUESADA, *Monotone* L_Φ*-approximation*, Approximation Theory and Its Applications **13** (1997), 51-57.
7. M.M RAO, Z.D. REN, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, Inc, New York, 1991.
8. J.J. SWETITS, S.E WEINSTEIN, *Construction of Best Monotone approximation in* l_p *for* $1 < p < \infty$, Approximation Theory and Its Applications **53** (1989), 69-77.
9. J.J. SWETITS, S.E WEINSTEIN, *Construction of Best Monotone approximation on* $;L_p[0,1]$, Approximation Theory and Its Applications **61** (1990), 118-130.
10. D. TOWNSEND, R. HOUTARI, D. LEGG, A. MEYEROWITZ, *The natural best* L_1*-approximation by nondecreasing functions*, Approximation Theory **52** (1986), 132-140.
11. J.J. SWETITS, S.E WEINSTEIN, XU YUESHENG, *On the Characterization and Computation of Best Monotone Approximation in* $;L_p[0,1]$ *for* $1 \leq p \leq \infty$, Journal of Approximation Theory **60** (1990), 58-69.

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Físico Química y Naturales. Universidad Nacional de Río Cuarto. 5800-Río Cuarto. Argentina.

E-mail address: flevis@exa.unrc.edu.ar